יחידה 2: מספרים מכוונים וחוקי פעולות חשבון

2.1 שלבים

מטרות

- ביסוס וישום סדר פעולות חשבון
- חזרה על שברים עשרוניים
- קשר בין שברים פשוטים לעשרוניים
- הכללה   זיהוי חוקיות בסדרה של תרגילים.

אמצעי עזר

מחשבון

פתיחה

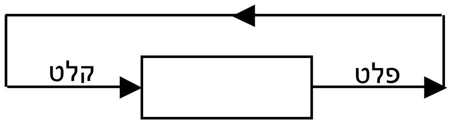
מבקשים מן התלמידים לרשום את סדרת הלחיצות כתרגיל אחד עם סוגריים.

$\{[(0.1 + 0.2) \cdot 0.1 + 0.2] \cdot 0.1 + 0.2\} \cdot 0.1 + 0.2 =$

או כסדרה של ארבעה תרגילים (ראו פתרון משימה 1).

שואלים: מה מיוחד בתרגילים אלו?

הפעילות עוסקת בתרגילים בשלבים החוזרים על עצמם. בכל שלב מפעילים אותן הפעולות על השלב הקודם. אפשר לדמות כל תרגיל למכונה שבה הפלט של כל שלב הופך להיות הקלט של השלב הבא.



במחשבון ניתן לחשב תרגיל כזה על ידי סדרת לחיצות ללא סוגריים. לחיצה על סימן השוויון מציגה את התוצאה של כל שלב על הצג, ואפשר להמשיך להפעיל עליה מחדש את הפעולות.

לכל התרגילים בפעילות יש מבנה דומה, ויש חוקיות המאפשרת לשער את התוצאה של שלב מסוים מן התרגיל ואת התרגיל מן התוצאה של שלב מסוים.

אפשר לבקש מן התלמידים לרשום הכללה לשלב ה n בתרגילים השונים.

פתרונות והערות

1. א. $0.1 + 0.2 = \mathit{0.3}$

$0.3 \cdot 0.1 + 0.2 = \mathit{0.23}$

$0.23 \cdot 0.1 + 0.2 = \mathit{0.223}$

$0.223 \cdot 0.1 + 0.2 = \mathit{0.2223}$

כל תרגיל הוא שלב בסדרת הלחיצות.

ב. התוצאה בשלב 10 תהיה 0.2222222223 .

בשלב ה n התוצאה תהיה $0.\underbrace{222\ldots2}_{n-1\ \text{פעמים}}3$

ג. התוצאה בשלב 6 קטנה מהתוצאה בשלב 5 ב 0.000007 .

2. לדוגמה:

שלב 1. $0 \cdot 0.1 + 0.4 = 0.4$

שלב 2. $0.4 \cdot 0.1 + 0.4 = 0.44$

שלב 3. $0.44 \cdot 0.1 + 0.4 = 0.444$

שלב 4. $0.444 \cdot 0.1 + 0.4 = 0.4444$

3. א. שלב 1. $(0.1 + 0.1) \cdot 0.1 = \mathit{0.02}$

שלב 2. $(0.02 + 0.1) \cdot 0.1 = \mathit{0.012}$

שלב 3. $(0.012 + 0.1) \cdot 0.1 = \mathit{0.0112}$

שלב 4. $(0.0112 + 0.1) \cdot 0.1 = \mathit{0.01112}$

שלב 5. $\mathit{(0.01112 + 0.1) . 0.1 = 0.011112}$

שלב 6. $\mathit{(0.011112 + 0.1) \cdot 0.1 = 0.0111112}$

ב. 0.01111111112

ג. 0.008 , 0.0008 , 0.00008 , 0.000008 , 0.0000008

ד. שלב 7

4. לדוגמה:

שלב 1. $0.1 + 0.3 = 0.4$

שלב 2. $0.4 \cdot 0.1 + 0.3 = 0.34$

שלב 3. $0.34 \cdot 0.1 + 0.3 = 0.334$

שלב 4. $0.334 \cdot 0.1 + 0.3 = 0.3334$

בשלב ה n התוצאה תהיה $0.\underbrace{333\ldots3}_{n-1\ \text{פעמים}}4$

דוגמה אחרת:

