

## יחידה 3: פונקציות

### 3.1 הערך השלם של מספר



- היכרות עם המושג הערך השלם של מספר
- התמודדות עם מושגים מוכרים דרך היבט לא מוכר תוך שימוש בפעולה חדשה: חישוב עם פעולה, פונקציה (ייצוג מספרי, גרפי ואלגברי), ביטוי אלגברי, משוואה, פתרון משוואות, משפחה של פונקציות ושימוש בפרמטרים
- יישום מתמטי של מושג שנלמד על-סמך הגדרתו
- התמודדות עם פתרון משוואות לא שגרתיות ופתרון באמצעות שיקולים כלים אלגבריים, וכלים גרפיים
- היכרות עם דוגמאות לפונקציות לא רציפות



תוכנת גיאומטריה דינמית (למשל, תוכנת GeoGebra [<http://GeoGebra.org>]).



עוברים על ההגדרה של הערך השלם של מספר. ממחישים את המושג באמצעות פירוק סכומי כסף לשקלים ואגורות. לדוגמה, מפרקים את הסכום 6.85 שקלים לשישה שקלים ו-85 אגורות.

ובאופן כללי, אם  $x$  מייצג סכום כסף אז:

$[x]$  הוא סך השקלים

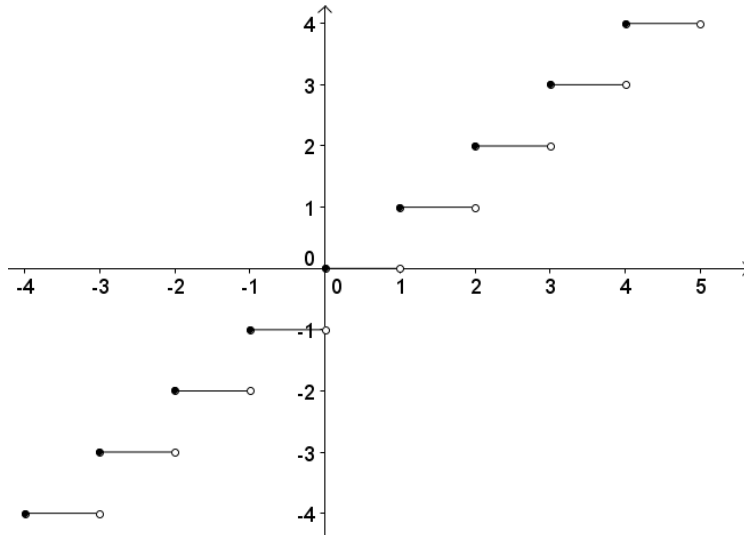
$x - [x]$  הוא סך האגורות.



- |         |        |       |
|---------|--------|-------|
| 1. א. 5 | ד. -5  | ז. 4  |
| ב. -4   | ה. -55 | ח. -3 |
| ג. 2    | ו. 5   | ט. -8 |

תלמידים עשויים להתלבט לגבי תרגילים הקשורים לערך שלם של מספר שלילי. למשל, במקרה של המספר -4.2, -4 גדול מ-(-4.2), ו-(-5) קטן מ-(-4.2), ולכן -5 הוא המספר השלם הגדול ביותר הקטן מ-(-4.2).

**2.** להלן גרף הפונקציה  $y = [x]$ :



עשויים לעלות קשיים בהתמודדות עם שרטוט של פונקציה לא רציפה

- נעזרים בטבלה ומרחיבים אותה במידת הצורך.
- משרטטים את גרף הפונקציה באופן שיטתי. לדוגמה:  
מה ערך הפונקציה עבור  $x = 1$ ?  
מה ערך הפונקציה לתחום שבין 1 ל-2? (אפשר להשתמש במספר נקודות מייצגות).  
מה ערך הפונקציה עבור  $x = 2$  וכו'.
- חוקרים את משמעות המרווח שבין "המדרגות" (ערכי הפונקציה הם שלמים).
- מקפידים על סימון נקודות הקצה הכלולות בגרף באמצעות נקודות מלאות, ועל סימון נקודות הקצה שאינן כלולות בגרף באמצעות נקודות חלולות.

**3.** הפתרון של המשוואות אינו מספר אחד אלא תחום של מספרים (הכתוב בצורה של אי-שוויון), עובדה העשויה להפתיע.

מקפידים על כתיבת אי שוויון חזק ( $>$ ,  $<$ ) ואי שוויון חלש ( $\geq$ ,  $\leq$ ) במקומות המתאימים.

