

8.3 שטיחים מחוררים



- העמקה בנושא חישוב שטחים הנלמד בכיתה
- היכרות עם עולם הפרקטלים, תחום מתמטי שימושי שהתפתח בעת האחרונה, באמצעות דוגמאות פשוטות ונגישות לידע של התלמידים
- שילוב נושאים שונים במתמטיקה: חישובי שטחים והיקפים, סדרות וביטויים אלגבריים
- טיפוח מיומנויות הכללה והנמקה
- שימוש בכלים טכנולוגיים לחקירה ולבדיקה



יישומון פרקטלים, למשל <http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=17> או http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_137_g_2_t_3.html?open=instructions



מציגים את משולש סרפינסקי. שואלים: כיצד לדעתכם משרטטים משולש מחורר כזה? דנים בתכונותיו של המשולש המחורר. אם יש צורך, ממקדים את השאלה: כיצד יוצרים משולש סרפינסקי ממשולש שווה צלעות כלשהו? מה הקשר בין המשולשים החדשים הנוצרים בכל שלב, ובין המשולש המקורי? שואלים אם אפשר להמשיך לחורר את המשולש באותו אופן? דנים בתהליך האינסופי. מזמינים את התלמידים לתאר את השתנות שטחו של המשולש המחורר ככל שממשיכים לחורר אותו עוד ועוד שלבים. בדומה, לתאר גם את השתנות ההיקף של המשולש הזה כאשר ממשיכים לחורר. מאפשרים לתלמידים להביע את רעיונותיהם אך עדיין אין מסכמים.



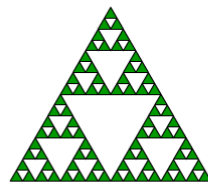
1. מסמנים את אמצעי הצלעות של המשולש המקורי, ומחברים אותן בקטעים. נוצרו ארבעה משולשים. בשלב הבא מסמנים את אמצעי הצלעות בכל ארבעת המשולשים האלו ושוב מחברים. חוזרים על התהליך מספר שלבים ככל שנרצה. אפשר לדלג על משימה זו אם הועלו הצעות מספקות בדיון שנערך בפתיחה.



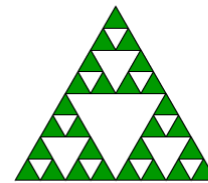
2. אפשר לשרטט משולש סרפינסקי בעזרת היישומון הבא:

<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=17>

זהו יישומון לבניית פרקטלים מפורסמים. בסרגל הכלים תמצאו את משולש סרפינסקי ותוכלו להמשיך בבניית השלבים הבאים. שימו לב שהיישומון סופר את מספר המשולשים בכל שלב ומחשב את שטח השטיח המחורר. נוכל לחזור ליישומון זה בהמשך הפעילות. מעניין עתה לשוב להשערותנו בפתיחת הפעילות / במשימה 1. ואיזה שלב בבניית משולש סרפינסקי מוצג בתמונה בראש הדף?



ולמעוניינים, הנה שלב 4:



3. שרטוט שלב 3:

4. שטח השטיח הולך וקטן, כיוון שאנו משמיטים חלקים ממנו בכל שלב. בתהליך אינסופי, שטח השטיח המחורר שואף לאפס. לעומת זאת, היקף השטיח הולך וגדל. שימו לב שאנו מתייחסים גם לשולי המשולשים שנוספו, ולכן בכל שלב נוספים להיקף הקודם קווי היקף חדשים. בתהליך אינסופי היקף השטיח שואף לאינסוף.

5. א. שלב 0: יחידת שטח אחת (נתון), שלב 1: חילקנו את המשולש לארבעה משולשים חופפים, והסרנו את המשולש הפנימי. השטח שנותר שווה ל $\frac{3}{4}$ משטח המשולש המקורי, כלומר $\frac{3}{4}$ יח"ש,

ממשיכים באותו אופן. בכל שלב מסירים רבע מכל משולש מלא והשטח החדש שווה ל $\frac{3}{4}$ מהשטח בשלב

$$\text{שלפניו. שלב 2: } \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \text{ יח"ש, שלב 3: } \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \text{ יח"ש, שלב 4: } \frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \text{ יח"ש.}$$

ביישומון הפרקטלים ממשימה 3 מופיע חישוב השטח בכל שלב בכתוב עשרוני.

