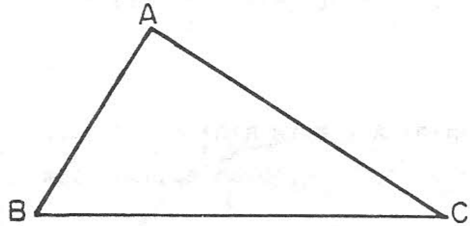
# ככה סתם, משולש

מאת: ברוך שוורץ
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע

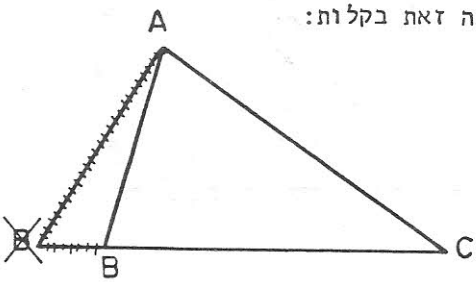
1. מייסורי מורה לגאומטריה

המורה: כדי להדגים את המשפט, נשרטט משולש כללי ביותר ושלושת גבהיו:



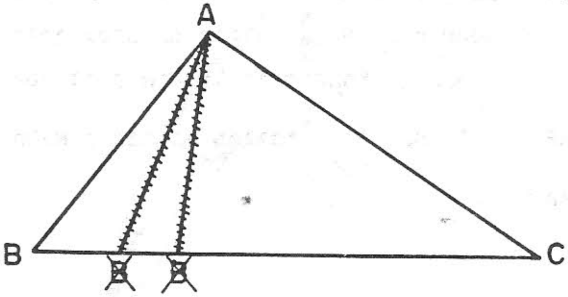

תלמיד א': המורה! המשולש ישר זוית ב A.

המורה: נכון, נשנה זאת בקלות:

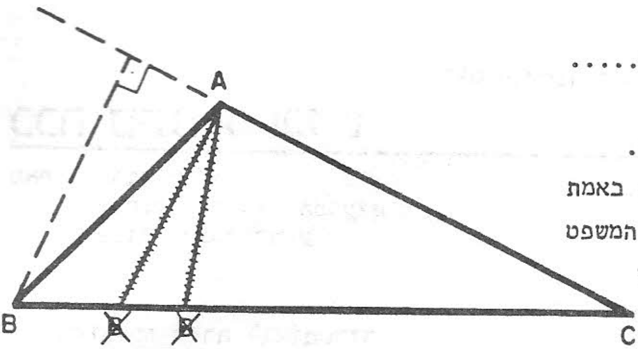



תלמיד ב': הפעם הוא שווה-שוקיים.

המורה: אין בעיה, ננסה מהצד השני.




זהו! נשרטט כעת את שלושת גבהיו:



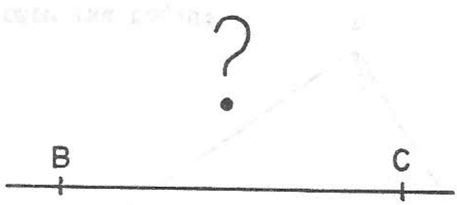

הגובה היוצא מ B הוא.....
מחוץ למשולש.
(רגע של דממה מדכאה).
טוב, אתם יודעים, זה באמת
רעיון טוב לראות את המשפט
במקרה בו אחד הגבהים
מחוץ למשולש!

מי מאתנו לא שאל את עצמו - האם יש משולש העומד מעל ביקורת כלשהי?

נציע במאמר דרך מושלמת למצוא משולש כזה.

2. <u>התרופה</u>

נתחיל לפי המקובל: BC יהיה אופקי, A יהיה מעל BC בצד שמאל,
ו BC תהיה הצלע הגדולה מכולן.



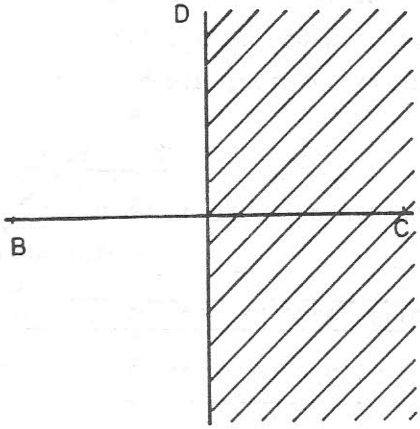

ברור כי התנאים הללו אינם פוגעים בכלליות הבעיה והיא:
היכן למקם את הנקודה A, על מנת שהמשולש ABC לא יהיה שווה שוקיים,
ישר זוית או בעל זוית קהה?

