

6.3 מסביב לעולם



מטרות

- חשיפה לגיאומטריה שונה מגיאומטריה המישור
- התייחסות לשאלה מן המציאות
- הבנת המרחב משרטוטים במישור
- חשיפה לשימושים מתמטיים בתחומים אחרים



אמצעי עזר

בלון מנופח או כדור (עדיף שקוף)
גלובוס (עדיף לכל קבוצה)
מפת כדור הארץ למורה

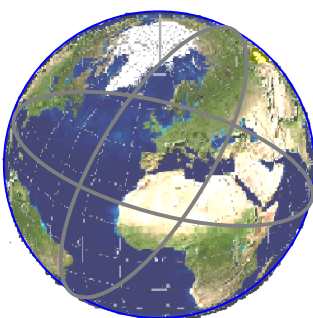


פתיחה

מראים את מפת העולם על הלוח ושואלים: על אילו מארצות אירופה, לדעתכם, יעבור מטוס הנוסע מתל אביב ללוס אנג'לס בהנחה שהוא טס לפי המסלול הקצר ביותר? אין צורך לתקן את התלמידים אם הם טועים במסלול. שאלה דומה נשאלת במשימה 3, כך שיוכלו לתקן את הטעות.



פתרונות והערות



הפעילות עוסקת בגיאומטריה על כדור, ומשתמשים לצורך זה בסיטואציה של מסלולי טיסה, שהם בדרך כלל נקבעים לפי המסלולים הקצרים ביותר. התלמידים לומדים מושג חדש, מעגל גדול על כדור, שהוא מעגל על מעטפת הכדור שרדיוסו שווה לרדיוס הכדור (לכן הוא מונח במישור המכיל את רדיוס הכדור). הם לומדים על הקשרים בין נקודות שעל פני הכדור לבין מעגלים גדולים, וכן בין מעגלים גדולים לבין מעגלים גדולים אחרים.

גאומטריה על כדור (גיאומטריה ספירית) היא גאומטריה שונה מן הגיאומטריה של

המישור. גיאומטריה זאת עוסקת במונחים, תכונות ומשפטים שקולים לאלה שבגיאומטריה של המישור, אך שונים מהם. תלמידים עלולים להשליך את הידע שלהם לגבי מישור על כדור במרחב, והפעילות מתייחסת לכך. להלן חלק מן ההבדלים בין גיאומטריה במישור לגיאומטריה ספירית (גיאומטריה על כדור).

גיאומטריה של המישור	גיאומטריה ספירית
אקסיומת המקבילים: דרך כל נקודה עובר ישר אחד ויחיד המקביל לישר נתון.	כל שני ישרים (מעגלים גדולים) נחתכים.
סכום הזוויות במשולש שווה ל 180° .	סכום הזוויות במשולש גדול מ 180° .
קיימים מלבנים.	לא קיימים מלבנים.
שני משולשים השווים בשלוש זוויותיהם דומים, אך לא בהכרח חופפים.	שני משולשים השווים בשלוש זוויותיהם הם חופפים.
לכל שלוש נקודות על אותו ישר, אחת בדיוק נמצאת בין שתי האחרות.	היחס "בין" אינו קיים

שימוש נוסף לגיאומטריה על כדור: בהלכה היהודית יש להתפלל לכיוון ירושלים. לצורך חישוב זווית התפילה מכל מקום על פני כדור הארץ ספרי ההלכה עושים שימוש בגאומטריה הספירית. ניתן להשתמש בשיטה זו גם באסלאם, על מנת להתפלל לכיוון מכה.

1. א. המסלול הקצר ביותר בין שתי נקודות במישור הוא קטע המחבר את שתי הנקודות.

ב. המסלול הקצר ביותר בין שתי נקודות על הגלובוס הוא הקשת (הקצרה יותר מבין שתי קשתות), שהיא חלק ממעגל על הגלובוס, העובר דרך שתי הנקודות, ומרכזו במרכז הגלובוס. ישנן נקודות שעבורן שתי הקשתות האלה שוות. אלו נקודות על גבי הכדור הממוקמות זו מול זו משני צידי הכדור. כלומר, הקו הישר ביניהן עובר דרך מרכז הכדור. נקודות אלו נקראות נקודות קוטביות.

2. א. אפשר לשרטט על הכדור אינסוף מעגלים גדולים (למשל קווי האורך של הגלובוס).

ב ג. מעבירים מישור דרך שלוש נקודות: שתי הנקודות הנתונות ומרכז הכדור.

