

8.1 נקודות ושטחים



- הכרת נוסחת פיק למקרה של מצולעים ללא נקודות שריג פנימיות ($i=0$)
- שימוש בקווי עזר לחישובי שטחים
- חישוב שטחים מורכבים
- שימוש בכלים טכנולוגיים לחקירה ולבדיקה
- תהליך חקר וגילוי
- טיפוח תהליך הכללה
- יצירת דוגמאות רבות לאותן תכונות
- חשיפה ליופי של המתמטיקה: קישור מפתיע בין מושגים מתמטיים מתחומים שונים שהם כביכול בלתי קשורים
- זה לזה (שטח ונקודות שריג)
- פתרון פרדוקס מתמטי



- דף נקודות ריבועי לכל תלמיד (אפשר להדפיס מפעילות 7.5 לתלמיד).
- יישומן לוח מסמרים, לדוגמה מאתר האינטרנט:

<http://www.mathplayground.com/geoboard.htm>

http://www.excellence.org.il/_Uploads/84564.swf

או

- גיליון אלקטרוני, למשל Excel.



מציגים את הפרדוקס במסגרת הפתיחה. מחשבים את השטחים. שטח הריבוע $8 \times 8 = 64$ יחידות שטח, ואילו שטח המלבן $13 \times 5 = 65$ יחידות שטח. שואלים: כיצד נוספה לה עוד משבצת (יחידת שטח אחת)? האם חיתוך והרכבה מחדש שומרים על השטח?

אם התלמידים מציעים פתרון לפרדוקס, דנים בו. אם לא, משאירים את הפרדוקס פתוח, ושבים אליו בסוף הפעילות. במכוון לא נציע לתלמידים לגזור ולהרכיב, מכיוון שעל התלמידים לגלות שהפרדוקס נעוץ בשרטוט בלתי מדויק. בפעילות זו נעסוק במצולעים על דף נקודות. בסופה נציע ליישב את הפרדוקס על ידי שרטוט המצולעים הנתונים על דף נקודות (משימה 8).

1.

המצולע	מספר נקודות שריג פנימיות	מספר נקודות שריג היקפיות	שטח המצולע ביחידות שטח
א	0	3	0.5
ב	0	4	1
ג	0	5	1.5
ד	0	5	1.5
ה	0	6	2
ו	0	6	2
ז	0	6	2
ח	0	7	2.5
ט	0	7	2.5
י	0	9	3.5

לחישוב הצורות נוכל להיעזר בכל הידע שלנו על שטחים. נחלק כל צורה למצולעים שאנו יודעים לחשב את שטחם למשל, משולשים, מלבנים, מקביליות וטרפזים. לעתים יהיה נוח יותר לחשב שטח צורה גדולה יותר מהצורה הנתונה, ולחסר ממנה את השטחים העודפים.

2. נסמן: b מספר נקודות השריג על ההיקף של המצולע (border).

$$S = \frac{b}{2} - 1$$

שטח המצולע:

העובדה שניתן לחשב שטח (מושג הקשור למישור דו ממדי) בעזרת אלמנט ללא ממד (נקודות שריג) היא תגלית מפתיעה וייחודית.



3. אפשר לערוך את הטבלה לריכוז הנתונים במשימה 1, בגיליון אלקטרוני.

בעמודה נוספת, נחשב את השטח בעזרת הנוסחה שמצאנו במשימה 2, ונבדוק אם הממצאים לפי חישובי שטח זהים לממצאים לפי הנוסחה המשוערת.

	F	E	D	C	B	A
1	חישוב שטח לפי נוסחה		שטח המצולע ביחידות שטח	מספר נקודות שריג היקפיות	מספר נקודות שריג פנימיות	המצולע
2	0.5		0.5	3	0	א
3	1		1	4	0	ב
4	1.5		1.5	5	0	ג
5	1.5		1.5	5	0	ד

נשים לב שהשערה ובדיקה אינן מהוות הוכחה. בפעילות זו לא נוכיח את הנוסחה.

