ההתנהגות המונוטונית של הממוצע השורשי

ריבועי המוכלל

מאת: דוד בן-חיים
אוניברסיטת חיפה
בית הספר לחינוך, אורנים

דוד רימר
מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

ממוצע שורשי ריבועי מוכלל

$$R_n = \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

ממוצע הרמוני שורשי מוכלל

$$HR_n = \sqrt[n]{\frac{2a^n b^n}{a^n + b^n}}$$

פולינומים סימטריים

$P(a,b) = P(b,a)$

ופולינומים אנטיסימטריים $Q(a,b)=-Q(b,a)$

משפט השארית

$$p(x) = (x-a)\ Q(x) + P(a)$$

חילוק סינטטי - שיטת הורנר

$$(4x^3-9x^2-8x-3):(x-3) = 4x^2+3x+1$$

4	-9	-8	-3	3
	12	9	3	
4	3	1	$\boxed{0}$ ← שארית	

נוסחאות קומבינטוריות

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$$

$$(n-k)\ C_n^k = (k+1)\ C_n^{k+1}$$

הכללה של אי שוויון ברנולי

$$(1+x)^r \geq 1 + rx$$

$$x > -1,\ r > 1,\ r \in Q$$

I. מבוא

במאמר הקודם ב"שבבים" 25, הגדרנו את הממוצעים החשבוני, ההנדסי, ההרמוני, השורשי ריבועי וההרמוני השורשי עבור 2, 3 ו - n מספרים. ההגדרות הוצגו באמצעות דוגמאות מהגיאומטריה על ידי קשרים בין מלבן וריבוע, או בין תיבה וקוביה, ועל ידי סיטואציות של שקילה או מדידה, תוך כדי נסיון להשיג תוצאות אופטימליות. כמו כן, בחנו את יחס הסדר בין הממוצעים השונים ושיטות לבניה הנדסית של הממוצעים עבור 2 מספרים.

במאמר הנוכחי, נתיחס להכללות של הממוצע השורשי ריבועי ושל הממוצע ההרמוני השורשי ביחס למעריכי החזקות ומעלת השורש (לעומת ההכללה הרגילה ביחס למספר המשתנים a, b,...). הממוצע השורשי ריבועי המוכלל (לעיתים גם קוראים לו ממוצע החזקה), מוגדר על ידי:

$$R_n = \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} \tag{1}$$

ואילו הממוצע ההרמוני השורשי המוכלל, מוגדר על ידי:

$$HR_n = \sqrt[n]{\frac{2a^n b^n}{a^n + b^n}} \tag{2}$$

כאשר n שלם וחיובי. יש לציין כי על ידי הרחבת הנוסחה (1) גם עבור n שלם שלילי, ניתן לקשר את השוויונים (1) ו (2) על ידי הגדרה אחת באמצעות הקשר

$$HR_n = R_{-n} \tag{3}$$

II. מטרה

Maor (1977) מעלה השערה שערכי ה - R_n יוצרים סידרה מונוטונית עולה, כלומר $R_{n+1} \geq R_n$ לכל n טבעי. הוא מראה שטענתו תקפה עבור $a = 1$, $b = 2$ וערכי n מ-1 עד 200, אבל אינו מוכיח את טענתו באופן כללי.

מטרת מאמר זה להוכיח שערכי R_n יוצרים סידרה מונוטונית עולה.

להלן נציג 3 הוכחות בשיטות המתבססות על גישות שונות מתחומים שונים של המתמטיקה. השיטה הראשונה, שהינה אלגברית ביסודה, פותחה בעקבות נסיונות להוכיח את המקרים הפרטיים $R_3 \geq R_2$ או $R_4 \geq R_3$ על ידי שמוש בתכונות של פולינומים סימטריים, משפט השארית ושיטת החילוק הסינתטי (שיטת הורנר), כאשר במקרה הכללי אנו משתמשים גם בנוסחת הבינום, נוסחאות קומבינטוריות ושיטת האינדוקציה המתמטית. השיטה השניה, שהיא אנליטית ביסודה, מבוססת על שימוש בתכונות של נגזרות כדי לקבוע מינימום של פונקציה. יש להדגיש כי הרעיון לשיטה השניה התפתח כתוצאה מעיסוק בשלבים השונים של השיטה הראשונה. לא מצאנו בשום מקום אחר את שתי ההוכחות האלו. השיטה השלישית מבוססת בעיקרון על יישום של הצורה המוכללת של אי שיוון ברנולי (זהו עיבוד של רעיון בו השתמש Schlömilch ב- 1858 כדי להוכיח משפט מוכלל של ממוצעים משוקללים. ראה Kazarinoff, (1961).

מבחינה מתמטית, חשיבות החקירה של R_n נעוצה בעובדה שהערכים המספריים של סדרת ה-R_n יוצרים ספקטרום של ממוצעים שביניהם החשבוני, ההנדסי, ההרמוני וממוצעים אחרים. מבחינה פדגוגית, אנו מאמינים שההוכחות השונות, כפי שמתוארות להלן, לא רק מעשירות ידע ומגוונות דרכי הוכחה אלא גם מדגימות לתלמידים את הדרך הטבעית על פיה המתמטיקה מתפתחת. בעקבות Polya (1962) מספר אנשי חינוך מתמטי, מדגישים שוב ושוב את הצורך להדגים לתלמידינו את דרך התפתחותה של המתמטיקה תוך תיאור השלבים השונים של תהליכי החקירה בהם עוסקים מתמטיקאים. לדוגמא, Freudenthal מדגיש את הצורך לתאר את המתמטיקה בפעולה וביצירה לעומת התוצרים המוכנים (1973, עמ' 114-119) וכמו כן להדגים כיצד רעיונות מתמטיים מתהווים ומתפתחים (1983, עמ' 29). יש לנו הרגשה שנגרם תסכול מה לתלמידים ואחרים כאשר נתקלים לרוב רק בתוצרים המוכנים הסופיים והדרכים ה"נבחרות" המקוצרות והמלוטשות. אי לכך אנו נמנעים מלהציג להלן רק הוכחה אחת אלגנטית קצרה ו"נקיה" כלשונו של Freudenthal הטוען בגד זה.