**א. פתרון גרפי**

המשמעות הגרפית של פתרון המשוואה  $[x] = 3$  היא מציאת כל הנקודות על גרף הפונקציה  $y = [x]$  עבורן  $y = 3$ . לכן פתרון המשוואה הוא  $3 \leq x < 4$ .

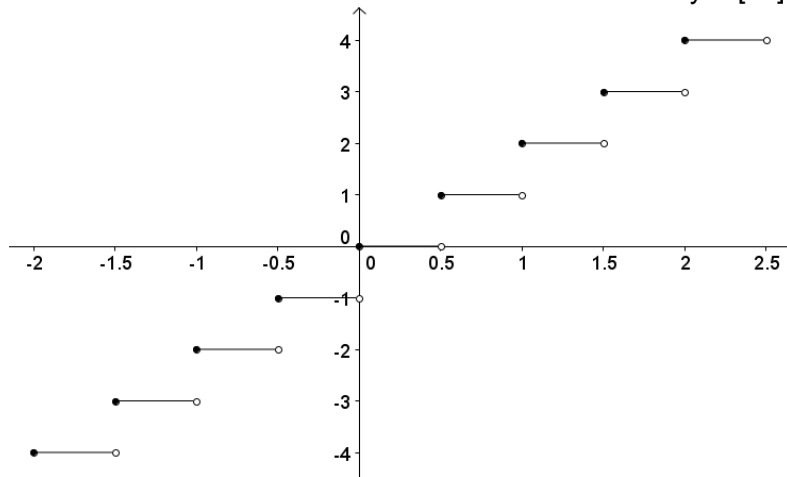
**באמצעות ניסוי וטעייה**

מציבים ערכים שונים עבור  $x$ , לדוגמה, 3, 3.5, 3.7, 4 ומסיקים כי התחום המתאים הינו  $3 \leq x < 4$ .

ב.  $-5 \leq x < -4$

ג. אין פתרון משום שכל ערכי  $y$  של הפונקציה  $y = [x]$  הם מספרים שלמים.

4. א. גרף הפונקציה  $y = [2x]$ :



**שרטוט הגרף באמצעות טבלה**

משרטטים את הגרף באופן שיטתי באמצעות טבלת ערכים (בדומה למשימה 2).

**שרטוט הגרף באמצעות קשר בין פונקציות ערך שלם**

עומדים על הקשר שבין הפונקציה  $y = [x]$  ובין הפונקציה  $y = [2x]$  ומשרטטים את הגרף לפי השיקולים הבאים:

- לדוגמה, התחום המתאים לערך  $y = 10$  בפונקציה  $y = [x]$  הוא  $10 \leq x < 11$ , ובפונקציה  $y = [2x]$  התחום המתאים לאותה "מדרגה" ( $y = 10$ ) הוא קטן פי 2 ( $5 \leq x < 5.5$ ).
- על סמך מספר דוגמאות, מסיקים כי במעבר מהפונקציה  $y = [x]$  לפונקציה  $y = [2x]$ , ה"רוחב" של כל "מדרגה" מתקצר לחצי יחידה (כלומר, גודל התחום שבו הפונקציה היא בעלת ערך שלם מסויים הוא חצי יחידה).

**ב. פתרון גרפי**

המשמעות הגרפית של פתרון המשוואה  $[2x] = 8$  היא מציאת הנקודות בגרף הפונקציה  $y = [2x]$  עבורן  $y = 8$ . אלה הנקודות בעלות שיעור  $x$ ,  $4 \leq x < 4.5$ .

**פתרון אלגברי**

הפתרון למשוואה  $[2x] = 7$  הוא  $7 \leq 2x < 8$   
 ופתרון האי-שוויון הזה הוא  $3.5 \leq x < 4$

בדרכים דומות, מוצאים כי פתרון המשוואה  $[2x] = -3$  הוא  $-1.5 \leq x < -1$ .

5. א. פתרון אלגברי

הפתרון למשוואה  $[2x + 3] = 4$  הוא  $4 \leq 2x + 3 < 5$   
 ופתרון האי-שוויון הזה הוא  $\frac{1}{2} \leq x < 1$

**ב. פתרון גרפי**

ערך הפונקציה  $y = [2x - 3]$  קטן ב-3 מערך הפונקציה  $y = [2x]$  לכל  $x$ . משרטטים את גרף הפונקציה  $y = [2x - 3]$  מסיקים כי  $y = -2$  עבור  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ .

