

7.2 פעולות נוספות



מטרות

- הרחבה והעמקה של מושגים מתמטיים מוכרים למשל, משוואה, פעולות חשבון, תכונות פעולות
- העמקת ההיכרות עם התכונות חילופיות ואיבר ניטרלי
- היכרות עם תכונות נוספות של פעולות בינאריות: סגירות וקיבוציות
- בחינת תכונות של פעולות מוכרות
- תרגול מיומנויות אלגבריות
- שימוש באלגברה לפתרון בעיות
- שימוש באלגברה להצדקת תכונות של פעולות



אמצעי עזר

אין



פתיחה

מציגים לתלמידים את התרגילים עם הפעולה החדשה $\bowtie$, ומבקשים מהם לשער מהי הפעולה, ולבדוק אם השערתם מתאימה לכל התרגילים.



פתרונות והערות

בפעילות זו מזכירים את המושגים והתכונות שנלמדו בפעילות הקודמת פעולה בינארית, פעולה חילופית ואיבר ניטרלי של פעולה. התזכורת הזו חשובה בעיקר במקרים שבהם יש רווח זמן גדול בין פעילויות. חשוב להדגיש שוב שבשלב זה מתייחסים לתכונת האיבר הניטרלי רק בפעולות חילופיות.

מיישמים את התכונות על הפעולה החדשה $a \bowtie b = a + b - 3$

בשלב שני, מציגים תכונות חדשות הסגירות והקיבוציות. כדאי לשים לב כי הסגירות היא תכונה של קבוצת המספרים שעליה מופעלת פעולה ולעומת זאת, תכונות כמו חילופיות וקיבוציות הן תכונות של הפעולה. אפשר לשמוע זאת בשפה. אומרים: **קבוצה סגורה** לגבי הפעולה לעומת **פעולה קיבוצית**.

תכונת הקיבוציות היא תכונה שאינה קלה להבנה, ותלמידים רבים אינם מבחינים בין חילופיות וקיבוציות, או חושבים ששתי התכונות תלויות זו בזו כלומר, חייבות להתקיים או לא להתקיים בו זמנית. כאשר התלמידים מתבקשים לבדוק קיבוציות, הם לוקחים לפעמים בחשבון רק שני מספרים. לכן, בהצגה של תכונת הקיבוציות חשוב לעמת את שתי התכונות זו מול זו, להראות שהן תכונות נפרדות, ולהדגיש כי **למרות** שמדובר בפעולות בינאריות, תכונת הקיבוציות נבדקת על שלושה מספרים, **ובגלל** שמדובר בפעולות בינאריות יש טעם בבדיקה הזאת.

בפעילות יש שתי הגדרות מורכבות לתכונת הסגירות ולתכונת הקיבוציות. התיווך של המורה בהבנת ההגדרות ייעשה לפי יכולת הכיתה. מקריאה משותפת והסבר פרטני לקבוצות של תלמידים לא חזקים, עד התמודדות עצמית בקבוצות של תלמידים מתקדמים. מתבקש לבדוק אם פעולות החשבון הרגילות מקיימות את התכונות החדשות הנלמדות. לא כדאי להרבות בכך בדיון בפעילות זאת, כי דבר זה ייעשה בפעילויות הבאות.

1. $a \bowtie b = a + b - 3$

א. $0 \bowtie -1 = -4$	ג. $-3 \bowtie -2 = -8$	ה. $\frac{1}{2} \bowtie -\frac{1}{6} = -2\frac{2}{3}$
ב. $2 \bowtie 2 = 1$	ד. $\frac{1}{2} \bowtie 2\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$	ו. $-5.2 \bowtie 8 = -0.2$

2. ניתן למצוא את פתרון המשוואה באופן אינטואיטיבי באמצעות חשיבה הפוכה על הפעולה, או באופן פורמלי.

