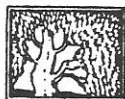


מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר: אביגדור רוזנטולד



חוברת למורה
מס' 5



היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע - רחובות

חוברת זו מוקדשת על ידי המחבר
לזכרו על תלמידו חיים בראון ז"ל,
שנפל במערכות ישראל.

חיים בראון השתתף בחוגים ובאולימפיאדות
במתמטיקה שנערכו על ידי היחידה לפעולות
נוער במכון ויצמן למדע, ואף זכה בפרסים
רבים.

יהי זכרו ברוך

המספרים הנכתבים על ידי הספרה 1

פעם אחת ניגש אלי תלמיד מכיתה ט', שהשתתף בחוג שלי למתמטיקה ואמר:

"לא מזמן קראתי בעיתון כי המספר R_{317} , כלומר מספר הנכתב על ידי 317 אחדות, הוא מספר ראשוני. האם אתה מוכן לספר לנו על מספרים מסוג זה ולהביא בעיות הקשורות למספרים כאלו?"

בחוכרת זו נדון במספר דוגמאות המתקשרות לשאלת התלמיד.

ב ה צ ל ח ה,

המחבר

תשרי, תשמ"ה

ערכה: צפורה ברגלס

מרסן (1588-1648), (Martin Mersenne) היה מתמטיקאי צרפתי. הוא השקיע מאמץ גדול מאוד בחקירת מספרים מהצורה $2^p - 1$ שבהם המעריך p הוא מספר ראשוני (למספרים אלו קוראים מספרי מרסן). מרסן שאל את עצמו מתי מספר כזה הוא ראשוני.

החיפוש של מספרים ראשוניים מהצורה הנ"ל התמקד במספרים בעלי מעריך ראשוני, שכן אם מספר $2^p - 1$ הוא מספר ראשוני, אז המעריך p הוא מספר ראשוני.

הוכחה: נניח שהמעריך p אינו ראשוני, כלומר p הוא מספר פריק: $p = ab$ כאשר $a > 1$, $b > 1$. מקבלים:

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$$

הביטוי $(2^a)^b - 1$ הוא ביטוי שאפשר לפרקו לגורמים שאחד מהם הוא $2^a - 1$ ואולם, נתון כי $2^p - 1$ הוא מספר ראשוני, לכן p אינו יכול להיות מספר פריק.

אבל ההיפך אינו נכון. לדוגמא:

$$2^{11} - 1 = 2047 = 89 \times 23$$

בעזוב עתה את מספרי מרסן ונחזור לשאלתו של התלמיד, בה פתחנו: אילו מספרים הנכתבים על ידי אחדות בלבד הם ראשוניים?

עד שנת 1978 נתגלו רק שלושה מספרים מסוג זה, כלומר שלושה מספרים שהם ראשוניים, ואלו הם:

$$R_2 = 11 = \frac{10^2 - 1}{9}$$

$$R_{19} = 1, 111, 111, 111, 111, 111, 111, 111 = \frac{10^{19} - 1}{9}$$

$$R_{23} = 11, 111, 111, 111, 111, 111, 111, 111 = \frac{10^{23} - 1}{9}$$

בשנת 1978 נתגלה מספר חדש מסוג זה, הנכתב על ידי 317 אחדות, והוא מספר ראשוני:

$$R_{317} = 11, 111, \dots, 111 = \frac{10^{317} - 1}{9}$$

317 אחדות

נציג עתה לפניכם מספר בעיות שיעסיקו אתכם בבניית מספרים בעלי תכונות התחלקות שונות.

בעיה 1

מצא מספר בן שש ספרות המתחלק ב-2 ובעל התכונה הבאה: ניתן ליצור ממספר זה חמישה מספרים, ע"י העברת הספרה הראשונה לסוף המספר, כך שהמספרים החדשים גם הם יתחלקו ב-2.

פתרון:

כל מספר בן 6 ספרות המורכב מספרות זוגיות למשל: המספר 842642.

