

7.5 וקטורים



- הרחבה והעמקה של מושגים מתמטיים מוכרים למשל, פעולות חשבון, תכונות פעולות, חבורות
- הכרות עם חבורה המוגדרת על קבוצה של עצמים גיאומטריים



דף נקודות ריבועי (בסוף הפעילות לתלמיד).



מציגים לתלמידים את ההגדרה של וקטור, ושל וקטורים שווים. מציגים את הסימון, ונותנים להם לשער מהם וקטורים נגדיים ומהו וקטור האפס. מחלקים את דף הנקודות או המשבצות, ומבקשים מן התלמידים לשרטט וקטורים שווים ולהוכיח שהם אמנם שווים לפי ההגדרה. קובעים את המרחק בין שתי נקודות סמוכות בכיוון אופקי או אנכי כיחידה. בדרך זו אפשר לתאר את הכיוון של הוקטור על ידי צעידה אופקית ואנכית (למשל, 2 יחידות ימינה ויחידה אחת למטה), ואת האורך של הוקטור כאורך האלכסון של מלבן. אם התלמידים למדו משפט פיתגורס, הם יוכלו לחשב את אורך הוקטור (ביחידות הנתונות). רצוי להכין מראש דף מנוילן עם נקודות או עם משבצות, או להקריין דף כזה על הלוח.



בפעילות זו נחשפים התלמידים לעצמים מתמטיים שאינם מספרים וקטורים, ולפעול ביניהם חיבור וקטורים. הפעילות מובילה את התלמידים לגלות צעד אחרי צעד כי קבוצת כל הוקטורים במישור עם פעולת החיבור שהוגדרה, היא חבורה.

את ההגדרה הראשונה שבפעילות (מהו וקטור, סימונו, וקטורים שווים, וקטורים נגדיים ווקטור האפס) כדאי לחשוף במליאה, עם ההגדרה של חיבור הוקטורים כדאי לתת לתלמידים להתמודד בעצמם. באופן כללי, חשוב מאוד לתת לתלמידים מתקדמים לקרוא ולהבין בעצמם טקסטים מתמטיים. זוהי מיומנות חשובה שתשרת אותם בהמשך לימודיהם.

1. א. יש לשים לב שתלמידים מתבלבלים בקשר לאורך ובקשר לכיוון. יהיו תלמידים שיגידו שהוקטורים $\underline{p}$ ו $\underline{z}$ שווים. ויהיו כאלה שיגידו ש $\underline{p}$ ו $\underline{z}$ שווים באורכם.

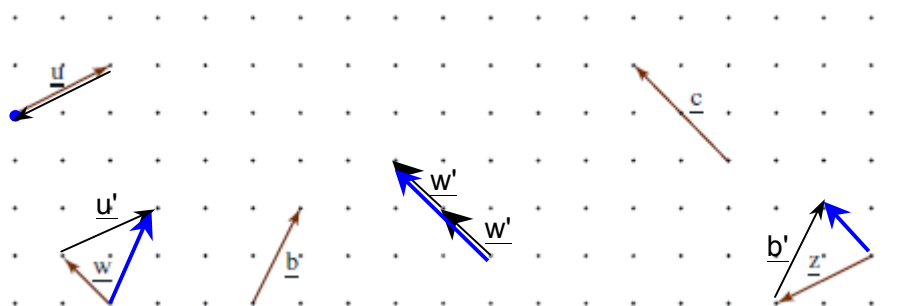
וקטורים שווים: $\underline{c} = \underline{p}$ $\underline{b} = \underline{z}$ $\underline{v} = \underline{w}$

ב. וקטורים השווים באורך, אך לא בכיוון: $\underline{r}$ ו $\underline{m}$, $\underline{b}$ ו $\underline{p}$, $\underline{z}$ ו $\underline{p}$, $\underline{b}$ ו $\underline{c}$, $\underline{z}$ ו $\underline{c}$, $\underline{u}$ ו $\underline{a}$

ג. זוג וקטורים השווים בכיוון, אבל לא באורך: $\underline{r}$ ו $\underline{h}$

ד. זוגות וקטורים נגדיים: $\underline{u}$ ו $\underline{a}$, $\underline{r}$ ו $\underline{m}$,

2. א.



$$\underline{u} + \underline{z} = \underline{0}$$

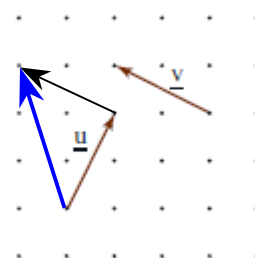
$$\underline{w} + \underline{w} = \underline{c}$$

$$\underline{z} + \underline{b} = \underline{w}$$

$$\underline{w} + \underline{u} = \underline{b}$$

ב.

3.



4.

$$\underline{k} + (-\underline{w}) = \underline{z}$$

א.

$$\underline{z} + \underline{v} = (-\underline{v})$$

ב.

$$\underline{z} + \underline{w} = \underline{k}$$

ג.

$$\underline{v} + \underline{w} =$$

ד.

