

יחידה 3: משוואות ובעיות

3.1 מספרים מיוחדים



- ביסוס וישום תרגום למשוואה או לביטוי אלגברי
- פתרון משוואות על פי שיקולים
- הבנה של משמעות מספר דו ספרתי
- הכללה זיהוי חוקיות בסדרה של שאלות.



לפני שמחלקים את דף הפעילות, מבקשים מן התלמידים לבדוק אם התכונה אכן מתקיימת במספר המיוחד 39, ולנסות למצוא מספר נוסף המקיים אותה התכונה. כדאי לתת לתלמידים די זמן לחיפוש, כדי שירגישו את היתרון של שימוש במשוואות, אם לא חשבו על כך.



הפעילות עוסקת בבעיות עם מספרים דו ספרתיים. כל אחת משלוש המשימות הראשונות 1-3, נפתרות באמצעות פתרון משוואה אחת בשני משתנים. למשוואה אחת בשני משתנים יש בדרך כלל אינסוף פתרונות, אבל במקרה שלנו המשתנים הם ספרות, לכן מספר הפתרונות סופי. כל אחת משלוש המשימות 4-6 נפתרות על ידי תרגום לביטוי אלגברי. גם במקרה זה אילוצי הבעיות גורמים למספר פתרונות סופי. במקרים מסוימים במהלך הפתרון יש לחלק במשתנה כדי לפשט את המשוואות. כדאי להזכיר לתלמידים שאין לחלק ב 0, ולברר מדוע במקרים הנ"ל המשתנה אינו יכול לקבל את הערך 0. התלמידים אינם רגילים להימצא במצב שבו המשוואה השקולה הפשוטה ביותר אינה נותנת פתרון מיידי, ויש עדיין לעשות שיקולים נוספים. אם התלמידים מתקשים במציאת פתרונות, כדאי להתייחס לכך.

1. א. x מייצג את ספרת העשרות ו y את ספרת היחידות

ביטוי למספר הדו ספרתי: $10x + y$, x מספר טבעי בין 1 ל 9 (כולל), y מספר טבעי בין 0 ל 9 (כולל)

ב. המשוואה: $x + y + xy = 10x + y$

$$x + y + xy = 10x + y \quad \text{ג. נפשט}$$

$$xy = 9x \quad \text{ספרת העשרות } x \text{ שונה מאפס, לכן מותר לצמצם.}$$

$$y = 9$$

מספרים עם אותה תכונה הם כל המספרים הדו ספרתיים שספרת היחידות שלהם 9: 19, 29, ... 99.

אפשר לבקש מן התלמידים לבדוק את התשובה על ידי בדיקת חלק מן המקרים הפרטיים.

2. א. המספר הדו ספרתי מיוצג על ידי: $10x + y$, x מספר טבעי מ 1 עד 9 (כולל), y מספר טבעי מ 0 עד 9

(כולל)

$$y + 2x + xy = 10x + y$$

$$xy = 8x \quad \text{ספרת העשרות } x \text{ שונה מאפס, לכן מותר לצמצם.}$$

$$y = 8$$

מספרים עם אותה תכונה הם כל המספרים הדו ספרתיים שספרת היחידות שלהם 8: 18, 28, ... 98.

ב. באותה דרך נמצא כי מספרים עם אותה תכונה הם כל המספרים הדו ספרתיים שספרת היחידות שלהם 7.

ג. למשל: אם מחברים לספרת היחידות את 9 פעמים ספרת העשרות ואת מכפלת הספרות, מקבלים את המספר עצמו.

מצאו את המספרים.

פתרון המשוואה המתאימה: $y = 0$.

המספרים הם: 10, 20, 30, 40, ... 90.

3. א. $5 + 2 \cdot 15 = 35$

ב. המספר הדו ספרתי מיוצג על ידי: $10x + y$

$$y + 2xy = 10x + y$$

$$2y = 10$$

$$y = 5$$

מספרים עם אותה תכונה הם כל המספרים הדו ספרתיים שספרת היחידות שלהם 5: 15, 25, ... 95.

