

5.2 חתכי קובייה



מטרות

- פיתוח ראייה מרחבית
- התייחסות לסימטריה של קובייה



אמצעי עזר

- מספרים לכל תלמיד
- צילום של הדף לגזירה שבפעילות (שני צילומי דף לכל תלמיד).



פתיחה

קוראים את הבעיה במליאה, ועונים על המשימה 1. התלמידים ישערו איזה חלק גדול יותר כל המנסרות הצדדיות או המנסרה הפנימית. ייתכן שהשרטוט המישורי יטעה אותם לחשוב שהמנסרות הצדדיות שונות בגודלן.



פתרונות והערות

הפעילות מתייחסת לחיתוך קובייה בדרכים מגוונות ולחתכים וגופים הנוצרים כתוצאה מכך. הפעילות דורשת ראייה מרחבית, והבנת צורת הגוף וגודלו על סמך שרטוטו המישורי.

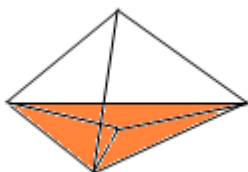


1. א. הנפח של המנסרה הריבועית הפנימית שווה לנפח של ארבע המנסרות המשולשות ביחד. אפשר לראות זאת ממבט על של הקובייה. באמצעות ארבע המנסרות המשולשות ניתן לבנות מנסרה ריבועית חופפת למנסרה הריבועית שבמרכז.

ב. אם יוסי אוהב שוקולד כדאי לו כמובן לבחור את המנסרות הצדדיות, כי רק הן מצופות בשוקולד.

2. א. לקובייה יש 6 פאות ו 8 קודקודים. לאחר חיתוך הקודקודים, מכל אחת מ 6 הפאות נותרה פאה ריבועית. בנוסף לכך, במקום כל קודקוד של הקובייה המקורית נוספה פאה משולשת. בסך הכל לגוף החדש יש 6 פאות ריבועיות ו 8 פאות משולשות.

ב. שטח הפנים של הגוף שנוצר קטן משטח הפנים של הקובייה.



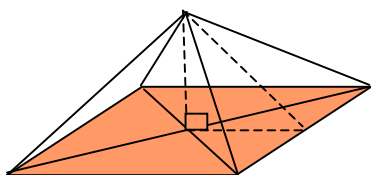
נתבונן בפירמידה המשולשת שקודקוד הראש שלה הוא אחד מקודקודי הקובייה המקורית. חילקנו את בסיסה לשלושה משולשים. הבסיס מייצג פאה אחת מבין 8 הפאות המשולשות שנוספו לגוף. ליד כל קודקוד, הסרת הפירמידה מן הקובייה

המקורית גרמה להסרת 3 פאות צדדיות שלה וליצירת פאה משולשת שהיא בסיס הפירמידה. כלומר, במקום שלושה משולשים שהם הפאות הצדדיות של הפירמידה (שהיו חלקי פאות בקובייה), יש בגוף החדש פאה המורכבת משלושה משולשים שכל אחד מהם שליש מבסיס הפירמידה. כל פאה צדדית של הפירמידה גדולה בשטחה מהמשולש שהוא שליש משטח בסיס הפירמידה.

הטענה הזאת ברורה באופן אינטואיטיבי, אבל אפשר גם להוכיחה באמצעות המשפט: במשולש ישר זווית, היתר ארוך מן הניצב. אם נוריד שלושה גבהים: גובה לפירמידה, גובה אל מקצוע הבסיס בפאה הצדדית, וגובה לאותו מקצוע ממרכז הבסיס, נקבל משולש ישר זווית (ראו שרטוט בתשובה למשימה 3). הגובה לפאה הצדדית הוא היתר של המשולש ישר הזווית. למשולש שעל בסיס הפירמידה, ולפאה הצדדית יש, אם כן, צלע משותפת, והגובה של המשולש של הפאה הצדדית ארוך יותר מהגובה של המשולש שעל הבסיס. לכן הפאה הצדדית גדולה בשטחה מאחד המשולשים של בסיס הפירמידה.