ג. בדרכים דומות, מוצאים כי פתרון המשוואה  $[\frac{1}{3}x] = 5$  הוא  $15 \leq x < 18$ .

6. א.  $(x \neq 0) \quad [\frac{1}{x}] = 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < x \leq 1$

ב.  $(x \neq 0) \quad [\frac{8}{x}] = 4 \Rightarrow 4 \leq \frac{8}{x} < 5 \Rightarrow 1\frac{3}{5} < x \leq 2$

ג.  $(x \neq -2) \quad [\frac{1}{x+2}] = 6 \Rightarrow 6 \leq \frac{1}{x+2} < 7 \Rightarrow -1\frac{6}{7} < x \leq -1\frac{5}{6}$

7. א.  $x = -2, 2$

בתחום המספרים החיוביים  $x = 2$  הינו הפתרון היחיד למשוואה.

הסבר: כדי שתוצאת מכפלה של שני מספרים שונים תהיה 4, אחד הגורמים צריך להיות גדול מ-2 והשני קטן מ-2. אבל לא ייתכן שמספר יהיה גדול מ-2 והערך השלם שלו יהיה קטן מ-2, ולא ייתכן גם להיפך. מסיבה דומה  $x = -2$  הוא הפתרון היחיד בתחום המספרים השליליים.

ב.  $x = -10, 10$

ג. אין פתרון למשוואה.

הסבר: בתחום  $0 \leq x < 1$  ערך הפונקציה  $y = x[x]$  הוא 0 (כי  $[x] = 0$ ).

מחוץ לתחום זה  $[x]$  ו- $x$  הם בעלי אותו סימן, ולכן הפונקציה היא חיובית. מכאן נובע כי כל ערכי הפונקציה הם אי-שליליים.

הערה: ניתן לשרטט באמצעות תוכנת GeoGebra את גרף הפונקציה  $y = x[x]$  ולפתור את המשוואות שבמשימה 7 בדרך גרפית.



8. א. דני צודק;  $\frac{27}{5} \cdot [\frac{27}{5}] = \frac{27}{5} \cdot 5 = 27$

ב.  $x = 4.5$ ;  $4.5 \cdot [4.5] = 4.5 \cdot 4 = 18$

שיקולים בפתרון המשוואה: בתחום המספרים החיוביים פתרון המשוואה נמצא בתחום  $4 \leq x < 5$  ולכן הערך השלם של הפתרון הוא 4. לכן, המשוואה המתקבלת היא  $x \cdot 4 = 18$ , ופתרונה הוא  $x = 4.5$ . בתחום המספרים השליליים לא קיים פתרון, כי עבור  $x = -4$  תוצאת המכפלה היא  $-4 \cdot [-4] = 16$ , ובתחום  $-5 \leq x < -4$ , הערך השלם של  $x$  הוא -5, ולכן תוצאת המכפלה  $x[x]$  גדולה מ-20.



9. תוכנת GeoGebra אינה משרטטת נקודות קצה חלולות ומלאות. מזכירים לתלמידים, כי בקצה הימני של ה"מדרגה" הנקודות הן חלולות, ובקצה השמאלי הנקודות הן מלאות.



1. א.  $x = 6.5$  ב.  $x = 7.5$  ג.  $x = 7$  ד.  $x = -4.5$

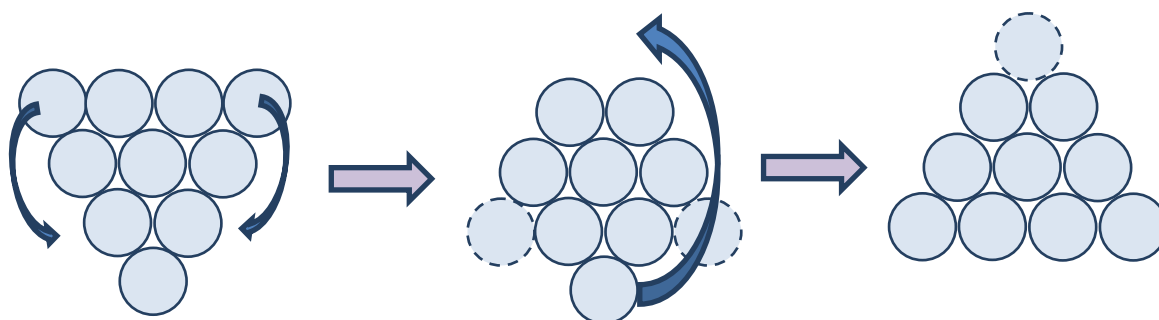
2. א.  $x = 6.6$  ב.  $x = 6.6$  ג.  $x = -3.8$  ד.  $x = -3.8$

