

## יחידה 2: אחוזים, סטטיסטיקה והסתברות

### 2.1 מכונת צילום



- בניית מודל מתמטי לסיטואציה יומיומית העוסקת בצילום במכונת צילום
- חקר של מאפיינים במודל והכללה של תופעות
- העמקה בנושא האחוזים:
  - פעולות חוזרות באחוזים (למשל, הקטנה של הקטנה)
  - פעולות באחוזים המבטלות זו את זו (הקטנה המחזירה הגדלה לגדול המקורי)
  - התמודדות עם תפיסות שגויות בנושא אחוזים
- שילוב בין מושגים שונים: יחס, הקטנה/הגדלה, אחוזים, ודמיון של צורות
- ייצוגים שונים של פעולות הקטנה/הגדלה (הגדלה באחוז, הגדלה פי מספר).



גיליון אלקטרוני (למשל, Excel)



קוראים עם התלמידים את המסגרת שבתחילת הפעילות. מבקשים מהתלמידים להעלות השערות לגבי משמעות הפעולה המתוארת (צילום של דף, כאשר הצג של מכונת הצילום מראה 75%).

מודדים את הקטע AB בדף המקורי ובדף המוקטן ומבקשים מהתלמידים לתאר את היחס ביניהם לדוגמה:

- היחס בין אורכי הקטעים הוא 3:4.
- אורך AB בדף המוקטן הוא 75% מאורך AB בדף המקורי

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{אורך AB} \\ \text{בדף המקורי} \end{array}} \times 0.75 = \boxed{\begin{array}{l} \text{אורך AB} \\ \text{בדף המוקטן} \end{array}}$$

הערה: ניתן להביא לכיתה שני דפים, שאחד הוא צילום בהקטנה ל- 75% של השני במכונת צילום, ולבצע את הפתיחה על דפים אלה.



לאורך הפעילות מקפידים על האבחנה בין "הקטנה/הגדלה ל-" לעומת "הקטנה/הגדלה ב-". לדוגמה: "הקטנה ל- 75%" שקולה ל- "הקטנה ב- 25%", והן מתארות את ההקטנה הרשומה במכונת הצילום כ- 75% או 0.75.

1. א. בכל המקרים, יחס האורכים הוא 3:4, וזאת הקטנה ב- 25%.

ב. 75% הוא יחס האורכים.

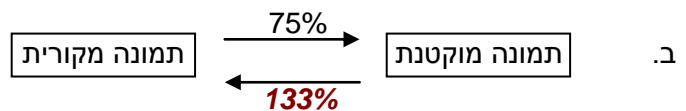
הקשר בין האחוז שבו האורך הוקטן (25%) ולאחוז הרשום במכונה (75%) הוא: הראשון מציין את החלק מן האורך המקורי המצטמצם כתוצאה מן ההקטנה, ואילו השני מציין את החלק מן האורך המקורי שנותר לאחר ההקטנה. כתוצאה מכך, סכום שני החלקים מייצג את האורך המקורי שלפני ההקטנה – כלומר, את השלם (1 או 100%).

2. א. דני טועה. ניתן להסביר זאת באמצעות דוגמה נגדית או בדרך אלגברית כללית. נניח כי אורך הדף המקורי

הוא  $x$ . אורכו של הדף המוקטן ב- 25% יהיה  $0.75x$ . ואורך הדף המוגדל בחזרה ב- 25% יהיה  $0.94x \approx 0.75 \cdot 1.25$ . כלומר, אורך הדף לאחר שתי הפעולות יהיה כ- 94% מאורך הדף המקורי, ולא שווה לו.

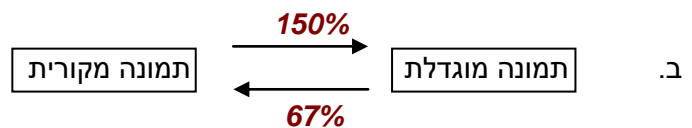
מקור הטעות הוא באי-הבחנה בכך שאחוז ההקטנה ואחוז ההגדלה (השווים שניהם ל- 25%) מתייחסים לשלמים שונים. אחוז ההקטנה מתייחס לדף המקורי (הורדה של 25% מאורך הדף המקורי), ואילו אחוז ההגדלה מתייחס לדף המוקטן (הוספה של 25% מאורך הדף המוקטן). מכיוון שהכמות השלמה בפעולה השנייה קטנה יותר, התוצאה הסופית קטנה יותר מן המידות המקוריות של הדף.

ההקטנה הנתונה היא ל- 75% (כלומר, פי 0.75). כדי להחזיר את הדף המוקטן לגודלו המקורי, יש לכפול את מידות התמונה המוקטנת פי  $1.33 \approx 1:0.75$ . מכאן שאחוז ההגדלה הדרוש הוא כ- 133%.

