

יחידה 6: מעגל

6.1 המשולש המתגלגל



מטרות

- חישוב אורך קשת במעגל
- הבנת מחזוריות
- הכרת עקומות שונות
- הנאה אסתטית



אמצעי עזר

יישומונים "משולש בריבוע"; "עקבה למשולש בריבוע" (באתר)
משולש שווה צלעות גזור, וריבוע שאורך צלעו כפול מאורך צלע המשולש, להדגמה במליאה
משולש שווה צלעות ומשושה שאורך צלעו כפול מאורך צלע המשולש גזורים לכל תלמיד להתנסות.



פתיחה

קוראים את הבעיה במליאה, ומדגימים את תנועת המשולש בעזרת המחשב או בעזרת ריבוע ומשולש גזורים. פותרים את משימות 1 או 2.

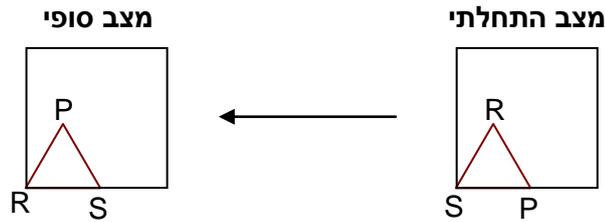


פתרונות והערות

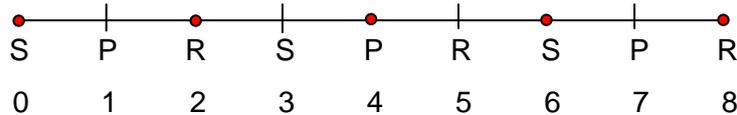
הפעילות מתייחסת לגלגול של משולש שווה-צלעות בתוך מצולעים משוכללים שונים שאורך צלעם כפול מאורך צלע המשולש. **גלגול** הוא תנועה אחת של המשולש סביב אחד הקודקודים שלו. **סיבוב שלם בתוך המצולע** הוא תהליך שבו המשולש מתגלגל מספר גלגולים עד שהוא מגיע למקומו הראשוני. הפעילות דורשת עיסוק בעניין שאין עוסקים בו בדרך כלל בלימודים השוטפים במתמטיקה של חטיבת הביניים – תנועה של נקודה. התלמידים צריכים לצפות מראש את התנועה של משולש מתגלגל בכלל, ושל אחד מקודקודיו בפרט, ולהבין את החוקיות שבתופעה המחזורית.

1-2. א. המשולש יחזור למקומו המקורי אחרי 8 גלגולים, כי על כל צלע המשולש מופיע פעמיים.

ב. בתום סיבוב שלם בתוך הריבוע, נמצאת בקודקוד הריבוע, S נמצאת באמצע הצלע התחתונה של הריבוע ו-P בתוך המשולש.



אם נפתח את הריבוע ונסמן על ההיקף את קודקודיו בעיגולים ואת אמצעי צלעותיו בשנתות, נוכל לראות את מצב קודקודי המשולש על הצלעות של הריבוע עם כל גלגול. הנקודות 0 ו-8 מתלכדות.



3. כדי להמחיש לעצמם את תהליך הגלגול, אפשר להציע לתלמידים להשתמש בריבוע ומשולש מתאימים גזורים מנייר.

למשולש יש שני סוגי גלגולים:



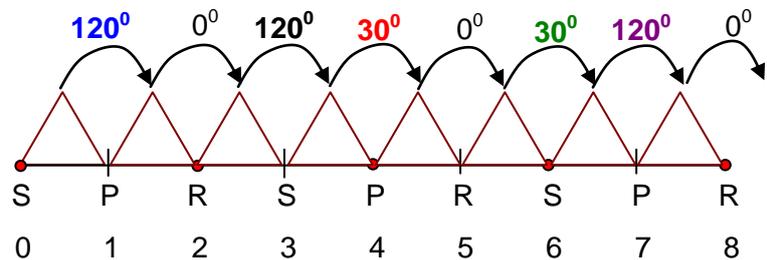
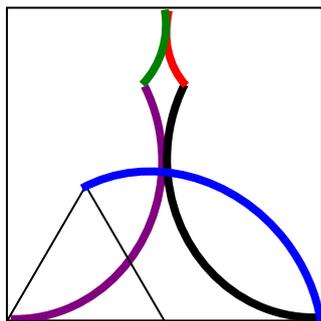
- גלגול ארוך כאשר מרכז הסיבוב הוא **אמצע צלע** של הריבוע. בגלגול זה נוצרת על-ידי כל קודקוד (שאינו מרכז הסיבוב) זווית בת $120^\circ (= 180^\circ - 60^\circ)$.