III. הוכחה ראשונה - בשיטה האלגברית.

כפי שצויין לעיל, השיטה הראשונה פותחה בעקבות נסיונות להוכיח מקרים פרטיים כגון: $R_3 \geq R_2$ או $R_4 \geq R_3$ על ידי שימוש במשפט השארית, בתכונות של פולינומים סימטריים ושיטת החילוק הסינטתי (שיטת הורנר). נציג תחילה את הכלים האלגבריים בהם אנו משתמשים בהוכחת המקרים הפרטיים והמקרה הכללי. לאחר מכן, נציג את הוכחת המקרה הפרטי $R_4 \geq R_3$ ולבסוף את ההוכחה של $R_{n+1} \geq R_n$ בשיטה האלגברית.

א. משפט השארית

הצורה הכללית של רב-איבר (פולינום) ממעלה n במשתנה אחד היא:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0).$$

אם נחלק את $P(x)$ ב - $(x - a)$ נקבל מנה $Q(x)$ כפולינום בעל מעלה $n-1$ ושארית R [שהיא מספר, כי מעלת השארית קטנה ממעלת המחלק $(x - a)$]. לכן

$$P(x) = (x - a)\,Q(x) + R$$

נציב $x = a$ ונקבל:

$$P(a) = R$$

ומכאן

$$P(x) = (x - a)\,Q(x) + P(a)$$

השוויון האחרון נקרא משפט השארית, המביע את הטענה:

שארית מחילוק הפולינום $P(x)$ ב-$(x-a)$ שווה לערך הפולינום כאשר $x = a$, זאת אומרת:

$$R = P(a) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + a_2a^{n-2} + \dots + a_{n-1}a + a_n$$

מסקנה ממשפט השארית: $P(x)$ מתחלק ב- $(x-a)$ אך ורק אם $R = P(a) = 0$ (כלומר, כאשר המספר a משמש כשורש הפולינום $P(x)$).

ב. פולינומים סימטריים ואנטיסימטריים.

פולינום בשני משתנים $P(a,b)$ נקרא סימטרי אם $P(a,b) = P(b,a)$.

פולינום בשני משתנים $Q(a,b)$ נקרא אנטיסימטרי אם $Q(a,b) = -Q(b,a)$.

אחת התכונות של פולינומים סימטריים בשני משתנים (בה נשתמש בהמשך) היא:

אם פולינום סימטרי $P(a,b)$ מתחלק ב- $(a - b)$ אז:

i) המנה היא פולינום אנטיסימטרי..

ii) כל פולינום אנטיסימטרי $Q(a\ ,b)$ מתחלק ב- $(a - b)$.

ומכאן $P(a\ ,b)$ מתחלק ב- $(a - b)^2$.

הוכחה:

i) נכתוב על פי הנתון $P(a\ ,b) = (a - b)Q(a\ ,b)$

ולכן גם $P(b\ ,a) = (b - a)Q(b\ ,a)$

מכיוון ש- $P(a\ ,b) = P(b\ ,a)$ נקבל:

$$(a - b)Q(a,b) = (b - a)Q(b\ ,a)$$

כלומר $Q(a\ ,b) = -Q(b\ ,a)$ ובכך הראינו ש- $Q(a\ ,b)$ הוא אנטיסימטרי.

ii) מכיוון ש- $Q(a\ ,b)$ הוא אנטיסימטרי, לאיברים a^pb^q ו- a^qb^p יש מקדמים בעלי ערכים נגדיים כך ש-

$$Q(a\ ,b) = \alpha_o a^n + \alpha_1 a^{n-1}b + \alpha_2 a^{n-2}b^2 + \ldots - \alpha_2 a^2 b^{n-2} - \alpha_1 ab^{n-1} - \alpha_o b^n$$

כמו כן,

$$Q(b, b) = (\alpha_o - \alpha_o)b^n + (\alpha_1 - \alpha_1)b^{n-1}b + \ldots + (\alpha_k - \alpha_k)b^{n-k}b^k = 0$$

ומכאן, על פי משפט השארית, $Q(a\ ,b)$ מתחלק ב- $(a - b)$.

ג. חילוק סינתטי

קיים דמיון רב בין תהליך החילוק של שני פולינומים לבין התהליך הידוע מן "החילוק הארוך" בחשבון.
אחד השימושים של משפט השארית, הוא במציאת שורשים ולכן בדרך כלל מתעורר הצורך לחלק בפולינומים מן הצורה $x - c$.

נדגים להלן, על ידי דוגמאות, שיטה המפשטת את תהליך החילוק בין פולינומים כאשר הפולינום המחלק הוא מן הצורה $x - c$.
שיטה זו מיוחסת ל- Horner (חי בשנים 1786 - 1837) והיא נקראת שיטת החילוק הסינטטי.