3. א. אפשר לעשות את החישוב הבא: במקום כל פאה של הקובייה יש עכשיו ארבע פאות צדדיות של פירמידה מרובעת. לכן צריכות להיות לגוף המתקבל 24 פאות. אבל מסתבר שכל שתי פאות צדדיות נמצאות על מישור אחד. במקום כל זוג פאות משולשות, נוצרת פאה שהיא מעוין. לכן לגוף שנוצר יש רק 12 פאות מעוינות.

ג. נפח הגוף שנוצר הוא פי 2 מנפח הקובייה, כי שש הפירמידות הריבועיות שנוספו לקובייה המקורית מילאו אותה לפני "הפיכתן החוצה" ללא עודף וללא חללים.



ד. שטח הפנים של הגוף גדול משטח הפנים של הקובייה. כתוצאה מ"הפיכת" הפירמידות כלפי חוץ, במקום כל פאה ריבועית של הקובייה המקורית, נוספו 4 פאות צדדיות של הפירמידה. שטח ארבע הפאות הצדדיות של פירמידה כזאת, גדול יותר משטח הבסיס הריבועי שלה. בדומה לשיקולים שהופעלו במשימה 2, השטח של כל משולש צדדי גדול משטחו של משולש שעל הבסיס.



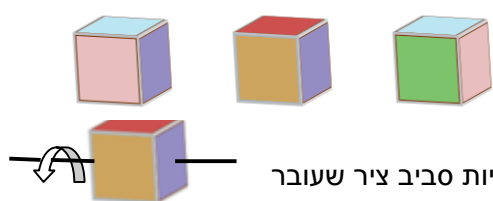
יחידת אורך הצלע של התיבה היא אורך המקצוע של הקוביות המרכיבות את התיבה.

צלע c	צלע b	צלע a
24	1	1
12	2	1
8	3	1
6	4	1
6	2	2
4	3	2

לכל התיבות אותו נפח 24 קוביות.

ככל שהתיבה ארוכה וצרה יותר, מספר פאות היחידה (1×1) החשופות של הקוביות המרכיבות אותה גדול יותר. לכן התיבה בעלת שטח הפנים הגדול ביותר היא התיבה "הארוכה" ביותר. התיבה שמידותיה $1 \times 1 \times 24$. שטח הפנים של תיבה זו הוא 98 יחידות שטח $[4 \cdot (1 \cdot 24) + 2 \cdot (1 \cdot 1)]$.

ולהיפך, ככל שמידותיה של קרובות יותר זו לזו, מספר פאות היחידה (1×1) החשופות של הקוביות המרכיבות אותה קטן יותר. לכן התיבה הדומה במידה הרבה ביותר לקובייה שמידותיה $2 \times 3 \times 4$, היא בעלת שטח הפנים הקטן ביותר. שטח הפנים של תיבה זו הוא 52 יחידות שטח $[2 \cdot (3 \cdot 4) + 2 \cdot (3 \cdot 2) + 2 \cdot (4 \cdot 2)]$.



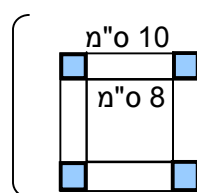
מספיק להתבונן בשתי הקוביות השמאליות כדי לגלות את ההתשובה. הפאה הימנית של שתיהן סגולה, לכן ארבע הפאות הסמוכות לפאה זו הן הכתומה, האדומה, הוורודה והתכולה, והן נמצאות למעלה, לפנים, למטה ומאחור. נוכל לראות פאות אלו אם נסובב את אחת הקוביות השמאליות סביב ציר שעובר במרכז הפאה הסגולה והפאה שממולה. שני הצבעים שנראים לעין בשתי הקוביות שונים. למשל, בקובייה האמצעית הצבעים הם: למעלה אדום ולפנים כתום.

אם נסובב את הקובייה הזאת פעמיים (180°) הפאה האדומה תהיה למטה, ונוכל לראות את שני הצבעים האחרים כך שהמצב יהיה כמו בקובייה השמאלית: למעלה תכלת ולפנים ורוד. לכן, הפאה המקבילה לפאה האדומה היא הפאה התכולה, והפאה המקבילה הוורודה היא הפאה הכתומה.



