

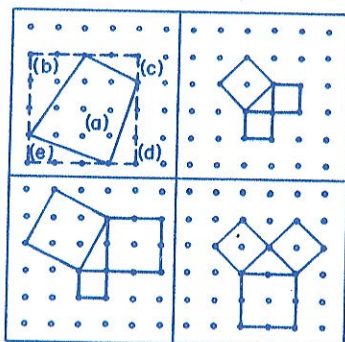
שבבים-עלון מורי מתמטיקה תיק מס' 2

מאז ומעולם היה משפט פיתגורס חביבם של מורי חטיבת הביניים וביה"ס התיכון והיה מקור לגילויים מעניינים. מאמר זה מתאר חקירה של משפט זה בעזרת לוח גיאומטרי.

תחילה, מלים מספר על הלוח הגיאומטרי. מייחסים את המצאתו של הלוח הגיאומטרי לד"ר Caleb Gattegno, המתמטיקאי אשר פיתח את שיטת הבדידים הצבעוניים. המדובר הוא בלוח אשר בו נעוצים מסמרים או סיכות בשורות סדורות. ניתן ליצור עליו צורות גיאומטריות על-ידי גומיות.

נמצאים בשימוש שלושה סוגים של לוחות גיאומטריים: (1) לוח עם רשת ריבועית, (2) לוח מעגלי ו-(3) לוח עם רשת איזומטרית. במחקר זה נשתמש בסוגים (1) ו-(3) שהם אנלוגיים לנייר ריבועי ולנייר איזומטרי, בהתאמה. אולם, להבדיל מנייר, ניתן לומר שהלוח הגיאומטרי הוא אמצעי דינמי. תכונה זו מקנה לו יתרונות רבים בכיתת הלימוד.

אינני מכיר אמצעי לימוד אחר שהוא כה פשוט וכה "מתוחכם" בעת ובעונה אחת. הוא יכול לשמש כעזר בגן הילדים והוא יכול להיות אתגר למתמטיקאים בכירים באוניברסיטה. הלוח הגיאומטרי הידוע ביותר כיום הוא מן הדגם בעל הרשת הריבועית. ניתן לבנותו בקלות בבית. לצורך חקירה זו מוטב להשתמש בלוח 10×10 (100 מסמרים). ניתן גם להשתמש בארבעה לוחות קטנים יותר המוצמדים יחדיו, בתנאי שהשוליים הם ברוחב השווה למחצית המרווח בין המסמרים (ציור 1).



ציור 1

בסוג זה של לוח אפשר בקלות למצוא את השטח של כל מצולע פשוט (מציאת שטחו של מצולע לא-פשוט עלולה להיות קשה בהרבה). השיטה הפשוטה ביותר מבוססת על

לוח היה לפיתגורס. לוח גיאומטרי

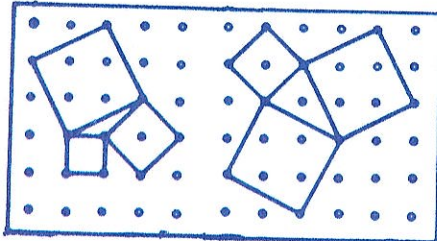
מאת: ויליאם יובנק
תרגום: אבי זכטר

במאמר זה מובאות הצעות שונות לעבודה בכתה. מתוכן יוכל לבחור כל מורה את הנראה כמתאים לרמת כיתתו.

William A. Ewbank, "If Pythagoras Had a Geoboard", Mathematics Teacher, March 1973 (Vol. 66, pp.215-21), copyright by the National Council of Teachers of Mathematics. Used by permission.

הלוח הגיאומטרי הרצ"ב מיוצר ע"י "צעצועי בוקי". ניתן להשיגו אצל "חמד" חברה למשחקים דידקטיים, החשמונאים 7, בני-ברק.

מקרים שבהם נראה שהמשולשים אינם ישרי זווית. הראשון קהה זווית כי $1 + 2 < 5$ והשני חוד זווית כי $2 + 5 > 5$.