דוגמא: אם נחלק את הפולינום $3x^4 - 8x^3 + 9x + 5$ ב - $x - 2$ נקבל:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 3x^4 & -\,8x^3 & +\,0x^2 & +\,9x & +\,5 & \big|\, x - 2 \\
 \hline
 -\ \underline{3x^4} & \underline{-\,6x^3} & & & & \ 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1 \\
 & -2x^3 & +\,0x^2 & & & \\
 & -\ \underline{-2x^3} & \underline{+\,4x^2} & & & \\
 & & -4x^2 & +\,9x & & \\
 & & -\ \underline{-4x^2} & \underline{+\,8x} & & \\
 & & & x & +\,5 & \\
 & & & -\ \underline{x} & \underline{-\,2} & \\
 & & & & 7 &
\end{array}
$$

יש לשים לב שדרוש לרשום בסדר יורד את כל החזקות של x בפולינום המחולק, כולל איברים בעלי מקדם 0. ננסה לפשט את דרך כתיבת התהליך על ידי כך שלא נחזור ונכתוב את האיברים $3x^4$, $-2x^3$, $-4x^2$ ו - x. כמו כן, לא נחוץ "להוריד" את הביטויים $0x^2$, $9x$ ו - 5 מן המחולק כפי שמודגם לעיל. כאשר נעשה זאת, נקבל את הצורה הבאה:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
3x^4 & -\,8x^3 & +\,0x^2 & +\,9x & +\,5 & \big|\,\underline{x-2} \\
 & -\,6x^3 & & & & \;\;3x^3-2x^2-4x+1 \\ \cline{1-2}
 & -\,2x^3 & & & & \\
 & & 4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -\,4x^2 & & & \\
 & & & 8x & & \\ \cline{3-4}
 & & & x & & \\
 & & & & -\,2 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 7 &
\end{array}
$$

אם נקפיד לרשום חזקות דומות של x אחת מתחת לשניה(כולל אלו בעלות מקדם 0), אז נוכל גם להַשְׁמיט את הסימן x ובמקרה כזה התרגיל הנ"ל יקבל הצורה:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
3 & -8 & 0 & 9 & 5 & \big|\,\underline{1 \quad -2} \\
 & -6 & & & & \;\;3 \quad -2 \quad -4 \quad 1 \\ \cline{1-2}
 & -2 & & & & \\
 & & 4 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -4 & & & \\
 & & & 8 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 & & \\
 & & & & -2 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 7 &
\end{array}
$$

מכיון שהמחלק הוא פולינום מן הצורה x-c, הרי המקדמים שלו יהיו תמיד 1 - c. אי לכך, לא נתיחס למקדם 1 וכמו כן נצמצם את הכתיבה על ידי כך שנזיז את כל המספרים למעלה כפי שמצויין להלן:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
3 & -8 & 0 & 9 & 5 & \big|\,\underline{-2 \qquad\qquad} \\
 & -6 & 4 & 8 & -2 & \;\;3 \quad -2 \quad -4 \quad 1 \\ \hline
 & -2 & -4 & 1 & 7 &
\end{array}
$$

אם נרשום את המקדם המוביל 3 במקום הראשון בשורה השלישית, נקבל את ארבעת המקדמים של המנה ואילו המספר האחרון (7) יציין את השארית. מכיון שאין צורך לרשום פעמיים את המקדמים של המנה, נקבל

$$
\begin{array}{rrrrrl}
3 & -8 & 0 & 9 & 5 & \big|\,\underline{-2 \qquad\qquad} \\
 & -6 & 4 & 8 & -2 & \\ \hline
3 & -2 & -4 & 1 & 7 &
\end{array}
$$

ניתן לפרש את מה שקבלנו בדרך הבאה: כל מספר בשורה השניה ניתן לקבל על ידי מכפלת (-2) במספר בטור הקודם של השורה השלישית. יותר מכך, כל מספר בשורה השלישית ניתן לקבל על ידי חיסור המספר שעליו בשורה השניה מן המספר שעליו בשורה הראשונה. אם רוצים להמנע מחיסור בין השורה הראשונה והשניה נקח c במקום c- במחלק ובמקרה כזה הסימנים של המספרים בשורה השניה יהיו נגדיים ולכן כדי לקבל את השורה השלישית נחבר את שתי השורות מעל בהתאם. לאור השינוי הזה נקבל:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3 & -8 & 0 & 9 & 5 & 2 \\
 & 6 & -4 & -8 & 2 & \\
\hline
3 & -2 & -4 & 1 & 7 &
\end{array}$$

הסכימה האחרונה שקבלנו נקראת חילוק סינתטי. לפי שיטה זו, רושמים את המקדמים של כל החזקות של המחולק בסדר יורד ואילו לגבי המחלק $x - c$ את המספר c. מורידים את המקדם המוביל של המחולק לשורה השלישית ומכאן בכדי לקבל את המספרים בשורה השניה כופלים ב - c את המספר בטור הקודם של השורה השלישית ואילו בכדי לקבל את המספרים בשורה השלישית מחברים את המספרים שמעליהם בשורה השניה והראשונה בהתאם.

לדוגמא, נחלק בשיטת החילוק הסינתטי את הפולינום $4x^3-9x^2-8x-3$ ב - $x-3$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
4 & -9 & -8 & -3 & 3 \\
 & 12 & 9 & 3 & \\
\hline
4 & 3 & 1 & \boxed{0} \leftarrow \text{שארית} &
\end{array}$$

כתוצאה מהחילוק, המנה היא $4x^2+3x+1$ ושארית 0. כמו כן, ניתן להסיק ש - 3 הוא שורש המשוואה $4x^3 - 9x^2 - 8x-3=0$ או שהפולינום $P(x)=4x^3-9x^2-8x-3$ הוא פריק וניתן לרשום אותו על ידי $P(x) = (x-3)\ (4x^2+3x+1)$.

ד. הוכחת המקרה הפרטי $R_4 \geq R_3$

נחוץ להוכיח כי $R_4 \geq R_3$ וזה שקול ($\Longleftrightarrow$) ל-

$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \Longleftrightarrow \left(\frac{a^4+b^4}{2}\right)^3 \geqslant \left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^4 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2(a^4+b^4)^3 - (a^3+b^3)^4 \geq 0$$

הפולינום $P(a\ ,\ b) = 2(a^4+b^4)^3 - (a^3+b^3)^4$ סימטרי ב a ו b.