אם שלוש הנקודות יוצרות משולש (כלומר, אם הן אינן על קו ישר אחד), הן מגדירות מישור יחיד לפי הגיאומטריה האוקלידית. הקו הנוצר על ידי חיתוך בין מישור זה והכדור הוא מעגל גדול. אם לא נוצר משולש (כלומר אם שתי הנקודות קוטביות, והישר המחבר אותן עובר דרך מרכז הכדור), אפשר להעביר דרך קוטר הכדור המחבר ביניהן אינסוף מישורים שכל אחד מהם חותך את הכדור במעגל. לכן, אם שתי הנקודות קוטביות יש אינסוף מעגלים גדולים העוברים דרכן. לפי השרטוט במשימה זו, דרך P ו Q ניתן להעביר רק מעגל גדול אחד, ודרך N ו S ניתן להעביר אינסוף מעגלים.

3. א. מסלול הטיסה בין תל אביב ללוס אנג'לס עובר, למרבה ההפתעה, מעל סקנדינביה וקנדה.

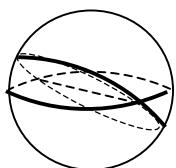
ה. שני קווי אורך משני צידי הגלובוס המשלימים זה את זה ל 180° נמצאים על מעגל גדול העובר דרך הקטבים. ערים הנמצאות על שני קווי אורך כאלה הן למשל פיטסבורג (קוד PTS) שבפנסילבניה ארה"ב הנמצאת על קו אורך 80° (ממערב לקו האפס גריניץ'), ובנגקוק (קוד BKK) שבתאילנד הנמצאת על קו

אורך 100° (ממזרח לקו האפס גריניץ'). מכיוון ששתי ערים אלה ממוקמות מעל קו המשווה, מסלול הטיסה הקצר ביניהן עובר דרך הקוטב הצפוני (ולא דרך הקוטב הדרומי).

4.

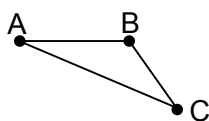
א. כל המעגלים הגדולים העוברים דרך תל אביב חותכים את קו המשווה. המרכז של כל מעגל גדול על כדור הוא מרכז הכדור. תל אביב נמצאת מעל קו המשווה. הקוטר במעגל הגדול העובר דרך תל אביב חותך את המעגל הגדול ואת הכדור בנקודה נגדית לתל אביב מתחת לקו המשווה. לכן, המעגל הגדול העובר דרך תל אביב חותך את קו המשווה. ובאופן כללי, כל מעגל גדול (פרט לקו המשווה עצמו) חותך את קו המשווה בשתי נקודות.

ב. המרכז של כל מעגל גדול על כדור הוא מרכז הכדור. לכן כל שני מעגלים גדולים נחתכים. נקודות החיתוך שלהם הן קצות הקוטר המשותף שלהם. הנימוק של הטענה הכללית דומה לזה מן הסעיף הקודם: בהינתן שני מעגלים גדולים, אפשר לסובב את הכדור כך שאחד מהם יעבור למצב של "קו משווה".

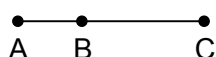


5.

א. אם שלוש הנקודות אינן נמצאות על קו ישר אחד, צורת המסלול היא משולש.



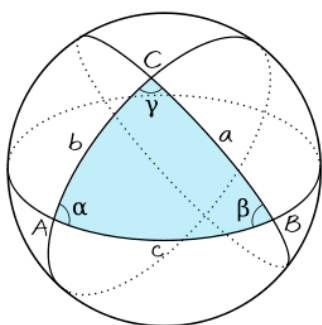
ב. אם שלוש הנקודות נמצאות על קו ישר אחד, צורת המסלול היא קטע ולא משולש.



6.

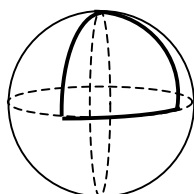
ההגדרה המקובלת לזווית בין מעגלים גדולים על הכדור היא: הזווית בין המשיקים שלהם בנקודת המפגש.

מושג המשיק עדיין לא נלמד בכיתה ז', לכן אין צורך להשתמש כאן בהגדרה זו. בשלב זה אפשר להתייחס באופן אינטואיטיבי לזוויות בין קשתות, ולזהות מעגלים מאונכים זה לזה. אפשר לשאול למשל, מיהו המעגל המאונך לקו המשווה, ולגלות שאלה אינסוף המעגלים הגדולים העוברים דרך הקטבים (כלומר, קווי האורך במקרה של הגלובוס).



