

## 2.4 מצולע ממוצע



- שילוב בין מושג הממוצע וגיאומטריה (מדידת היקפים ושטחים של מצולע)
- הכרות ויישום של אחת מתכונות הממוצע (סכום הסטיות מן הממוצע הוא אפס)
- בניית סדרות של מספרים בעלי ממוצע נתון
- התמודדות עם בעיות בעלות דרכי פתרון שונות



גיליון אלקטרוני (למשל, Excel).



מציגים לתלמידים את הבעיה הבאה:

במשפחת ירקוני 4 ילדים שגילם הממוצע הוא 9. מצאו אפשרויות לגילאים השונים. דנים עם התלמידים באפשרויות השונות תוך התייחסות לערכי הקצה, טווח הגילים ומידת הפיזור.



**1.**

מרובע א	אורך צלע הריבוע	שינויי האורך	סכום השינויים
מרובע א	6	+2, -2, +2, -2	$2 + (-2) + 2 + (-2) = 0$
מרובע ב	5	-1, -1, -1, +3	$(-1) + (-1) + (-1) + 3 = 0$
מרובע ג	4	0, 0, 0, 0	$0 + 0 + 0 + 0 = 0$
מרובע ד	7	-3, +1, +1, +1	$(-3) + 1 + 1 + 1 = 0$

משימה זאת ממחישה את הטענה הכללית יותר:

בכל סדרת מספרים, סכום ההפרשים של המספרים מהממוצע (סכום הסטיות מהממוצע) הוא 0. אפשר לנמק את הטענה באמצעות הגדרת הממוצע כגודל שמגיעים אליו אם מביאים את כל הגדלים שבקבוצת נתונים לגודל אחיד. תהליך "קייזוז" מעין זה מחייב ביטול של כל "הסטיות" מן הגודל האחיד על-ידי מילוי החסרים (סטיות שליליות מן הממוצע) באמצעות העודפים (סטיות חיוביות מן הממוצע).

## 2. א. ניסוי וטעייה

מרכיבים סדרה כלשהי הבנויה מאורכי הצלעות הנתונים באותו סעיף, מחשבים את הממוצע ו"מתקנים" את הסדרה בהתאם.

## מהסוף להתחלה

משתמשים בתכונה שסכום הסטיות מהמוצע הוא 0.

הסטייה של 3 מהמוצע הנתון (6) היא (-3).

הסטייה של 8 מהמוצע הנתון (6) היא (+2).

עלינו לבנות סדרת סטיות שסכומן 0.

כדי שמספר הסטיות מסוג (-3) "יקזזו" את מספר הסטיות מסוג (+2), דרושות 2 סטיות מן הסוג הראשון לעומת 3 סטיות מן הסוג השני – או כל כפולה של מספרים אלה. לכן הסדרה הקטנה ביותר המקיימת את הנדרש בשאלה היא 3, 3, 8, 8, 8. כלומר, מחומש בעל צלעות אלה.

הכפולה הבאה תיתן מצולע בעל 10 הצלעות הבאות: 3, 3, 3, 3, 8, 8, 8, 8, 8, 8.

(4 סטיות של (-3) ו-6 סטיות של (+2))

ובאופן כללי, מצולעים בעלי ח5 צלעות, הכוללים ח2 צלעות באורך 3 ו-ח3 צלעות באורך 8.

ב. משימה זו אינה אפשרית משום שהסדרה המינימלית המקיימת את הנדרש בשאלה היא באורך חמש (כלומר, מחומש). כמו כן, ניתן לנסות ולהיווכח כי לא ניתן לבנות רביעייה מהמספרים 3 ו-8 שסכום איבריה הוא 24.

**3.** הסטייה של 3 מהמוצע הנתון (9) היא (-6).

הסטייה של 17 מהמוצע הנתון (9) היא (+8).