מכיוון ש-$P(b,b) = 0$, על-פי משפט השארית, $P(a,b)$ מתחלק ב-$(a-b)$.

בסעיף ב' הוכחנו כי אם פולינום סימטרי ב a ו b מתחלק ב-$(a-b)$
שהרי הוא מתחלק גם ב - $(a-b)^2$ ולכן $P(a,b)$ מתחלק ב - $(a-b)^2$.
כדי לעבור למשתנה אחד, נחלק את $P(a\ ,b)$ ב-b^{12} ונסמן $x = \frac{a}{b}$,
אז היות ו- $b^{12} > 0$ מספיק להראות כי:

$$g(x) = 2(x^4+1)^3 - (x^3+1)^4 \geq 0$$

כלומר, דרוש להראות ש-

$$g(x) = x^{12} - 4x^9 + 6x^8 - 6x^6 + 6x^4 - 4x^3 + 1$$

אי שלילי עבור כל $x > 0$.

מכיוון ש- $P(a\ ,b)$ מתחלק ב- $(a - b)^2$, הפולינום $g(x)$ מתחלק ב- $(x - 1)^2$.

נכתוב $g(x) = (x - 1)^2 \cdot h(x)$.

כאשר נשתמש בחילוק סינתטי פעמיים על $g(x)$, נוכל להראות שכל המקדמים של $h(x)$ הם אי שליליים, כך ש- $h(x) > 0$ עבור כל ערך חיובי של x.

אנו משתמשים בשיטת החילוק הסינתטי כפי שהוצגה בסעיף הקודם:

$$x^{12}+0x^{11}+0x^{10}-4x^9+6x^8+0x^7-6x^6+0x^5+6x^4-4x^3+0x^2+0x+1 \quad \lfloor \underline{x-1}$$

1	0	0	-4	6	0	-6	0	6	-4	0	0	1	1
	1	1	1	-3	3	3	-3	-3	3	-1	-1	-1	
1	1	1	-3	3	3	-3	-3	3	-1	-1	-1	$\boxed{0}$	← שארית

$$x^{11}+x^{10}+x^9-3x^8+3x^7+3x^6-3x^5-3x^4+3x^3-x^2-x-1 \quad \lfloor \underline{x-1}$$

1	1	1	-3	3	3	-3	-3	3	-1	-1	-1	1
	1	2	3	0	3	6	3	0	3	2	1	
1	2	3	0	3	6	3	0	3	2	1	$\boxed{0}$	← שארית

כך ש - $h(x) = x^{10}+2x^9+3x^8+0x^7+3x^6+6x^5+3x^4+0x^3+3x^2+2x+1$

ולכן $h(x) > 0$ עבור כל ערך חיובי של x. בעקבות כך נובע

ש - $g(x) \geq 0$ כאשר השוויון מתקיים אך ורק אם

$x - 1 = 0 \iff x = 1 \iff a = b$ ובכך הושלמה הוכחת אי-השוויון $R_4 \geq R_3$.

ה. ההוכחה של $R_{n+1} \geq R_n$ בשיטה האלגברית

1) אנו צריכים להראות ש -

$$\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}} \geq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

וזה שקול ל:

$$\left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}\right)^n - \left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{n+1} \geq 0$$

כלומר צריך להראות ש -

$$2\,(a^{n+1} + b^{n+1})^n - (a^n + b^n)^{n+1} \geq 0$$

הפולינום $P(a\,,b) = 2(a^{n+1} + b^{n+1})^n - (a^n + b^n)^{n+1}$ סימטרי ב a ו b.

2) מכיון ש-$0 = 2(2b^{n+1})^n - (2b^n)^{n+1} = P(b,b)$ הרי $P(a\,,b)$ מתחלק ב- $(a - b)$ ולכן על פי תכונת הפולינומים הסימטריים מתחלק גם ב- $(a - b)^2$. נחלק את $P(a,b)$ ב- $b^{n(n+1)}$ ונקבל:

$$\frac{1}{b^{n(n+1)}}\,P(a,b) = 2\left(\frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} + 1\right)^n - \left(\frac{a^n}{b^n} + 1\right)^{n+1}$$

היות ו - $\frac{1}{b^{n(n+1)}} > 0$ צריך להוכיח כי הביטוי באגף הימני הוא אי-שלילי.

נסמן $x = \frac{a}{b}$ ואז עלינו להראות כי $g(x)=2(x^{n+1}+ 1)^n - (x^n + 1)^{n+1}$ הוא אי-שלילי לכל ערך חיובי של x.

מכיון ש- $P(a\,,b)$ מתחלק ב- $(a - b)^2$, הפולינום $g(x)$ מתחלק ב-$(x-1)^2$. נכתוב $g(x) = (x-1)^2 \cdot h(x)$. בכדי לבצע החילוק ולהראות ש-$h(x)$ חיובי עבור כל $x > 0$ נחקור להלן את המבנה המדויק של הפולינום $g(x)$, כולל איברי האפס שלו והיכן הם ממוקמים.