בעיה 2

מצא מספר בן 7 ספרות המתחלק ב-3 ובעל התכונה הבאה: ניתן ליצור ממספר זה שישה מספרים חדשים על ידי העברת הספרה הראשונה לסוף המספר, כך שהמספרים המתקבלים יתחלקו גם הם ב-3.

פתרון:

כל מספר בן 7 ספרות שסכום ספרותיו מתחלק ב-3 למשל: המספר 1371129 סכום הספרות מתחלק ב-3 ולכן גם המספר מתחלק ב-3. אם נשנה את סדר הספרות לא נשנה את סכום הספרות ולכן כל המספרים המתקבלים יתחלקו ב-3.

בעיה 3

כנ"ל עבור מספר כלשהו המתחלק ב-9.

פתרון:

אם נבחר מספר שסכום ספרותיו מתחלק ב-9 אז נקבל מספרים המתחלקים ב-9.

בעיה 4

נתון מספר בן שלוש ספרות 629 המתחלק ב-37 (בדוק!)

נעביר את הספרה הראשונה לסוף המספר ונקבל 296. גם מספר זה מתחלק ב-37 (בדוק!). נמשיך בתהליך ונקבל את המספר 962, גם מספר זה מתחלק ב-37 (בדוק!). הוכח שתכונה זו נכונה באופן כללי, כלומר הוכח כי, אם נתון מספר בן שלוש ספרות המתחלק ב-37, אזי אם נעביר את ספרתו הראשונה לסוף המספר נקבל מספרים חדשים שגם הם מתחלקים ב-37.

הוכחה: נתון מספר בן שלוש ספרות \overline{abc} המתחלק ב-37. יש להוכיח שגם המספרים cab , bca מתחלקים ב-37. אם המספר \overline{abc} מתחלק ב-37 אז גם $10 \cdot abc$ מתחלק ב-37. ניצור הפרש $\overline{bca} - 10 \cdot \overline{abc}$ ונפשט אותו.

$$10(100a + 10b + c) - (100b + 10c + a)$$

$$1000a + 100b + 10c - 100b - 10c - a =$$

$$999a = 9 \cdot 111a$$

המחוסר $10 \cdot \overline{abc}$ מתחלק ב-37 (נתון)

ההפרש $999a$ מתחלק גם הוא ב-37 (לפי הפירוק: $111 = 3 \times 37$)

לכן המחסר \overline{bca} גם מתחלק ב-37 (מש"ל).

מכאן גם נובעת ההוכחה לגבי המספר \overline{cab} .

בעיה 5

נתון מספר בן תשע ספרות 601, 934, 267, המתחלק ב-333, 667 (המנה 803). יוצרים מספרים חדשים ע"י העברת הספרה הראשונה לסוף המספר ומקבלים שמונה מספרים חדשים ואלו הם:

679346012

793460126

934601267

346012679

460126793

601267934

ומתברר שכל המספרים החדשים מתחלקים ב-333,667.

נבדוק שני מספרים:

$$679346012:333667 = 2036$$

$$793460126:333667 = 2378$$

בדוק מספר נוסף.

הוכח שתכונה זו נכונה באופן כללי, כלומר, הוכח, כי אם נתון מספר בן תשע ספרות המתחלק ב-333,667 אז אם נעביר את ספרתו הראשונה לסוף המספר, נקבל מספרים חדשים, שגם הם מתחלקים ב-333,667.

הוכחה:

ניקח מספר בן תשע ספרות $\overline{abcdemhrp}$ המתחלק ב-333,667. יש להוכיח שגם המספרים:

$\overline{bcdemhrpa}$

$\overline{cdemhrpab}$

$\overline{demhrpabc}$

$\overline{emhrpabcd}$

$\overline{mhrpabcde}$

$\overline{hrpabcdem}$

$\overline{rpabcdemh}$

$\overline{pabcdemhr}$

מתחלקים ב-333667.

