

3.4 הצופן שלי II



- הצבה בביטויים אלגבריים
- פתרון משוואות על פי שיקולים
- זיהוי חוקיות של פעולות
- התייחסות לנושא ההצפנה כנושא מתמטי



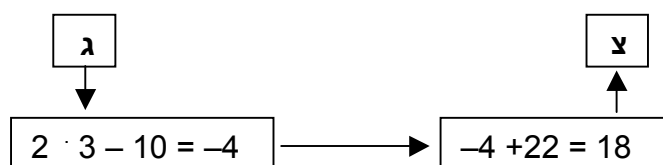
גיליון אלקטרוני (Excel)



כל תלמיד מתבקש להציין את שמו בשיטת ההצפנה של סהר. בודקים ביחד לגבי מספר שמות אם הוצפנו כראוי.



הפעילות עוסקת בהצפנה ופענוח צפנים. זוהי פעילות המשך לפעילות הצופן שלי I. כמו בפעילות הקודמת ההצפנה נעשית באמצעות התאמה בין אותיות למספרים, והצבה בביטוי אלגברי. הפענוח נעשה באמצעות הפעולה הפוכה, פתרון משוואה, והתאמה בין מספרים לאותיות. יש הבדל בין הצפנים בשתי הפעילויות. בצפנים הקודמים הייתה התאמה חד חד ערכית בין מילה מקורית למילה המוצפנת. לכל מילה מקורית מתאימה מילה מוצפנת יחידה ולכל מילה מוצפנת מתאימה מילה מקורית יחידה. בפעילות הנוכחית, התאמת המילה המוצפנת למילה המקורית היא חד ערכית בלבד. אמנם כל מילה מקורית תיתן מילה מוצפנת יחידה, אבל מילה מוצפנת יכולה לתת מספר מילים מקוריות. נבדוק למשל את האות ג.



כלומר ההצפנה של ג היא האות צ. אבל אם ננסה לעשות את פעולת הפענוח שהיא פעולה הפוכה, עלינו לפתור משוואה.

$$2x - 10 = 18$$

$$2x = 28$$

$$x = 14$$

המספר 14 מתאים לאות נ. ואכן אם ננסה להציין את נ לפי שיטה זו נקבל גם כן צ.

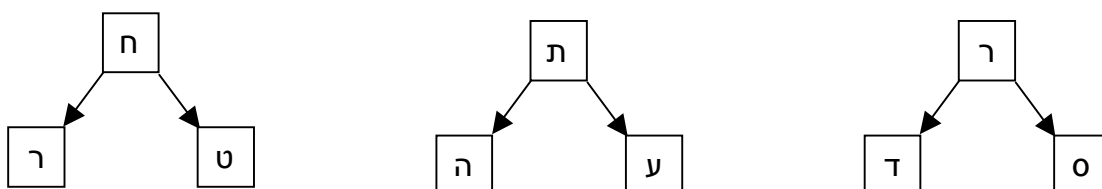
משמעות הדבר שבכל פענוח נצטרך להחליט איזו מן האותיות מתאימה בכל פעם. זאת נעשה על ידי בדיקה אם המילים שנקבל משמעותיות.

1. נחפש את האות המקורית על ידי השוואת הביטוי $2x - 10$ פעם למספר המתאים לאות המוצפנת, פעם למספר זה בתוספת של 22, ופעם לאותו מספר שנגרע ממנו 22. בכל מקרה נפתור את המשוואה. אם הפתרון שהתקבל הוא מספר מן הטבלה, נתאים לו אות מן הטבלה.

למשל, ננסה לפענח את האות ר. המספר המתאים ל ר הוא:

$(20 - 22 =) -2$ $2x - 10 = -2$ $x = 4$ ד	או $(20 + 22 =) 42$ $2x - 10 = 42$ $x = 26$ התוצאה אינה בטבלה	או 20 $2x - 10 = 20$ $x = 15$ ו
---	---	--

באופן זה, לכל אות מוצפנת התקבלו שתי אותיות מקוריות אפשריות.



