מה לארנבות ולפתרון משוואות?

מאת: ברוך שוורץ
מכון ויצמן למדע, רחובות

סדרת פיבונצ'י מוכרת כמעט לכל תלמיד שלמד בקורס מבוא לתכנות. במאמר זה "נחזיר" את פיבונצ'י למסגרתו המתמטית.

Leonardo da Pisa המכונה בשם FIBONACCI הינו אולי גדול המתמטיקאים של ימי הביניים. אביו היה סוחר בפיזה והירבה להפליג בין איטליה וצפון אפריקה. מסיבה זו, לאונרדו חונך בצפון אפריקה, פגש הרבה מדענים ערביים, ולמד את שיטות החישוב הנהוגות במסחר. בין כל השיטות, הוא גילה כי שיטות הערבים היו הכי מתקדמות. בשובו לפיזה כתב ספר חשוב, ה "LIBER ABACI" בו מושוות שיטות הספירה הרומאית והערבית. הודות לכך הוא הכניס השיטה העשרונית למערב, והפיץ את כתבי אוקלידס (שהיו אז ידועים רק דרך תרגומים בערבית). ברם תפקידו לא הצטמצם להעברת ידע אלא הוא הצטיין בפתירת משוואות בתורת המספרים.

נתעניין, במאמר זה, בתכונה אחת של סדרת FIBONACCI וכן בסדרות המהוות הכללתה. נעזר בתכונה הזו כדי לענות לשאלה החשובה הבאה: <u>איך לפתור משוואות שמעלתן גבוהה מ-2?</u>

במאמר חמישה פרקים:

1. על ארנבות וסכנת התפשטותן.
2. השאלות והתשובות של יעקב ברנולי (1654-1705).
3. על פתרון משוואות ממעלה גבוהה מ-2.
4. ביצוע מעשי בעזרת המחשב.
5. נספח.

בפרק השלישי שהוא תאורטי, ההוכחות לא נכללו והקורא הסקרן יפנה לנספח.

את התרגילים המופיעים בפרק הרביעי רצוי לבצע הלכה למעשה בעזרת מחשב.

1. על ארנבות וסכנת התפשטותן

ב "LIBER ABACI" מופיעה הבעיה הבאה:

זוג ארנבות ממליט מהחודש השני להוולדם זוג ארנבות מדי חודש בחודשו. זוג הארנבות הנולדות מורכב תמיד מזכר ונקבה אשר ממליטים בעצמם, מהחודש השני להיוולדם, זוג חדש כל חודש.

כמה זוגות ארנבות קיימים אחרי n חודשים?

הטבלה הבאה מרכזת את התוצאות הראשונות:

מספר החודשים	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
מספר הזוגות	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

קל לציין תכונה מעניינת: מספר הזוגות בחודש $n-1$ ועוד מספר הזוגות בחודש $n-2$ שווה למספר הזוגות בחודש n.

נסמן את מספר הזוגות בכל חודש על ידי סדרה $\{a_n\}$.

הסדרה $\{a_n\}$ מקיימת איפוא:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} & \text{עבור } n \geq 2, \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

אחת השאלות הטבעיות הראשונות היא מהו קצב עליתה של הסדרה.

ארנבת מלומדת הייתה אומרת: מהו שיעור הילודה החודשי במשפחה?

שיעור הילודה במין האנושי נמדד כמספר הלידות בשנה עבור אוכלוסיה של אלף איש. אבל עבור ארנבות שיעור כזה יהיה אינפלציוני אפילו אם נצמצם את פרק המדידה לחודש אחד; לכן הדמוגרפים שבין הארנבים החליטו להסתפק בחישוב המנות הבאות:

$$\frac{a_1}{a_0}, \quad \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{a_3}{a_2}, \quad \frac{a_4}{a_3}, \quad \ldots$$

המנות הללו מודדות באופן ארנבי ברור את קצב הילודה החודשי.

התוצאות הראשונות הן כדלהלן:

$$a_1/a_0 = 1$$

$$a_2/a_1 = 1$$

$$a_3/a_2 = 2$$

$$a_4/a_3 = 1.5$$

$$a_5/a_4 = 1.66667$$

$$a_6/a_5 = 1.6$$

$$a_7/a_6 = 1.625$$

$$a_8/a_7 = 1.61538$$

$$a_9/a_8 = 1.61905$$

$$a_{10}/a_9 = 1.61765$$

$$a_{11}/a_{10} = 1.61818$$

$$a_{12}/a_{11} = 1.61798$$

$$a_{13}/a_{12} = 1.61806$$

$$a_{14}/a_{13} = 1.61803$$

$$a_{15}/a_{15} = 1.61803$$

$$a_{17}/a_{16} = 1.61803$$

$$a_{18}/a_{17} = 1.61803$$

$$a_{19}/a_{18} = 1.61803$$

$$a_{20}/a_{19} = 1.61803$$

$$a_{21}/a_{20} = 1.61803$$

$$a_{22}/a_{21} = 1.61803$$

$$a_{23}/a_{22} = 1.61803$$

$$a_{24}/a_{23} = 1.61803$$

ככל ש-n גדל, המנות נראות מתייצבות למספר השווה ל 1.618 לערך.
מבחינה אינטואיטיבית, המספר ההתחלתי של זוגות לא צריך לשנות את שיעור הילודה, ואם למשל חוקרים את הסדרה