3) על פי משפט הבינום:

$$g(x) = 2\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{(n+1)(n-k)} - \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j x^{n(n+1-j)}$$

החזקות של x הן או מהצורה $(n+1)(n-k) = n^2 + n - kn - k$

או מהצורה: $n(n+1-j) = n^2 + n - jn$

כאשר $k = 0,1,2\ldots,n$ ו- $j = 0,1,2,\ldots,n+1$

החזקות הדומות היחידות של x הן אלו כאשר:

$$n^2 + n - kn - k = n^2 + n - jn \Leftrightarrow kn + k = jn \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k(n+1) = jn \Longleftrightarrow k = \frac{n}{n+1} j$$

ומכיון ש - n ו n + 1 - הם מספרים ראשוניים יחסית, אנו מסיקים שאו $j = 0$ ו- $k = 0$ או $j = n + 1$ ו- $k = n$. לכן, החזקות הדומות היחידות של x הן x^{n^2+n} ו- x^0 וכתוצאה מהחיסור נקבל:

$$2C_n^0\, x^{(n+1)(n-0)} - C_{n+1}^0\, x^{n(n+1-0)} = 2x^{n^2+n} - x^{n^2+n} = x^{n^2+n}$$

ו- $2C_n^n x^{(n+1)(n-n)} - C_{n+1}^{n+1}\, x^{n(n+1-n-1)} = 2x^0 - x^0 = x^0 = 1$

כל שאר האיברים של $g(x)$ שאינם אפס, הם או מן הצורה $2C_n^k x^{(n+1)(n-k)}$ כאשר $k = 1,2,3\ldots,n-1$ או מן הצורה $-C_{n+1}^j x^{n(n+1-j)}$ כאשר $j = 1,2,3,\ldots,n$.

4) עתה, אנו מעונינים למצוא כמה איברי אפס מכיל $g(x)$ והיכן הם ממוקמים.
מכיון שהמעלה של $g(x)$ היא n^2+n, סך הכל מספר איברי $g(x)$
(כולל איברי אפס של $g(x)$) הוא n^2+n+1. מספר האיברים שאינם אפס
מהביטוי $2\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{(n+1)(n-k)}$ הוא $(n+1)$ ומהביטוי $-\sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j x^{n(n+1-j)}$
הוא $n+2$ אבל ישנן 2 חזקות דומות של x כך ש-$g(x)$ מכיל

$$(n+1)+(n+2)-2=2n+1$$

איברים שאינם אפס ו- $(n^2+n+1)-(2n+1)=n^2-n$ איברי אפס.
החזקות של x מהסכום הראשון $\sum_{k=0}^{n}$ ומהסכום השני $\sum_{j=0}^{n+1}$ בהתאמה הן:

$$n^2+n,\ n^2-1,\ n^2-n-2,\ n^2-2n-3,\ n^2-3n-4,\ n^2-4n-5,\ \ldots,0$$

$$n^2+n,\ n^2,\ n^2-n,\ n^2-2n,\ n^2-3n,\ n^2-4n,\ \ldots,0$$

אם נכתוב אותן בסדר יורד (כפי שמסומן על ידי החיצים) נקבל:

$$n^2+n,\ n^2,\ n^2-1,\ n^2-n,\ n^2-n-2,\ n^2-2n,\ n^2-2n-3,\ n^2-3n,\ n^2-3n-4,\ \ldots,0$$

בין כל שני איברים עוקבים שאינם אפס ובעלי מעריכים p ו q כאשר
$q > p$ ישנם $(q-p-1)$ איברי אפס. על ידי חישוב ההפרשים הרלונטיים
בין מעריכי האיברים העוקבים של $g(x)$ שאינם אפס, מתגלה החוקיות הבאה:

$$(n^2+n)-(n^2)-1=n-1\ ; \qquad n^2-(n^2-1)-1=0\ ;$$

$$(n^2-1)-(n^2-n)-1=n-2\ ; \qquad (n^2-n)-(n^2-n-2)-1=1\ ;$$

$$(n^2-n-2)-(n^2-2n)-1=n-3\ ; \qquad (n^2-2n)-(n^2-2n-3)-1=2\ ;$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$0 \qquad\qquad\qquad n-1$$

כך, שאת מספר איברי האפס בהתאם למיקומם ניתן לקבוע לסירוגין מהסדרות:

$n-1, n-2, n-3, \ldots, 0$

ו- $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

כתוצאה מכך, החוקיות לפיה נקבע המבנה של הפולינום $g(x)$ ברורה כפי שרואים בטבלה 1 (שלושת הטורים הראשונים). יש להעיר כי המקדם של איבר T_{kn} כלשהו $(k = 1,2,3,\ldots)$ הוא $-C_{n+1}^{k}$, לאחר מכן מופיעים $k-1$ איברי אפס והאיבר $T_{k(n+1)}$ בעל מקדם $2C_{n}^{k}$, לאחר מכן $n-(k+1)$ איברי אפס והאיבר $T_{(k+1)n}$ בעל מקדם $-C_{n+1}^{k+1}$.

5) בכדי להשיג המקדמים של $Q(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$ ושל $h(x) = \dfrac{Q(x)}{x-1} = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$

נשתמש פעמיים בשיטת החילוק הסינתטי (שיטת הורנר).

חלק מהמקדמים של $Q(x)$ ניתן לחישוב באמצעות הנוסחה הקומבינטורית

$$C_{n}^{k-1} + C_{n}^{k} = C_{n+1}^{k}$$

השקולה ל - $C_{n}^{k-1} - C_{n+1}^{k} = -C_{n}^{k}$

(מקרה אחד כזה לדוגמא מסומן על ידי חיצים בין הטורים 3 ו-4 של טבלה 1); וחלק מהמקדמים של $h(x)$ ניתן לחישוב באמצעות הנוסחה הקומבינטורית $(n-k)C_{n}^{k} = (k+1)C_{n}^{k+1}$

השקולה ל- $(n-k)C_{n}^{k} - C_{n}^{k+1} = kC_{n}^{k+1}$

(מקרה אחד כזה לדוגמא מסומן על ידי חיצים בין הטורים 4 ו-5 של טבלה 1)

