יחידה 1: יחס וקנה מידה

1.1 חלקי מספרים

מטרות

- העמקה של הבנת מושג היחס
- גילוי חוקיות והצדקתה בדרכים שונות (באמצעות שיקולים, חישובים או אלגברה)
- שימוש בחשיבה פרופורציונית לפתרון בעיות

אמצעי עזר

גיליון אלקטרוני (למשל, Excel)

פתיחה

מציעים אפשרויות למחירים המקוריים בחנויות א' ו- ב' ומחשבים את המחירים לאחר הנחה.

פתרונות והערות

1. א. **פתרון באמצעות שיקולים**

המחיר לאחר הנחה בשתי החנויות הוא זהה. בחנות ב' מחיר זה מהווה חלק קטן יותר מהמחיר המקורי ולכן המחיר המקורי בחנות ב' גבוה יותר.

פתרון אלגברי

מסמנים ב- a את המחיר המקורי בחנות א'.

מסמנים ב- b את המחיר המקורי בחנות ב'.

בונים את המשוואה הבאה על פי נתוני השאלה $\frac{1}{2}a=\frac{1}{3}b$

ומקבלים $a=\frac{2}{3}b$

המחיר המקורי בחנות א' (a) מהווה $\frac{2}{3}$ מהמחיר המקורי בחנות ב' (b), ולכן הוא המחיר הנמוך יותר (המחירים הם מספרים חיוביים).

ב.

	מחיר מקורי בחנות א	מחיר מקורי בחנות ב	המחיר לאחר הנחה בשתי החנויות
דוגמה	20	30	10
הכללה	a	$\frac{3}{2}a$	$\frac{a}{2}$
הכללה נוספת	$\frac{2}{3}b$	b	$\frac{b}{3}$

הכללה באמצעות שיקולים

מחלקים את המחיר המקורי של חנות א' ב- 2. $a : 2$

זהו המחיר לאחר הנחה בשתי החנויות.

מאחר שמחיר זה הוא $\frac{1}{3}$ מהמחיר המקורי של חנות ב', כופלים אותו ב- 3 $a : 2 \times 3$

הכללה בדרך אלגברית

דומה לפתרון האלגברי במשימה 1.א לעיל.

הכללה דרך דוגמאות

מוצאים מאפיין המשותף לחמש הדוגמאות המספריות (בכל זוג, המספר השני הוא פי $1\frac{1}{2}$ מן הראשון).

הערה: המחירים אינם חייבים להיות מספרים שלמים. לדוגמא, $a = 10.4$, $b = 15.6$.

2. א.

	מספר ראשון (הקטן יותר)	מספר שני (הגדול יותר)	התוצאה לאחר חישוב החלק
דוגמה	16	20	4
הכללה	x	$\frac{5}{4}x$	$\frac{x}{4}$
הכללה נוספת	$\frac{4}{5}y$	y	$\frac{y}{5}$

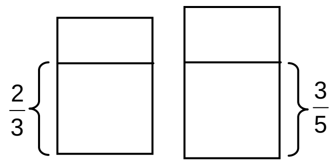
ב. טענה (i). לא נכון. דוגמה נגדית: $x = 12,\ y = 15$. למעשה כל מספר אי-זוגי המתחלק ב- 5 שנציב עבור y סותר את הטענה.

טענה (ii). לא נכון. על פי ההכללה הראשונה , המספר הקטן (x) חייב להתחלק ב-4, ובפרט להיות זוגי – אחרת המספר הגדול לא יהיה שלם.

טענה (iii). נכון. למשל, $x = 12,\ y = 15$. למעשה כל מספר אי- זוגי המתחלק ב-5 שנציב עבור y מהווה דוגמה לנכונות הטענה. אולם תמיד המספר הקטן (x) הוא הזוגי והגדול (y) הוא האי-זוגי.

טענה(iv). נכון. ראו הסבר לטענה (ii).

3. א. **פתרון באמצעות שיקולים**



התוצאות לאחר חישוב החלקים בכל אחד מהמספרים הן זהות

מאחר ש- $\frac{3}{5} > \frac{2}{3}$ נובע שמהמספר הראשון התוצאה מהווה

חלק גדול יותר ($\frac{2}{3}$), ולפיכך המספר הראשון קטן יותר (ראו איור).

פתרון אלגברי

דומה לפתרון האלגברי במשימה 1.א לעיל.

ב.

	מספר ראשון (הקטן יותר)	מספר שני (הגדול יותר)	התוצאה לאחר חישוב החלק
דוגמה	18	20	12
הכללה	x	$\frac{10}{9}x$	$\frac{2}{3}x$
הכללה נוספת	$\frac{9}{10}y$	y	$\frac{3}{5}y$

4. **פתרון דרך ניסוי וטעייה**

מוצאים דוגמאות לזוגות מספרים , כך ש- $\frac{5}{6}$ מהמספר הראשון שווה ל- $\frac{2}{3}$ מהמספר השני (בדומה למשימות הקודמות), ובוחרים את זוג המספרים שסכומם 27.

פתרון באמצעות שיקולים

מבצעים הכללה בדומה לשאלות הקודמות.

	מספר הבנים	מספר הבנות
הכללה	x	$\frac{12}{15}x$

לכן מספר הבנים מתחלק ב – 15.

עבור מספר הבנים בודקים רק מספרים המתחלקים ב- 15.

בכל מקרה כזה מוצאים את מספר הבנות ובודקים אם הסכום הוא 27.

