

5.3 משולשים שכאלה



מטרות

- ההבנה כי יש מגבלות על אורכי הצלעות של משולש
- מיצוי אפשרויות
- הבנת חוקיות והכללתה
- ארגון נתונים



אמצעי עזר

- גפרורים
- לוח מסמרים מקוון



פתיחה

קוראים את הבעיה במליאה, ועונים על השאלות שבמסגרת. אפשר לבקש דוגמאות. ברור כי כדי לבנות משולש שווה צלעות יש צורך במספר גפרורים המתחלק ב 3. די ברור שאפשר לבנות מאותו מספר גפרורים משולשים שונים. לגבי משולש שווה שוקיים, הבעיה קצת יותר מורכבת (ראו מדור פתרונות והערות).



פתרונות והערות

בפעילות התלמידים בונים משולשים מגפרורים וסופרים או מחשבים את מספר המשולשים שאפשר לבנות, כך שצלעם הארוכה היא באורך נתון. תחילה מתייחסים אל משולשים שאורך צלעם הארוכה הוא מספר אי זוגי. מספר המשולשים האפשרי הוא סכום המספרים האי זוגיים מ 1 ועד אורך הצלע הארוכה. מתייחסים גם אל משולשים שאורך צלעם הארוכה הוא מספר זוגי. מספרם הוא סכום המספרים הזוגיים מ 2 ועד אורך הצלע הארוכה. בסיכום ניתן להכליל על הלוח את הסכומים האלה. אבל אין לדרוש את ההכללה מן התלמידים.

במהלך מיצוי האפשרויות יש להתייחס אל שתי מגבלות על אורכי הצלעות:

1. האורך צריך להיות מספר חיובי. המגבלה הזו לא באה לידי ביטוי בבניית המשולשים מגפרורים, אבל כן באה לידי ביטוי כאשר אורכי המשולשים מיוצגים על ידי ביטויים אלגבריים.

2. סכום אורכי שתי הצלעות הקצרות צריך להיות גדול מאורך הצלע השלישית.

לגבי השאלה ההפוכה אם ניתן לבנות משולש שווה שוקיים מכל מספר של גפרורים, יש לציין תחילה כי יש מספר גפרורים שאי אפשר בכלל לבנות מהם משולשים. למשל 2 גפרורים, וכן 4 גפרורים. מכל מספר אחר של גפרורים ניתן לבנות משולש שווה שוקיים (לפעמים הוא גם שווה צלעות, למשל מ 6 גפרורים). אם מספר הגפרורים אי זוגי, תמיד אפשר לבנות משולש שווה שוקיים שאורך בסיסו 1, ואם המספר הוא זוגי, תמיד אפשר לבנות משולש שווה שוקיים שאורך בסיסו 2.

1. א. ייתכנו תשובות שונות

ב. קיימות 6 אפשרויות.

a	b	c
4	4	4
3	4	4
2	4	4
1	4	4
3	3	4
2	3	4

2. א. הצלע השלישית מורכבת מ 4 או מ 5 או מ 6 גפרורים. יש שלושה משולשים כאלה.

ב.

מספר המשולשים שניתן לבנות	אורך צלע a	אורך צלע b	אורך צלע c
9	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	9	9
7	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	8	9
5	3, 4, 5, 6, 7	7	9
3	4, 5, 6	6	9
1	5	5	9

ג. אם הכוונה למשולשים שצלעותיהן מספרים שלמים, ואורך הצלע הארוכה שלהן 9, אז קובי צודק, כי מיצינו את כל האפשרויות.

3.

מספר המשולשים שניתן לבנות	אורך צלע a	אורך צלע b	אורך צלע c
11	1-11	11	11
9	2-10	10	11
7	3-9	9	11
5	4-8	8	11
3	5-7	7	11
1	6	6	11

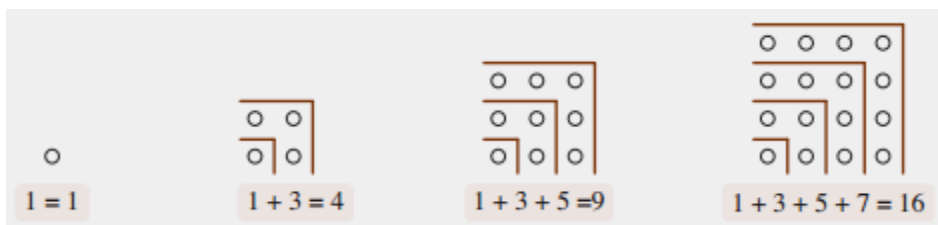
בסך הכל ניתן לבנות 36 משולשים ($1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$)

4. ערן צודק. אם $c = 13$ אז מספר המשולשים המתאימים הוא 49 ($1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 36 + 13 =$).