**התנאים שבחרנו מחייבים:** $AB < AC < BC$

$\sphericalangle A < 90^{\circ}$

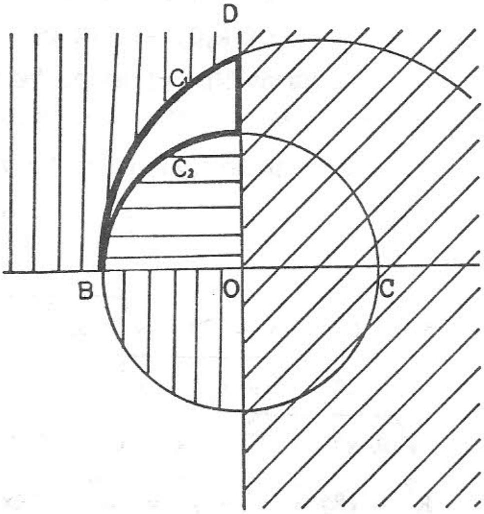
התנאי $AB < AC$

הנקודה A חייבת להמצא
בחצי מישור המוגבל ע"י האנך
האמצעי d ל- BC והמכיל את B.
(קווקוונו את חצי המישור
שאינו מתאים).



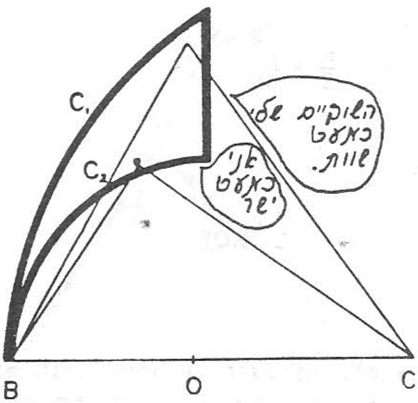

התנאי $AC < BC$

הנקודה A חייבת להמצא
ך המעגל $C_1$ שמרכזו C
ורדיוסו BC.




התנאי $\sphericalangle A < 90^o$

הנקודה A נמצאת מחוץ
למעגל $C_2$ שמרכזו O, היא
נקודת האמצע של BC
ורדיוסו BO.




זהו התחום בתוכו צריכים
לבחור את A! אין פלא שאנו
המורים "מפספסים" תמיד!
אבל אין די בכך. עלינו
להיות כרגיל מעל ביקורת
כלשהי כדי שלא ירכלו:
המשולש כמעט ישר זוית או
כמעט שווה שוקיים...
עלינו לצייר את המשולש הכי סתמי שאפשר, ולכן למקם את A הכי רחוק מכל השוליים.

אפשר לתת פירושים שונים למלה רחוק: למשל, למצוא נקודה A עבורה סכום המרחקים משלושת השוליים הינו מכסימלי. נעדיף לפירוש הזה פירוש אחר, יותר סימטרי; והוא: למצוא נקודה הנמצאת במרחק שווה משלושת השוליים.

3. <u>משולש יוצא מן הכלל</u>

נגדיר את הבעיה באופן מתמטי: התחום המותר עבור A מוגבל ע"י שתי קשתות וקטע ישר.

| מהי הנקודה הנמצאת במרחק שווה משלושת הקוים הללו? |
|---|

א. <u>נקודות הנמצאות במרחק שווה מ $C_1$ ו d</u>

נפתור בעיה זו במסגרת הגיאומטריה האנליטית. 0 תהיה ראשית הצירים.

שיעורי הנקודות B ו C הם:

$B(R,0)$ ו- $C(-R,0)$

מרחק של נקודה $M(x,y)$ מהישר d

הוא $-x$.

המרחק של נקודה $M(x,y)$ מן המעגל $C_1$

הוא MN.

$$MN = NC - MC = 2R - \sqrt{(R-x)^2 + y^2}$$

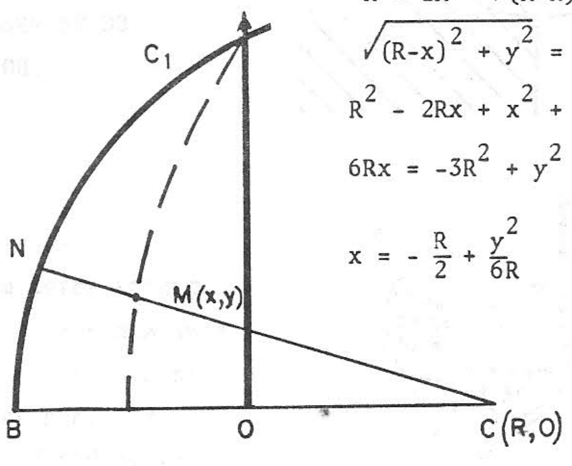
לכן $$-x = 2R - \sqrt{(R-x)^2 + y^2}$$

או $$\sqrt{(R-x)^2 + y^2} = 2R + x$$

מכאן $$R^2 - 2Rx + x^2 + y^2 = 4R^2 + 4Rx + x^2$$

$$6Rx = -3R^2 + y^2$$

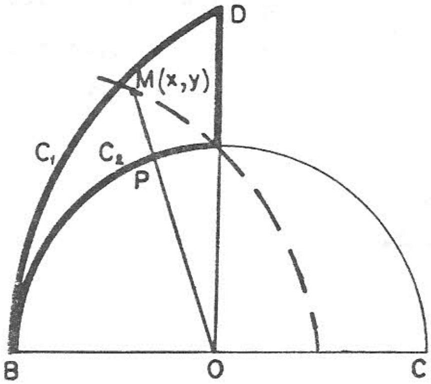
$$x = -\frac{R}{2} + \frac{y^2}{6R}$$




אם כך, המקום הגיאומטרי של הנקודות הנמצאות במרחק שווה מ-d ומ-$C_1$ הוא פרבולה.