למשל כדי למצוא מהו x במשוואה $x \bowtie 2 = 0$ אפשר לחפש מספר שאם יוסיפו אותו ל 2 ויחסרו 3 יקבלו 0, או לפתור את המשוואה $2 + x - 3 = 0$

א. $0 \bowtie x = 8$	ג. $-3 \bowtie x = 3$	ה. $7 \bowtie x = 7$
$x = 11$	$x = 9$	$x = 3$
ב. $x \bowtie 2 = 6$	ד. $3 \bowtie x = 4$	ו. $2x \bowtie 8 = 6$
$x = 7$	$x = 4$	$x = 0.5$

3. הפעולה $\bowtie$ היא פעולה בינארית, שכן היא מתבצעת בין שני מספרים ונותנת כתוצאה מספר יחיד.

הפעולה $\bowtie$ היא פעולה חילופית, מפני שפעולת החיבור היא חילופית:

$$a + b - 3 = b + a - 3$$

$$a \bowtie b = b \bowtie a \quad \text{לכן}$$

לפעולה $\bowtie$ יש איבר ניטרלי והוא 3.

כדי שיהיה איבר ניטרלי צריך להתקיים עבור כל מספר a ועבור המספר הניטרלי b :

$$a \bowtie b = a$$

$$a + b - 3 = a$$

השוויון יתקיים אם $b = 3$.

4. המשימה דורשת הבנה של המושג קבוצה סגורה לגבי פעולה, והיא באה לברר אם התלמידים הבינו את

ההגדרה. לפני שהתלמידים עובדים על שאלה זו, כדאי לדון איתם בשאלה כיצד מראים שקבוצת מספרים סגורה או אינה סגורה עבור פעולה מסוימת. מדגישים מדוע דוגמה אחת מספיקה כדי להראות שקבוצה מסוימת איננה סגורה לגבי הפעולה, אך איננה מספיקה כדי להראות שהקבוצה סגורה.

בנוסף, מדגישים כי ייתכן מצב בו עבור אותה פעולה, קבוצת מספרים אחת תהיה סגורה וקבוצת מספרים אחרת לא תהיה סגורה. למשל, לגבי פעולת החיסור, קבוצת הטבעיים איננה סגורה (למשל, $3 - 7 = -4$) אבל קבוצת המספרים השלמים סגורה.

א. קבוצת הטבעיים **סגורה** לגבי פעולת הכפל, כי כל מכפלה של מספרים טבעיים היא מספר טבעי.

ב. קבוצת הטבעיים **איננה סגורה** לגבי פעולת החילוק, כי מנה של מספרים טבעיים היא לא תמיד מספר טבעי.

$$5:2 = 2\frac{1}{2} \text{ (למשל,)}$$

ג. קבוצת הטבעיים **סגורה** לגבי פעולת החזקה, כי התוצאה של העלאת מספר טבעי במעלה טבעית, היא מספר טבעי. תכונה זו נובעת מכך שפעולת הכפל היא פעולה סגורה עבור המספרים הטבעיים, ופעולת החזקה בין מספרים טבעיים מוגדרת על סמך פעולת הכפל.

ד. קבוצת הטבעיים **איננה סגורה** לגבי פעולת הממוצע. אפשר להראות זאת בעזרת דוגמה נגדית: (למשל, הממוצע החשבוני של המספרים 2 ו 3 הוא 1.5).

5. א. קבוצת המספרים הטבעיים **איננה סגורה** לגבי הפעולה. למשל, $1 \bowtie 1 = -1$, ו -1 איננו מספר טבעי.

דוגמה זו מראה כי למרות שכמעט כל התוצאות של הפעולה בין שני מספרים טבעיים הן מספרים טבעיים, מספיקה תוצאה אחת שאיננה טבעית לגרום שהקבוצה לא תהיה סגורה.

ב. למשל, קבוצת המספרים השלמים סגורה לגבי הפעולה $\bowtie$ כי התוצאה בין כל שני מספרים שלמים נותנת מספר שלם.