- גלגול קצר כאשר מרכז הסיבוב הוא **קודקוד** של הריבוע. בגלגול זה נוצרת על-ידי כל קודקוד (שאינו מרכז הסיבוב) זווית בת $30^\circ (= 90^\circ - 60^\circ)$.

המשולש מתגלגל 8 גלגולים לסרוגין – גלגול ארוך ולאחריו גלגול קצר. אבל כאשר מתבוננים בתנועה של אחד מקודקודי המשולש בתוך הריבוע רואים כי המסלול שלו אינו מורכב מ-8 קשתות, כפי שאולי אפשר היה לשער, אלא מ-5 קשתות, כי בשלושה מן הגלגולים האלה הקודקוד של המשולש עצמו הוא מרכז הסיבוב. הקשתות שהקודקוד עובר נמצאות על מעגל שרדיוסו 2 ס"מ (אורך צלע המשולש).

בשרטוט השמאלי ניתן לראות את הקשתות, ובשרטוט הימני את הזוויות הנוצרות על-ידי קודקוד המשולש בכל גלגול.



הזוויות הן לסרוגין 120° ו- 30° , פרט למקרים שהזווית היא בת 0° . אורך המסלול הוא קשת ששייכת לזווית שגודלה 3 פעמים 120° – מעגל שלם, ופעמיים זווית של 30° כלומר 60° – שיטית מעגל.

אורך ההיקף של מעגל אחד הוא $4\pi (= 2 \cdot 2 \cdot \pi)$, לכן אורך המסלול של קודקוד R הוא $\frac{14}{3}\pi (= \frac{1}{6} \cdot 4\pi)$

4. א. עם השלמת סיבוב שלם של המשולש בתוך הריבוע הקודקודים אינם חוזרים למצבם הראשוני.

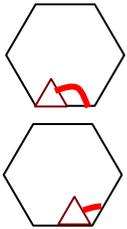
המשולש יחזור למקומו המקורי אחרי מספר גלגולים שהוא כפולה של 8. כדי שגם הקודקודים יחזרו למצבם הראשוני, הכפולה הזאת צריכה להתחלק ב-3. לכן המצב יחזור לקדמותו בפעם הראשונה אחרי 24 גלגולים שהם 3 סיבובים שלמים של המשולש בתוך הריבוע.

ב. ראינו כי עם השלמת סיבוב שלם של המשולש בתוך הריבוע אורך המסלול של קודקוד המשולש הוא $\frac{14}{3}\pi$, קודקוד המשולש חוזר אל מקומו המקורי אחרי 3 סיבובים לכן אורך מסלולו יהיה 14π .

5.

א. כדי להשלים סיבוב בתוך המשושה, על המשולש לבצע 12 ($2 \cdot 6 =$) גלגולים.

ב. כל זווית פנימית במשושה היא בת 120° . למשולש במשושה שני סוגי גלגולים:

