שמוש „בעקרון רועה הצאן"
להתרת בעיה גיאומטרית

מאת: גין מורו
תרגום: עקיבא סקידל, בי"ס אזורי כפר בלום

הנה בעיה ידועה למדי: כמה ריבועים בסריג של $n \times n$ משבצות ריבועיות?

התשובה לשאלה זו היא:(1)

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

כלומר, $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

שינוי קל בתנאי הבעיה מוליך לתוצאות מפתיעות למדי, והבעיה החדשה יכולה לשמש מבוא יפה ללימוד טכניקה מתוחכמת בפתרון בעיות קומבינטוריות מסוימות.

נשאל את השאלה: כמה מלבנים אפשר למצוא באותו סריג של $n \times n$ משבצות?

למעשה מופיעות כאן שתי שאלות:

א. כמה סוגי מלבנים כאן? (הכוונה למספר המלבנים השונים זה מזה בממדיהם.)

ב. כמה מלבנים מכל סוג?

1) ראה נספח א (מאת עקיבא סקידל)

אם נצייר, לדוגמה, סריג 3 x 3, נראה שמופיעים המלבנים (כולל ריבועים) בעלי הממדים הבאים:

3 x 3	2 x 2	1 x 1
	2 x 3	1 x 2
		1 x 3

(שים לב! אין אנו מבחינים בין מלבן r x s לבין מלבן s x r.) יש כאן, אם כן, בסך הכל ששה סוגי מלבנים שונים. ומהו מספר המלבנים מכל סוג? מספר הריבועים כבר ידוע לנו - 14;

מלבנים 2 x 1 יש שניים בכל שורה ושניים בכל עמודה - בסך הכל 12;

מלבנים 3 x 1 יש 6 ומלבנים 3 x 2 יש שניים במאוזן ושניים במאונך, בסך הכל 4.

נחבר: $14 + 12 + 6 + 4 = 36$

אם נבדוק כמה מקרים פרטיים אחרים, נגיע לנתונים הבאים:

גודל הסריג	מס׳ סוגי המלבנים השונים	המס׳ הכולל של מלבנים
1 × 1	1	1
2 × 2	3	9
3 × 3	6	36
4 × 4	10	100
5 × 5	15	225
.	.	.
.	.	.
.	.	.

עולות על הדעת שתי השערות:

א. מספר סוגי המלבנים השונים בסריג n x n הוא:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

ב. המספר הכולל של מלבנים באותו סריג הוא:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

לצורך הוכחת ההשערות הללו נשתמש בעקרון הספירה הידוע בשם "עקרון רועה הצאן":

"איך מוצאים את מספר הכבשים בעדר? סופרים את הרגליים, ומחלקים ב-4".

<u>הוכחת השערה א׳</u>

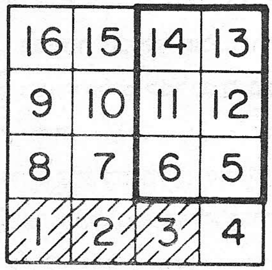
ראשית נדון במלבנים בגודל $r \times s$ שאינם ריבועים, כלומר:

$$1 \le r \le n, \quad 1 \le s \le n, \quad r \ne s$$

את המספר הראשון (מתוך n) אפשר לבחור ב- n אופנים, את המספר השני ב- $(n - 1)$ אופנים. בסך הכל אפשר ליצור זוג סדור (r, s) ב- $n(n - 1)$ אופנים. אך מכיון שאצלנו מלבן $r \times s$ זהה עם מלבן $s \times r$ יש לחלק מספר זה ב-2, ונקבל $\frac{n(n-1)}{2}$ סוגי מלבנים, שאינם ריבועים. מספר הריבועים בסריג $n \times n$, השונים בגודלם זה מזה, הוא n. אם כן, מספר סוגי המלבנים הוא:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

<u>הוכחת השערה ב׳:</u>



ציור 1

ראשית נמספר את המשבצות במספרים טבעיים מ-1 עד n^2. כל זוג סדור של משבצות (a,b) (כאשר $1 \le a \le n^2$, $1 \le b \le n^2$) קובע מלבן, כך שהמשבצות a ו- b נמצאות בפינות נגדיות של המלבן. למשל, בציור מס׳ 1 קובע הזוג $(1, 3)$ את המלבן המקווקו והזוג $(6, 13)$ קובע את המלבן שבתוך המסגרת העבה. אך לצערנו ההתאמה איננה חד-חד-ערכית: יותר מזוג סדור אחר יכול להתייחס לאותו מלבן. בדוגמה שלנו, המלבן המקווקו מיוחס גם לזוג הסדור $(3, 1)$ והמלבן שבתוך המסגרת מיוחס גם לזוגות $(13, 6)$, $(14, 5)$ ו- $(5, 14)$. אם כן, אין מנוס מלהיעזר בעיקרון רועה הצאן.