<u>טבלה 1</u>

$h(x)=\frac{Q(x)}{x-1}$	$Q(x)=\frac{g(x)}{x-1}$	$g(x)=2(x^{n+1}+1)^n-(x^n+1)^{n+1}$		
המקדם	המקדם	המקדם	חזקת האיבר	האיבר
$1=C_n^0$	$1=C_n^0$	1	n^2+n	T_0
$2C_n^0$	C_n^0	0		T_1
$\vdots$	$\vdots$	$\left.\vdots\right\} n-1$		$\vdots$
nC_n^0	C_n^0	0		T_{n-1}
$0C_n^1$	$-C_n^1$	$-C_{n+1}^1$	n^2	T_n
C_n^1	C_n^1	$2C_n^1$	n^2-1	$T_{(n+1)}$
	C_n^1	0		T_{n+2}
	$\vdots$	$\left.\vdots\right\} n-2$		$\vdots$
$(n-1)C_n^1$	C_n^1	0		T_{2n-1}
C_n^2	$-C_n^2$	$-C_{n+1}^2$	n^2-n	T_{2n}
$0C_n^2$	$-C_n^2$	0		T_{2n+1}
C_n^2	C_n^2	$2C_n^2$	n^2-n-2	$T_{2(n+1)}$
$2C_n^2$	C_n^2	0		T_{2n+3}
$\vdots$	$\vdots$	$\left.\vdots\right\} n-3$		$\vdots$
$(n-2)C_n^2$	C_n^2	0		T_{3n-1}
$2C_n^3$	$-C_n^3$	$-C_{n+1}^3$	n^2-2n	T_{3n}
C_n^3	$-C_n^3$	0		T_{3n+1}
$0C_n^3$	$-C_n^3$	0		T_{3n+2}
C_n^3	C_n^3	$2C_n^3$	n^2-2n-2	$T_{3(n+1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		1	0	T_{n^2+n+1}

6) עתה, בשתמש בעיקרון האינדוקציה המתמטית בכדי להראות שכל המקדמים של $h(x)$ הם אי-שליליים. נניח שעבור האיבר ה-T_{kn} של $Q(x)$ ושל $h(x)$ המקדמים הם $-C_n^k$ ו- $(k-1)C_n^k$ בהתאמה. אז עלינו להראות שעבור האיבר ה - $T_{(k+1)n}$ המקדמים הם $-C_n^{k+1}$ ו- kC_n^{k+1} בהתאמה.

ראשית, הנוסחה עבור האיבר ה-T_{kn} נכונה בשביל $k=1$, ראה המקדמים הרלוונטיים של T_n בטבלה 1 (טורים 4 ו-5). לאחר מכן, נוציא לפועל את שני החילוקים עד לאיבר ה- $T_{(k+1)n}$ כפי שמוצג בטבלה 2 כאשר משתמשים באותן הנוסחאות הקומבינטוריות כמקודם וגם כאן סימנו בכל מקרה דוגמא אחת על ידי חיצים בטבלה 2.

<u>טבלה 2</u>

האיבר	המקדם ב-$g(x)$	המקדם ב-$Q(x)=\frac{g(x)}{x-1}$	המקדם ב-$h(x)=\frac{Q(x)}{x-1}=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$
T_{kn}	$-C_{n+1}^k$	$-C_n^k$	$(k-1)\ C_n^k$
	0	$-C_n^k$	$(k-2)C_n^k$
	$\vdots\ \}\ k-1$	$\vdots$	$\vdots$
	0	$-C_n^k$	$0\ C_n^k$
$T_{k(n+1)}$	$2C_n^k$	C_n^k	C_n^k
	0	C_n^k	$2C_n^k$
	$\vdots\ \}\ n-(k+1)$	$\vdots$	$\vdots$
	0	C_n^k	$(n-k)C_n^k$
$T_{(k+1)n}$	$-C_{n+1}^{k+1}$	$-C_n^{k+1}$	kC_n^{k+1}

מכיון שהמקדם של האיבר ה- $T_{(k+1)n}$ של $h(x)$ התקבל בהתאם להשערת האינדוקציה וכל המקדמים של האיברים בין האיבר ה- T_{kn} והאיבר ה- $T_{(k+1)n}$ אי-שליליים, אנו מסיקים כי $h(x) > 0$ עבור כל $x > 0$ ומכאן $g(x) = (x-1)^2 \cdot h(x) \geq 0$ היכן שהשוויון מתקיים אם ורק אם $x = 1$, זאת אומרת, אם ורק אם $\frac{a}{b} = 1$ וזה שקול ל- $a = b$; ובכך ההוכחה האלגברית של $R_{n+1} \geq R_n$ הושלמה.

IV. הוכחה שניה - בשיטה האנליטית

כפי שצויין בהתחלה, השיטה השניה מבוססת על שימוש בתכונות של נגזרות. הרעיון לנסות כלים מתחום החשבון הדיפרנציאלי עלה תוך כדי עיסוק בהוכחה לפי השיטה הראשונה - השיטה האלגברית. התוצאה שיש ל-$g(x)$ רק נקודת אפס אחת (כפולה) ב-$x=1$ הן במקרה הפרטי בהוכחת $R_4 \geq R_3$ והן במקרה הכללי הובילה לרעיון להתיחס לנקודה זו כאל נקודת מינימום (כי למעשה יצא ש-$g(x)$ חיובי לכל $x > 0$ פרט ל- $x = 1$) ואי לכך לנסות בדרך של יצירת פונקציה וחקירתה למציאת נקודות אקסטרמום כפי שמתואר להלן. גם כאן נוכיח תחילה את המקרה הפרטי $R_4 \geq R_3$ ולאחר מכן את המקרה הכללי $R_{n+1} \geq R_n$.