## ב. <u>נקודות הנמצאות במרחק שווה מ $C_2$ ו d.</u>

המרחק של נקודה $M(x,y)$ ל $C_2$ הוא:




$$MP = OM - OP = \sqrt{x^2 + y^2} - R$$

$$-x = \sqrt{x^2 + y^2} - R$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R - x$$

$$x^2 + y^2 = R^2 - 2Rx + x^2$$

$$x = +\frac{R}{2} - \frac{y^2}{2R}$$

הנקודה M שוב נמצאת על פרבולה.

הנקודה A נמצאת במרחק שווה מ - $C_1$, מ $C_2$, ומ - d היא נקודת החיתוך בין שתי הפרבולות,

ולכן

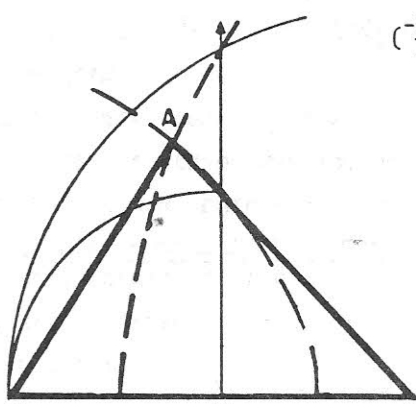
$$-\frac{R}{2} + \frac{y^2}{6R} = +\frac{R}{2} - \frac{y^2}{2R}$$

$$\frac{2y^2}{3R} = R$$

$$y = R\sqrt{3/2}$$

$$x = -\frac{R}{2} + \frac{3R^2}{2.6R} = \frac{-R}{2} + \frac{R}{4} = \frac{-R}{4}$$

לכן שיעורי הנקודה A הם: $(\frac{-R}{4}, \sqrt{3/2})$

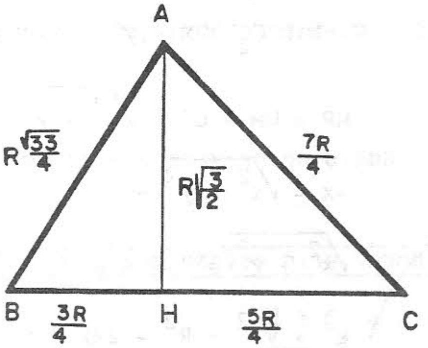


נחשב את מידות המשולש ABC

בעזרת שיעורי הקודקודים.

כל אורכי הצלעות התקבלו בעזרת

משפט פיתגורס.




$\cos B = \frac{3}{\sqrt{33}}$ $\qquad \sphericalangle B \approx 58.518^{\circ} \ (\approx 58^{\circ}\ 31')$

$\cos C = \frac{5}{7}$ $\qquad \sphericalangle C \approx 44.415^{\circ} \ (\approx 44^{\circ}\ 25')$

$\sphericalangle A = 180^{\circ} - \sphericalangle B - \sphericalangle C$ $\qquad \sphericalangle A \approx 77.067 \ (\approx 77^{\circ}\ 4')$

<u>סוף דבר.</u>

קיים משולש "סתמי", הכי סתמי שאפשר. כדי להקל על שרטוטו, אפשר לזכור כי אורכי צלעותיו הם ביחס ישר ל - 28,23 ו -33 לערך, דבר החוסך שימוש במד-זוית. התוצאות שקיבלנו מבהירות למה כל כך קשה לשרטט משולש באמת סתמי: היחסים $\frac{33}{28}$, $\frac{28}{23}$, קרובים ל-1, ולכן אפילו המשולש המיוחד שקבלנו דומה מאד למשולש שווה שוקיים.

<u>ה ע ר ה</u>: בניית המשולש הסתמי הנ"ל אינה רק "קוריוז": בעזרת משולש כזה, אפשר להציג מודל דידקטי בו אנכים אמצעיים, תיכונים, חוצי זויות וגבהים שונים זה מזה וכך שאפשר לראות בבהירות מירבית את התכונות הקלאסיות של המשולשים: <u>נקי חיתוך משותפות, וישר EULER*</u> (ראה ציור).

** נזכיר כי נקודת חיתוך של הגבהים, נקודת חיתוך של התיכונים ונקודת חיתוך של האנכים האמצעיים, נמצאות על קו ישר אחד המכונה ישר EULER (ראה שבבים מס' 1).*

G נקודת חיתוך של תיכונים.

H נקודת חיתוך של גבהים.

I נקודת חיתוך של חוצי זויות.

O נקודת חיתוך של אנכים אמצעיים.