השמות האפשריים: סעט, סער, סהט, סהר, דעט, דער, דהט, דהר.

2. א ב. ייתכנו תשובות שונות. הפענוח בהתאם להצפנה.

3. שם אביו של סהר הוא משה.

4. א. כדי שאות תיתן את עצמה בהצפנה צריך להתקיים:

$2x - 10 = x - 22$ אין מספר בטבלה	או $2x - 10 = x + 22$ אין מספר בטבלה	או $2x - 10 = x$ $x = 10$
--------------------------------------	--	---------------------------------

האות י מוצפנת לעצמה. אין אות נוספת כזו.

ב. כדי שאות תיתן בהצבת ערכה תוצאה הנמצאת בטבלה, צריך להתקיים:

$1 \leq 2x - 10 \leq 22$ כלומר $5.5 \leq x \leq 16$, x מספר טבעי ומתאים לאותיות ו עד ע.

ג. כדי שאות תיתן בהצבת ערכה תוצאה שיש להוסיף לה 22, צריך להתקיים:

$1 \leq 2x - 10 + 22 \leq 22$ כלומר $-5.5 \leq x \leq 5$, x מספר טבעי ומתאים לאותיות א עד ה.

ד. כדי שאות תיתן בהצבת ערכה תוצאה שיש להחסיר ממנה 22, צריך להתקיים:

$1 \leq 2x - 10 - 22 \leq 22$ כלומר $16.5 \leq x \leq 22$, x מספר טבעי ומתאים לאותיות פ עד ת.

5. לא כל אות יכולה להופיע בהודעה מוצפנת. בהצבת מספר שלם, הערך של $2x - 10$ הוא תמיד זוגי, והוא יהיה זוגי גם אם מוסיפים לו או גורעים ממנו 22. לכן בהודעה מוצפנת לא יופיעו אותיות המתאימות למספרים אי-זוגיים בטבלה.

6. א. ההצפנה של כל אות היא יחידה. ההצבה בביטוי נותנת ערך יחיד.
ב. הפענוח של כל אות אינו יחיד. ראינו דוגמאות. לכל אות בצופן מתאימות שתי אותיות מקוריות.

7. א. רושמים כותרות. ממלאים בעמודה A את האותיות לפי סדר הא ב. ממלאים בעמודה B את המספרים 1 עד 22 באמצעות גרירה. רושמים נוסחה מתאימה לעמודה C וגוררים. בעמודה D משתמשים בנוסחאות כאשר יש להוסיף או להחסיר 22. מתאימים בעמודה E את כלל מספר מוצפן.

	A	B	C	D	E
		מספר מתאים	מספר לאחר הצבה בביטוי	הוספה או החסרה של	אות בצופן
1	אות מקורית	לאות מקורית	$2x - 10$	22	
2	א	1	$=2 \cdot 1 - 10$	$=2 + 22$	נ

לאחר גרירת הנוסחאות כלפי מטה והתאמת אותיות למספרים, נקבל:

	A	B	C	D	E
		מספר מתאים	מספר לאחר הצבה בביטוי	הוספה או החסרה של	אות בצופן
1	אות מקורית	לאות מקורית	$2x - 10$	22	
2	א	1	-8	14	נ
3	ב	2	-6	16	ע
4	ג	3	-4	18	צ
5	ד	4	-2	20	ר
6	ה	5	0	22	ת
7	ו	6	2		ב
8	ז	7	4		ד
9	ח	8	6		ו
10	ט	9	8		ח
11	י	10	10		י
12	כ	11	12		ל
13	ל	12	14		נ
14	מ	13	16		ע
15	נ	14	18		צ
16	ס	15	20		ר
17	ע	16	22		ת
18	פ	17	24	2	ב
19	צ	18	26	4	ד
20	ק	19	28	6	ו
21	ר	20	30	8	ח
22	ש	21	32	10	י
23	ת	22	34	12	ל

8. א ב. ייתכנו תשובות שונות. הפענוח בהתאם להצפנה.