6. ההשערה אם הפעולה $\bowtie$ היא קיבוצית יכולה להתבסס על דוגמה. למשל,

$$6 \bowtie (2 \bowtie 1) = (6 \bowtie 2) \bowtie 1 =$$

$$6 \bowtie (0) = 3 \quad (5) \bowtie 1 = 3$$

הדוגמה מובילה להשערה, שהפעולה קיבוצית. ההוכחה צריכה להיות כללית.

$$(a \bowtie b) \bowtie c =$$

$$(a + b - 3) \bowtie c =$$

$$a + b - 3 + c - 3$$

$$a + b + c - 6$$

$$a \bowtie (b \bowtie c) =$$

$$a \bowtie (b + c - 3) =$$

$$a + b + c - 3 - 3 =$$

$$a + b + c - 6$$

7. הפעולה $\blacktriangle$ איננה קיבוצית. נראה זאת באמצעות דוגמה:

$$a \blacktriangle b = 2 \cdot a + b$$

$$(2 \blacktriangle 3) \blacktriangle 1 =$$

$$(2 \cdot 2 + 3) \blacktriangle 1 =$$

$$7 \blacktriangle 1 =$$

$$14 + 1 = 15$$

$$2 \blacktriangle (3 \blacktriangle 1) =$$

$$2 \blacktriangle (2 \cdot 3 + 1) =$$

$$2 \blacktriangle 7 =$$

$$2 \cdot 2 + 7 = 11$$

הפעולה ♠ איננה קיבוצית. נראה זאת באמצעות דוגמה:

$$a \spadesuit b = \frac{a+b}{2}$$

$$(2 \spadesuit 4) \spadesuit 1 =$$

$$\frac{2+4}{2} \spadesuit 1 =$$

$$3 \spadesuit 1 =$$

$$\frac{3+1}{2} = 2$$

$$2 \spadesuit (4 \spadesuit 1) =$$

$$2 \spadesuit \frac{4+1}{2} =$$

$$2 \spadesuit 2.5 =$$

$$\frac{2+2.5}{2} = 2.25$$

הפעולה ★ איננה קיבוצית. נראה זאת באמצעות דוגמה:

$$a \star b = a^2 + b$$

$$(2 \star 1) \star 3 =$$

$$(2^2 + 1) \star 3 =$$

$$5 \star 3 =$$

$$5^2 + 3 = 28$$

$$2 \star (1 \star 3) =$$

$$2 \star (1^2 + 3) =$$

$$2 \star 4 =$$

$$2^2 + 4 = 8$$

8. את פעולת המרחק בין שני מספרים על ציר המספרים אפשר להגדיר על ידי פעולת החיסור של המספר הקטן מן המספר הגדול (חישוב זה נותן מספר חיובי גם אם אחד המספרים שלילי או שניהם שליליים). אם המספרים שווים, המרחק הוא 0. אפשר גם לבטא את הפעולה בדרך אלגברית באמצעות ערך מוחלט כך:

$$a M b = |a - b|$$

א. הפעולה M היא פעולה בינארית כי היא מוגדרת לכל שני מספרים על ציר המספרים. תוצאת הפעולה, כלומר המרחק בין המספרים מיוצג על ידי מספר יחיד.

ב. קבוצת המספרים השלמים סגורה לגבי הפעולה M, כי המרחק בין כל שני מספרים שלמים הוא מספר שלם.

ג. הפעולה M חילופית, כי $a M b = b M a$ (המרחק בין a ל b אינו תלוי בסדר בחירת הנקודות). בחישוב תמיד מבצעים חיסור בין המספר הגדול למספר הקטן, ללא תלות בסדר שבו המספרים מסודרים.

ד. ההשערה אם הפעולה M היא קיבוצית יכולה להתבסס על דוגמה. למשל,

$$(1 M 5) M 8 =$$

$$4 M 8 = 4$$

$$1 M (5 M 8) =$$

$$1 M 3 = 2$$

זוהי דוגמה נגדית, לכן הפעולה M אינה קיבוצית.