4. $47 + 74 = 121 = 11^2$

ב. המספר הדו ספרתי מיוצג על ידי: $10x + y$

מספר הכתוב באותן ספרות בסדר הפוך: $10y + x$

$$10x + y + 10y + x = x + y \quad \text{מספרים טבעיים מ 1 עד 9 (כולל).}$$

$$11x + 11y =$$

$$11(x + y)$$

המספר יהיה ריבועי אם $x + y = 11$.

המספרים המקיימים את התכונה הם: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

5. א. $6^2 = 36 = 62 - 26$

ב. x מייצג את ספרת העשרות של המספר, ו y מייצג את ספרת היחידות.

$$10x + y - (10y + x) =$$

$$9x - 9y =$$

$$9(x - y)$$

המספר יהיה ריבועי אם $x - y = 1$ או $x - y = 4$. x ו y מספרים טבעיים מ 1 עד 9 (כולל)

המספרים המקיימים את התכונה הם: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98

וכן, 40, 51, 62, 73, 84, 95

המספר 40 מקיים $x - y = 4$, והמספר 10 מקיים $x - y = 1$. יש לשים לב שאם הופכים את סדר ספרותיהם של מספרים אלו מתקבלים מספרים שאינם דו ספרתיים, אבל הנתון במשימה התייחס למספר עצמו כדו ספרתי ולא ל "מספר ההפוך".

ייתכן שהתלמידים יסיקו גם כי $x - y$ יכול להיות 9. כאשר ינסו למצוא את המספרים יווכחו לדעת שאין מספרים דו ספרתיים שהפרש ספרותיהם 9 או יותר.

אם תלמידים אינם יודעים להסיק באופן כללי כי הפרש הספרות צריך להיות מספר ריבועי, אפשר לעודד אותם לבדוק מהם המספרים שמכפלתם ב 9 נותנת מספר ריבועי.

6. א. $3^2 = 9 = 4 \cdot 9 - 45$

ב. x מייצג את ספרת העשרות של המספר, ו y מייצג את ספרת היחידות.

$$10x + y - 9x =$$

$$x + y$$

המספר יהיה ריבועי אם סכום הספרות יהיה ריבועי:

המספרים	סכום הספרות
10	1
13, 22, 31, 40	4
18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90	9
79, 88, 97	16



1. א. $21 \cdot 31$

הצעות: $21 \cdot (30 + 1)$, $(20 + 1) \cdot 30$, $20 \cdot 30 + 20 + 30 + 1$ (לפי סעיפי הכפל במאונך)

ב. $19 \cdot 30$

הצעות: $(20 - 1) \cdot 30$, $(10 + 9) \cdot 30$

ג. $9 \cdot 25$

$$\text{הצעות: } (10 - 1) \cdot 25, (4 + 4 + 1) \cdot 25, 9 \cdot \frac{100}{4}, 9 \cdot (20 + 5), 9 \cdot 5 \cdot 5, (3 \cdot 3) \cdot 25 = 3 \cdot (3 \cdot 25)$$

ד. $16 \cdot 25$

$$\text{הצעות: } (10 + 6) \cdot 25, 4 \cdot (4 \cdot 25), 16 \cdot \frac{100}{4}, 16 \cdot (20 + 5), (16 \cdot 5) \cdot 5, (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5)$$

$$\text{ג. } 2x - y = 4$$

$$x = 6, y = 8, x = 5, y = 6, x = 4, y = 4, x = 3, y = 2$$

$$\text{א. } 5x + y = 2x + 5y$$

$$3x = 4y$$

$$x = 8, y = 6, x = 4, y = 3$$

$$\text{ד. } 2x - 2y = 17 - 5y$$

$$\text{ב. } x - 2y = 4$$

$$2x + 3y = 17$$

$$x = 8, y = 2, x = 6, y = 1$$

$$x = 7, y = 1, x = 4, y = 3, x = 1, y = 5$$



מהירות הנסיעה היא 90 קילומטרים בשעה.