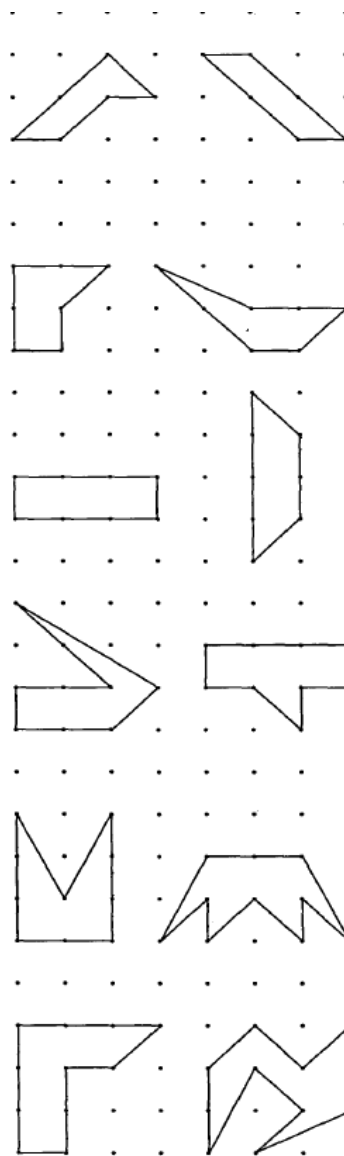
4. את כל משימות השרטוט על דף נקודות אפשר לבצע באמצעות אחד היישומונים המוצעים.

5. אפשר לבצע שרטוט ידני על דף משבצות או על דף נקודות, שאפשר להוריד מהאתר.

1. שטח כל מצולע בעל תכונה זו 2 יחידות שטח

2. שטח כל מצולע בעל תכונה זו 2.5 יחידות שטח.

כדאי לעודד את התלמידים לשרטט מצולעים מגוונים ככל האפשר בעלי התכונות הנתונות.