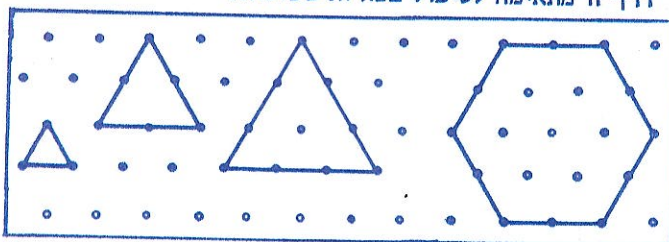


ציור 3

ועתה נעבור ללוח האיזומטרי. סוג זה של לוח אינו נפרץ ביותר. אולם ניתן לבנות לוח כזה בלי קושי. מאחר וחשוב שמיקום המסמרים יהיה מדויק ככל האפשר וכדי להימנע מן הצורך לשרטט את הקיום מומלץ להניח על הלוח נייר איזומטרי. נועצים את המסמרים בנקודות החיתוך של הקווים במרחקים רצויים (2 ס"מ הם מרחק נוח), ואחר מסירים את הנייר.

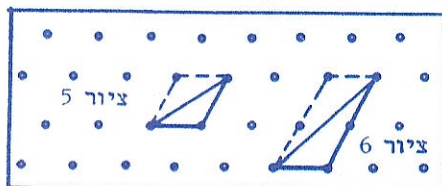
במבט ראשון מתעורר קושי, אשר נראה מפריע למדי: אי אפשר לבנות ריבוע על הלוח האיזומטרי! אין אפשרות לבדוק את השטח של ריבוע הבנוי על צלעו של משולש כל שהוא, וקשה לחשב שטחים ביחידות ריבועיות.

הצורה הבסיסית בלוח האיזומטרי היא משולש שווה צלעות. אם כן מדוע לא נשתמש בשטחו של המשולש שווה הצלעות הקטן ביותר כיחידת שטח? מציור 4, אשר בו משולשים ששטחם 1, 4, ו-9, ומשושה ששטחו 24, ניתן להוכיח כי דרך זו מתאימה לטיפול בצורות פשוטות.



ציור 4

בציור 5, שטח כל משולש הוא 1 כי הוא שווה למחצית שטח המעוין ששטחו 2. שטח המשולש שבציור 6 הוא 2 כי הוא שווה למחצית שטח המקבילית ששטחה 4. בשיטה זו אפשר



ציור 5

ציור 6

עיקרון החיסור (על-ידי חסימת הצורה במלבן או מצולע בעל זוויות ישרות או 270°)⁽¹⁾. ניתן לחשב שטח המרובע (a) בציור 1, על-ידי חיסור סכום השטחים של המשולשים (b), (c), (d) ו-(e) משטח הריבוע החוסם 4×4 כלומר 16. שטחים אלו הם $\frac{1}{2}(2 \times 3)$, $\frac{1}{2}(2 \times 1)$, $\frac{1}{2}(3 \times 1)$, $\frac{1}{2}(3 \times 1)$ ו- $\frac{1}{2}(3 \times 1)$. בהתאמה וסכומם 7 יחידות. כלומר שטח המרובע (a) הוא $16 - 7$, או 9 יחידות.

ידיעת חשבונות מסוג זה הכרחית לשם חקירת משפט פיתגורס בעזרת הלוח הגיאומטרי.

בשיטה זו יכול התלמיד לבנות צורות לפי המודגם בשלושת הלוחות הנוספים שבציור 1 ולהראות בעזרת המשולשים ישרי הזווית ש:

$$1^2 + 1^2 = 2$$

למעלה מימין

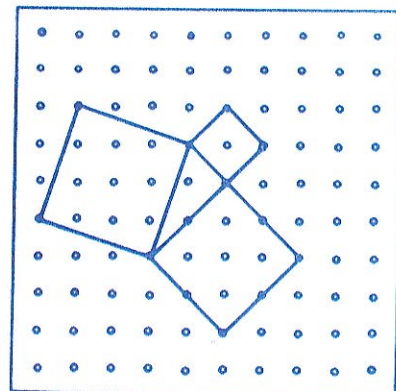
$$1^2 + 2^2 = 5$$

למטה משמאל

$$2 + 2 = 2^2$$

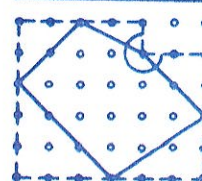
ולמטה מימין

בציור 2 מוצג סידור של משולש ישר זווית "מוטה" על צידו בלוח של 10×10 . ניתן להראות שהשטחים של הריבועים הם 2, 8, ו-10.