אין בין הוקטורים הנתונים תוצאה מתאימה.

$$(\underline{z} + \underline{v}) + \underline{v} =$$

ה.

$$(-\underline{v}) + \underline{v} = 0$$

$$(\underline{z} + \underline{w}) + \underline{u} = (-\underline{v})$$

ו.

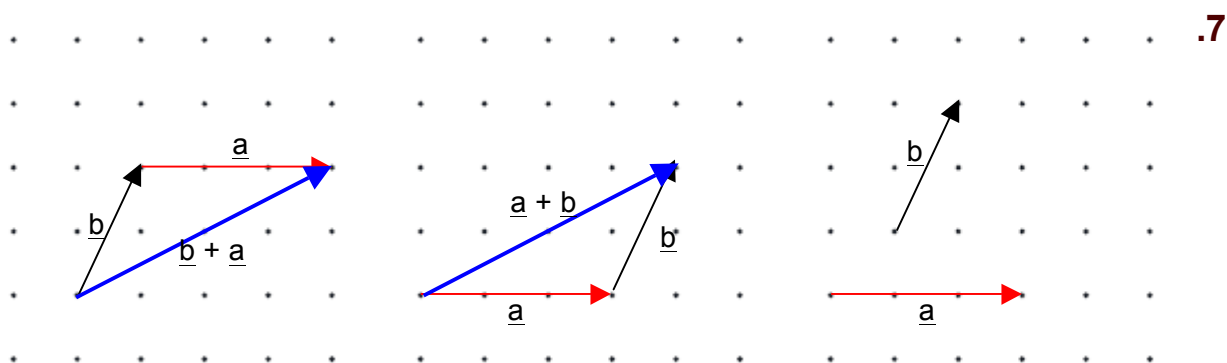
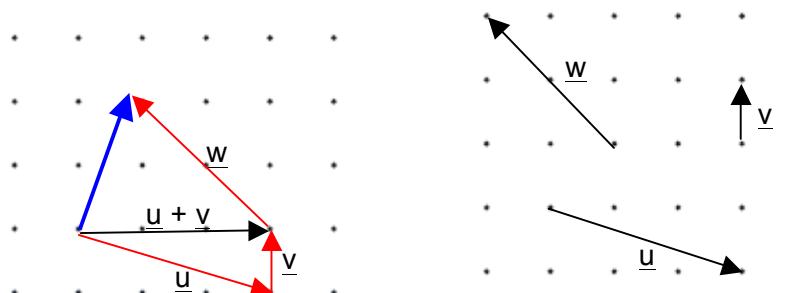
$$\underline{z} + (\underline{w} + \underline{u}) = (-\underline{v})$$

ז.

5. יש ליצור שלושה מסלולים של זוגות וקטורים. כל מסלול יוצא מקצה הזנב של וקטור התוצאה ומגיע אל ראשו.

האורך והכיוון של אחד הוקטורים בכל זוג יכול להיות שרירותי. האורך והכיוון של הוקטור השני נקבע על ידי וקטור התוצאה והוקטור הראשון, בדיוק כמו בחיבור רגיל.

6. לפי השרטוט אפשר לראות שניתן לוותר על שרטוט הוקטור $\underline{u} + \underline{v}$, ולהסתפק בשרטוט הוקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$, אחד בהמשך השני. וקטור התוצאה הוא הוקטור היוצא מן הזנב של הוקטור הראשון ($\underline{u}$) אל הראש של הוקטור השלישי ($\underline{w}$). גם במקרה של שלושה וקטורים הסכום הוא בעצם סיכום התנועה.

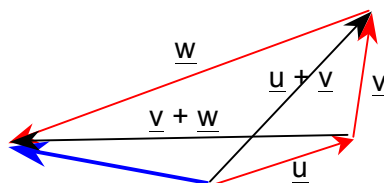


הסכומים הם וקטורים שווים.

8. נברר אילו מן התנאים הדרושים לקיום חבורה, מקיימת קבוצת הוקטורים במישור.

- קבוצת הוקטורים במישור **סגורה** לגבי הפעולה של חיבור וקטורים, כי הסכום של כל שני וקטורים במישור הוא וקטור במישור.
- פעולת חיבור וקטורים היא **קיבוצית**.

לפי מה שלמדנו בשאלה 6, אם נתון תרגיל של שתי פעולות חיבור ושלושה וקטורים, ניתן לשרטט ישירות את וקטור התוצאה, אם מניחים את הוקטורים אחד בהמשך השני. וקטור התוצאה הוא סיכום התנועה וקטור היוצא מזנב הוקטור הראשון ומסתיים בראש הוקטור השלישי. לכן, וקטור התוצאה אינו תלוי בסדר הפעולות. הדוגמה הבאה מאשרת את הקיבוציות.



- הוקטור $\underline{0}$ הוא **איבר ניטרלי** לגבי הפעולה. הסכום של כל וקטור במישור עם הוקטור $\underline{0}$ הוא הוקטור עצמו.
- לכל וקטור $\underline{u}$ בקבוצה יש **איבר הופכי**, והוא הוקטור $(-\underline{u})$. הסכום של שניהם הוא $\underline{0}$.
- פעולת חיבור וקטורים היא חילופית, כמו שראינו במשימה 7.