לכל ביטוי, רשמו את כל המספרים השלמים שתוצאת ההצבה שלהם בביטוי היא מספר שלם בין 1 ל 22 (כולל)

המספרים השלמים (כולל הקצוות)	הביטוי		המספרים השלמים (כולל הקצוות)	הביטוי		המספרים השלמים (כולל הקצוות)	הביטוי	
אין	$4x + \frac{1}{4}$	ז.	מ -1 עד 2	$15 - 7x$	ד.	0 4	$5x + 1$	א.
0, 3, 6	$2\frac{1}{3}x + 3$	ח.	מ -4 עד 0	$2 - 5x$	ה.	2 4	$6x - 6$	ב.
4	$5\frac{1}{4}x - 3$	ט.	מ -22 עד -1	$-x$	ו.	-2- 3	$4x + 10$	ג.



פתרון החידה

$$\begin{array}{r} 9 \ 5 \ 6 \ 7 \\ + \ 1 \ 0 \ 8 \ 5 \\ \hline 1 \ 0 \ 6 \ 5 \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} S \ E \ N \ D \\ + \ M \ O \ R \ E \\ \hline M \ O \ N \ E \ Y \end{array}$$

שימו לב במהלך הפתרון שאין שתי אותיות המייצגות אותה ספרה.

ספרות האלפים:

רואים שיש גרירה בסכום ספרות האלפים. הסכום של שתי ספרות אינו מגיעה ל 20 גם אם יש העברה. לכן $M = 1$.

ערכו של S יכול להיות 8 (אם יש העברה מעמודת המאות) או 9 (אם אין העברה כזאת).

אם $S = 8$ אז $O = 0$, לכן $E = 9$ ו $N = 0$. הגענו לסתירה.

אם $S = 9$ אז $O = 0$, E אינו יכול להיות שווה ל N, לכן יש העברה לספרת המאות.

ספרות המאות:

N גדול ב 1 מ E.

ספרות העשרות:

אם אין העברה לספרת העשרות, $N + R = 10 + E$, לכן $E + 1 + R = E + 10$, לכן $R = 9$. הגענו לסתירה.

אם יש העברה לספרת העשרות, $N + R = 9 + E$, לכן $E + 1 + R = E + 9$, לכן $R = 8$.

ספרת היחידות:

על ידי ניסוי וטעיה מוצאים את E ומגלים שיש רק פתרון אחד שאינו מוביל לסתירה.



הערה: חלק מן המשימות הבאות דורשות פתרון אי שוויונות כפולים אבל לא מסובכים. אם התלמידים טרם למדו את הנושא אפשר לתת להם לנסות לפתור אותם בדרך של שיקולים. לחילופין, אפשר לדלג על משימות אלה.

נתון צופן דומה לצופן של סהר, כאשר הביטוי האלגברי מוחלף ב $3x - 12$. אם תוצאת ההצבה אינה מופיעה בטבלה אחרי החסרת 22, יש להחסיר 22 שנית.

ענו לגבי הצופן החדש על השאלות הבאות. תוכלו להשתמש בטבלת Excel.

א. האם יש אות שהצפנתה בשיטה זו נותנת אותה בעצמה? מהי? האם יש אות נוספת כזו? נמקו.

תשובה: כדי שאות תיתן את עצמה בהצפנה צריך להתקיים:

$$\left[\begin{array}{l} 3x - 12 = x \quad \text{או} \quad 3x - 12 = x + 22 \quad \text{או} \quad 3x - 12 = x - 22 \\ x = 6 \quad \quad \quad x = 17 \quad \quad \quad \text{אין מספר בטבלה} \\ \text{האות י והאות פ מוצפנות לעצמן.} \end{array} \right]$$

ב. אילו אותיות נותנות כתוצאת ההצבה מספר שנמצא בטבלה? הסבירו כיצד מצאתם.