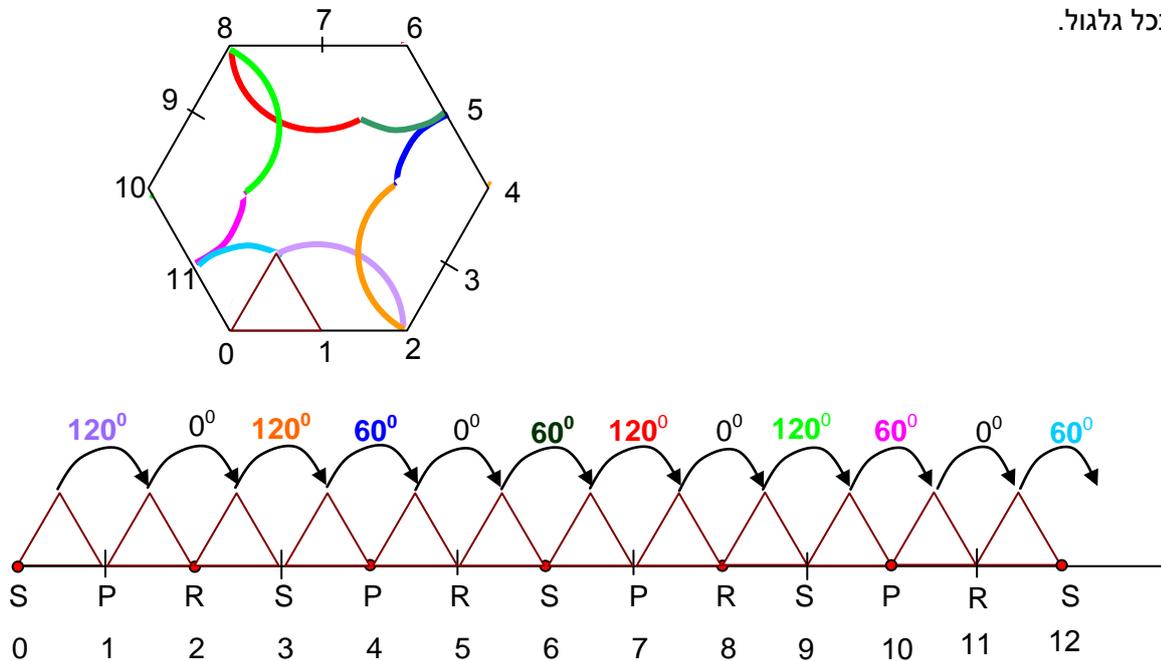


• גלגול ארוך כאשר מרכז הסיבוב הוא **אמצע צלע** של המשושה. בגלגול זה נוצרת על-ידי כל קודקוד (שאינו מרכז הסיבוב) זווית בת $120^\circ (= 180^\circ - 60^\circ)$.

• גלגול קצר כאשר מרכז הסיבוב הוא **קודקוד** של המשושה. בגלגול זה נוצרת על-ידי כל קודקוד (שאינו מרכז הסיבוב) זווית בת $60^\circ (= 120^\circ - 60^\circ)$.

המשולש מתגלגל 12 גלגולים לסרוגין – גלגול ארוך ולאחריו גלגול קצר. אבל כאשר מתבוננים בתנועה של אחד מקודקודי המשולש בתוך הריבוע רואים כי המסלול שלו אינו מורכב מ-12 קשתות, כפי שאולי אפשר היה לשער, אלא מ-8 קשתות, כי בארבעה מן הגלגולים האלה הקודקוד של המשולש עצמו הוא מרכז הסיבוב.

הקשתות שהקודקוד יוצר הן חלקי מעגל שרדיוסו 2 ס"מ (אורך צלע המשולש). בשרטוט העליון ניתן לראות את הקשתות, ובשרטוט התחתון את הזוויות הנוצרות על-ידי קודקוד המשולש בכל גלגול.

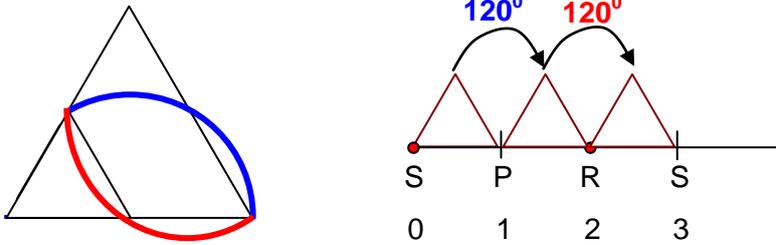


הזוויות הן לסרוגין 120° ו- 60° , פרט למקרים שהזווית בת 0° נוצרת במחזוריות של 3 כאשר הקודקוד R הוא בעצמו מרכז הסיבוב ולכן אינו נע.

המסלול נוצר מ-4 ארבע קשתות של זוויות בנות 120° ומארבע קשתות בנות 60° . בסך הכל אורך המסלול הוא קשת ששייכת לסיבוב של $720^\circ (= 4 \cdot 120^\circ + 4 \cdot 60^\circ)$. זהו פעמיים סיבוב של מעגל. אורך הקשת של מעגל אחד הוא $4\pi (= 2 \cdot 2 \cdot \pi)$, לכן אורך המסלול של הקודקוד R הוא 8π .

6. עם השלמת סיבוב שלם של המשולש בתוך המשושה הקודקודים חוזרים למצבם הראשוני. והמשולש מבצע 12 (6 · 2 =) גלגולים.

7. א. המשולש עובר 3 גלגולים (ולא שישה גלגולים כפי שניתן היה לשער), כי לכל משולש יש שתי צלעות הנמצאות על צלעות המשולש הגדול.
 ב. הקשתות שהקודקוד יוצר הן חלקי מעגל שרדיוסו 2 ס"מ (אורך צלע המשולש).
 בשרטוט השמאלי ניתן לראות את הקשתות, ובשרטוט הימני את הזוויות הנוצרות על-ידי קודקוד המשולש בכל גלגול.