5. $c = 7$, כי $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

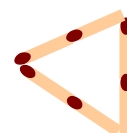
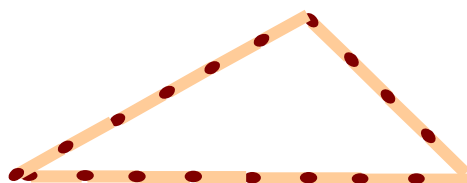
6. מחברים את כל המספרים האי זוגיים מ 1 ועד המספר המייצג את אורך הצלע הארוכה.

7. א. כמו שראינו במשימה 6, מספר המשולשים הוא הסכום של המספרים האי זוגיים מ 1 ועד המספר המייצג את אורך הצלע הארוכה. מספר זה הוא מספר ריבועי. זהו הריבוע של מספר המספרים האי זוגיים (ראו למשל שרטוט).



נסמן את אורך הצלע הארוכה ב c (c אי זוגי). מספר המספרים האי זוגיים עד c (כולל) הוא $\frac{c+1}{2}$.
לכן סכום המספרים האלה שהוא מספר המשולשים שצלעם הארוכה c שאפשר לבנות הוא $(\frac{c+1}{2})^2$.

ב. אם $c = 55$ אז מספר המשולשים המתאימים הוא $784 (= (\frac{55+1}{2})^2)$



8. א. דוגמאות

ב.

מספר המשולשים שניתן לבנות	אורך צלע a	אורך צלע b	אורך צלע c
6	1-6	6	6
4	2-5	5	6
2	3-4	4	6

בסך הכל ניתן לבנות 12 משולשים $(2 + 4 + 6 =)$

9. יובל צודק. אם $c = 10$ מספר המשולשים שניתן לבנות הוא $30 (= 2 + 4 + 6 + 8 + 10 =)$

10. $c = 8$ כי $2 + 4 + 6 + 8 = 20$

11. מחברים את כל המספרים הזוגיים מ 2 ועד המספר המייצג את אורך הצלע הארוכה.



הערה: אם התלמידים טרם למדו לפתור אי שוויון, אפשר לדלג על המשימות הדורשות מיומנות זו או להסתפק בהדרכה קצרה המדגישה את הדמיון בין התהליך של פתרון משוואה והתהליך של פתרון אי שוויון. יחד עם זאת, חשוב להזהיר מפני חלוקת שני אגפיו של אי שוויון במספר שלילי, ולהציע לתלמידים להביא את האי שוויון למצב בו המקדם של המשתנה הוא חיובי, לפני חלוקת האגפים במקדם זה.

1. אורך הצלעות צריך להיות מספר חיובי.

$$\begin{array}{llll} 2x > 0 & \text{וגם} & x + 3 > 0 & \text{וגם} & x + 7 > 0 \\ x > 0 & & x > -3 & & x > -7 \end{array}$$

כדי שאורכי כל הצלעות יהיו מספרים חיוביים, צריך להתקיים $x > 0$.

II. סכום האורכים של כל שתי צלעות צריך להיות גדול מאורך הצלע השלישית.

$$\begin{array}{llll} x + 7 + x + 3 > 2x & \text{וגם} & x + 7 + 2x > x + 3 & \text{וגם} & x + 3 + 2x > x + 7 \\ \text{נכון לכל } x & & x > -2 & & x > 2 \end{array}$$

כדי שסכום האורכים של כל שתי צלעות יהיה גדול מאורך הצלע השלישית, צריך להתקיים $x > 2$.

תשובה: כל מספר שגדול מ 2 עונה על שתי המגבלות ואפשר להציבו במקום x .

הערה: אם ידוע מיהי הצלע הארוכה במשולש, מספיק לבדוק אם סכום האורכים של שתי הצלעות הקצרות גדול מאורך הצלע הארוכה.

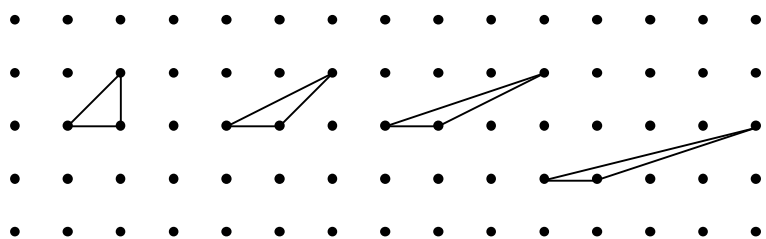
ב. אורכי הצלעות צריכים להיות מספרים חיוביים. מסקנה: צריך להתקיים $x > 2$.

סכום אורכי שתי הצלעות הקצרות צריך להיות גדול מאורך הצלע הארוכה.

$$\begin{array}{l} x - 2 + x - 2 > x + 2 \\ x > 6 \end{array}$$

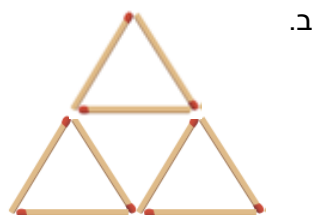
מסקנה: שתי המגבלות יתקיימו אם $x > 6$.

