

2.5 סכום ומכפלה



- יישום לחוקים וסדר בפעולות החשבון
- שימוש באלגברה ככלי להכללה והצדקה
- הפעלת שיקולים בחקירה
- אוריינות בחישובים המשלבים מספרים מכוונים ושברים



בחרים שלושה מספרים לפחות אחד מהמספרים שלילי. מבקשים מן התלמידים לחשב את סכום שלושת המספרים ואת מכפלתם, ולהסביר את סימן התוצאה בכל תרגיל.



כשידוע הסכום והמכפלה של שלושה מספרים, אפשר לכתוב שתי משוואות עם שלושה משתנים. למערכת משוואות כזו יש בדרך כלל אינסוף פתרונות, אבל במקרה הנוכחי מתבקשים פתרונות שהם מספרים שלמים, וכזה יש רק אחד. סעיפי המשימות 1 ו 2 מוליכים בהדרגה אל הפתרון. אפשר אמנם לעשות שיקולים יעילים יותר למשל, להתחיל מהגורמים של המכפלה, אבל השיקולים הנעשים בסעיפים הלוקחים בחשבון מצב מורכב, חשובים בפני עצמם גם ללא קשר לבעיה. המשימות דורשות אוריינות בפעולות חשבון במספרים מכוונים.

במשימה 5 הסיטואציה דומה נתון הסכום והמכפלה של שלושה מספרים, אבל המשימה שונה: קביעת שינויים בסכום ובמכפלה הנתונים הנובעים משינויים שנעשו במספרים המרכיבים אותם. המשימה דורשת הבנה טובה של חוקי פעולות החשבון חילוף, קיבוץ ופילוג. כמו כן חלק מהסעיפים במשימה דורשים ביצוע פעולות בשברים אלגבריים. אם התלמידים טרם למדו את הנושא, אפשר לדלג על סעיפים אלה או להסתפק בהדרכה קצרה המדגישה את הדמיון בין ביצוע הפעולות בשברים מספרים ובין ביצוע הפעולות בשברים אלגבריים.

1. א. לא ייתכן ששלושת המספרים חיוביים, כי המכפלה שלילית.

ב. לא ייתכן ששלושת המספרים שליליים, כי הסכום חיובי.

ג. לא ייתכן שרק שניים מן המספרים שליליים, כי המכפלה שלילית.

ד. ייתכן שרק מספר אחד שלילי, כי אז המכפלה חייבת להיות שלילית והסכום יכול להיות חיובי.

ה. **לסיכום:** שניים מהמספרים צריכים להיות חיוביים והמספר השלישי שלילי.

2.

- א. לא ייתכן ששלושת המספרים זוגיים, כי הסכום אי זוגי.
 ב. ייתכן שרק שניים מן מספרים זוגיים, כי הסכום אי זוגי.
 ג. לא ייתכן שרק אחד המספרים זוגי כי הסכום אי זוגי.
 ד. לא ייתכן ששלושת המספרים אי זוגיים כי המכפלה זוגית.
 ה. **לסיכום:** שניים מהמספרים צריכים להיות זוגיים והמספר השלישי אי זוגי.
 ו. המספרים הם: 2, 3, -2

שיקולים:

מכיוון שהמכפלה 12-, והמספרים שלמים, שלושת המספרים צריכים להיות מחלקים (חיוביים או שליליים) של 12.

שלושת המחלקים החיוביים שמכפלתם 12 הן:

$$1 \cdot 1 \cdot 12 \quad 1 \cdot 2 \cdot 6 \quad 1 \cdot 3 \cdot 4 \quad 2 \cdot 2 \cdot 3$$

רק בשתיים מן המכפלות האלה שני מספרים זוגיים והשלישי אי זוגי.

מכיוון שהסכום חיובי (+3), ושניים מהמספרים חיוביים, סכום שני המספרים החיוביים צריך להיות גדול ב 3 מהערך המוחלט של המספר השלישי השלילי. לכן המספרים הם: 2, 3, -2

3.

לפי סדר השאלות במשימות 1 ו 2 התשובות הן כדלקמן:

לא ייתכן ששלושת המספרים חיוביים, כי אז כולם קטנים מ 3, ומכפלתם לא יכולה להיות 12.