3. א. 4

ב. (i) 1 (ii) 0 (iii) 6



פתרון החידה באמצעות שלוש הזזות בלבד (אין צורך להפוך מטבעות):



למסיימים

1. אייל הגדיר את "הערך החצי-שלם" של מספר כך:

הערך החצי-שלם של מספר הוא הכפולה השלמה הגדולה ביותר של חצי אך אינה גדולה מן המספר. למשל, הערך החצי-שלם של 3.4 הוא 3, של 3.7 הוא 3.5, ושל 3.5 הוא 3.5. מצאו ביטוי אלגברי המתאר את הערך החצי-שלם של מספר. רמז: היעזרו בפעולת הערך השלם.

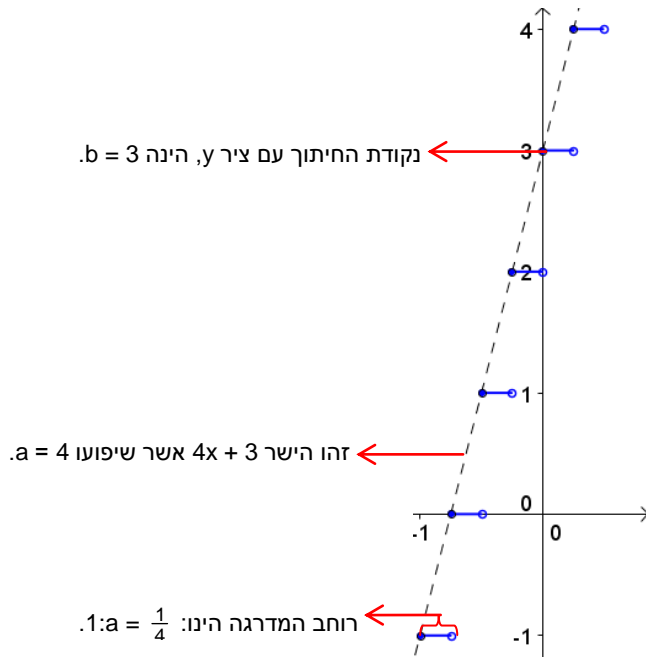
$$(תשובה: \frac{[2x]}{2} \text{ או לכל } n \text{ מספר שלם } f(x) = \begin{cases} [x] & n \leq x < n+0.5 \\ [x]+0.5 & n+0.5 \leq x < n+1 \end{cases}.)$$

2. משימת חקר: שרטטו פונקציות שונות מהמשפחה  $y = [ax + b]$  כאשר  $a$  ו- $b$  הם מספרים שלמים (ניתן להיעזר בתוכנת GeoGebra בשרטוט הפונקציות), וחקרו את הקשר בין הפרמטרים  $a$ ,  $b$  לצורת הגרף של הפונקציה. הערה: ניתן להסתפק בחקר משפחת הפונקציות  $y = [ax]$ .

(תשובה: כל הגרפים של הפונקציות במשפחה זו הן בצורת "מדרגות" (הדומות בצורתן לגרף הפונקציה  $y = [x]$ ).  $a$  מציין את "שיפוע" הגרף, כלומר, את שיפוע הישר המחבר את כל הקצוות השמאליים של ה"מדרגות".  $\frac{1}{a}$  מציין את רוחב המדרגה.)

b מציין את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר y, או, את מספר היחידות שיש להזיז אנכית את גרף הפונקציה  $y = [ax]$  עד לקבלת הפונקציה  $y = [ax + b]$ .

לדוגמה: הפונקציה  $y = [4x + 3]$  ( $a = 4, b = 3$ ).



- דנים בסוגים השונים של המשוואות שהוצגו במהלך הפעילות, ומשווים בין דרכי הפתרונות הגרפיים והאלגבריים המוצעים על-ידי התלמידים.
- דנים במושגים המוכרים לתלמידים תחת המשמעות של פעולת הערך השלם:
  - הגדרה של פעולה, חישוב עם פעולה
  - פונקציה: ייצוג מספרי, גרפי ואלגברי
  - ביטוי אלגברי, ביטויים זהים
  - משוואה, פתרון משוואות, משוואות שקולות
  - משפחה של פונקציות ושימוש בפרמטרים.