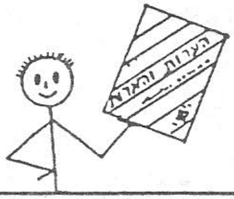
שבבים - עלון למורי מתמטיקה, תיק מס' 27

שבבי שבבים



מתוך "הערות והארות"

עורכת: רחל בוהדנה
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן

הָיֹה הָיָה...

מספרים גדולים.

פרט למקרים בודדים, המספרים הגדולים היו נדירים מאד בתקופות הקדומות. ההסטוריון של המתמטיקה G.A. Miller (Science ,Volo 70 ,1929) טען:

"The use of large numbers represents an intelectual emancipation from the narrow channels of experience."

כלומר "השימוש במספרים גדולים הוא סממן של אמנציפציה אינטלקטואלית מהאפיקים הצרים של הנסיון היומיומי". ויתכן שבגלל זה הם הוכנסו מאוחר יחסית. אימרה זאת, כמובן, איננה לוקחת בחשבון את ההתנסות היומיומית בעולם המודרני. כיום כלי התקשורת מלאים דיווחים כלכליים (למשל: סכומי כסף), סטטיסטיים ודמוגרפיים (למשל:מספר תושבים), מדעיים (למשל: מרחקים בין כוכבי לכת, מספר תאים בתרבית וכו') בהם המספרים הגדולים צצים לעתים קרובות.

אף על פי כן, קיים כיום בילבול, או ליתר דיוק, חוסר אחידות בכתיבה ובקריאה של מספרים גדולים, כפי שנראה בהמשך. ייתכן ויש לכך שורשים בעבר.

כתיבה

בסוף ימי הביניים החלו מספר מתמטיקאים לאמץ סימונים מיוחדים כדי לעזור לעין - בקריאה, וליד - בכתיבה. כך למשל ניתן למצוא:

$\dot{6}85\dot{4}973$	(בספר אריתמטי אנגלי משנת 1522)
$\overset{3}{7}.53\overset{2}{8}.27\overset{1}{5}.136$	(בספר אריתמטי איטלקי משנת 1492)
$2\dot{5}78\overset{\equiv}{3}91\dot{0}62\overset{=}{7}51\dot{2}34\overline{6}89\dot{4}352$	(בספר אריתמטי איטלקי משנת 1585)
1,234,567	(בספר אריתמטי מארה"ב משנת 1729)

מעניין לציין את המשותף בסימונים האלה: קבוצות של 3, אשר זכו לשמות שונים: מחזורים, אזורים, שלשות וכו'.

כיום ישנם שני סימונים בשימוש: הפסיק $\boxed{,}$ והנקודה $\boxed{.}$. יש ארצות אשר בהן המספר 13235 נכתב 13,235 (ותפקיד הנקודה להפריד בין החלק השלם לשבר העשרוני), אך יש ארצות בהן אותו מספר נכתב 13.235 (ודווקא הפסיק הוא המפריד בין השלם לשבר). יש להניח שהשימוש הנפוץ במחשבים ומחשבי כיס (בהן תפקיד הנקודה הוא חד-משמעי: הפרדה בין שלם לשבר) יאחד את הסימון עבור מספרים גדולים וישאיר את הפסיק כמפריד בין כל שלוש ספרות בחלק השלם.

המילה "מיליון" היא בין המלים הראשונות שנוצרו עבור מספרים גדולים ופירושה 1000000 או 10^6. היא כנראה הופיעה לראשונה באיטליה במאה ה-14, כצירוף של שתי מילים: MILLE + ON (פרושו: אלף גדול, כפי ש"סלון" נוצרה מהצירוף SALLE+ON = חדר גדול, או בלון = BALL + ON).

בקטע המצורף, הלקוח מספר איטלקי שפורסם ב 1484, מוסבר איך כותבים את המספר מיליון ומספרים גדולים ממנו עד עשרה מיליון.

Como si formano milion

L million adoncha se die formar per sette figure
in questo modo . 1000000 .perche la septima
figura tien el luogo de miara de miara; e per che 1000000
mille miara fano uno million : et essendo in quel
luogo la figura che representa uno pero bene
edito uno milion. Ma in questo modo . 1 100000
diria uno million e cento milia: perche oltra el 1100000
million: in luogo de centenara de miara: sono la figura che repre
senta uno si che bene edito uno million e cento milia . Ma in
questo modo. 1 1 10000.diria uno milion e cento e diece milia 1110000
perche oltra el million e cento milia : in luogo de le decene de
miar: sono la figura che representa uno: si che bene edito uno
milion e cento e diece milia. Ma in questo modo. 1 1 1 1000.di
ria un milion cento e undece milia per che oltra el milion cento 1111000
e diece milia: in luogo de numeri de miar sono la figura che rip
senta uno: si che bene edito un milion cento e undece milia. Ma
in questo modo. 1 1 1 1 100.diria un milion cento e undece mi 1111100
lia e cento: perche oltra el milion cento e undece milia: in luogo
de el simplice centenar: sono la figura che representa uno: si che
bene edito un milion cento e undece milia e cento. Ma in questo
modo. 1 1 1 1 1 10.diria un million. cento e undece milla cento 1111110
e diece: perche oltra el milion cento e undece milia e cento: i
luogo de le simplice decene: sono la figura che representa uno.
Ma in questo modo. 1 1 1 1 1 1 1.diria un milion cento e unde 1111111
ze milia cento e undece.per che anche in luogo de le simplice
unita .sono la figura che representa uno. si che bene edito un
milion cento e undece milia cento e undece. et chosi procedendo
per fina .9999999.ponendo sempre ai suo luogi quele figure 9999999
representante queli numeri ouero decene o centenara. che si
nomina et cetera. e questo basta cercha lo amaistramento del
numerar. ben che in infinitum si poria proceder .ma chon una
zeneral figura miso cercero dichiarir quanto potesse achader . et
sarano questo sotto posto