שלב 1. $(0.01 + 0.1) \cdot 0.1 = 0.011$

שלב 2. $(0.011 + 0.1) \cdot 0.1 = 0.0111$

שלב 3. $(0.0111 + 0.1) \cdot 0.1 = 0.01111$

שלב 4. $(0.01111 + 0.1) \cdot 0.1 = 0.011111$

בשלב ה n התוצאה תהיה $0.0\underbrace{111\ldots1}_{n+1 \text{ פעמים}}$

5. א. $\frac{5}{9} = 0.5555...$

כאשר מחשבים את $\frac{5}{9}$ כשבר עשרוני באמצעות חילוק ארוך, מקבלים את התחושה של פעולות החוזרות על עצמן. בכל שלב של החילוק הארוך, מחלקים 50 ב 9 ומפחיתים 45 מ 50. לכן מתקבלת תוצאה מחזורית. מספר הספרות הוא אינסופי.

ב. מחפשים סדרת תרגילים שתוצאותיהם: 0.5 , 0.55 , 0.555 , 0.5555 וכו'.
ישנן אפשרויות שונות. לאחר שבשלב 1 רושמים תרגיל שתוצאתו 0.5, הרי בכל שלב כופלים את תוצאת השלב הקודם ב 0.1, ומוסיפים 0.5. מתקבלות התוצאות המבוקשות.
מחשבונים שונים מראים מספר ספרות שונה, התלוי במספר הספרות שיכולות להופיע על הצג. אחת ממטרות המשימה היא להראות כי המחשבון לעולם יראה מספר ספרות סופי, כלומר המספר העשרוני המוצג בו הוא רק קירוב של $\frac{5}{9}$, ולא המספר עצמו.

ג. מחפשים סדרת תרגילים שתוצאותיהם: 0.1 , 0.11 , 0.111 , 0.1111 וכו'.
מתחילים ב 0.1. בכל שלב כופלים את תוצאת השלב הקודם ב 0.1, ומוסיפים 0.1.

$0 \cdot 0.1 + 0.1 = 0.1$

$0.1 \cdot 0.1 + 0.1 = 0.11$

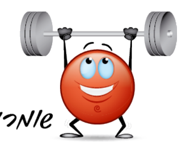
$0.11 \cdot 0.1 + 0.1 = 0.111$

$0.111 \cdot 0.1 + 0.1 = 0.1111$

וכן הלאה.

תלמידים ששמים לב לקשר בין השברים, אינם צריכים לחשב מספר עשרוני עבור $\frac{1}{9}$ באמצעות חילוק ארוך. מספיק לחלק את התוצאה הקודמת ב 5.

ד. אפשר לראות כי תוצאת כל שלב של הסדרה עבור $\frac{5}{9}$ היא פי 5 מתוצאת אותו שלב בסדרה עבור $\frac{1}{9}$. ואכן,
$\frac{1}{9} \cdot 5 = \frac{5}{9}$



שומרים על כושר

1. א. $\frac{2}{3}$ ב. $\frac{3}{5}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. $\frac{8}{13}$

2. א. $\frac{2}{5}$ ב. $\frac{5}{12}$ ג. $\frac{12}{29}$ ד. $\frac{29}{70}$

3. בשתי הסדרות המונה של כל תוצאה הוא המכנה של התוצאה הקודמת.

במשימה 1 כל מכנה הוא סכום המונה והמכנה של התוצאה הקודמת.

שני השלבים הבאים יהיו: $\frac{13}{21}$ ו $\frac{21}{34}$

במשימה 2 כל מכנה הוא סכום של המונה ופעמיים המכנה של התוצאה הקודמת.