לא ייתכן ששלושת המספרים שליליים, כי הסכום חיובי.

ייתכן שרק שניים מן המספרים שליליים.

לא ייתכן שרק מספר אחד שלילי, כי המכפלה חיובית.

לסיכום: שניים מהמספרים צריכים להיות שליליים והמספר השלישי חיובי.

לא ייתכן ששלושת המספרים זוגיים, כי הסכום אי זוגי.

ייתכן שרק שני מספרים זוגיים, כי הסכום אי זוגי.

לא ייתכן שרק אחד המספרים זוגי, כי הסכום אי זוגי.

לא ייתכן ששלושת המספרים אי זוגיים, כי המכפלה זוגית.

לסיכום: שניים מהמספרים צריכים להיות זוגיים והמספר השלישי אי זוגי.

על ידי הפעלת שיקולים דומים לשיקולים שבמשימות הקודמות מסיקים כי המספרים הם: 6, -1, -2.

4.

למשל, סכום המספרים הוא +4 ומכפלתם -18

המספרים הם: +1, -3, +6 או -2, 3, 3

5.

נתון: $a + b + c = -9$ $abc = -20$

$$[a + (-5)] + [b + (-5)] + [c + (-5)] = (a + b + c) - 15 = -9 - 15 = -24$$

המכפלה $(a - 5)(b - 5)(c - 5)$ תלויה במספרים ואי אפשר לדעת את התוצאה.

$$-2a + (-2b) + (-2c) = -2 \cdot (a + b + c) = -2 \cdot (-9) = 18$$

$$-2a \cdot (-2b) \cdot (-2c) = -8 \cdot (abc) = -8 \cdot (-20) = 160$$

ג. $(a - 4) + (b - 4) + (c - 4) = (a + b + c) - 12 = -9 + (-12) = -21$
 המכפלה $(a - 4)(b - 4)(c - 4)$ תלויה במספרים ואי אפשר לדעת את התוצאה.

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{-9}{3} = -3 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{c}{3} = \frac{a \cdot b \cdot c}{27} = \frac{-20}{27}$$

ה. הסכום $|a| + |b| + |c|$ תלוי בסימני המספרים ואי אפשר לדעת את התוצאה.

$$|a| \cdot |b| \cdot |c| = |abc| = 20$$

$$-a + (-b) + (-c) = -(a + b + c) = -(-9) = 9 \quad \text{ו.}$$

$$-a \cdot (-b) \cdot (-c) = -abc = -(-20) = 20$$

ז. הסכום $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc}$ תלוי במספרים ואי אפשר לדעת את התוצאה.

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} = \frac{1}{-20} = -\frac{1}{20}$$

$$(a + a) + (b + b) + (c + c) = (a + b + c) + (a + b + c) = -9 + (-9) = -18 \quad \text{ח.}$$

$$(a + a)(b + b)(c + c) = 2a \cdot 2b \cdot 2c = 8(abc) = 8 \cdot (-20) = -160$$

ט. הסכום $(a \cdot a) + (b \cdot b) + (c \cdot c)$ תלוי במספרים ואי אפשר לדעת את התוצאה.

$$(a \cdot a)(b \cdot b)(c \cdot c) = (abc)(abc) = (-20) \cdot (-20) = 400$$

$$(a - a) + (b - b) + (c - c) = 0 \quad \text{י.}$$

$$(a - a)(b - b)(c - c) = 0$$

יא. הסכום $a \cdot (-a) + b \cdot (-b) + c \cdot (-c)$ תלוי במספרים ואי אפשר לדעת את התוצאה.

$$a \cdot (-a) \cdot b \cdot (-b) \cdot c \cdot (-c) = abc(-abc) = -20 \cdot 20 = -400$$

יב. $a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c} = 1 + 1 + 1 = 3$ תלוי במספרים ואי אפשר לדעת את התוצאה.

$$(a \cdot \frac{1}{a}) \cdot (b \cdot \frac{1}{b}) \cdot (c \cdot \frac{1}{c}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$



השיטה מבוססת על הבסיס הבינארי. אפשר להסביר אותה גם בעזרת חוק הפילוג.