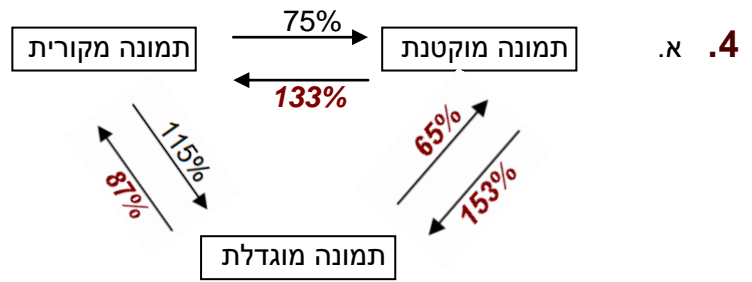


3. א. אחוז ההגדלה הוא 150%. מגיעים לתוצאה זו על-ידי מדידת אורך קטע בתמונה המוגדלת ואורך הקטע

התואם לו בתמונה המקורית, וחישוב היחס בין האורכים האלה.



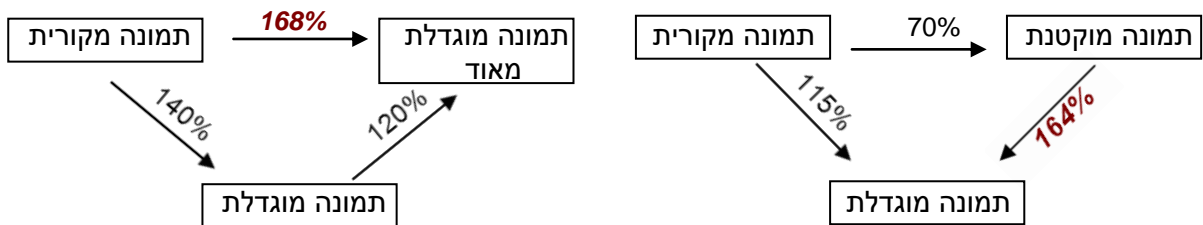
הסבר: ההגדלה שבשרטוט הנתון היא ל- 150% (כלומר, פי 1.5). כדי להחזיר את הדף המוגדל לגודלו המקורי, יש לכפול את מידות התמונה המוגדלת פי  $0.67 \approx 1:1.5$  (כלומר, יש להקטין ל- 67%).



אם נחשיב את אחת ממידות האורך שבתמונה המקורית ליחידה אחת (1), המידה המתאימה בתמונה המוקטנת תהיה 0.75 ובתמונה המוגדלת – 1.15. לכן המעבר מן התמונה המוקטנת אל התמונה המוגדלת תדרוש הגדלה פי 1.53 (בקירוב) – כלומר, הגדלה ל-153%. את שאר האחוזים מוצאים על פי חישוב המספר ההופכי לאחוז ההקטנה או ההגדלה. הערה: המספרים 65% ו-87% שנרשמו על החיצים הם קירוב.

ב. קשרים בין המספרים בתרשים:

- שני מספרים הנמצאים על חיצים בכיוונים הפוכים בין אותן תמונות הם הופכיים ומכפלתם 1. למשל,  $0.75 \times 1.33 = 1$ .
- מכפלה של כל שלושה מספרים הרשומים על החיצים היוצרים מסלול מכוון סגור שווה ל-1. למשל,  $0.67 \times 0.75 \times 2 = 1$ .

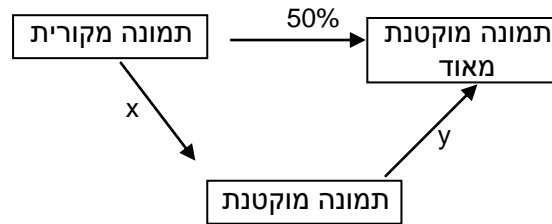


**6. א.** דינה טועה: הקטנה ב-25% היא הקטנה ל-75%. אם נקטין פעמיים ב-25% התוצאה שתתקבל תהיה הקטנה ל-56% ( $0.75 \times 0.75 \approx 0.56$ ).

מקור הטעות הוא באי-הבחנה בכך שההקטנה השנייה ב-25%, מתבצעת על הדף המוקטן ולא על הדף המקורי. לכן התמונה המתקבלת למעשה היא בהקטנה ל-56% ולא בהקטנה הרצויה ל-50%.



ב. פתרון הבעיה שקול למילוי התרשים הבא, כאשר בחיצים הריקים ניתן למלא אחוזים בין 60% ל- 150%.



מחפשים שני אחוזי הקטנה  $x$  ו- $y$  ( $0.6 \leq x < 1$ ,  $0.6 \leq y < 1$ ) כך ש-  $xy = 0.5$ .