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

המתארת משפחה מבוססת ואמידה הכוללת אבא,אמא, חמישה בנים וחמש בנות, מתקבלת תמונה רבת-היקף:

$a_0 = 1$	
$a_1 = 5$	$a_1/a_0 = 5$
$a_2 = 6$	$a_2/a_1 = 1.2$
$a_3 = 11$	$a_3/a_2 = 1.8333$
$a_4 = 17$	$a_4/a_3 = 1.5454$
$a_5 = 28$	$a_5/a_4 = 1.6475$
$a_6 = 45$	$a_6/a_5 = 1.6071$
$a_7 = 73$	$a_7/a_6 = 1.6222$
$a_8 = 118$	$a_8/a_7 = 1.6164$
$a_9 = 191$	$a_9/a_8 = 1.6186$

אכן שיעור הילודה מתייצב לאותו מספר; שיעור ילודה חודשי של 1.62 לערך.

לא נמהר כדי להסביר את התופעה המוזרה הזו. יקל עלינו דווקא להרחיב את מסגרת חקירתנו לסדרות השייכות לאותה משפחה.

סדרת FIBONACCI הינה מקרה פרטי של סדרות מהסוג:

$$\begin{cases} a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} \\ a_0 \text{ , } a_1 \text{ נתונים} \end{cases}$$

למשל הסדרה

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

שייכת למשפחה הזו.

אם נחקור את סדרת המנות שלה:

נקבל:

$a_0 = 0$	
$a_1 = 1$	
$a_2 = 2$	$a_2/a_1 = 2$
$a_3 = 7$	$a_3/a_2 = 3.5$
$a_4 = 20$	$a_4/a_3 = 2.8571$
$a_5 = 61$	$a_5/a_4 = 3.05$
$a_6 = 182$	$a_6/a_5 = 2.9836$
$a_7 = 547$	$a_7/a_6 = 3.0055$
$a_8 = 1640$	$a_8/a_7 = 2.9982$
$a_9 = 4921$	$a_9/a_8 = 3.0006$

התוצאות מראות כי המנות נראות שוב מתייצבות, אבל הפעם סביב המספר 3. רואים, איפוא, כי עלינו ליצור מסגרת כללית שתאפשר להסביר את התופעות הללו.

2. השאלות והתשובות של יעקב ברנולי

המתמטיקאי השווייצרי יעקב ברנולי שהיטיב לחקור את הסדרות מסוג $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$, התעניין בשאלות הבאות:

א) מדוע המנות $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ מתייצבות?

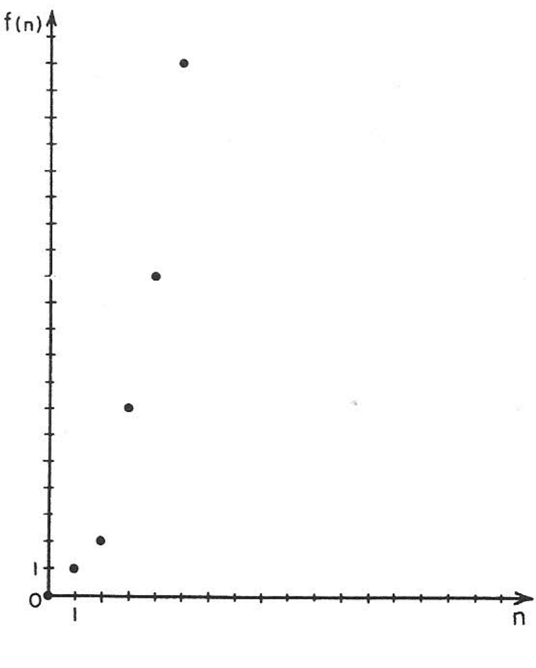
ב) מדוע אין חשיבות לערכים של a_0 ו-a_1?

ג) מהי משמעותו של המספר אליו מתייצבת סדרת המנות $\frac{a_n}{a_{n-1}}$?

ננסה, בעקבות ברנולי לענות על השאלות הללו עבור הסדרה שראינו בסעיף הקודם:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

הסדרה מוגדרת בצורה רקורסיבית, ז"א שכל איבר מוגדר בעזרת האיברים הקודמים לו. ברם, ננסה למצוא דרך ישירה ופשוטה למציאת האיבר a_n.
במילים אחרות, נחפש אם קיימת פונקציה f כך ש- $a_n = f(n)$.
תאור גרפי עשוי לעזור במציאת f מבין הפונקציות המוכרות לנו.



n	f(n)
0	0
1	1
2	2
3	7
4	12
5	20

התבוננות בגרף, ממחישה את העליה המהירה של איברי הסידרה. לפיכך הפונקציה אינה יכולה להיות לינארית. פונקציה חזקה $f(n) = n^p$ אינה מתאימה מאחר והיחס $\frac{(n+1)^p}{n^p}$ בודאי שאינו קבוע. ואולם, תכונה זו ($\frac{a_n}{a_{n-1}}$ מספר קבוע) כן מתקיימת עבור פונקציה מעריכית וגם הגרף מעודד לבדוק בכיוון זה.