א. במישור לא ייתכן משולש שבו כל זוג צלעות מאונכות זו לזו. שני ישרים המאונכים לישר שלישי, מקבילים ואינם נפגשים, לכן אינם יוצרים משולש. כמו כן, סכום הזוויות במשולש הוא 180° , ולא ייתכן משולש שסכום זוויותיו $270^\circ (= 3 \cdot 90^\circ)$

ב. על כדור ייתכן משולש שבו כל זוג צלעות מאונכות זו לזו. למשל, קו המשווה, קו אורך 0° וקו אורך 90° (מזרח או מערב).



ג. במישור סכום הזוויות במשולש הוא 180° .

ד. על כדור סכום הזוויות ששרטטנו הוא $270^\circ (= 3 \cdot 90^\circ)$. במשולשים אחרים סכום הזוויות שונה. למשל סכום הזוויות במשולש שצלעותיו מונחות על קו המשווה ועל קווי האורך 0° ו 20° .
כלומר, על כדור סכום הזוויות במשולש אינו קבוע.

7. דמיון: יש למשולשים שלושה קודקודים, יש להם שלוש "צלעות", יש להם שלוש "זוויות".

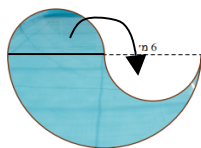
שוני:

משולש במישור	משולש על כדור
הצלעות הן קטעים	הצלעות הן קשתות של מעגלים גדולים
שוקי הזוויות הן קרניים	שוקי "הזוויות" הן מעגלים גדולים
סכום הזוויות 180°	סכום הזוויות יכול להיות שונה מ 180°



1. א. שטח: אפשר לחבר את שני חצי העיגולים ולקבל עיגול שלם שרדיוסו 5 מ'.
שטח הברכה מורכב משטח הריבוע ומשטח העיגול, והוא 178.54 מ"ר $(= 10^2 + \pi \cdot 5^2)$.

היקף: היקף הברכה מורכב מהיקף המעגל ומאורך שתי צלעות של הריבוע, והוא 51.42 מ' $(= 2\pi \cdot 5 + 2 \cdot 10)$.



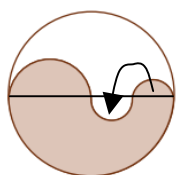
ב. שטח: אפשר להעביר את חצי העיגול העליון ל"מגרעת" הלבנה שבחלק התחתון של השרטוט, ולקבל חצי עיגול שרדיוסו 6 מ'.

שטח הברכה הוא 56.55 מ"ר $(= \frac{1}{2} \pi \cdot 6^2)$.

היקף: היקף הברכה מורכב מחצי שרדיוסו 6 מ' ומשני חצי מעגל שרדיוסו 3 מ'. לכן היקף הברכה הוא 37.70 מ' $(= \pi \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot 3)$.

2. א. אפשר להעביר את חצי העיגול הקטן העליון ל"מגרעת הלבנה" (ראו שרטוט).

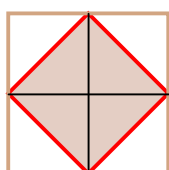
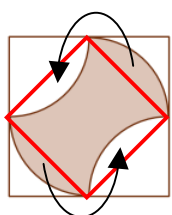
החלק הצבוע בחום מורכב משטח חצי העיגול שרדיוסו יחידה אחת ומשטח חצי העיגול שרדיוסו חצי יחידה.



היחס בין שטח החלק הצבוע בחום לשטח העיגול השלם הוא:

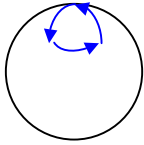
$$\frac{\frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{5}{8}$$

החלק הצבוע בחום הוא $\frac{5}{8}$ של העיגול.

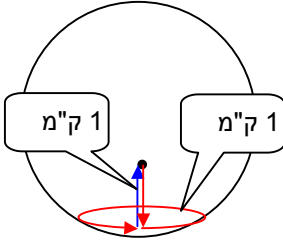


ב. על סמך שיקולים של השלמת "מגרעות" הלבנות ב"עודפים" חומים (ראו שרטוט שמאלי), מסיקים כי החלק הצבוע בחום הוא ריבוע שקודקודיו מונחים על אמצעי הצלעות של הריבוע המקורי.