דוגמאות:

אם אחד מאחוזי ההקטנה הוא 60%, אחוז ההקטנה השני הוא  $83\% (\approx 0.5:0.6)$ .

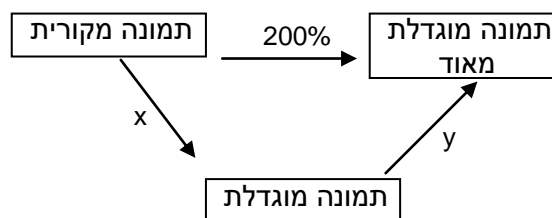
אם אחד מאחוזי ההקטנה הוא 75%, אחוז ההקטנה השני הוא  $67\% (\approx 0.5:0.75)$ .

אם אחד מאחוזי ההקטנה הוא 90%, אחוז ההקטנה השני הוא  $56\% (\approx 0.5:0.9)$ , אך אחוז הקטנה זה אינו

נמצא במכונת הצילום. למעשה, אחוז ההקטנה הגדול ביותר שנוכל לבחור הוא 83%.

ברוח הצעתה של דינה, כדי למצוא אחוזים זהים בשתי ההקטנות, מוצאים מספר  $x$ , כך ש-  $x \cdot x = 0.5$ . מספר זה הוא  $\sqrt{0.5} \approx 0.71$ . כלומר, שתי הקטנות רצופות ל- 71% יוצרות תמונה שמידותיה הן מחצית ממידות התמונה המקורית.

ג. פתרון הבעיה שקול למילוי התרשים הבא, כאשר בחיצים הריקים ניתן למלא אחוזים בין 60% ל- 150%.



מחפשים שני אחוזי הגדלה  $x$  ו- $y$  ( $1 < x \leq 1.5$ ,  $1 < y \leq 1.5$ ) כך ש-  $xy = 2$ .

דוגמאות:

אם אחד מאחוזי ההגדלה הוא 150%, אחוז ההגדלה השני הוא  $133\% (\approx 2:1.5)$ .

אם אחד מאחוזי ההגדלה הוא 135%, אחוז ההגדלה השני הוא  $148\% (\approx 2:1.35)$ .

אם אחד מאחוזי ההגדלה הוא 120%, אחוז ההגדלה השני הוא  $167\% (\approx 2:1.5)$ . אך אחוז הגדלה זה אינו

נמצא במכונת הצילום. למעשה, אחוז ההגדלה הגדול ביותר שנוכל לבחור הוא 133%.

ברוח הצעתה של דינה, כדי למצוא אחוזים זהים בשתי ההגדלות, מוצאים מספר  $x$ , כך ש-  $x \cdot x = 2$ . מספר זה הוא  $\sqrt{2} \approx 1.41$ . כלומר, שתי הגדלות רצופות ל- 141% יוצרות תמונה שמידותיה כפולות ממידות התמונה המקורית.

7. נוסחאות מתאימות המחשבות את מידות האורך לאחר הקטנה ל-75% ולאחריה הגדלה ל-125%:

	A	B	C	D	E
1	אורך מקורי		אורך לאחר צילום ראשון		אורך לאחר צילום שני
2		75%	$=0.75 \cdot A2$	125%	$=1.25 \cdot C2$
3					

דוגמאות לשרשרות של הגדלות/הקטנות, כך שמידות האורך של הצילום בשלב האחרון בשרשרת זהות למידות האורך המקוריות:

	A	B	C	D	E
1	אורך מקורי		אורך לאחר צילום ראשון		אורך לאחר צילום שני
2		80%	$=0.8 \cdot A2$	125%	$=1.25 \cdot C2$
3					

	A	B	C	D	E
1	אורך מקורי		אורך לאחר צילום ראשון		אורך לאחר צילום שני
2		150%	$=1.5 \cdot A2$	67%	$=0.67 \cdot C2$
3					

	A	B	C	D	E	F	G
1	אורך מקורי		אורך לאחר צילום ראשון		אורך לאחר צילום שני		אורך לאחר צילום שלישי
2		55%	$=0.55 \cdot A2$	115%	$=1.15 \cdot C2$	158%	$=5 \cdot E2$
3							

1. א. מחשבים את המידות החסרות של המשולשים באמצעות משפט פיתגורס.  
 מידות המשולש הימני: 6, 8, 10 והיקפו:  $24 (= 6 + 8 + 10)$   
 מידות המשולש השמאלי: 5, 12, 13 והיקפו:  $30 (= 5 + 12 + 13)$

ב.	היקף המשולש הימני	היקף המשולש השמאלי
הקטנה ל- 85%	20.4	25.5
הגדלה ל- 110%	26.4	33
הקטנה ל- 50% והגדלה ל- 150%	18	22.5

2. א. 80% ב. 120%