	C	B	A	
1		שטח	שלב	1
2		1	0	2
3	0.75	0.75	1	3
4	0.75	0.5625	2	4
5	0.75	0.42188	3	5
6	0.75	0.31641	4	6
7	0.75	0.2373	5	7
8	0.75	0.17798	6	8

ב. לפי ההסבר בסעיף א, היחס בין שטח השטיח בשלב מסוים

ובין שטחו בשלב הקודם הוא $\frac{3}{4}$.

אפשר לערוך טבלת Excel, ולחשב את שטחי המשולשים

בשלבים השונים בעזרת נוסחת נסיגה. למשל הנוסחה לתא

$$B3 \text{ בטבלה משמאל היא: } =3/4*B2$$

בעזרת התוכנה קל למצוא את היחס בין השטחים בכל שני

שלבים עוקבים. למשל הנוסחה לתא המסומן בטבלה

$$\text{משמאל: } =B3/B2$$

לבדיקת חישובי השטחים, ניתן להזין את השטחים כפי שהם מופיעים ביישומון. אם ידועה כבר הנוסחה לחישוב השטח (ראו סעיף ד) אפשר להיעזר בה לחישוב השטחים בעזרת גיליון האלקטרוני או לבדיקת החישובים שבוצעו בדרך אחרת.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0.056 \quad \text{ג.}$$

$$\text{ד. } \left(\frac{3}{4}\right)^n, \text{ בכל שלב מהווה השטח } \frac{3}{4} \text{ משטח השלב הקודם.}$$

ה. בשלב 8



6. בכל שלב, נוספים להיקף השטיח שוליים שהם ההיקפים של המשולשים שהוסרו באותו שלב. צלע כל משולש שהוסר, שווה למחצית הצלע של המשולש החוסם אותו. לכן, אורך השוליים שנוספו לשטיח כולו שווה למחצית ההיקף בשלב הקודם. ההיקף כולו גדל בכל שלב פי 1.5.

א. שלב 0: יחידת אורך אחת (נתון), שלב 1: $\frac{3}{2}$ יחידות אורך, שלב 2: $\frac{9}{4}$, שלב 3: $\frac{27}{8}$, שלב 4: $\frac{81}{16}$ (ביחידות

אורך)

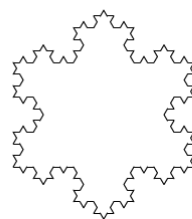
ב. 25.63 יחידות אורך

$$\text{ג. } \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

ד. בשלב 4

בדומה לטבלה שבנינו במשימה 5, אפשר להיעזר גם כאן בטבלת Excel

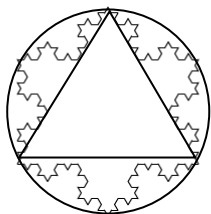
7. א. שלב 3:



ב (i) שטח הפתית יילך ויגדל

(ii) היקף הפתית יילך ויגדל

ביישומון הפרקטלים שהצגנו במשימה 2 ניתן לעקוב אחר שלבים ביצירת פתית שלג, והשתנות ההיקף שלו. ייתכן שהתלמידים ירצו לבדוק את תהליך השינוי של שטח פתית השלג, לאן שואף שטח הפתית כאשר ממשיכים בתהליך אינסופי של יצירת הפתית? כדאי להסב את תשומת ליבם של התלמידים לעובדה, שלמרות ששטח הפתית הולך וגדל, מכיוון שבכל שלב נוספים "קוצים" לשטח בשלב שלפניו; השטח אינו שואף לאינסוף, אלא השטח חסום. נוכל לשרטט מעגל החוסם את הפתית (מעגל החוסם את המשולש המקורי משלב 0). גם אם נמשיך להוסיף "קוצים" ולשפר את הפתית אינסוף שלבים נוספים, אמנם השטח יילך ויגדל משלב לשלב אך לעולם השטח לא יחרוג מתוך המעגל החוסם. בשפת המתמטיקה אומרים ששטח הפתית שואף ל"גבול סופי".



דיון בהיקפו של פתית השלג האינסופי מופיע כמשימה למסיימים בהמשך הפעילות.

8. משולש סרפינסקי ופתית השלג הם שתי דוגמאות מוכרות של תופעה הנקראת "פרקטל". תוכלו למצוא דוגמאות לפרקטלים ביישומונים השונים. התכונה המעניינת של הפרקטלים היא תכונת הדמיון העצמי. כלומר, אם

מגדילים חלק מן הצורה, הפרטים המתגלים דומים במאפיינים רבים לצורה השלמה. למעשה, כאשר מתבוננים בחלק מן הצורה אי אפשר לדעת באיזה שלב אנו מתבוננים. תמיד אפשר להמשיך ולהמשיך בתהליך ההידמות העצמית עד אינסוף.