ה. נראה כאילו 0 הוא מספר ניטרלי, כי המרחק בין מספר חיובי ו 0 הוא המספר החיובי, אבל הקבוצה שבה אנו מבצעים את הפעולות היא קבוצת המספרים השלמים הכוללת גם את המספרים השלמים השליליים. אם a מספר שלילי, אז המרחק בינו לבין 0 אינו a (למשל, $-7 M 0 = 7$).

ו. המספרים השליליים אינם מאפשרים את קיום האפס כאיבר ניטרלי כמו שראינו בסעיף הקודם. אפשר למשל לבחור את קבוצת המספרים הטבעיים ו 0. קבוצה זו סגורה לגבי הפעולה M כי המרחק בין שני מספרים טבעיים הוא תמיד מספר טבעי או 0. 0 הוא מספר ניטרלי בקבוצה לגבי הפעולה M.

אפשר לבחור גם קבוצה חלקית של המספרים הטבעיים ואפס למשל, הקבוצה המכילה את המספרים 0, 1, 2, 3. המרחק בין כל שני מספרים בקבוצה זו הוא מספר שלם בין 0 ל 3, לכן גם קבוצה זו סגורה לגבי הפעולה M.



לתלמידים בעלי מיומנויות אלגבריות מתקדמות.

1. במשימה 7 ראינו כי הפעולה $a \blacktriangle b = 2 \cdot a + b$ איננה קיבוצית.

אילו שלשות של מספרים מקיימים בכל זאת את הקיבוציות?

תשובה:

$$\begin{aligned}(a \blacktriangle b) \blacktriangle c &= \\(2a + b) \blacktriangle c &= \\(4a + 2b) + c &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \blacktriangle (b \blacktriangle c) &= \\a \blacktriangle (2b + c) &= \\2a + (2b + c) &= \end{aligned}$$

שתי התוצאות תהיינה שוות אם $4a = 2a$, וזה ייתכן רק אם $a = 0$. כלומר, כל שלשה של מספרים בהם המספר הראשון הוא 0, מקיימת את הקיבוציות.

2. במשימה 7 ראינו כי הפעולה $a \spadesuit b = \frac{a+b}{2}$ איננה קיבוצית.

אילו שלשות של מספרים מקיימים בכל זאת את הקיבוציות?

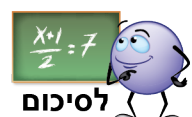
תשובה:

$$\begin{aligned}(a \spadesuit b) \spadesuit c &= \\ \frac{a+b}{2} \spadesuit c &= \\ \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} &= \\ \frac{a+b+2c}{2} : 2 &= \\ \frac{a+b+2c}{4} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a \spadesuit (b \spadesuit c) &= \\ a \spadesuit \frac{b+c}{2} &= \\ a + \frac{\frac{b+c}{2}}{2} &= \\ \frac{2a+b+c}{2} : 2 &= \\ \frac{2a+b+c}{4} & \end{aligned}$$

שתי התוצאות תהיינה שוות רק אם שני השברים יהיו שווים $2a + b + c = a + b + 2c$ כלומר $a = c$.

מסקנה: כל שלשה של מספרים בהם המספר הראשון שווה למספר השלישי, מקיימת את הקיבוציות. הערה: ההוכחה הפורמלית של הטענה הזאת דורשת ביצוע פעולות בשברים אלגבריים ברמה גבוהה. אם התלמידים טרם למדו את הנושא, אפשר לדלג על המשימה או להסתפק בהסקת המסקנה לפי שיקולים המבוססים על ניסוי וטעיה או על שימוש חוזר בחוק החילוף של פעולת הממוצע.



- דנים באסטרטגיות השונות בהן השתמשנו במהלך הפעילות, תוך דגש על השימוש בביטויים האלגבריים לצורך הצדקה והדגמה של תכונות של פעולות.
- חוזרים על התכונות שהכרנו עבור פעולות בינאריות (חילופיות, איבר ניטרלי, סגירות וקיבוציות).