6. א. השטח 2 יחידות

ב. השטח 2.5 יחידות

ג. השטח 3 יחידות

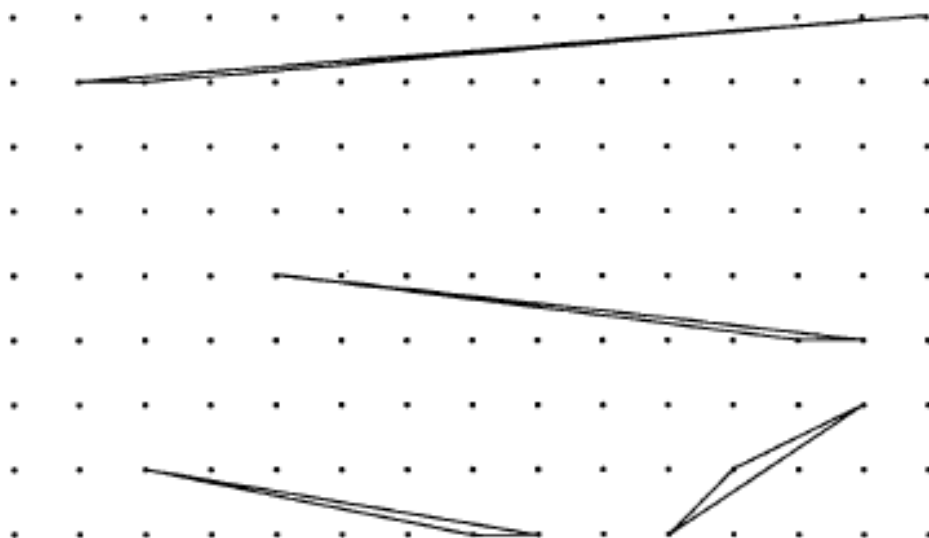
ד. השטח 3.5 יחידות

ה. השטח 4 יחידות

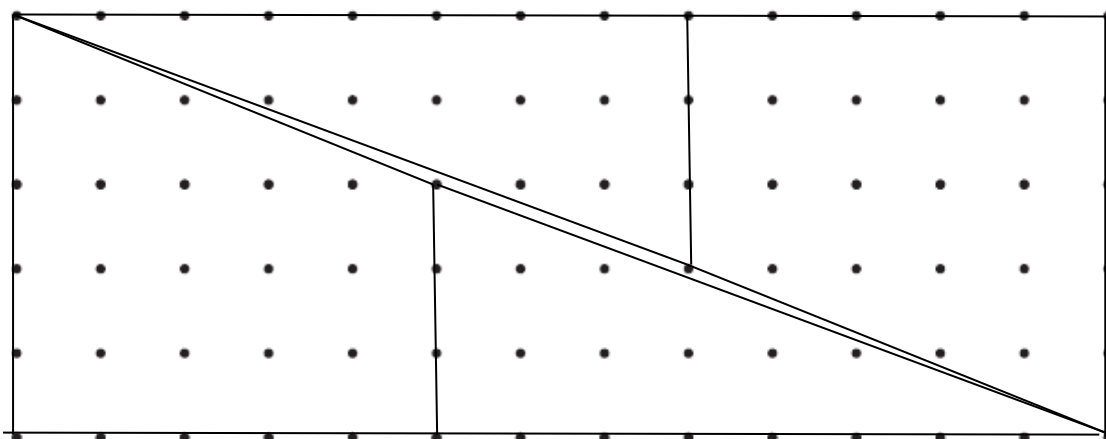
ו. השטח 4.5 יחידות

7. א. שטח משולש בסיסי שווה לחצי יחידת שטח. המשולש שבשרטוט הוא חצי מהריבוע המהווה יחידת שטח אחת.

ב. דוגמאות למשולשים בסיסיים:

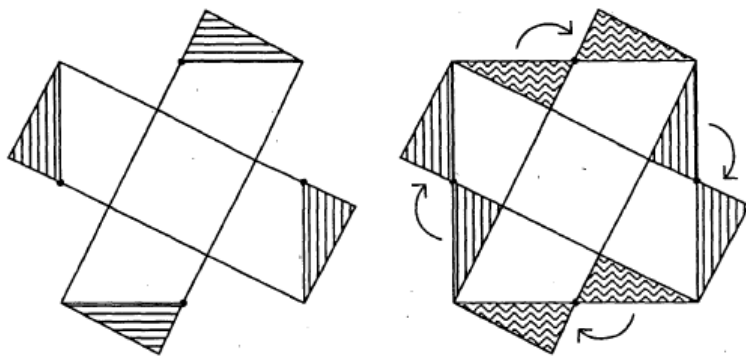
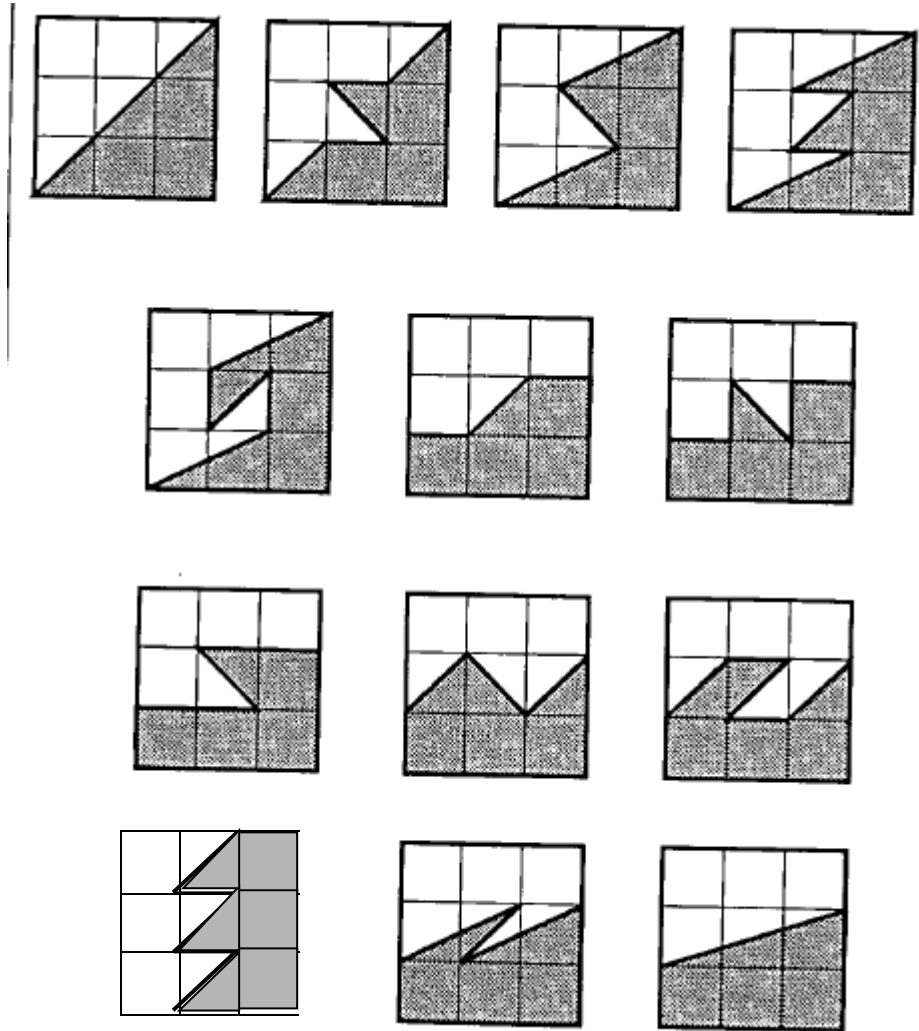