החלק החום הוא מחצית משטח הריבוע המקורי. (ראו שרטוט ימני)



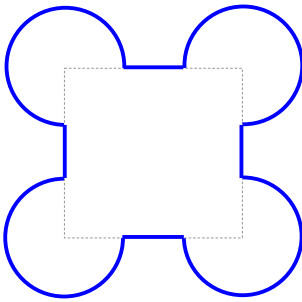
פתרון אחד: הפינגוין יצא מן הקוטב הצפוני והלך 1 ק"מ לכיוון כלשהו (כל כיוון שהוא הולך אליו הוא דרומה). לאחר מכן, הפינגוין הלך 1 ק"מ מזרחה לאורך קו רוחב, לבסוף, הוא הלך 1 ק"מ צפונה לאורך קו אורך. הליכה במסלול כזה תחזיר את הפינגוין אל הקוטב הצפוני.



אפשרות אחרת: הפינגוין יצא מנקודה על כדור הארץ שהיא במרחק 1 ק"מ צפונה מקו רוחב קרוב לקוטב הדרומי, שהיקפו 1 ק"מ. בשלב ראשון הוא הלך 1 ק"מ דרומה, לאורך קו האורך העובר דרך נקודת היציאה, והגיע לנקודה שעל קו הרוחב הנ"ל. בשלב שני הוא הלך 1 ק"מ מזרחה. בכך הוא השלים סיבוב שלם של קו רוחב זה, והגיע לנקודה שבה התחיל שלב זה. בשלב שלישי הפינגוין חזר 1 ק"מ צפונה באותה דרך שהלך דרומה וחזר אל נקודת היציאה שלו.



למסיימים



1. הצורה שבשרטוט מורכבת מריבוע ומחלקי מעגלים.

אורך צלע הריבוע $3x$, ורדיוס כל מעגל x .

א. בטאו את שטח הצורה באמצעות x .

תשובה: השטח מורכב משטח של ריבוע ומארבעה שטחים של $\frac{3}{4}$ עיגול.

$$(3x)^2 + 4 \cdot \frac{3}{4} \pi x^2 = (9 + 3\pi)x^2 \approx 18.4x^2$$

שטח הצורה הוא בערך $18.4x^2$.

ב. בטאו את היקף הצורה באמצעות x .

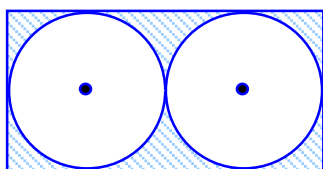
תשובה: ההיקף מורכב מארבעה קטעים שאורך כל אחד מהם x ($3x - 2x$), ומארבעה היקפים של $\frac{3}{4}$ מעגל.

$$4x + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi x = (4 + 6\pi)x \approx 22.8x$$

שטח הצורה הוא בערך $22.8x$.

ג. חשבו את השטח ואת היקף הצורה אם x שווה ל 5 ס"מ.

תשובה: השטח שווה ל 460 סמ"ר וההיקף שווה ל 114 ס"מ.



2. בתוך מלבן משורטטים שני מעגלים כמתואר בשרטוט.

המרחק בין מרכזי המעגלים הוא 12 ס"מ.

א. מצאו את שטח המלבן. הראו כיצד מצאתם.

תשובה: המרחק בין שני המרכזים הוא כאורך שני רדיוסים של מעגל אחד, כלומר כאורך קוטר של מעגל אחד.

רוחב המלבן הוא כאורך קוטר של מעגל אחד. לכן רוחב המלבן הוא 12 ס"מ.

אורך המלבן שווה לפעמיים אורך הקוטר של מעגל. לכן אורך המלבן הוא 24 ס"מ.

שטח המלבן הוא 288 סמ"ר ($12 \cdot 24 =$)

ב. מצאו את השטח המקווקו.

תשובה: השטח המקווקו הוא ההפרש בין שטח המלבן לשטחי העיגולים.

$$288 - 2\pi \cdot 6^2 \approx 61.8$$

השטח המקווקו שווה בערך ל 61.8 סמ"ר

3. הסבירו מדוע כל המעגלים הגדולים על כדור שווים בהיקפם



- מתייחסים לכך שלא תמיד מטוסים נוסעים במסלול הקצר ביותר למשל, מטוסי נוסעים ישראלים אינם טסים מעל ארצות אויב, גם אם הדבר גורם להארכת המסלול.
 - מבררים עם התלמידים מהם הדברים החדשים שלמדו במתמטיקה ובמציאות.
 - עורכים השוואה בין גיאומטריית המישור לבין גיאומטריה של כדור.
- למשל,
- במישור זוג ישרים נחתכים או מקבילים. על כדור זוג מעגלים גדולים תמיד נחתכים.
 - השוואה בין משולשים במישור לעומת משולשים על כדור (ראו משימה 7).
 - מתייחסים למעגלים הגדולים על כדור, ומראים שכולם שווים בהיקפם.