2. כל משולש בו אורך אחת הצלעות ואורך הגובה היווה אליה הם יחידה אחת.



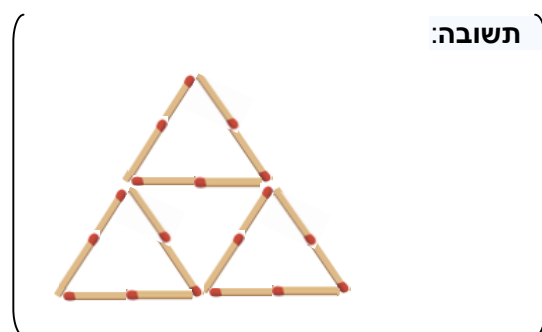


א. $7 + 4 = 11$



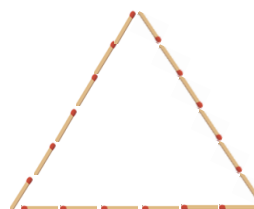
1. הזיזו 6 גפרורים כדי לקבל 5 משולשים.

תשובה:



2. א. מהו מספר המשולשים שווי הצלעות הקטן ביותר שניתן לבנות מ 18 גפרורים? הדגימו.

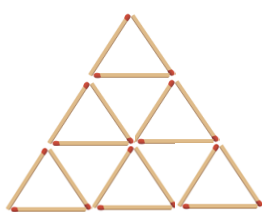
תשובה: משולש אחד



ב. מהו מספר המשולשים שווי הצלעות הגדול ביותר שניתן לבנות מ 18 גפרורים? הדגימו.

תשובה: 13 משולשים:

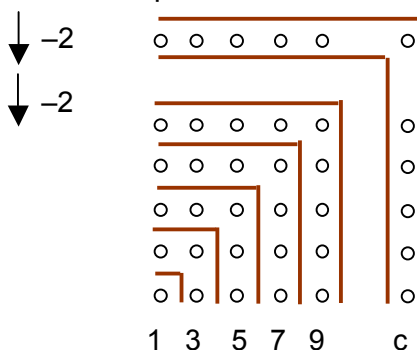
- 9 משולשים שצלעם באורך גפרור אחד
- 3 משולשים שצלעם באורך 2 גפרורים
- 1 משולש שצלעו באורך 3 גפרורים.



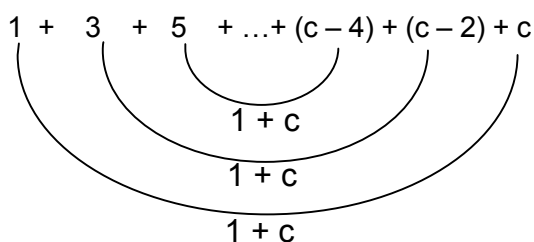
- מבקשים השערה: כמה משולשים שונים שהיקפם 12 גפרורים אפשר לבנות? מבקשים לבדוק את ההשערה.
- מבקשים להכליל את הטבלה ממשימה 2, עבור מספר אי זוגי c .

אורך צלע c	אורך צלע b	אורך צלע a
c	c	$1, 2, 3, 5, 7, \dots, c$
c	$c-1$	$2, 3, 5, \dots, c-1$
c	$c-2$	$3, \dots, c-2$
c	$\frac{c+1}{2}$	$\frac{c+1}{2}$

מספר המשולשים בשורה הראשונה הוא c , ובכל שורה הוא הולך ופוחת ב 2



- לתלמידים מתקדמים ניתן להראות את הדרך לחבר מספרים אי זוגיים מ 1 עד c (אי זוגי)...



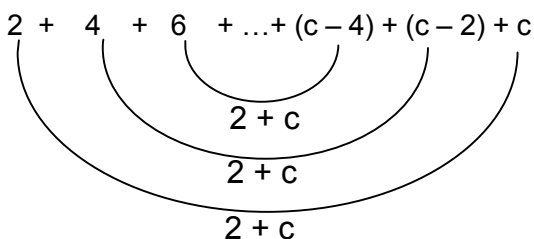
מספר המספרים האי זוגיים מ 1 ועד c הוא: $\frac{c+1}{2}$.

מספר הזוגות של מספרים אלו הוא: $\frac{c+1}{4}$.

סכום המספרים בכל זוג הוא: $1+c$

לכן, סכום המספרים הוא: $\frac{c+1}{4} \cdot (1+c) = \left(\frac{c+1}{2}\right)^2$

- לתלמידים מתקדמים ניתן להראות גם את הדרך לחבר מספרים זוגיים מ 2 עד c (זוגי).



מספר המספרים הזוגיים מ 2 ועד c הוא: $\frac{c}{2}$.

מספר הזוגות של מספרים אלו הוא: $\frac{c}{4}$.

סכום המספרים בכל זוג הוא: $2+c$

לכן, סכום המספרים הוא: $\frac{c}{4} \cdot (2+c)$