

7.3 פעולות עם תוצאות מחזוריות



- הרחבה והעמקה של מושגים מתמטיים מוכרים למשל, משוואה, פעולות חשבון, תכונות פעולות
- חזרה והעמקה של המושגים והתכונות של פעולות בינאריות.
- היכרות עם תכונות נוספות של פעולות בינאריות: איבר הופכי
- היכרות עם פעולות מחזוריות, כולל היכרות עם תופעות מחזוריות בחיינו
- בחינת תכונות של פעולות מחזוריות שונות
- שימוש באלגברה להכללת ולהצדקת תכונות של פעולות
- תרגול מיומנויות אלגבריות



אין



מתייחסים במליאה אל משימת הפתיחה. מסבירים כי הסימון $*$ שבמשימה 1 פרושו פעולת חשבון כלשהי, ונותנים דוגמה של פתרון תרגיל 1 לגבי אחת התכונות. למשל, קבוצה נקראת **סגורה** לגבי פעולה בינארית $*$, אם לכל a ו b השייכים לקבוצה, התוצאה של $a * b$ היא מספר שגם הוא שייך לקבוצה.



בפעילות זו עורכים התלמידים חזרה על כל המושגים והתכונות של פעולות חשבון שנלמדו בפעילויות הקודמות (ראו במשימת הפתיחה) ומגדירים אותם באופן פורמלי (משימה 1). התלמידים בודקים אילו מן התכונות מתקיימות בפעולות חשבון רגילות, ובפעולת הממוצע (משימה 2). כמו כן, הם נזכרים בתכונה נוספת איבר הופכי בכפל, ומגדירים איבר הופכי עבור פעולה כללית כל זאת לקראת הגדרת מושג החבורה שתיעשה בפעילות הבאה. בהמשך מתייחסים אל פעולות עם תוצאות מחזוריות שיקראו בהמשך פעולות מחזוריות. הקבוצה שעליה פועלת הפעולה המחזורית היא סופית, וקבוצת התוצאות המחזוריות היא אותה קבוצה.

1. יש לשים לב שהקבוצה עליה פועלת הפעולה היא קבוצת המספרים השלמים, לכן ההגדרות אינן כלליות לגמרי.

א. **פעולה בינארית** בקבוצת המספרים השלמים היא פעולה המוגדרת בין כל שני מספרים שלמים a ו b , כך שתוצאת הפעולה $a * b$ היא מספר יחיד (לאו דוקא שלם).

ב. קבוצת המספרים השלמים **סגורה** לגבי פעולה בינארית $*$, אם לכל שני מספרים שלמים a ו b , התוצאה של $a * b$ היא גם כן מספר שלם כלומר, שייך לקבוצה.

ג. פעולה בינארית **חילופית** בקבוצת המספרים השלמים היא פעולה המקיימת:

$$a * b = b * a$$

עבור כל שני מספרים שלמים a ו b .

ד. איבר **ניטרלי** לגבי פעולה בינארית (חילופית) בקבוצת המספרים השלמים הוא מספר שלם e המקיים:

$$a * e = e * a = a$$

לכל a בקבוצה כלומר שלם.

ה. פעולה בינארית **קיבוצית** בקבוצת המספרים השלמים היא פעולה המקיימת $(a * b) * c = a * (b * c)$ עבור כל שני מספרים שלמים a ו b .

2. אפשר להכין לתלמידים טבלה כזו כדי שימלאו אותה. אין צורך לדרוש מן התלמידים הנמקות בכתב. כדאי לדרוש הנמקות בעל פה במקרים של תשובות שגויות. אין צורך למלא את כל הטבלה, אפשר להסתפק בשתי פעולות בלבד.