תשובה: כדי שאות תיתן בהצבת ערכה תוצאה הנמצאת בטבלה, צריך להתקיים:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \leq 3x - 12 \leq 22 \quad \text{כלומר} \quad 4.3 \leq x \leq 11.3, \quad x \text{ מספר טבעי ומתאים לאותיות ה עד כ.} \end{array} \right]$$

ג. אילו אותיות נותנות כתוצאת ההצבה מספר שיש להוסיף לו 22 כדי שימצא בטבלה?

תשובה: כדי שאות תיתן בהצבת ערכה תוצאה שיש להוסיף לה 22, צריך להתקיים:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \leq 3x - 12 + 22 \leq 22 \quad \text{כלומר} \quad -3 \leq x \leq 4, \quad x \text{ מספר טבעי ומתאים לאותיות א עד ד.} \end{array} \right]$$

ד. אילו אותיות נותנות כתוצאת ההצבה מספר שיש להפחית ממנו 22 כדי שימצא בטבלה?

תשובה: כדי שאות תיתן בהצבת ערכה תוצאה שיש להפחית ממנה 22, צריך להתקיים:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \leq 3x - 12 - 22 \leq 22 \quad \text{כלומר} \quad 11.6 \leq x \leq 18.6, \quad x \text{ מספר טבעי ומתאים לאותיות ל עד צ.} \end{array} \right]$$

ה. אילו אותיות נותנות כתוצאת ההצבה מספר שיש להפחית ממנו פעמיים 22 כדי שימצא בטבלה?

תשובה: כדי שאות תיתן בהצבת ערכה תוצאה שיש להפחית ממנה פעמיים 22, צריך להתקיים:

$$\left[\begin{array}{l} 1 \leq 3x - 12 - 44 \leq 22 \quad \text{כלומר} \quad 18.3 \leq x \leq 26, \quad x \text{ מספר טבעי ומתאים לאותיות ק עד ת.} \end{array} \right]$$

ו. האם כל אות יכולה להופיע בהודעה המוצפנת? אם לא, אילו אותיות לא יופיעו לעולם בהודעה מוצפנת?

האם ההצפנה של כל אות היא יחידה? אם לא, כמה אותיות בצופן מתאימים לכל אות?

האם הפענוח של כל אות הוא יחיד? אם לא, כמה אותיות מקוריות מתאימות לכל אות מוצפנת?

תשובה: כן לכל השאלות. כל אות יכולה להופיע בהודעה המוצפנת. ההצפנה של כל אות היא יחידה, וגם הפענוח של כל אות הוא יחיד. ראו טבלת Excel בעמוד הבא.

	A	B	C	D	E
1	אות מקורית	מספר מתאים לאות מקורית	מספר לאחר הצבה בביטוי $3x - 12$	הוספה או החסרה של 22	אות בצופן
2	א	1	-9	13	מ
3	ב	2	-6	16	ע
4	ג	3	-3	19	ק
5	ד	4	0	22	ש
6	ה	5	3		ג
7	ו	6	6		ו
8	ז	7	9		ט
9	ח	8	12		ל
10	ט	9	15		ס
11	י	10	18		צ
12	כ	11	21		ש
13	ל	12	24	2	ב
14	מ	13	27	5	ה
15	נ	14	30	8	ח
16	ס	15	33	11	כ
17	ע	16	36	14	נ
18	פ	17	39	17	פ
19	צ	18	42	20	ר
20	ק	19	45	1	א
21	ר	20	48	4	ד
22	ש	21	51	7	ז
23	ת	22	54	10	י



- בודקים את הפענוח של התלמידים.
- דנים על הקשר בין הצופן לבין הביטוי האלגברי המתאים לצופן הזה.
- מתייחסים להתאמות חד חד ערכיות כמו התאמות ההיסט ולהתאמות חד ערכיות, כמו ההתאמה שבפעילות זו.