כדי שמספר הסטיות מסוג (-6) "יקזזו" את מספר הסטיות מסוג (+8), דרושות 4 סטיות מן הסוג הראשון לעומת 3 סטיות מן הסוג השני (הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של 6 ו-8 היא 24, ובמקרה זה סכומי הסטיות מאותו סוג הם (-24) ו-(+24) בהתאמה) – או כל כפולה של מספרים אלה. באופן כללי, עבור ח טבעי כלשהו, מתאימים מצולעים בעלי ח7 צלעות הכוללים ח4 צלעות באורך 3 ו-ח3 צלעות באורך 17.

**4.** שירה צודקת. האפשרות היחידה לבנות שלישיית מספרים בעלת ממוצע 4 באמצעות המספרים 2 ו-8 היא 2, 2,

8 אך קטעים באורכים אלה אינם יכולים ליצור משולש, כי אורכי צלעות אלה אינם מקיימים את אי שוויון המשולש  $(2 + 2 < 8)$ .



**5.** א. הסטייה של 3 מהמוצע הנתון  $(4\frac{1}{5})$  היא  $(-1\frac{1}{5})$  או בכתיב כשבר מעורב  $(-\frac{6}{5})$ .

הסטייה של 9 מהמוצע הנתון  $(4\frac{1}{5})$  היא  $(+4\frac{4}{5})$  או בכתיב כשבר מדומה  $(+\frac{24}{5})$ .

מאחר שלשני השברים אותו מכנה (5), מספיק לדאוג לכך שהמונים (-6, 24) בסדרה יקזזו זה את זה. 4 סטיות של (-6) "מקזזות" סטייה אחת של (+24), ולכן המצולע המתאים המצומצם ביותר הוא מחומש שאורכי צלעותיו הם 3, 3, 3, 3, 9.

ב. בדומה למסקנה אליה מגיעים ב משימה 2, שאר המצולעים המקיימים תכונה זאת הם בעלי 5n צלעות הכוללים 4n צלעות באורך 3 ו-n צלעות באורך 9 (n מספר טבעי כלשהו).



**6.** המצולע בעל מספר הצלעות הקטן ביותר הוא מחומש בעל הצלעות 16,16,16,1,1.

(משושה בעל צלעות 16, 16, 1, 9, 9, 9 הוא המצולע בעל מספר הצלעות הקטן ביותר, שממוצע אורכי צלעותיו הוא 10 ואשר כולל את שלושת סוגי הצלעות).



**7.** ניתן לנסח שאלות מסוגים שונים.

שאלות מסוג: "בנו מצולע שאורכי צלעותיו  יחידות או  יחידות וממוצע אורכי הצלעות שלו הוא  (לדוגמה, משימה 2.א).

שאלות מסוג: "בנו מצולע בעל  צלעות שאורכי צלעותיו  יחידות או  יחידות וממוצע אורכי הצלעות שלו הוא  (לדוגמה, משימה 2.ב).

שאלות מסוג: "בנו את כל המצולעים בני  צלעות, שאורכי הצלעות שלהם הם  יחידות או  יחידות. חשבו את ממוצע אורכי הצלעות של כל מצולע" (לדוגמה, משימה 1).

שאלות מסוג: "בנו מצולע בעל  צלעות, המורכב משני סוגים של צלעות בלבד, וממוצע אורכי צלעותיו הוא  (תשובה אפשרית: דוגמה: "בנו מחומש, המורכב משני סוגים של צלעות בלבד, וממוצע אורכי צלעותיו הוא 10" (תשובה אפשרית: 7, 7, 12, 12, 12)).



1. א. x    ב.  $2m - 1$     ג.  $x + 1\frac{2}{15}$     ד.  $2x^2 + 2x + 2$

2. א.  $6 - 2y$ , y, y    ב.  $16 - 9y$ ,  $2y$ ,  $3y$ ,  $4y - 8$     ג.  $2ab$ ,  $a^2$ ,  $-a^2 - 2ab + 6$

3. א. דוגמה:  $5x + 2$ ,  $7 - 4x$ ,  $2x - 9$

ב. דוגמה:  $2x^2$ ,  $7x - 3$ ,  $\frac{3x+1}{2}$ ,  $\frac{3-2x}{4}$ ,  $-2x^2 - 3x + 1\frac{3}{4}$



הבן הצעיר בן 5.