בקבוצת המספרים הטבעיים:

פעולה תכונה	חיסור	ממוצע	חזקה	כפל
פעולה בינארית	כן. חיסור של כל שני טבעיים נותן כתוצאה מספר יחיד.	כן. ממוצע של כל שני טבעיים נותן כתוצאה מספר יחיד.	כן. העלאה בחזקה של מספר טבעי באחר נותנת כתוצאה מספר יחיד.	כן. כפל של כל שני טבעיים נותן כתוצאה מספר יחיד.
קבוצה סגורה	לא. למשל, התוצאה של $3 - 7$ אינה שייכת לקבוצת המספרים הטבעיים.	לא. למשל, הממוצע של 4 ו 7 אינו שייך לקבוצת המספרים הטבעיים.	כן. העלאה בחזקה של מספר טבעי באחר נותנת כתוצאה מספר טבעי.	כן. כפל של כל שני מספרים טבעיים נותן כתוצאה מספר טבעי.
פעולה חילופית	לא. למשל, $3 - 7 \neq 7 - 3$	כן. לכל שני מספרים טבעיים a ו b $\frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2}$	לא. למשל, $2^3 \neq 3^2$	כן. לכל שני מספרים טבעיים a ו b $a \cdot b = b \cdot a$
איבר ניטרלי	לא מתייחסים בפעולה שאיננה חילופית	לא. ההוכחה בפעילות הקודמת.	לא מתייחסים בפעולה שאיננה חילופית	כן. 1 איבר ניטרלי. לכל מספר טבעי a $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
פעולה קיבוצית	לא. למשל, $(8 - 5) - 3 \neq 8 - (5 - 3)$	לא. למשל, $\frac{3+7}{2} + 11 \neq 3 + \frac{7+11}{2}$ $8 \neq 6$	לא. למשל, $(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$ $8^2 \neq 2^9$ $64 \neq 512$	כן. לכל שלושה מספרים טבעיים a , b ו c $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

3. א. מספרים הופכיים זה לזה עבור פעולה מסוימת הם מספרים שתוצאת הפעולה ביניהם היא האיבר הניטרלי לגבי הפעולה.

תרגום למילים של הגדרה פורמלית הוא דרך טובה לבחון אם התלמידים הבינו את ההגדרה הפורמלית.

ב. ההופכי של 5 בפעולת החיבור הוא 5- . כי פעולה החיבור ביניהם נותנת כתוצאה את האיבר הניטרלי לגבי החיבור (0). נהוג לקרוא לזוג מספרים הופכיים בפעולת החיבור מספרים נגדיים (למשל, 5- נגדי של 5).

4. א. לא. בקבוצת המספרים השלמים יש איבר הופכי שלם רק ל 1 ול 1- . המספרים ההופכיים לכל השלמים האחרים אינם שלמים.

ב. למשל, בקבוצת המספרים השלמים פרט ל 0 והשברים החיוביים והשליליים (המספרים הרציונליים), יש מספר הופכי לכל מספר. הוצאנו את 0 מן הקבוצה כי ל 0 אין הופכי בכלל, כי אין מספר שפותר את המשוואה: $0 \cdot x = 1$

5. א. $3 \oplus_{12} 10 = 1$ ג. $8 \oplus_{12} 5 = 1$ ה. $8 \oplus_{12} 11 = 7$

ב. $3 \oplus_{12} 9 = 0$ ד. $4 \oplus_{12} 3 = 7$ ו. $7 \oplus_{12} 7 = 2$

6. א. $10 \oplus_{12} 5 = 3$ ב. $7 \oplus_{12} 8 = 3$ ג. $11 \oplus_{12} 8 = 7$

7. א. כל פעולה עם מספרים מהקבוצה המוגדרת שתוצאתה בחיבור רגיל 0 או 12.

למשל, $6 \oplus_{12} 6 = 0$, $11 \oplus_{12} 1 = 0$

ב. כל פעולה עם מספרים מהקבוצה המוגדרת שתוצאתה בחיבור רגיל 1 או 13.

למשל, $0 \oplus_{12} 1 = 1$, $10 \oplus_{12} 3 = 1$

ג. כל פעולה עם מספרים מהקבוצה המוגדרת שתוצאתה בחיבור רגיל 5 או 17.

למשל, $2 \oplus_{12} 3 = 5$, $8 \oplus_{12} 9 = 5$

8. א. הקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ סגורה לגבי הפעולה $\oplus_{12}$, כי תוצאת הפעולה על כל שני מספרים מן הקבוצה גם הוא מספר מן הקבוצה.