אם נסמן את המספר הרשום על אבן הדרך הראשונה ב $10x + y$, אבן הדרך השנייה המספר תסומן ב $10y + x$. מכיוון שהמספרים הראשונים דו ספרתיים והשלישי תלת ספרתי, המספרים מופיעים בסדר עולה ולכן $x < y$. המרחקים בין כל שתי אבני דרך סמוכות שווים. משיקולי מרחק בין מספרים, אבן הדרך השלישית תסומן ב $100x + y$ (ולא $100y + x$)

$$\text{המספרים לפי סדר עולה הם: } 10x + y, 10y + x, 100x + y$$

$$\text{ומתקיים: } (10y + x) - (10x + y) = 100x + y - (10y + x) \quad x \text{ ו } y \text{ מ } 1 \text{ עד } 9 \text{ (כולל)}$$

$$9y - 9x = 99x - 9y$$

$$18y = 108x$$

$$y = 6x$$

הפתרון היחיד למשוואה במגבלה על המשתנים הוא: $x = 1, y = 6$.

שלושת המספרים על אבני הדרך הם: 106, 61, 16

מכיוון שמרים נוסעת במהירות קבועה, מהירות הנסיעה היא מספר הקילומטרים שמרים עברה בשעה, כלומר בין שתי אבני הדרך הקיצוניות.



1. א. בחרתי מספר דו ספרתי, הפכתי את סדר ספרותיו. חיברתי את שני המספרים וחילקתי את התוצאה ב 11. קיבלתי 5.

איזה מספר יכולתי לבחור?

$$\left[\begin{array}{l} \text{תשובה: ספרת העשרות } x, \text{ וספרת היחידות } y. \text{ המספר } 10x + y \\ 10x + y + 10y + x = 11x + 11y \\ \text{אשר } 0 \leq y \leq 9, 1 \leq x \leq 9 \\ x + y = 5 \\ \text{המספרים שיכולתי לבחור הם המספרים הדו ספרתיים, שסכום ספרותיהם: } 14, 23, 32, 41, 50 \end{array} \right.$$

ב. בחרתי מספר דו ספרתי, הפכתי את סדר ספרותיו. חיברתי את שני המספרים וחילקתי את התוצאה ב 11. הפחתתי את ספרת היחידות של המספר שבחרתי, וקיבלתי את מכפלת הספרות של המספר שבחרתי.

איזה מספר בחרתי?

$$\left[\begin{array}{l} \text{תשובה: לפי סעיף א הביטוי המתקבל אחרי חלוקה ב 11 הוא } x + y \\ x + y - y = xy \\ x(1 - y) = 0 \text{ לכן } y = 1 \\ \text{המספרים שיכולתי לבחור הם המספרים הדו ספרתיים בעלי ספרת יחידות 1:} \\ 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 \end{array} \right.$$

2. בחרתי מספר דו ספרתי, הפכתי את סדר ספרותיו. חיסרתי את המספר הקטן מן המספר הגדול, וחילקתי את התוצאה ב 9. קיבלתי 5.

איזה מספר יכולתי לבחור?

$$\left[\begin{array}{l} \text{תשובה: נסמן את המספר ב } 10x + y \text{ עם המגבלות } x, y \text{ מספרים טבעיים מ } 1 \text{ עד } 9 \text{ (כולל קצוות).} \\ 10y + x \text{ מייצג את "המספר ההפוך".} \\ \text{ההפרש החיובי ביניהם יהיה: } 9x - 9y \text{ (אם } x > y \text{) או } 9y - 9x \text{ (אם } y > x \text{)} \\ \text{ואחרי חלוקה ב 9 מתקבל הביטוי } x - y. \\ \text{נתון כי } x - y = 5. \\ \text{המספרים שיכולתי לבחור הם: } 50, 61, 72, 83, 94 \text{ או } 16, 27, 38, 49 \end{array} \right.$$



- פותרים שאלה אחת ביחד, ומתעכבים על הדרך למצוא את הפתרונות כשנתונה המשוואה.
 - דנים על המשותף לכל המשימות בפעילות פתרונות רבים שמספרם סופי.
- הפתרונות הרבים נובעים מכך שמדובר על קשר בין שני משתנים.
- המספר הסופי של הפתרונות נובע מאילוץ הבעיה הפתרונות הם מספרים דו ספרתיים. קיים מספר סופי של ספרות ושל מספרים דו ספרתיים, ורק חלקם מקיימים את התכונה המתוארת במשימה.

- מתייחסים לאופי השונה של הפתרון של משימות 1-3 לעומת משימות 4-6. במשימות הראשונות יכולנו לכתוב משוואה וגם לפתור אותה. במשימות האחרונות אפשר רק לרשום ביטוי, ולהסיק ממנו את הפתרון.