שני השלבים הבאים יהיו: $\frac{70}{169}$ ו $\frac{169}{408}$

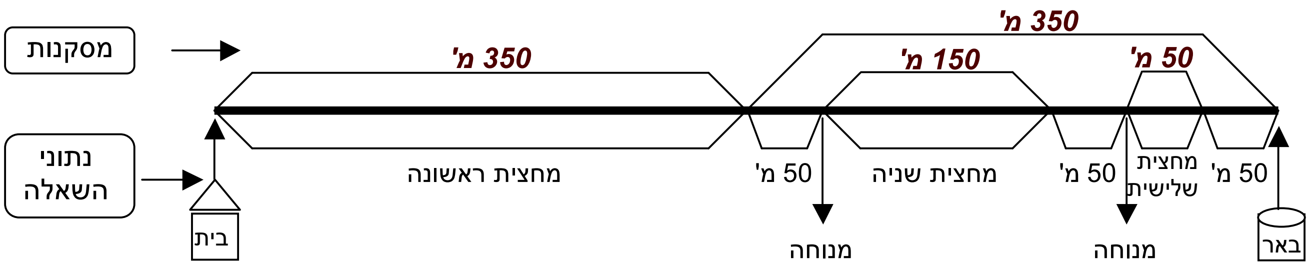
ההסבר לחוקיות מתברר בשעת חישוב השלבים הראשונים: כאשר הופכים את המספר המעורב לשבר, מחברים למעשה מונה ומכנה (משימה 1) או כופלים מכנה ב 2 ומחברים למונה (משימה 2). המכנה והמונה מחליפים תפקידים בשלב של מציאת ההופכי.

4. משלב מסוים והלאה מופיעה אותה תוצאה כי גם במחשב, כמו במחשבון, מספר הספרות המוקצבות לרישום מספר הוא מוגבל.

פתרון בדרך גרפית

תחילה משרטטים את הנתונים   השרטוט שמתחת לישר.

אחר מתחילים מהסוף (מהבאר) לכיוון ההתחלה ומשלימים את המרחקים בהתאם לנתונים.



המרחק 700 מטר.

פתרון מספרי

אפשר לפתור בחישוב לאחור בעזרת תרגיל דומה לתרגילים שעסקנו בהם בפעילות.

$[(50 \cdot 2 + 50) \cdot 2 + 50] \cdot 2 = 700$

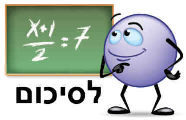
למסיימים

א. רשמו את השלבים של התרגילים ב"שומרים על כושר" ללא קווי שבר. רשמו פעולת חילוק במקום קווי שבר, והשתמשו בסוגריים. עבדו בשברים עשרוניים וחשבו במחשבון. רשמו את כל התוצאות.

תשובה: למשל, משימה 1ג $1:\{1+1:[1+1:(1+0.5)]\}$

ב. המשיכו לחשב שלבים במחשבון עד שהמחשבון מפסיק לשנות את התוצאה.
מה תוכלו לומר על התוצאות המתקבלות?

תשובה: התוצאות של השלבים בכל משימה הולכות ומתקרבות למספר מסוים.
התוצאות במשימה 1 הם יחסים של מספרים סמוכים בסדרת פיבונאצ'י. התוצאות מתקרבות למספר ...0.618 הנקרא "יחס הזהב". מומלץ מאוד לקרוא על יחס הזהב בספרים או באינטרנט.
התוצאות במשימה 2 הולכות ומתקרבות ל 0.4142



לסיכום

- דנים על המשותף לכל המשימות בפעילות, ומציגים את מכונת הקלט פלט (ראו ב**פתיחה**).
- בהתייחס למשימות 1 ו 3 שואלים: מדוע התוצאה של כל שלב קטנה מן התוצאה בשלב הקודם?

תשובה: למשל, במשימה 1, הכפל ב 0.1 מקטין את התוצאה של השלב הקודם פי 10. התוספת של 0.2 "מזיזה" את הספרה 3 בתוצאת השלב החדש, מקום אחד ימינה, ובמקום הקודם שלה עומדת הספרה 2.

- מבקשים מן התלמידים הכללה לשלב ה n במשימות השונות. (ראו הכללות בפתרונות והערות למשימות.)
- מספרים לתלמידים על השימוש הרחב בתחום המחשבים בפעולות שחוזרות על עצמן, ועל יחס הזהב וחתך הזהב (בהתייחס ל"שומרים על כושר" משימה 1)