ציור 2

בהתעורר ספק בקשר למשולש מסוים, האם הוא אכן ישר זווית (ואם התלמידים כבר מנוסים בישום העקרונות שהוצגו לעיל), הם יכולים להשתמש בהיפוכו של משפט פיתגורס כדי להחליט איזה משולש הם בנו. כלומר, אם שטח הריבוע הבנוי על הצלע הארוכה ביותר של המשולש שווה לסכום השטחים של הריבועים הבנויים על הצלעות הנותרות, הרי המשולש הוא ישר זווית. ציור 3 מראה שני

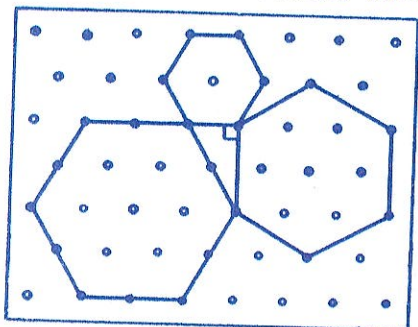


(1) דוגמת מצולע חוסם, בעל זווית של 270° . (המערכת)

קיימות עוד "הרחבות" של המשפט. על-ידי משולשים שווי צלעות ניתן להרכיב משושה משוכלל ואז אולי יהיה משפט פיתגורס כך:

שטחו של משושה משוכלל הבנוי על היתר של משולש ישר זווית שווה לסכום השטחים של משולשים משוכללים הבנויים על הניצבים.

ציור 11 מראה שמשפט זה עשוי להתקיים, אבל, כמובן, הדגמה אחת איננה הוכחה לנכונותו.



ציור 11

נניח שמשפט פיתגורס מתקיים לגבי משולשים שווי צלעות, ריבועים ומשולשים משוכללים. האם הוא מתקיים לכל מצולע משוכלל בעל n צלעות?

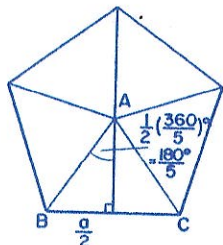
בגלל אופיו של הלוח הגיאומטרי אי אפשר לבדוק שאלה זו, משום שרק המצולעים המשוכללים שהזכרנו ניתנים לבניה על הלוח. לכן עלינו להזדקק שוב לנייר ולעפרון.

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{מן היחס המספרי:}$$

$$ka^2 = kb^2 + kc^2 \quad \text{ניתן לקבל:}$$

כאשר k הוא קבוע.

נגיע עתה לנוסחה לחישוב שטחו של מצולע משוכלל בעל צלע a . נשתמש לדוגמא במחומש משוכלל (ציור 12). נקבל (S) מייצג את שטח המשולש ABC):

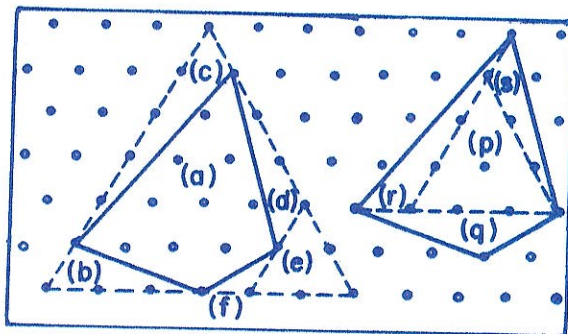


ציור 12

$$S = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cot \frac{180}{5} = \frac{a^2}{4} \cot \frac{180}{5}$$

$$5\left(\frac{a^2}{4} \cot \frac{180}{5}\right) = \text{שטח המחומש}$$

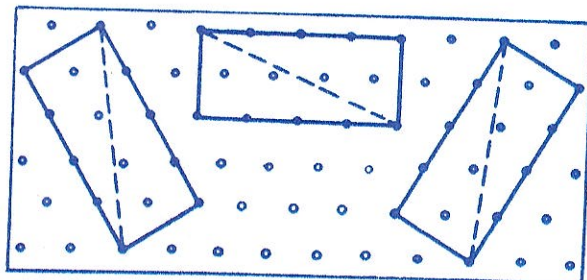
למצוא את השטח של כל מצולע על הלוח האיזומטרי. לדוגמא שטחו של המרובע (a) שבציור 7 ניתן לחישוב על-ידי דיסור שטחי המשולשים (b), (c), (d), (e) ו-(f). שטח המשולש שווה הצלעות החוסם אותו (שטח 36). בלומר $(1 + 4 + 3 + 5 + 3) - 36$ או 20.