הערה: לא מצמצמים את השבר ב- 3 משום שמספר הבנים חייב להתחלק ב- 3 (כי $\frac{2}{3}$ מהבנים מנגנים).

פתרון אלגברי

x מייצג את מספר הבנים.

מספר הבנות הוא $27 - x$

בונים משוואה מתאימה $\frac{2}{3}x = \frac{5}{6}(27 - x)$

פתרון המשוואה הוא $x = 15$

מכאן שמספר הבנים הוא 15 ומספר הבנות הוא 12.

5. דוגמה לטבלה המתאימה למשימה 3.

בוחרים את המספר הראשון להיות כפולה של 9 (כדי שהמספר השני יהי ה מספר שלם), ובוחרים את המספר השני להיות $\frac{10}{9}$ מהמספר הראשון.

נוסחאות מתאימות:

	A	B	C	D	E
1		מספר ראשון	מספר שני	2/3 של המספר הראשון	3/5 של המספר השני
2	1	=9*A2	=10/9*B2	=2/3*B2	=3/5*C2

הטבלה המתקבלת, כאשר גוררים נוסחאות אלו מטה:

	A	B	C	D	E
1		מספר ראשון	מספר שני	2/3 של המספר הראשון	3/5 של המספר השני
2	1	9	10	6	6
3	2	18	20	12	12
4	3	27	30	18	18
5	4	36	40	24	24
6	5	45	50	30	30
7	6	54	60	36	36
8	7	63	70	42	42
9	8	72	80	48	48
10	9	81	90	54	54

נסמן משקלן של שתי חיות על פני כדור הארץ ב- x, y.

משקל החיה הראשונה על הירח הוא $\frac{1}{6}x$

משקל החיה השנייה על כוכב צדק הוא $2\frac{1}{2}y$

על פי הרשום, עלינו לבחור את משקלי החיות כך שיתקיים השוויון הבא $\frac{1}{6}x = 2\frac{1}{2}y$

ומכאן, $x = 15y$

כלומר, יש לבחור את זוג החיות כך שמשקלה של החיה הכבדה (על פני כדור הארץ) הוא בערך פי 15 ממשקל החיה השנייה (על פני כדור הארץ).

הזוגות המתאימים:

פיל (כ- 4 טון) - אריה (כ- 280 ק"ג)	פרה (כ- 400 ק"ג) – כלב (כ- 30 ק"ג)
ג'ירפה (כ- 1000 ק"ג) – אדם (כ- 70 ק"ג)	כבשה (כ- 45 ק"ג) – ברווז (כ- 3 ק"ג)

שומרים על כושר

1. א. $y = 1\frac{3}{4}x$ ב. $y = 1\frac{13}{15}x$ ג. $y = \frac{4}{9}x$ ד. $y = \frac{8}{15}x$

2. במשוואות שהתקבלו בשאלה 1, מציבים ערכים ל- x, ומחשבים את ערך ה- y. דוגמאות:

א. $x = 8 , y = 14$ ב. $x = 30, y = 56$ ג. $x = 9, y = 4$ ד. $x = 30, y = 16$

חידה

סבא בן 66.

בכל אחת משש השנים, גילו של סבא (66, 65, 64, 63, 62, 61) התחלק לגילו של נבו (6, 5, 4, 3, 2, 1 בהתאמה) שמים לב כי 60 מתחלק בכל מספר שלם מ- 1 ועד 6 , ולכן אם מוסיפים ל- 60 מספר בין 1 ל- 6, התוצאה תתחלק אף היא במספר שהתווסף.

המספר הבא שעבורו מתקיימת תכונה זו הוא 120 (בהנחה שסבא חי עד גיל 126 לפחות ונכדו נולד כשהוא היה בן 120).

למסיימים

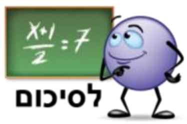
1. במשימה 3 התבקשתם למצוא זוגות מספרים שלמים , כך ש- $\frac{2}{3}$ של המספר הראשון שווה ל- $\frac{3}{5}$ של המספר השני.

א. מצאו תכונה משותפת למספרים שיכולים לשמש כמספר **הראשון** בכל זוג מספרים (רשומים בטור הימני בטבלה שבמשימה 3). זכרו כי כל זוג הוא זוג של מספרים שלמים.

תשובה: המספר הראשון בכל זוג חייב להתחלק ב- 9.
הסבר: אם מסמנים את ה מספר הראשון ב- x, אז ביטוי מתאים למספר השני הינו $\frac{10}{9}x$. תוצאת ההצבה בביטוי זה צריכה להיות מספר שלם, ולכן ערכו של x צריך להיות מספר המתחלק ב- 9.

ב. מצאו תכונה משותפת למספרים היכולים לשמש כמספר **השני** בכל זוג מספרים (רשומים בטור ה אמצעי בטבלה שבמשימה 3). זכרו כי כל זוג הוא זוג של מספרים שלמים.

תשובה: המספר השני בכל זוג חייב להתחלק ב- 10.
הסבר: אם מסמנים את המספר השני ב- y, אז ביטוי מתאים למספר הראשון הינו $\frac{9}{10}y$. תוצאת ההצבה בביטוי זה צריכה להיות מספר שלם, ולכן ערכו של y צריך להתחלק ב- 10.



לסיכום

מבקשים מהתלמידים להציג אסטרטגיות לפתרון משימות 1-3 – למשל, באמצעות שיקולים, באמצעות אלגברה או באמצעות ניסוי וטעייה.