ב. הפעולה $\oplus_{12}$ היא חילופית, כי מחשבים את תוצאות הפעולה על כל שני מספרים באמצעות פעולת חיבור רגיל שהוא חילופי.

ג. הפעולה $\oplus_{12}$ היא קיבוצית, כי מחשבים את תוצאות הפעולה באמצעות פעולת חיבור רגיל שהוא קיבוצי.

ד. 0 הוא האיבר הניטרלי של הפעולה, כי לכל a בקבוצה, $a \oplus_{12} 0 = 0 \oplus_{12} a = a$.

ה. 8 ו 4 הם מספרים הופכיים זה לזה לגבי הפעולה $\oplus_{12}$, כי $8 \oplus_{12} 4 = 0$ (0 הוא המספר הניטרלי לגבי הפעולה).

9. אם מפעילים את הפעולה על מספר וההופכי לו מתקבל כתוצאה המספר הניטרלי לגבי הפעולה 0.

לכן, ההופכי ל 3 הוא 9 ($3 \oplus_5 9 = 0$), ההופכי ל 11 הוא 1 ($11 \oplus_5 1 = 0$),
ההופכי ל 0 הוא 0 עצמו ($0 \oplus_5 0 = 0$), וגם 6 הופכי לעצמו ($6 \oplus_5 6 = 0$).

10. יש לשער שהתלמידים יגדירו הגדרה דומה להגדרה שבמסגרת. אם הגדרתם שונה, כדאי להתייחס אליה.

11. א. לוח הפעולה $\odot_5$

$\odot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ב. לפי הלוח מסיקים ש

- הקבוצה סגורה לגבי הפעולה, כי כל התוצאות בתוך הלוח שייכות לקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- המספר הניטרלי הוא 1, כי בשורה שלו ובטור שלו התוצאות זהות למספרים שבשולי הלוח כלומר, $a \odot_5 1 = 1 \odot_5 a = a$ לכל a בקבוצה
- הפעולה חילופית, כי הלוח סימטרי לגבי האלכסון בכיוון \. כלומר תוצאת הפעולה בין זוג מספרים ותוצאת הפעולה בין אותם המספרים בסדר הפוך, שוות (ראו למשל את שני זוגות המשבצות הצבועות בלוח).
- יש זוגות של מספרים הופכיים. אותם זוגות שהפעולה ביניהם נותנת כתוצאה את המספר 1 שהוא המספר הניטרלי. למשל, 1 הופכי לעצמו, 4 הופכי לעצמו, ו 2 ו 3 הופכיים זה לזה.
- ג. לא לכל מספר בקבוצה יש הופכי. ל 0 אין הופכי.
- ד. קיבוציות בודקים באמצעות פעולת שרשרת בין שלושה מספרים, והלוח מראה פעולה בין שני מספרים בלבד.

12. בשלב ראשון נגלה ש 1 הוא האיבר הניטרלי של הפעולה בקבוצה.

בשלב שני, נחשב את הפעולה בין 2 ובין כל איבר בקבוצה.

$$2 \odot_4 0 = 0 \quad 2 \odot_4 1 = 2 \quad 2 \odot_4 2 = 0 \quad 2 \odot_4 3 = 2$$

ל 2 אין איבר הופכי, כי התוצאה 1 לא התקבלה באף מקרה.

13. א. משימה זו, מציגה לתלמידים תופעה מחזורית: פעולה שמתרחשת בתדירות קבועה. ישנן דרכים שונות

לפתור את השאלה. אפשרות אחת היא לערוך רשימה של שעות הטיולים הצפויות ליוסי ולמיכל, ולמצוא באיזו שעה שניהם ייצאו שוב לטיול משותף.

כדאי לעודד את התלמידים שפותרים בדרך זו, לנסות לייעל את דרך הפתרון.