THE WRITING OF LARGE NUMBERS IN 1484

From Pietro Borghi's *De Arte Mathematiche*, Venice, 1484. This illustration is from the 1488 edition

לא כל הסופרים השתמשו במילה מיליון. הרבה כתבו במקומה: אלף אלפים.
אך החל מהמאה ה-17 כמעט כולם אימצו אותה ואין כיום שום אי הבנה לגביה.

לא כך לגבי המלים ביליון, טריליון וכו'. אחד המקורות הראשונים של המילים האלה הוא הספר של המתמטיקאי הצרפתי Nicolas Chuquet.
הספר נקרא: Le Triparty en la Science des Numbres והוא נכתב ב - 1484, אך הודפס לראשונה ישירות מכתב היד ב 1880 באיטליה. Chuquet אומר שבמספר 745324 804300 700023 654321, יש 745324 טריליונים, 804300 ביליונים, 700023 מיליונים ו - 654321 (אחדות). כלומר הביליון הוא 10^{12}, הטריליון הוא 10^{18} וכו'.

אך מאוחר יותר, בצרפת עצמה, המילה ביליון נהפכה לשם נירדף למלה מיליארד (10^9), וזה כנראה "יוצא" לארה"ב לאחר המהפכה הצרפתית. לא כן הדבר באנגליה, גרמניה וספרד בהם הביליון נשאר 10^{12}.

ובכן כיום:

	בארה"ב	באנגליה	
ביליון	10^9	10^{12}	
טריליון	10^{12}	10^{18}	וכו'

כלומר, בארה"ב הביליון הוא אלף מיליונים (הטריליון אלף בליונים וכן הלאה). אך באנגליה וברוב ארצות אירופה הבליון הוא מיליון מליונים (הטריליון מיליון בליונים וכן הלאה).

מילון אבן שושן מגדיר ביליון לפי שתי השיטות:
ביליון (במסחר) אלף מיליונים (10^9), (בחישובים מדעיים), מיליון מיליונים (10^{12}), אם כי בשפה המדוברת משתמשים הרבה יותר במילה מיליארד עבור 10^9.

מוסר השכל: כדאי יותר להיות ביליונר באנגליה מאשר בארה"ב.

מי מכיר? מי יודע?

האם קרה לך...?

האם קרה לך שקיבלת כיתה הטרוגנית, ומספר תלמידים מהכיתה זקוק לטיפול שלך בעוד שאחרים יכולים לעבוד בקבוצות?

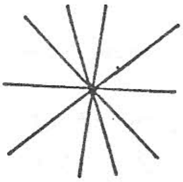
האם קרה לך, במהלך שיעור, שהטלת עבודה על התלמידים וחלק מהם סיים לפני השאר?

האם קרה לך שתלמידים בודדים סיימו מבחן לפני חבריהם וחייבים להשאר עד סוף השיעור בתוך הכיתה?

מה עושים???

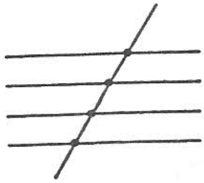
אחת הדרכים היא להחזיק מספר כרטיסי עבודה משעשעים, ו/או מהווים אתגר עבור אותם תלמידים..

להלן שתי דוגמאות לתרגילים על כרטיסי העבודה:

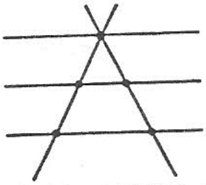


1. בציור חמישה ישרים אשר נפגשים בנקודה אחת.
התוכל לשרטט חמישה ישרים הנפגשים ביותר מנקודה אחת? מצא תשובות שונות כמה שתוכל.