הסבר: אם מניחים כי לפני 6 שנים כל הבנים כבר נולדו, אז ממוצע הגילאים לפני 6 שנים היה צריך להיות  $9 - 6 = 3$  ולא 4 ככתוב בשאלה. לכן מניחים שלפני 6 שנים הבן הצעיר טרם נולד, (כלומר גילו קטן מ-6), וממוצע הגילאים לפני 6 שנים מתייחס רק לארבעת הבנים הגדולים. אם כך, לפני 6 שנים ממוצע ארבעת הבנים הגדולים היה 4, כלומר, סכום הגילאים של ארבעת הבנים הגדולים היה  $4 \cdot 4 = 16$ .  
כעבור 6 שנים, כל בן תרם לסכום הגילאים 6 שנים, ולכן סכום הגילאים של ארבעת הבנים הגדולים כעת הוא  $16 + 6 \cdot 4 = 40$ . מאחר שממוצע הגילאים כיום (עם הבן הצעיר) הוא 9, סכום הגילאים של חמשת הבנים הוא 45, כלומר גילו של הבן הצעיר הוא  $45 - 40 = 5$ .  
לא ניתן לפתור את החידה אם מניחים כי יש יותר מבן אחד שגילו קטן מ-6.



בנו באמצעות קטעים שאורכם 3 יחידות או 8 יחידות סדרה של מלבנים – כך ששטחם הממוצע של מלבני הסדרה הוא 34.

#### תשובה:

שלושה סוגים של מלבנים אפשריים בסדרה:  
סוג א': מלבן של  $3 \times 3$  (ריבוע) ששטחו שטח 9.  
סוג ב': מלבן של  $3 \times 8$  ששטחו 24.  
סוג ג': מלבן של  $8 \times 8$  (ריבוע) ששטחו 64.  
נתון כי שטחם הממוצע של מלבני הסדרה הוא 34.  
הסטייה של 9 מהממוצע הנתון (34) היא (-25).  
הסטייה של 24 מהממוצע הנתון (34) היא (-10).  
הסטייה של 64 מהממוצע הנתון (34) היא (+30).  
סטיות השטחים מן השטח הממוצע צריכות לקזז זו את זו. קיימות אפשרויות מתאימות שונות.  
למשל:  $0 = 2 \cdot (+30) + 6 \cdot (-10)$ , ובמקרה זה הסדרה מכילה 6 מלבנים מסוג ב' ו-2 מלבנים מסוג ג' (סדרת השטחים במקרה זה הינה: 64, 64, 24, 24, 24, 24, 24).  
או:  $0 = 2 \cdot (+30) + 1 \cdot (-10) + 2 \cdot (-25)$ , ובמקרה זה הסדרה מכילה שני מלבנים מסוג א', מלבן אחד מסוג ב' ושני מלבנים מסוג ג' (סדרת השטחים במקרה זה הינה: 9, 9, 24, 64, 64).

\* הפתרון מבוסס על אולימפיאדת זוטא תשע"ב – שלב א' – פתרון לכיתות ז-ט, מכון דוידסון לחינוך מדעי



- דנים בדרכי פתרון שונות של אחת מבין המשימות 2 – 4.
- דנים בהסברים אפשריים לקשר בין הממוצע וסכום הסטיות מן הממוצע:  
-הממוצע מתקבל אם מביאים את כל איברי הסדרה לגודל אחד . תהליך "קיזוז" מעין זה מחייב ביטול של כל "הסטיות" מן הגודל האחד על- ידי מילוי החסרים (סטיות שליליות מן הממוצע ) באמצעות העודפים (סטיות חיוביות מן הממוצע).
- מחסרים מכל מספר שבסדרה את הממוצע . מקבלים סדרה חדשה שגודלי איבריה הם הסטיות של הסדרה המקורית מן הממוצע שלה ואשר סכומם הוא אפס (משום שמחסרים מסכום הסדרה המקורית אותו סכום).