אפשר לנצל את השאלה הזו כדי להסביר לתלמידים את המושג "הכפולה המשותפת הקטנה ביותר" ואת הקשר שלו לשאלה. במקרה הזה, הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של 8 ושל 9 היא 72, ולכן יוסי ומיכל ייפגשו כל 72 שעות.

ב. הפעם הבאה שבה ייפגשו יוסי ומיכל בטיוליהם תתרחש 72 שעות מאוחר יותר. אחרי 3 יממות בדיוק כלומר, ביום רביעי, בשעה 7:00.



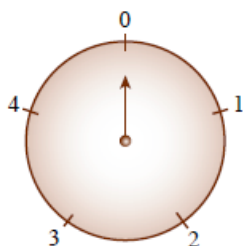
קטע זה, מציג לתלמידים תופעה מחזורית נוספת מן המציאות. גם אותה אפשר לפתור באותן דרכים שבהן פתרו התלמידים את שאלה 12:

- עריכת רשימה של השנים בהן מופיעים כל אחד משני מיני הציקדה וחיפוש חפיפה עריכת הרשימה באופן ידני תימשך זמן רב, אבל אפשר לבצע אותה בגיליון Excel.
- מציאת הכפולה המשותפת המינימלית של 17 ושל 13 (221).

אפשר לקיים דיון עם התלמידים על הקשר שבין השאלה הזו, לפעולת החיבור המחזורי שהכרנו בפעילות זו. הקשר טמון בהגדרת המספר שאותו אנחנו מחפשים, המספר הראשון הדרוש צריך לתת שארית 0 בחלוקה ב 17, ושארית 0 בחלוקה ב 13.



א. נסו להגדיר פעולת חיסור מחזורית על הקבוצה $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. היעזרו בשעון בעל 5 תחנות.



תשובה: למשל נגדיר פעולה $b \in \Theta_5$ בין כל זוג מספרים מהקבוצה הנתונה כך:
סובבו את המחוג a תחנות בכיוון השעון,
ומשם סובבו בכיוון הפוך b תחנות נוספות.
תוצאת הפעולה היא מספר התחנה שהגעתם אליה.

ב. הכינו לוח לפעולה שהגדרתם, ומצאו בו תופעות מעניינות.

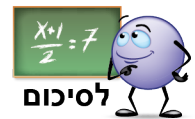
		b				
		Θ_5	0	1	2	3
a	0	0	4	3	2	1
	1	1	0	4	3	2
	2	2	1	0	4	3
	3	3	2	1	0	4
	4	4	3	2	1	0

תשובה: תופעות מעניינות בלוח למשל,

- בכל שורה ובכל עמודה מופיעים כל המספרים.
- המספרים בכל עמודה מופיעים לפי הסדר שעל השעון עם כיוון השעון. בדומה לזה בכל שורה המספרים מופיעים לפי סדר הופעתם בסיבוב נגד כיוון השעון.
- לאורך כל ציר שבכיוון $\searrow$ כל המספרים שווים. לאורך כל ציר שבכיוון $\swarrow$ המספרים מופיעים בדילוגים של 2 לפי סדר הופעתם על השעון, בסיבוב נגד כיוון השעון.
- קיימת סימטריה בין מספרי הלוח ביחס לאלכסון שבכיוון $\swarrow$

ג. בדקו אילו תכונות מקיימת הפעולה שהגדרתם.

תשובה: אפשר לראות בלוח כי הפעולה בינארית ומחזורית, הקבוצה סגורה לגבי הפעולה, הפעולה איננה חילופית (לכן לא נתייחס לאיבר ניטרלי, ובלי איבר ניטרלי לא נתייחס למספרים הופכיים). הפעולה איננה קיבוצית.



*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

מציגים לוח עם פעולה * בקבוצה $\{0, 1, 2, 3\}$.

- זהו בתוך הלוח תכונות של הקבוצה $\{0, 1, 2, 3\}$ והפעולה *.
- האם בקבוצה הנתונה יש מספר הופכי לכל מספר? נמקו.
- הפעולה * היא קיבוצית. אשרו באמצעות שתי דוגמאות.
- נסו לשער מהי הפעולה *.