פרקטלים מופיעים בצורות רבות בטבע. קו החוף הוא צורה פרקלטית, כך גם מבנה העורקים של עלים מסוימים ועוד. גם לעננים צורה פרקטלית, המונעת מהטייסים לאמוד את מרחקם מהענן. ככל שהם מתקרבים לענן הם רואים יותר פרטים שלו, הדומים לפרטים שנראו קודם במבט כוללני יותר.

מדע הפרקטלים התפתח במאה האחרונה הודות להתפתחות טכנולוגיות המחשבים המאפשרת יצירה של פרקטלים וחקירתם. המתמטיקאי היהודי מנדלברוט הוא שטבע את המונח פרקטל בשנות השישים.



$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{21}{64}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \frac{85}{256}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} = \frac{341}{1024}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} = \frac{121}{243}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$

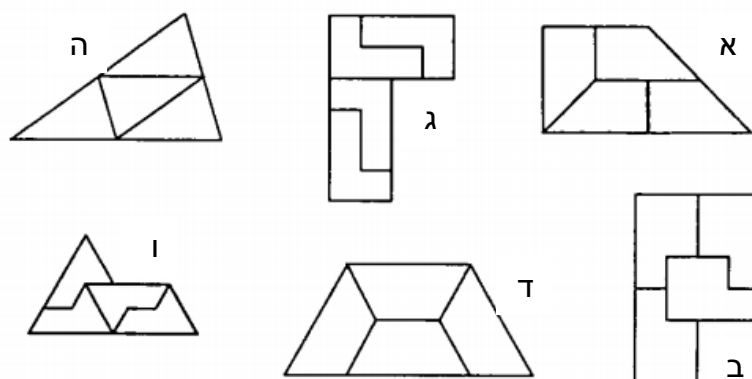
בעמודה הימנית מחשבים סכומים חלקיים של הסדרה $a_n = \frac{1}{2^n}$. מתוך הדוגמאות עולה כי סכום n האיברים

הראשונים בסדרה זו הוא $\frac{2^n - 1}{2^n}$

בעמודה האמצעית הסדרה היא $a_n = \frac{1}{3^n}$, סכום n האיברים הראשונים הוא $\frac{\frac{1}{3}(3^n - 1)}{3^n}$

ובעמודה השמאלית היא $a_n = \frac{1}{4^n}$, סכום n האיברים הראשונים הוא $\frac{\frac{1}{3}(4^n - 1)}{4^n}$

ובהכללה, סכום n האיברים הראשונים בסדרה $a_n = \frac{1}{k^n}$ הוא $\frac{\frac{1}{k-1}(k^n - 1)}{k^n}$



חוזרים למשימה 7, פרקטל פתית השלג. נניח כי הפתית המקורי (שלב 0) הוא משולש שווה צלעות שהיקפו יחידת אורך אחת.

1. חשבו את היקפי הפתית בארבעת השלבים הראשונים.

2. מהו היחס בין היקפי הפתית בשני שלבים סמוכים?

3. מה היקף הפתית בשלב החמישי?

4. כתבו ביטוי אלגברי להיקף הפתית בשלב n (מ מספר טבעי).

תשובות: בכל שלב בונים "קוצים" על צלעותיו של פתית השלג הקודם, כך: לכל צלע של משולש מצמידים משולש שווה צלעות שאורך צלעו $\frac{1}{3}$ מאורך צלע המשולש בשלב הקודם. ה"קוץ" מוצמד לשליש האמצעי של צלע המשולש. הוספת העוקץ לכל צלע גורעת $\frac{1}{3}$ מאורכה, ובמקומה מוסיפה $\frac{2}{3}$ בסך הכול במעבר לשלב הבא גדל היקף הפתית פי $\frac{4}{3}$.

1. היקף הפתית ביחידות אורך: שלב 1: $\frac{4}{3}$ יחידות אורך, שלב 2: $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$, שלב 3: $\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{64}{27}$, שלב 4:

$$\frac{256}{81}$$

$$2. \frac{4}{3}$$

$$3. \frac{1024}{243}$$

$$4. \left(\frac{4}{3}\right)^n$$



- מציגים בפני מליאת הכיתה פרקטלים שהתלמידים יצרו. בודקים שאכן כאשר מתבוננים בחלק מתוך הצורה, הוא דומה לצורה השלמה. דנים בתכונות של הפרקטלים שיצרו התלמידים.