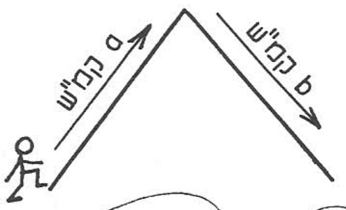
מרוב ממוצעים רואים את היער

דוד רימר
מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

דוד בן-חיים
אוניברסיטת חיפה
בית הספר לחינוך, אורנים

מטפסים על הר במהירות קבועה של a קמ"ש ויורדים מצד שני את אותו המרחק במהירות קבועה של b קמ"ש.
מהי המהירות הממוצעת?



ממוצע חשבוני $\frac{a+b}{2}$?

ממוצע הנדסי $\sqrt{ab}$?

ממוצע שורשי ריבועי $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$?

ממוצע הרמוני $\frac{2ab}{a+b}$?

ממוצע הרמוני שורשי $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$?

ברצוננו לתת סקירה על הממוצעים השונים והקשרים ביניהם, בסידרה של מאמרים. נראה לנו, שדרך טובה להציג את הממוצעים הינה באמצעות סיטואציות מחיי היום יום, או משטחים מוכרים לתלמיד ומכאן לבחון את תכונותיהם והקשרים ביניהם. במאמר הנוכחי נציג בעיות מהן נובע הצורך להגדיר את הממוצעים השונים עבור שנים, שלושה ו-n מספרים. כמו כן, נצביע על פירושים גיאומטריים ובניות הנדסיות של הממוצעים, נבחן את יחס הסדר, הכללות וקשרים ביניהם ונציין תכונות יסוד שלהם. במאמרים הבאים נוכיח במספר דרכים ושיטות מתמטיות משפטים הקשורים לממוצעים והכללות שלהם. במהלך הסקירה יושם דגש על דרך החקירה המתמטית מתוך מגמה להדגים ללומד כיצד המתמטיקה מתפתחת תוך כדי חיפוש דרכים ושיטות שונות להוכחת השערות ותיאוריות מתמטיות. במידת הצורך נגדיר מושגים ונוכיח תכונות או הכללות שעליהן נסתמך בדרך ההוכחה.

I. ממוצעים של שני מספרים

א. הממוצע החשבוני (האריתמטי)

נתון מלבן, שאורכי צלעותיו מסומנים על ידי a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע שהיקפו שווה להיקף המלבן הנתון.
נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן נובע:

$$4x = 2(a + b)$$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

המספר x הוא פונקציה של שני המספרים a ו-b, וקוראים לו הממוצע החשבוני של a ו-b. נסמן אותו על ידי $A(a, b)$.

ב. הממוצע ההנדסי (הגיאומטרי)

נתון מלבן, שצלעותיו a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע ששטחו שווה לשטח המלבן הנתון.
נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן נובע:

$$x^2 = ab$$

המספר החיובי x, הפותר משוואה זו נקרא הממוצע ההנדסי של המספרים החיוביים a ו-b. נסמנו על ידי $G(a, b)$, כך ש- $G(a, b) = \sqrt{ab}$.

ג. <u>הממוצע ההרמוני</u>

נתון מלבן, שצלעותיו a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע שהיחס בין שטחו להיקפו שווה ליחס בין שטח המלבן הנתון להיקפו.

נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן:

$$\frac{x^2}{4x} = \frac{ab}{2(a + b)}$$

ולאחר מספר פעולות אלגבריות אלמנטריות נקבל

$$x = \frac{2ab}{a + b}$$

או

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

המספר x במקרה זה נקרא <u>הממוצע ההרמוני</u> של המספרים a ו-b ומסומן על ידי $H(a\ ,b)$.

ד. <u>הממוצע השורשי ריבועי</u>

נתון מלבן, שצלעותיו a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע שאלכסונו יהיה שווה לאלכסון המלבן הנתון.

נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן על פי משפט פיתגורס:

$$x\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ולכן

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

המספר x נקרא <u>הממוצע השורשי ריבועי</u> של המספרים a ו-b. נסמנו על ידי $R(a\ ,b)$, כך ש- $R(a\ ,b) = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$.

ה. <u>הממוצע ההרמוני השורשי</u>

נתון מלבן, שצלעותיו a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע שהיחס בין שטחו לאלכסונו שווה ליחס בין שטח המלבן הנתון לאלכסונו.

נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן:

$$\frac{x^2}{x\sqrt{2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$$

כלומר, היפוכו של x הוא השורש הריבועי של הממוצע החשבוני של היפוכם של המספרים a^2 ו-b^2. x נקרא <u>הממוצע ההרמוני השורשי</u> של המספרים a ו-b ומסומן על ידי $HR(a, b)$. באמצעות פעולות אלגבריות אלמנטריות ניתן להביא את x לביטוי

$$x = HR(a, b) = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}}$$

נתיחס עתה לבעית המהירות הממוצעת המוצגת בעמוד הקדמי של המאמר. המהירות הממוצעת V_m שווה למנה של הדרך הכללית בזמן הכללי ולכן בהנחה שמטפסים d ק"מ ויורדים d ק"מ נקבל:

$$V_m = \frac{2d}{\frac{d}{a} + \frac{d}{b}} = \frac{2ab}{a + b} = H(a, b)$$

כלומר, המהירות הממוצעת במקרה זה שווה לממוצע ההרמוני של a ו-b. ההשלכה של תוצאה זו היא, שאם עוברים דרך מסויימת במהירות a אזי לא קיימת מהירות x בה נחזור את אותה הדרך כך שהמהירות הממוצעת תהיה כפליים של a.

כאן יש להעיר, כי מבחינה היסטורית (על פי Boyer, 1968) הממוצע החשבוני, הממוצע ההנדסי והממוצע ההרמוני כבר היו ידועים לבבלים. פיתגורס היווני (במאה החמישית לפנה"ס) למד עליהם במשך שהותו בבבל.

פיתגורס ותלמידיו סימנו אותם על ידי הפרופורציות:

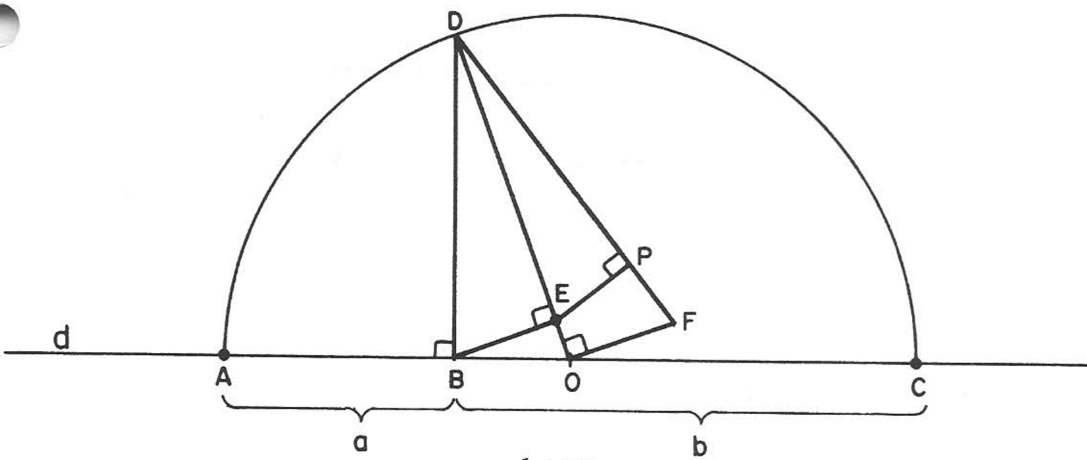
$$(1)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{a}\quad ; \quad (2)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b}\quad ; \quad (3)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{c}$$

הפרופורציה הראשונה גוררת את הממוצע החשבוני $b=\frac{1}{2}(a+c)$, השניה את הממוצע ההנדסי $b=\sqrt{ac}$ ואילו השלישית גוררת את הממוצע ההרמוני $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})$ או $b=\frac{2ac}{a+c}$.

ארכיטס (מהמאה הרביעית לפנ‏יה"ס) עסק בשימוש הממוצעים במוסיקה ואילו את פילולאוס (בן דורו של ארכיטס) שהתיחס לממוצע ההרמוני בקוראו לתיבה "הרמוניה גיאומטרית" הזכרנו בעמוד הקדמי של המאמר. כמו כן, ידוע כי פפוס הצביע בשנת 320 על שיטה לבניה הנדסית של שלושת הממוצעים בחצי מעגל אחד, כפי שנדגים בסעיף הבא אודות בניה הנדסית של הממוצעים.