הזוויות הן בנות 120° . קשת של זווית בת 120° היא שליש היקף המעגל. לכן אורך המסלול הוא קשת שאורכה $\frac{2}{3}$ מהיקף המעגל – $\frac{8\pi}{3}$ ($= \frac{2}{3} \cdot 4\pi$)

ג. עם השלמת סיבוב שלם של המשולש בתוך המשושה הקודקודים חוזרים למצבם הראשוני. המשולש מבצע 3 גלגולים.

8. המחומש יחזור למקומו המקורי אחרי מספר גלגולים שהוא כפולה של 14 ($= 7 \cdot 2$). הקודקודים אינם חוזרים למצבם הראשוני. כדי שגם הקודקודים יחזרו למצבם הראשוני, הכפולה הזאת צריכה להתחלק ב-5. לכן המצב יחזור לקדמותו בפעם הראשונה אחרי 70 גלגולים, שהם 5 סיבובים שלמים של המחומש בתוך המשושה.

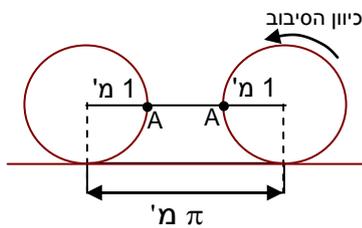


חזקה \ n	3^n	7^n	4^n
1	3	7	4
2	9	49	16
3	27	343	64
4	81	2401	256
5	243	16807	1024
6	729	117649	4096
7	2187	823543	16384
8	6561	5764801	65536
9	19683	40353607	262144
10	59049	282475249	1048576

1.

2. א. ספרת היחידות של 3^{42} היא:

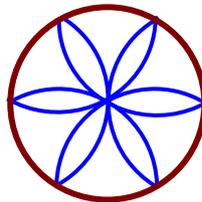
- ספרות היחידות של החזקות של 3 הן 3, 9, 7, 1 במחזוריות של 4.
 בחלוקה של המעריך 42 ל-4 מתקבלת השארית 2. לכן ספרת היחידות היא השנייה בסדרה, כלומר 9.
- ב. ספרות היחידות של החזקות של 7 הן 7, 9, 3, 1 במחזוריות של 4.
 בחלוקה של המעריך 105 ל-4 מתקבלת השארית 1. לכן ספרת היחידות היא הראשונה בסדרה, כלומר 7.
- ג. ספרות היחידות של החזקות של 4 הן 4, 6 במחזוריות של 2.
 91 הוא מספר אי-זוגי לכן ספרת היחידות היא הראשונה בסדרה, כלומר 4.
- ד. 28 ו-56 מתחלקים ב-4 ללא שארית. לכן ספרת היחידות של 3^{28} היא 1, ספרת היחידות של 7^{56} היא 1, וספרת היחידות של הסכום היא 2.



כאשר המעגל מתגלגל חצי סיבוב, נקודת ההשקה עוברת מרחק של חצי מעגל. גם מרכז המעגל עובר מרחק של חצי מעגל. היקף של חצי מעגל שרדיוסו מטר אחד הוא: π ($= 0.5 \cdot 2\pi \cdot 1$) מטרים. תשובה: המרחק בין המיקום ההתחלתי של נקודה A, לבין המיקום לאחר הסיבוב הוא $\pi - 2 \approx 1.14$ (π מ' פחות פעמיים הרדיוס).



למסיימים

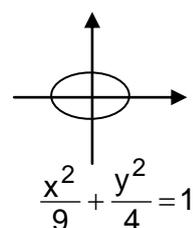
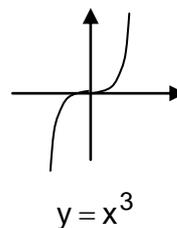
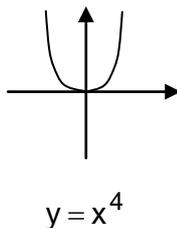
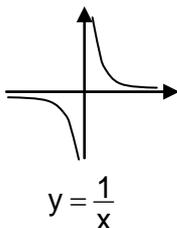


1. בנו באמצעות מחוגה את קישוט ה"פרח"
2. צרו באמצעות קשתות של מעגל קישוט משלכם.



לסיכום

מקשרים בין הדרך הגיאומטרית ליצירת עקומות (כמו שראינו בפעילות זו) לבין הדרך האלגברית של יצירת עקומות על-ידי שרטוט גרפים במערכת צירים. התלמידים מכירים בינתיים רק את הגרף של הפונקציה הקווית. אפשר להציג להם (מבלי להתייחס לתכונות או לרקע המתמטי) עקומות שונות כמו למשל הגרפים הבאים:



ניתן למצוא באינטרנט גרפים מעניינים נוספים, למשל באתר: Famous Curves Index. כתובת האתר: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html>