$$11 \cdot 15 = (1 + 2 + 8) \cdot 15 = 1 \cdot 15 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot [2 \cdot (2 \cdot 15)] = 15 + 30 + 120 = 165 \quad \text{למשל,}$$

$$14 \cdot 31 = (2 + 4 + 8) \cdot 31 = 2 \cdot 31 + 2 \cdot (2 \cdot 31) + 2 \cdot [2 \cdot (2 \cdot 31)] = 62 + 124 + 248 = 434$$



מאריס א'ל כולר

פתרונות אפשריים:

מנה של מספרים		מכפלה של מספרים		סכום של מספרים		התוצאה
אחד המספרים שבר בין 1 ל (-1)	כרצונכם	אחד המספרים שבר בין 0 ל (-1)	כרצונכם	בעלי סימנים שונים	בעלי אותו סימן	
$-\frac{1}{3} : (-\frac{1}{3})$	6 : 6	$-\frac{2}{3} \cdot (-1\frac{1}{2})$	$3 \cdot \frac{1}{3}$	$8 + (-7)$	$0.4 + 0.6$	1
$0.4 : 2$	2 : 10	$-0.1 \cdot (-2)$	$0.1 \cdot 2$	$9 + (-8.8)$	$0.1 + 0.1$	0.2
$-0.01 : 0.1$	1 : (-10)	$0.2 \cdot (-0.5)$	$0.2 \cdot (-0.5)$	$-7 + 6.9$	$-\frac{1}{20} + (-\frac{1}{20})$	-0.1
$1.2 : (-0.5)$	-12 : 5	$4.8 \cdot (-0.5)$	$2 \cdot (-1.2)$	$5 + (-7.4)$	$-1.1 + (-1.3)$	-2.4
$\frac{2}{3} : 2$	1 : 3	$-\frac{1}{6} \cdot (-2)$	$\frac{1}{30} \cdot 10$	$1 + (-\frac{2}{3})$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$



א. המיקוד הוא: 36427

ב. המיקוד הוא: 728163549



א. המספרים הם: $\frac{1}{5}$, 5, -6, 6

ב. המספרים הם: $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$



1. הממוצע של שלושה מספרים הוא -2 . מצאו שתי דוגמאות לשלושה מספרים מתאימים.
- תשובה:** כדי שהממוצע יהיה -2 , סכום שלושת המספרים צריך להיות -6 . אפשר לבחור את שני המספרים הראשונים באקראי, ואת השלישי להתאים כך שהסכום יהיה -6 .
- למשל: $10, 20, -36$ $-10, -20, 24$

2. הממוצע של ארבעה מספרים הוא מספר שלילי.

בכל סעיף קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו תשובתכם.

א. כל המספרים יכולים להיות שליליים.

ב. כל המספרים חייבים להיות שליליים.

ג. שלושה מהמספרים יכולים להיות חיוביים.

ד. כל המספרים יכולים להיות חיוביים.

ה. מכפלת ארבעת המספרים יכולה להיות גדולה מ 1000 .

תשובה:

א. נכון. למשל, הממוצע הוא -6 והמספרים הם: $-3, -7, -4, -10$

ב. לא נכון. למשל, הממוצע הוא -3 והמספרים הם: $-10, -5, -2$ ו 5 . הממוצע שלילי ולא כל המספרים שליליים.

ג. נכון. למשל הממוצע הוא -1 והמספרים הם: $-20, 2, 4, 10$

ד. לא נכון. אם כל המספרים חיוביים אז הסכום חיובי וגם מנת הסכום ב 4 חיובית. לכן הממוצע חייב להיות חיובי.

ה. נכון. למשל, המספרים הם: $3, 2, -1, -1000$



- מתייחסים בשאלות 1-4 לאסטרטגיה של מיצוי אפשרויות: כל האפשרויות של סימני המספרים, כל האפשרויות של זוגיות ואי זוגיות של המספרים, כל הגורמים, כל אפשרויות המכפלות
 - בשאלה 5, מתייחסים לדרכים שבהם נמקו התלמידים את תשובותיהם.
- מתייחסים לכך שבמקרים מסוימים שבהם מפעילים אותה פעולה על כל מספר, אפשר לדעת מה קורה לתוצאה, מבלי לדעת מהם המספרים עצמם.