II. בניה הנדסית של הממוצעים

על ישר d נקצה קטע $AB = a$ ובהמשכו קטע $BC = b$ (ראה ציור 1). על הקטע AC כקוטר נבנה חצי מעגל (מרכזו בנקודה O ורדיוסו $OA = OC$). נעלה אנך BD ל- AC כאשר הנקודה D היא נקודת החיתוך של האנך עם חצי המעגל. נעביר את OD ונעלה אנך ל-OD מנקודה B, נסמן ב-E את נקודת החיתוך של האנך עם OD. נעלה גם אנך על OD בנקודה O ונקצה עליו קטע OF השווה ל-OB. נחבר את F עם הנקודה D ונוריד אנך מנקודה E על DF ונסמן את נקודת החיתוך ב-P.



ציור 1

ניתן לראות מיד ש- $AC = AB + BC = a + b$
ומכאן שהרדיוס OD מייצג את הממוצע החשבוני של a ו-b:

$$OD = \frac{AC}{2} = \frac{a + b}{2} = A(a\ ,b)$$

היות ו-BD מאונך לקוטר AC, שהרי BD יהיה גובה ליתר במשולש ישר הזוית ADC (זוית היקפית הנשענת על קוטר - ישרה!)

ועל פי משולשים דומים ADB ו-DCB נקבל:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BD} \Longleftrightarrow BD^2 = AB \cdot BC \Longleftrightarrow BD = \sqrt{ab} = G(a\ ,b)$$

ומכאן הקטע BD מיצג את הממוצע ההנדסי של a ו-b .
עתה נראה שהקטע DE מיצג את הממוצע ההרמוני של a ו-b:
במשולש ישר הזוית OBD קיים הקשר $BD^2 = OD \cdot DE$ וזאת על פי משפט אוקלידס

(שטח הריבוע הבנוי על הניצב שווה לשטח המלבן הבנוי מהיתר והיטל הניצב על היתר).

לפני כן הראינו כי $BD^2 = ab$ ו- $OD = \frac{a+b}{2}$ ולכן

$$BD^2 = OD \cdot DE \Longleftrightarrow ab = \frac{a+b}{2} \cdot DE \Longleftrightarrow DE = \frac{2ab}{a+b} \Longleftrightarrow \frac{1}{DE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

ומכאן $DE = H(a, b)$.

נוכיח גם ש-DF מיצג את <u>הממוצע השורשי ריבועי</u> של a ו-b (בניה זו הוצעה על ידי Iles ו-Wilson, 1977):

במשולש ישר הזוית DOF קיים

$$OF = OB = AO - AB = $$

$$= \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

כמו כן, על פי משפט פיתגורס $DF^2 = OD^2 + OF^2$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \Longleftrightarrow DF = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} = R(a,b)$$

ולבסוף נראה שהקטע PD מיצג את <u>הממוצע ההרמוני השורשי:</u>

המשולשים ODF ו-PDE דומים ולכן

$$\frac{DF}{DE} = \frac{OD}{PD} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{\frac{2ab}{a+b}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{PD} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow PD = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} = HR(a, b)$$

III. יחס הסדר בין הממוצעים

בסעיף הראשון הגדרנו את חמשת הממוצעים הבאים עבור שני מספרים חיוביים כלשהם a ו-b:

הממוצע החשבוני (האריתמטי) $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$

הממוצע ההנדסי (הגיאומטרי) $G(a, b) = \sqrt{ab}$

הממוצע ההרמוני $H(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$

או $$\frac{1}{H(a, b)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

הממוצע השורשי ריבועי $R(a, b) = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$

והממוצע ההרמוני שורשי $HR(a, b) = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}}$

או $$\frac{1}{HR(a, b)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$$

עתה ניתן להראות שממוצעים אלו מקיימים את יחס הסדר הבא:

$$HR(a,b) \leqq H(a, b) \leqq G(a,b) \leqq A(a,b) \leqq R(a,b) \qquad (1)$$

כאשר השוויון מתקיים אם ורק אם $a = b$.

נוכיח את קיום יחס הסדר (1) בשלושה אופנים: בדרך גיאומטרית, בדרך אלגברית ובדרך המשלבת ייצוג גיאומטרי והוכחה בעזרת שיטות אלמנטריות של חשבון דפרנציאלי.

א) הוכחה גיאומטרית לקיום הסדר של (1)

ההוכחה נובעת מהסתכלות בציור 1 ובתוצאות של הסעיף הקודם על פיהן:

$$DF = R(a,b) \;;\; OD = A(a,b) \;;\; BD = G(a,b) \;;\; DE = H(a,b) \;;\; PD = HR(a,b)$$

בהסתמך על כך שיתר במשולש ישר זוית גדול מכל ניצב באותו משולש,