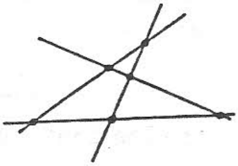
<u>פתרונות לדוגמא:</u>



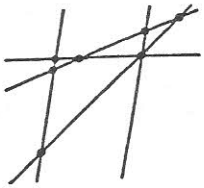
4 נקודות פגישה



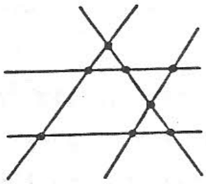
5 נקודות פגישה



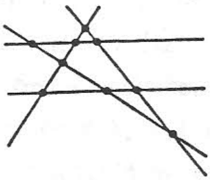
6 נקודות פגישה



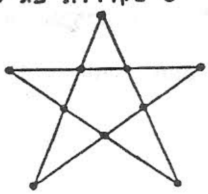
7 נקודות פגישה



8 נקודות פגישה



9 נקודות פגישה



10 נקודות פגישה

הסבר

א. מחמישה ישרים אין אפשרות לקבל שתי נקודות חיתוך או 3 נקודות חיתוך בלבד. שלושה ישרים נחתכים באפס נקודות (אם מקבילים), בנקודה אחת, שתי נקודות או שלוש נקודות. כל ישר נוסף, יוסיף לפחות עוד נקודת חיתוך אחת. לכן מספר נקודות החיתוך הקטן ביותר (פרט ל 1) הוא 4.

ב. מקסימום נקודות החיתוך של חמישה ישרים הוא 10. כל ישר חותך ארבעה ישרים אחרים, כלומר $5\cdot4$ נקודות חיתוך, אך כל נקודה משותפת לשני ישרים,

לכן: $\frac{5\cdot4}{2} = 10$ הוא מספר נקודות החיתוך.

ג. באופן כללי נוכל לומר כי עבור n קוים, כל המספרים הגדולים מ-1 וקטנים מ$(n-1)$, לא יתקבלו כמספר נקודות חיתוך.

ד. באופן כללי נוכל לומר כי מקסימום נקודות החיתוך עבור n קוים הוא $\frac{n(n-1)}{2}$.

* מתוך המדריך למורה של ספר ד' חוברת א' "נחש פתרון".

2. "שאלה. ממון יש אצלנו, שאם נחלקנו לשני חלקים, יישאר 1. וכן אם נחלקנו לשלושה (חלקים) או לארבעה, או לחמישה או לשישה (יישאר 1). אך אם נחלקנו לשבעה(חלקים), לא יישאר ממנו כלום. כמה הממון"? (מתוך הספר "בוחה הנפש" של לוי בן אברהם אשר חי לפני 700 שנה במאה ה-13 בצרפת).

פתרון

ייתכן ורוב התלמידים יציגו את המספר 721 כפיתרון החידה לאחר שיקול שמכפלת המספרים 2,3,4,5,6 היא 720 ומתחלקת בכל אחד מהגורמים בלי שארית. אם נוסיף 1 ל 720, נקבל שארית 1 אחרי החלוקה.
המספר 721 מתחלק לשבעה חלקים בלי שארית.
לא קשה למצוא מספר קטן מ 721 שגם הוא ממלא את כל התנאים של החידה: מספר המתחלק ל 4, ל 3 ול 5 יתחלק גם ל 2 וגם ל 6.
לכן תתחלק המכפלה $60 = 2^2\cdot3\cdot5$ בכל המספרים שדובר בהם. אנחנו מחפשים כפולה של 60, כך שלאחר שנוסיף למכפלה 1, יתקבל המספר המתחלק ל 7.

קל לראות שמספר זה הוא $5\cdot60 + 1 = 301$. האם יש מספרים נוספים?

הנה דרך כללית למציאת פתרונות רבים לחידה:

עבור פתרון החידה צריך להתקיים:

כאשר k, ℓ טבעיים $60k + 1 = 7\ell$

מכאן ש: $\ell = 8k + \frac{4k+1}{7}$

ℓ טבעי, וגם $8k$ טבעי, לכן $\frac{4k+1}{7}$ מספר שלם שנסמנו ב m, כלומר:

$$4k + 1 = 7m$$

$$k = m + \frac{3m-1}{4}$$

k טבעי ו - m שלם. לכן $\frac{3m-1}{4}$ מספר שלם שנסמנו ב n, כלומר:

$$3m - 1 = 4n$$

$$m = n + \frac{n+1}{3}$$

m ו n שלמים, לכן $\frac{n+1}{3}$ מספר שלם שנסמנו ב r, כלומר:

$$n + 1 = 3r$$
$$n = 3r - 1$$

עבור כל r טבעי, יהיה גם n טבעי וכן m, k, ℓ. לאחר הצבה נקבל:

$\ell = 60r - 17 \quad k = 7r - 2 \quad m = 4r - 1 \quad n = 3r - 1$

מכאן: $7\ell = 420r - 119$.

כלומר הצבת מספר טבעי במקום r בביטוי $420r - 119$ תיתן לנו מספר שהוא פתרון לחידה שלנו. המספר 721 יתקבל על ידי הצבת $r = 2$.
אפשר לנצל נוסחה זו לתרגיל הצבות בנוסחה כדי לקבל פתרונות נוספים.

* *מתוך המדריך למורה של ספר ד', חוברת ב' "פתור"*

הערה: דוגמאות נוספות אפשר למצוא ברוב המדריכים.