ננסה איפוא, למצוא אם קיימת פונקציה מעריכית (מסוג $f(n) = r^n$) המקיימת $a_n = f(n)$.

לפי ההגדרה, $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2)$

$$r^n = 2r^{n-1} + 3r^{n-2}$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$r_1 = -1 \qquad r_2 = 3$$

אם כן שתי הפונקציות $f_2(n) = 3^n$ $f_1(n) = (-1)^n$

מקיימות את התנאי: $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2)$

לצערנו, התנאי הנ"ל הינו רק אחד מתוך שלושת התנאים שצריכה לקיים f:
משמעות התנאים $a_0 = 0$ ו- $a_1 = 1$ הינה $f(1) = 1$, $f(0) = 0$, ולא f_1 ולא f_2 מקיימות את התנאים הללו.

אחד הרעיונות המקוריים של ברנולי היה לציין כי אם שתי פונקציות מקיימות את המשוואה הפונקציונלית $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2)$, אזי גם צירוף לינארי שלהן מקיים את המשוואה הפונקציונלית.

הוא חיפש איפוא מספרים c ו-d המקיימים:

$$f(n) = (-1)^n \cdot c + 3^n \cdot d$$

על מנת שיתקיימו שני התנאים הנוספים:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

לכן

$$f(0) = (-1)^0 \cdot c + 3^0 \cdot d = 0$$

$$f(1) = (-1) \cdot c + 3d = 1$$

מכאן

$$c + d = 0$$

$$-c + 3d = 1$$

$$c = -\frac{1}{4} \qquad d = \frac{1}{4}$$

לכן

$$a_n = f(n) = -(-1)^n \cdot \frac{1}{4} + \frac{3^n}{4}$$

$$\boxed{a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}}$$

נענה כעת על השאלות ששאלנו בהתחלת הסעיף.

א) <u>מדוע סדרת המנות מתייצבת?</u>

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{3^n - (-1)^n}{4}}{\frac{3^{n-1} - (-1)^{n-1}}{4}} = \frac{3^n - (-1)^n}{3^{n-1} - (-1)^{n-1}} = \frac{3^n(1 - (-\frac{1}{3})^n)}{3^{n-1}(1 - (-\frac{1}{3})^{n-1})}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3\,\frac{1 - (-\frac{1}{3})^n}{1 - (-\frac{1}{3})^{n-1}}$$

כאשר n שואף ל-∞, $(-\frac{1}{3})^n$ שואף ל 0 לכן $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ שואף ל 3.

ראינו איפוא מדוע הסדרה מתייצבת.

ב) <u>מדוע אין חשיבות לערכים של a_0 ו-a_1?</u>

אם נשנה את a_0 ו-a_1 נקבל ערכים חדשים ל c ו-d. אבל נקבל תמיד כי

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(-1)^n c + 3^n d}{(-1)^{n-1} c + 3^{n-1} d}$$

$$\frac{a_n}{a^{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}}\,\frac{d + (-\frac{1}{3})^n c}{d + (-\frac{1}{3})^{n-1} c} = 3\,\frac{d + (-\frac{1}{3})^n c}{d + (-\frac{1}{3})^{n-1} c}$$

 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ שואף ל 3.

ג) מהי משמעותו של המספר אליו מתייצבת סדרת המנות $\frac{a_n}{a_{n-1}}$?

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

לכן
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2a_{n-1} + 3a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 + \frac{3a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 + \frac{3}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$$

אם $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ שואף לגבול ℓ אזי מתקיים

$$\ell = 2 + \frac{3}{\ell}$$

או
$$\ell^2 = 2\ell + 3$$

$$\ell_1 = -1 \qquad \ell_2 = 3$$

עבור הסדרה $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-1}$ הגבול של המנות $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ הינו איפוא אחד השורשים של המשוואה $x^2 = 2x + 3$.

אפשר למעשה להוכיח באופן כללי את המשפט הבא (בצורה זהה למקרה הפרטי):

(המנות של הסדרה $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$ מתייצבות למספר ℓ) $\Leftarrow$ (המספר ℓ הוא אחד השורשים של המשוואה $x^2 = Ax + B$)

שיעור הילודה היציב שהתקבל בסעיף הקודם מוצא כעת את פירושו:
היות שסדרת המנות של סדרת FIBONACCI

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

מתייצבת, המספר ℓ אליו מתייצבת סדרת המנות מקיים:

$$\ell^2 = \ell + 1$$