ציור 7

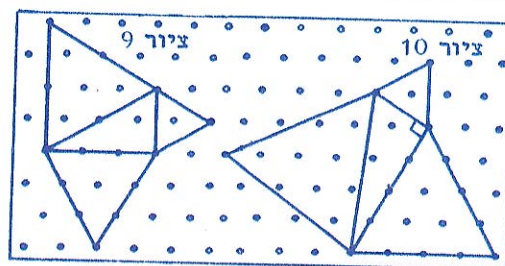
כדי לבדוק תוצאה זו אפשר להראות שהמרובע (a) מורכב מן המשולשים (p), (q), (r) ו-(s) שסכום שטחיהם הוא $9 + 4 + 4 + 3$ או 20.

למרות שאי אפשר לבנות ריבועים על הלוח האיזומטרי, הרי אפשר לבנות מלבנים וכן משולשים ישרי זווית (ציור 8). שלושת המלבנים בציור זה חופפים ושטח כל אחד מהם 16. האלכסונים מחלקים אותם למשולשים ישרי זווית חופפים.



ציור 8

כעת נמשיך ונחקור את משפט פיתגורס. מאחר ואפשר לבנות משולשים ישרי זווית, אך אי אפשר לבנות ריבועים, מדוע שלא ננסה משולשים שווי צלעות הבנויים על צלעות המשולש ישר הזווית? ציור 9 מראה בניה כזאת. ההישוב מראה ששטח ששטחי המשולשים שווי הצלעות הם 3, 9 ו-12. עד כאן, "התאמת" משפט פיתגורס הוכיחה את עצמה. ומה בדבר ציור 10? האם גם שם מתקיימת "התאמת" משפט פיתגורס?



לכן, שטח מצולע משובכלל בעל n צלעות הוא

$$\frac{na^2}{4} \cot \frac{180}{n} = Ka^2$$

כאשר K הוא קבוע לאותו סוג של מצולע שבו אנו דנים⁽¹⁾.

מאחר ו- $Ka^2 = Kb^2 + Kc^2$

הרי משפט פיתגורס נכון לכל מצולע משובכלל בעל n צלעות ולא רק לריבועים.

ומה בדבר צורות שהן לא מצולעים, למשל חצאי עיגולים? האם המשפט הבא נכון?

השטח של חצי עיגול הבנוי על היתר של

משולש ישר זווית, שווה לסכום השטחים של

חצאי העיגולים הבנויים על הניצבים.

בדיוק כמו שהוכחנו שמשפט פיתגורס נכון לכל מצולע

משובכלל כי שטח מצולע משובכלל פרופורציוני לריבוע הצלע

שלו, כך גם כאן, כל שעלינו להראות הוא ששטח חצי

עיגול פרופורציוני לריבוע הקוטר. דבר זה מתקבל מיד

משום ששטח חצי עיגול בעל קוטר a הוא $\frac{\pi a^2}{8}$. מכאן:

$$\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8}$$

עד כה, ההתאמות שביצענו במשפט פיתגורס הוכחו כנכונות

רק לגבי צורות דומות זו לזו. אם נבנה מלבנים שאינם

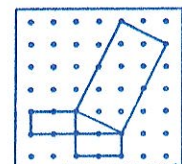
דומים על צלעותיו של משולש ישר זווית, ניווכח שאין כל

יחס קבוע בין שטחיהם (רק במקרה!). אפילו אם נבחר

מלבנים דומים, לדוגמא מלבנים שיהיו צלעותיהם 2:1 הרי

שטחיהם אינם חייבים לקיים את משפט פיתגורס. אפשר

להראות זאת בקלות על הלוח הגיאומטרי (ציור 13).