אם המספר $\overline{abcdemhrp}$ מתחלק ב-333667 אז גם $10 \cdot \overline{abcdemhrp}$ מתחלק ב-333667 ניצור הפרש -

$$10 \cdot \overline{abcdemhrp} - \overline{bcdemhrpa}$$

$$\begin{aligned}
 & 10 (10^8 a + 10^7 b + 10^6 c + 10^5 d + 10^4 e + 10^3 m + 10^2 h + 10r + p) - \\
 & - (10^8 b + 10^7 c + 10^6 d + 10^5 e + 10^4 m + 10^3 h + 10^2 r + 10p + a) = \\
 & = 10^9 a + 10^8 b + 10^7 c + 10^6 d + 10^5 e + 10^4 m + 10^3 h + 10^2 r + 10p - \\
 & - 10^8 b - 10^7 c - 10^6 d - 10^5 e - 10^4 m - 10^3 h - 10^2 r - 10p - a) = \\
 & - 10^9 a - a = a (10^9 - 1) = a \cdot 999999999 = a \cdot 999 \cdot 1001001 = \\
 & = a \cdot 999 \cdot 3 \cdot 333667
 \end{aligned}$$

המחוסר $10 \cdot abcde m h r p$ מתחלק ב-333667

ההפרש גם הוא מתחלק ב-333667 לכן המחוסר $\overline{bcdemhrpa}$ אז מתחלק ב-333667 מכאן ניתן להוכיח לגבי שבעה המספרים הנוספים.



נשאלת השאלה, כיצד "ממציאים" בעיות כמו אלו שהופיעו לעיל. זאת נראה בדוגמא הבאה.

דוגמא:

נתון מספר בן חמש ספרות המתחלק במספר דו-ספרתי שהוא מספר ראשוני: יוצרים ארבעה מספרים חדשים כמו בבעיה 5, וגם הם מתחלקים באותו מספר דו ספרתי. מהו המספר הדו-ספרתי הראשוני?

פתרון:

נתון מספר בן חמש ספרות \overline{abcde} המתחלק במספר דו ספרתי \overline{xy} שהוא ראשוני. המספרים המתקבלים הם: \overline{eabcd} \overline{deabc} \overline{cdeab} \overline{bcdea} וגם הם מתחלקים ב- \overline{xy} . אם המספר \overline{abcde} מתחלק במספר \overline{xy} אז גם $10 \cdot \overline{abcde}$ מתחלק ב- \overline{xy} .

נסתכל על ההפרש:

$$\begin{aligned} 10 \cdot \overline{abcde} - \overline{bcdea} &= 10(10000a + 1000c + 10d + e) - \\ &- (10000b + 1000c + 100d + 10e + a) = 100000a + 10000b + \\ &+ 1000c + 100d + 10e - 10000b - 1000c - 100d - 10e - a = \\ &= 99999a = 9 \cdot a \cdot 11111 \end{aligned}$$

עכשיו הבעיה היא כיצד לפרק לגורמים את 11111?

$$N = 11111 \quad \text{נסמן:}$$

נכפול ב-7 ונקבל $7N = 77777$ ונוציא שורש ריבועי כלומר:

$$\begin{array}{r} \sqrt{7N} = \sqrt{77777} = 279 \\ \begin{array}{r} 47 \\ \times 7 \\ \hline 549 \\ \times 9 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} \sqrt{77777} = 279 \\ \begin{array}{r} 4 \\ - 377 \\ \hline 4877 \\ - 4941 \\ \hline 64 \end{array} \end{array}$$

קבלנו:

$$\begin{aligned} 7N = 77777 &= 279^2 - 64 = 279^2 - 8^2 = (279 + 8)(279 - 8) \\ &= 287 \cdot 271 \end{aligned}$$

$$N = (287:7) \cdot 271 = 41 \cdot 271 \quad \text{ומכאן:}$$

כלומר המספר הדו ספרתי $\overline{xy} = 41$.

בהוכחה זו מצאנו מספר נוסף המהווה פתרון לבעיה נוספת. נסח את הבעיה.

בעיה 6

נתון מספר בן ארבע ספרות המתחלק במספר בן שלוש ספרות שהוא מספר ראשוני: יוצרים מספרים חדשים כמו בבעיה 5, וגם הם מתחלקים באותו מספר בן שלוש ספרות. מהו המספר הראשוני בן שלוש הספרות?