8. הבחירה של מידות המצולעים בפרדוקס זה 3, 5, 8 (שהם לא במקרה מספרים עוקבים בסדרת פיבונאצ'י) יוצרת תמונה מטעה. כדי להראות שהשרטוט הנתון שגוי, מספיק לשרטט מאוד מדויק. נשרטט את השרטוט של הפרדוקס על דף נקודות, ונמצא שבמעבר מן הריבוע על המלבן, נוצרת מקבילית חדשה. שטח המקבילית הזו, לפי הנוסחה שפיתחנו בפעילות ($b=4$), הוא יחידת שטח אחת.



דרכים נוספות ליישוב הפרדוקס הן הוכחה שהקטע שנראה כמו אלכסון המלבן אינו קטע ישר, אלא קו שבור המורכב משני קטעים (צלע הטרפז וצלע המשולש ישר הזווית). תלמידים שלמדו כבר אודות קצב השתנות של גרף יוכלו לבדוק בעזרת מדרגות צמודות שוות רוחב, שקצב השינוי של שני הקטעים אינו שווה. (תלמידים שלמדו לחשב שיפוע של קו ישר יוכלו להוכיח בעזרת חישוב השיפועים, כי מדובר בשני קטעים בעלי שיפועים שונים).

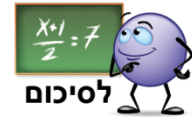
נשים לב שנדרשים חלקים חופפים (ולא רק שווי שטח).



שטח הריבוע הצבוע הוא חמישית משטח הריבוע הגדול.
אפשר לבדוק זאת על ידי חיתוך והרכבה, אך כדאי להשאיר דרך זאת רק לשלב הבדיקה, לאחר ההשערה.
בפאזל המוצג כאן, כל משולש וטרפז יוצרים יחד ריבוע, השווה בשטחו לריבוע הקטן שבמרכז.



לצייר ולפתור פרדוקס דומה לזה שהוצג בפתיחת הפעילות, במידות 5, 8, 13 או 8, 13, 21



- בוחרים באחד הסעיפים של משימה 6. מרכזים את כל ההצעות של התלמידים. מעודדים את התלמידים להציע הצעות נוספות. בודקים את ההצעות בעזרת שיקולי שטחים.
- דנים בהבדל שבין הוכחה כללית ובין הסקת מסקנות על סמך דוגמאות רבות כפי שעשינו בפעילות זו.