כל התנאים לקיום חבורה קיימים, לכן, קבוצת הוקטורים במישור מהווה חבורה חילופית לגבי חיבור וקטורים.

9. קבוצת כל הוקטורים על ציר המספרים מהווה קבוצה חלקית של קבוצת כל הוקטורים במישור. לכן, אפשר להסיק את החילופיות והקיבוציות של הקבוצה החלקית מתכונות אלו בקבוצה המכילה. מספיק לבדוק סגירות (כלומר, האם כל התוצאות המתקבלות מן החיבור של וקטורים על ציר המספרים נשארות על הציר) קיום איבר ניטרלי (האם הוא נמצא על הציר), וקיום איבר הופכי לכל וקטור שעל הציר (כלומר, האם הוא גם נמצא על הציר).

- קבוצת הוקטורים על ציר המספרים **סגורה** לגבי הפעולה של חיבור וקטורים, כי הסכום של כל שני וקטורים על ציר המספרים גם הוא וקטור על ציר המספרים.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\underline{u} + \underline{v}} \\ \xrightarrow{\underline{u}} \quad \xrightarrow{\underline{v}} \end{array}$$

- הוקטור $\underline{0}$ הוא איבר ניטרלי לגבי הפעולה. הסכום של כל וקטור על ציר המספרים עם הוקטור $\underline{0}$ הוא הוקטור עצמו.

- לכל וקטור $\underline{u}$ על ציר המספרים יש איבר הופכי, והוא הוקטור $(-\underline{u})$, שגם הוא על ציר המספרים. הסכום של שניהם הוא סכום התנועה והוא האיבר הניטרלי $\underline{0}$.

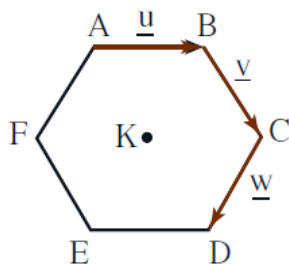
$$\begin{array}{c} \xleftarrow{-\underline{u}} \\ \xrightarrow{\underline{u}} \end{array}$$

כל התנאים לקיום חבורה קיימים, לכן, קבוצת הוקטורים על ציר המספרים מהווה חבורה חילופית לגבי חיבור וקטורים.



למסיימים

1. משורטט משושה משוכלל שמרכזו k . משושה כזה מורכב מ-6 משולשים שווים-צלעות חופפים. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, ופעולת החיבור את הווקטורים הבאים.



$$\overrightarrow{AD} = \text{ג.} \quad \overrightarrow{AC} = \text{ב.} \quad \overrightarrow{DE} = \text{א.}$$

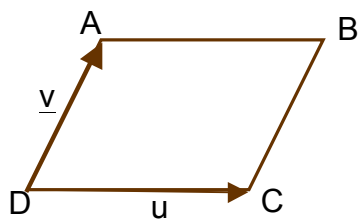
$$\overrightarrow{DF} = \text{ו.} \quad \overrightarrow{FC} = \text{ה.} \quad \overrightarrow{AK} = \text{ד.}$$

$$\left(\begin{array}{lll} \text{תשובה:} & & \\ \overrightarrow{AD} = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} \text{ ג.} & \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v} \text{ ב.} & \overrightarrow{DE} = (-\underline{u}) \text{ א.} \\ \overrightarrow{DF} = (-\underline{v}) + (-\underline{u}) \text{ ו.} & \overrightarrow{FC} = \underline{u} + \underline{u} \text{ ה.} & \overrightarrow{AK} = \underline{v} \text{ ד.} \end{array} \right)$$

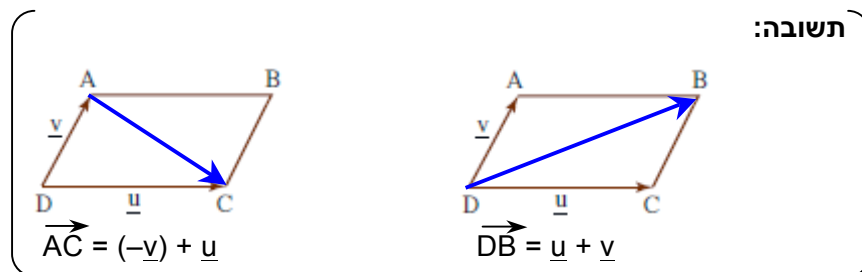
2. נתונה מקבילית ABCD.

$$\vec{DA} = \underline{v}, \vec{DC} = \underline{u}$$

הביעו בעזרת $\underline{u}$ ו $\underline{v}$ את הוקטורים $\vec{AC}$ ו $\vec{DB}$, שהם אלכסוני המקבילית.



תשובה:



- בודקים אם קבוצה חלקית נוספת של וקטורים במישור מהווה חבורה לגבי חיבור וקטורים.

למשל קבוצה של 7 וקטורים:

שלושת הוקטורים שבשרטוט: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$

שלושת הוקטורים הנגדיים להם: $-\underline{u}$, $-\underline{v}$, $-\underline{w}$

והוקטור $\underline{0}$.