ציור 13

מצב זה קורה כאשר הצורות שנבחרו, למרות שהן דומות

אינן "ממוקמות באופן דומה" על המשולש. על כל פנים.

אוקלידס כתב בפרק 31 של הכרך השישי של ספרו

היסודות: "במשולשים ישרי זווית. המצולע הבנוי על הצלע

שממול לזווית הישרה שווה בשטחו למצולעים הדומים והבנויים

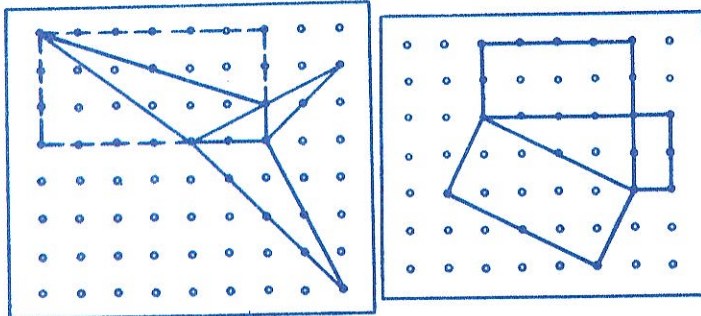
בצורה דומה על הצלעות הכולאות את הזווית הישרה".

דוגמא למלבנים דומים הבנויים בצורה דומה ניתנת בציור 14,

ודוגמא למשולשים ניתנת בציור 15

ציור 15

ציור 14



אין זו משימה קלה לבנות סדרה של מצולעים לא משובכללים

על לוח גיאומטרי בעל גודל מוגבל. בציור 16 נעשה נסיון

לבנות טרפזים דומים על צלעותיו של משולש ישר זווית על

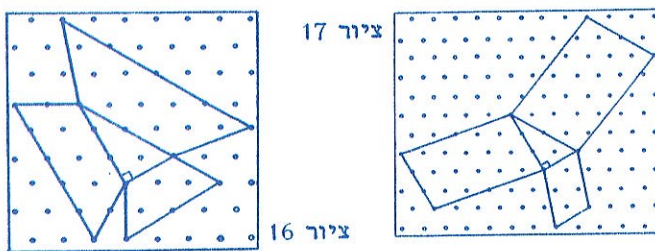
פני לוח איזומטרי. אך מאחר ו- $16 + 9 \neq 24$

הרי אחד הטרפזים חייב להיות לא דומה. קל לראות איזה הוא

מבין השלושה. בציור 17 נבנו מקביליות בצורה דומה על

צלעות משולש ישר זווית, על לוח איזומטרי.

הפעם אפשר לראות כי $36 + 10 \neq 44$

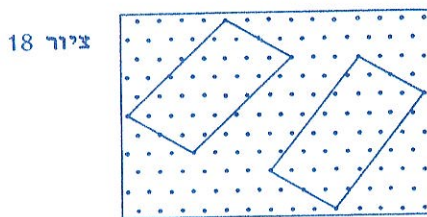


ציור 17

ציור 16

ונסיונות לשנות את צורת המקבילית הגדולה מביאים רק

לשטחים 48 (ציור 18) או 52 (ציור 19).



ציור 18

ציור 19

קל יותר, להיעזר בגליונות נייר איזומטרי לשם חקירה.

המעוניינים יכולים לחבר שני גליונות או יותר. גליונות

נייר נקודות איזומטרי קל לעשות על-ידי הנחת דף שער של

מאמר זה על סטנסיל וליצור בו חורים במקומות מתאימים.

נייר נקודות ריבועי שיהיה מדויק מספיק ניתן ליצור בעזרת

מכונת כתיבה וסטנסיל.

המתבר חש שבעזרת חומרים פשוטים נפתח שדה מענין של

גילויים ושיש ערך רב בפיתוח חוקים פשוטים העוזרים

בהבנת מצבים מוזרים.

שבבים-עלון מורי מתמטיקה תיק מס' 2

(1) ניתן להשיג תוצאה זו על-ידי שימוש בדמיון משולשים

אם לא רוצים להשתמש בטריגונומטריה. (המערכת)