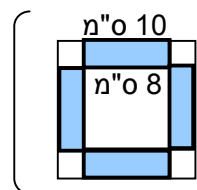
1. בבית מלאכה הייתה קובייה צבועה בכחול, שאורך צלעה 10 ס"מ. חתכו את הקובייה לקוביות קטנות שאורך צלעותיהן סנטימטר אחד.

א. כמה קוביות שבהן בדיוק שלוש פאות כחולות התקבלו?



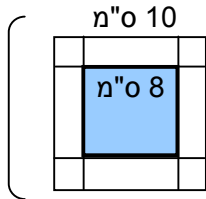
תשובה: ראו גם מדריך למורה מפורט ב"מצוינות רחובות", כיתה ח' פעילות 4.2. לקוביות שליד הקודקודים יש בדיוק שלוש פאות כחולות. יש 8 קוביות כאלה.

ב. כמה קוביות שבהן בדיוק שתי פאות כחולות התקבלו?



תשובה: על כל מקצוע יש 10 קוביות שיש להן לפחות שתי פאות כחולות. שמהן לשתיים יש שלוש פאות כחולות. לכן, על כל מקצוע יש 8 קוביות שיש להן בדיוק שתי פאות כחולות. בסך הכל יש 12 מקצועות. לכן מספר הקוביות המבוקש הוא 96 ($8 \cdot 12$).

ג. כמה קוביות שבהם בדיוק פאה אחת כחולה התקבלו?



תשובה: הקוביות שיש להן בדיוק פאה אחת כחולה נמצאות על כל פאה של הקובייה הגדולה, ויוצרות ריבועים שאורך צלעם 8 ס"מ. יש 6 פאות לכן מספר הקוביות שיש להן בדיוק פאה אחת כחולה הוא $384 (= 6 \cdot 8^2)$

ד. כמה קוביות שבהן אין אף פאה כחולה התקבלו?

תשובה: הקוביות שאין להן אף פאה כחולה, מרכיבות קובייה פנימית הנוצרת מהקובייה הגדולה ש"קלפו" ממנה שכבה אחת של קוביות קטנות. מספרן: $512 (= 8^3)$

בדיקה: הסכום של מספרי הקוביות שחישבנו בכל הסעיפים צריך להיות מספר הקוביות הקטנות המרכיבות את הקובייה הגדולה. ואכן, $8 + 96 + 384 + 512 = 1000 = 10^3$

2. בבית המלאכה הייתה גם קובייה צבועה בירוק שגם אותה חתכו באותו אופן.

התברר שמספר הקוביות שיש להן שתי פאות ירוקות גדול פי 6 ממספר הקוביות שיש להן 3 פאות ירוקות.

מה היה אורך הצלע של הקובייה לפני שחתכו אותה?

תשובה: נסמן את אורך צלע הקובייה הירוקה ב x

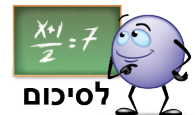
ביטוי אלגברי למספר הקוביות שיש להן 2 פאות ירוקות: $12(x - 2)$

מספר הקוביות שיש להן 3 פאות ירוקות: 8

המשוואה המתאימה: $12(x - 2) = 6 \cdot 8$

פתרון: $x = 6$

תשובה: לפני שחתכו אותה היה אורך הקובייה 6 ס"מ



• מתייחסים לשאלה 3 סעיף א. מראים מדוע כל פאה מורכבת משני משולשים שהם על מישור אחד.

בשרטוט רואים שתי פירמידות שנוצרו על ידי "הפיכת" שתי פירמידות כלפי חוץ. המשולשים המקווקווים הם ישרי

זווית ושווי שוקיים (אורך כל שוק חצי מאורך צלע הקובייה המקורית). לכן זוויותיהן החדות הן בנות 45° .

נתבונן בזוויות שנוצרו על המישור שעליו מונחים משולשים אלה, וקדקודן היא הנקודה המודגשת. שתי זוויות הן

בנות 45° (הזוויות החדות של המשולשים), וזווית אחת היא ישרה (זווית שבין פאות של הקובייה). סכום הזוויות

הוא $180^\circ (= 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ)$. לכן היתרים של שני המשולשים ישרי הזווית מונחים על ישר אחד. הישר הזה

יוצר ביחד עם המקצוע של הקובייה מישור אחד.