א. הוכחת המקרה הפרטי $R_4 \geq R_3$

דרוש להראות כי
$$\sqrt[4]{\frac{a^4 + b^4}{2}} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}$$

וזה שקול ל -
$$\left(\frac{a^4 + b^4}{2}\right)^3 \geq \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^4$$

כלומר צריך להראות ש-
$$2(a^4 + b^4)^3 \geq (a^3 + b^3)^4$$

נחלק ב - b^{12} ונסמן $\frac{a}{b} = x$, אז עלינו להראות ש-
$$2(x^4 + 1)^3 \geq (x^3 + 1)^4$$

שני האגפים של אי-השוויון חיוביים (ואפילו גדולים מ-1) ולכן אם נעבור ללוגריתמים של שני האגפים, יהי עלינו להראות:
$$\ln 2 + 3\ln(x^4 + 1) - 4\ln(x^3 + 1) \geq 0$$

נסמן את האגף השמאלי בפונקציה $f(x)$:
$$f(x) = \ln 2 + 3\ln(x^4 + 1) - 4\ln(x^3 + 1)$$

ולכן דרוש להראות כי $f(x)$ אי-שלילית לכל $x > 0$. נחקור את הפונקציה $f(x)$ בעזרת חשבון דיפרנציאלי למציאת נקודות קיצון. נחשב את הנגזרת הראשונה של $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{3 \cdot 4x^3}{x^4 + 1} - \frac{4 \cdot 3x^2}{x^3+1} = 12x^2 \left(\frac{x}{x^4 + 1} - \frac{1}{x^3 + 1} \right)$$

$$= 12x^2 \cdot \frac{x(x^3 + 1) - (x^4 + 1)}{(x^4 + 1)(x^3 + 1)} = 12x^2 \cdot \frac{x - 1}{(x^4 + 1)(x^3+1)}$$

נאפס את הנגזרת הראשונה של $f(x)$ עבור $x>0$:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x=1$$

וכאשר $x=1$ גם $f(1) = 0$ כך ש - $f'(1) = f(1) = 0$

נבדוק את התנהגות הנגזרת הראשונה בתחום $x>0$ ונקבל

$$f'(x) < 0 \Longrightarrow 0 < x < 1$$

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow x > 1$$

אי לכך אנו מסיקים שקיים מינימום ל - $f(x)$ ב-$x = 1$, כאשר $f(1) = 0$.
כמובן, שבמקום בדיקת התנהגות $f'(x)$, יכולנו לחשב את $f''(x)$ ב-$x=1$.
ואכן, מספיק לגזור את המונה של $f'(x)$ בכדי לקבוע את סימן הנגזרת השניה.
המונה של $f'(x)$ הוא $12(x^3-x^2)$, הנגזרת של ביטוי זה $12(3x^2-2x)$ וכאשר $x=1$ יוצא שהנגזרת השניה חיובית, כלומר מדובר בנקודת מינימום, כאשר $f(1)=0$ ובכך ההוכחה הושלמה.

ב. ההוכחה של $R_{n+1} \geq R_n$ בשיטה האנליטית

אנו נדרשים להראות כי:

$$\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}} \geq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}$$

וזה שקול ל-

$$\left(\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}\right)^n \geq \left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{n+1}$$

כלומר, להוכיח כי:

$$2(a^{n+1} + b^{n+1})^n \geq (a^n + b^n)^{n+1}$$

נחלק ב- $b^{n(n+1)}$ ונסמן $x = \frac{a}{b}$, אז עלינו להראות ש-

$$2(x^{n+1} + 1)^n \geq (x^n + 1)^{n+1}$$

שני האגפים של אי-השוויון חיוביים (גדולים מ-1) ולכן אם נעבור ללוגריתמים של שני האגפים, יהיה עלינו להראות:

$$\ln 2 + n\ln(x^{n+1} + 1) \geq (n + 1)\ln(x^n + 1)$$

או באופן אקוילנטי

$$\ln 2 + n\ln(x^{n+1} + 1) - (n + 1)\ln(x^n + 1) \geq 0$$

עתה, תהי הפונקציה:

$$f(x) = \ln 2 + n\ln(x^{n+1} + 1) - (n+1)\ln(x^n + 1).$$

דרוש להראות כי $f(x)$ אי-שללית לכל $x > 0$ ולכל n שלם חיובי. נחקור את $f(x)$ בעזרת הנגזרת הראשונה, איפוס הנגזרת הראשונה וסימן הנגזרת השניה בנקודת האפס של הנגזרת הראשונה.

$$f'(x) = \frac{n(n+1)x^n}{x^{n+1}+1} - \frac{(n+1)nx^{n-1}}{x^n+1} =$$

$$= \frac{n(n+1)x^n(x^n+1) - (n+1)nx^{n-1}(x^{n+1}+1)}{(x^{n+1}+1)(x^n+1)}$$

$$= n(n+1)x^{n-1} \cdot \frac{x-1}{(x^{n+1}+1)(x^n+1)}$$

ואז $f'(1) = f(1) = 0$. עתה, או שנתיחס לנגזרת השניה ב- $x = 1$ ונקבל $f''(1) > 0$ או שנבדוק את התנהגות הנגזרת הראשונה ונקבל

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Longrightarrow 0 < x < 1$$

אי לכך אנו מסיקים שקיים מינימום ל - $f(x)$ ב-1 = x, כאשר $f(1) = 0$ ולכן ההוכחה הושלמה.

V. הוכחה שלישית - בשיטת Schlömilch

כפי שצויין לעיל, ההוכחה השלישית מבוססת על יישום הצורה המוכללת של אי-שוויון ברנולי, עבור מעריכים רציונליים חיוביים. אי לכך נציג ונוכיח תחילה את אי-שוויון ברנולי והכללתו ולאחר מכן נוכיח את $R_{n+1} \geq R_n$ בעזרת הכללה זו.

א. אי שוויון ברנולי.

אי שוויון ברנולי קובע כי עבור n שלם וחיובי כלשהו ו- $x > -1$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

טענה זו מוכחת בדרך האינדוקציה המתמטית:

1) עבור $n = 1$ $\qquad (1+x)^1 \geq 1+x$

כלומר הטענה נכונה עבור $n = 1$.

2) נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$ (הנחת האינדוקציה): $(1+x)^k \geq 1+kx$
ונוכיח כי היא נכונה עבור $n = k + 1$, כלומר צ.ל: $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

הוכחה: מכיון ש - $x>-1$, הרי $1 + x > 0$ ומכאן אם נכפיל את שני האגפים של הנחת האינדוקציה ב- $1+x$ נקבל:

$$(1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

או:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x+kx^2$$

מכיון ש-k מספר שלם וחיובי, הרי $kx^2 \geq 0$ ולכן

$$1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

כלומר

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$$

והטענה הוכחה עבור כל n טבעי.

ב. הצורה המוכללת של אי-שוויון ברנולי.

ההכללה של אי-שוויון ברנולי עבור מעריכים רציונליים חיוביים קובעת כי אם $x>-1$ ו- r הוא מספר רציונלי חיובי, אז:

(i) עבור $0 < r < 1$ $\qquad (1+x)^r \leq 1 + rx$

(ii) עבור $r > 1$ $\qquad (1+x)^r \geq 1 + rx$

כאשר השוויון מתקיים אם ורק אם $x = 0$.

הוכחת (i)

נניח ש- $r = \frac{m}{n}$ ו- $0 < r < 1$, כאשר m ו n שלמים חיוביים, אז

$$(1 + x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\underbrace{(1 + x)\ (1 + x)\dots(1 + x)}_{\text{גורמים } m}.\underbrace{1.1\dots1}_{\text{גורמים } n-m}}$$

ועל-פי משפט אי-שוויון הממוצעים החשבוני-הנדסי* $(A_n \geq G_n)$ אנו מסיקים כי:

$$(1 + x)^{\frac{m}{n}} < \frac{m(1 + x) + (n - m)\cdot 1}{n} = 1 + \frac{m}{n}x$$

* במאמר הבא נציג מגוון הוכחות של משפט זה.

השוויון מתקיים אם ורק אם $1 + x = 1$ (כל המספרים מהם עושים ממוצע שווים זה לזה), כלומר, אך ורק אם $x = 0$.

הוכחת (ii)

נניח ש-$1 < r$. אם $(1 + rx)$ שלילי, ברור ש-$(1 + x)^r > 1 + rx$ ואז אי השוויון (ii) תקף. אם $(1 + rx) \geq 0$, אז $rx \geq -1$.

מכיון ש- $0 < \frac{1}{r} < 1$, על פי אי-שוויון (i):

$$(1 + rx)^{\frac{1}{r}} \leq 1 + \frac{1}{r} rx = 1 + x$$

על ידי העלאת שני אגפי אי-השוויון בחזקת r, נקבל:

$$(1 + rx) \leq (1 + x)^r$$

השוויון מתקיים אם ורק אם $rx = 0$, כלומר שוב, אם ורק אם $x = 0$.

ג) ההוכחה של $R_{n+1} \geq R_n$ בשיטת Schlömilch

הטענה היא ש- $R_{n+1} \geq R_n$ (כאשר $R_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}(a^n + b^n)}$, $a > 0$, $b > 0$ ו- n שלם חיובי) ושהשוויון מתקיים אם ורק אם $a = b$.

הוכחה: מההגדרה של R_n נובע כי:

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{1}{R_n} \cdot \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}} = \sqrt[n+1]{\frac{(\frac{a}{R_n})^{n+1} + (\frac{b}{R_n})^{n+1}}{2}}$$

נסמן $(\frac{a}{R_n})^n = \alpha$ ו- $(\frac{b}{R_n})^n = \beta$, לכן:

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \sqrt[n+1]{\frac{\alpha^{\frac{n+1}{n}} + \beta^{\frac{n+1}{n}}}{2}}$$

על פי הגדרת R_n ניתן להראות בקלות ש- $\alpha + \beta = 2$. בכדי שנוכל להשתמש בהכללה של אי-שוויון ברנולי, יהי $\alpha = 1 + x$ ו $\beta = 1 + y$.

כך ש-

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \sqrt[n+1]{\frac{\alpha^{\frac{n+1}{n}} + \beta^{\frac{n+1}{n}}}{2}} = \sqrt[n+1]{\frac{(1+x)^{\frac{n+1}{n}} + (1+y)^{\frac{n+1}{n}}}{2}}$$

מכיוון ש- $0 < \alpha$ ו- $0 < \beta$, הרי $1 + x > 0$ ו $1 + y > 0$ ולכן $-1 < x$ ו $y > -1$. מכיוון ש- $\alpha + \beta = 2$, אנו גם מקבלים:

$$x + y = (\alpha - 1) + (\beta - 1) = (\alpha + \beta) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

נשתמש בהכללה של אי-שוויון ברנולי פעמיים עם מעריך של $\frac{n+1}{n} > 1$ ונקבל;

$$\sqrt[n+1]{\frac{(1+x)^{\frac{n+1}{n}} + (1+y)^{\frac{n+1}{n}}}{2}} \geq \sqrt[n+1]{\frac{(1 + \frac{n+1}{n}x) + (1 + \frac{n+1}{n}y)}{2}}$$

$$= \sqrt[n+1]{\frac{2 + \frac{n+1}{n}(x + y)}{2}} = 1$$

כי $x + y = 0$.

השוויון מתקיים אם ורק אם $x = 0$ ו $y = 0$, כלומר $\alpha = 1$ ו $\beta = 1$ ולפי ההגדרה של α ו β. נובע כי $a = b$.

אי לכך, אנו מסיקים כי $\frac{R_{n+1}}{R_n} \geq 1$, כלומר $R_{n+1} \geq R_n$ לכל n שלם וחיובי.

VI. הרחבה והתבוננות בספקטרום הממוצעים.

א) חשוב להעיר שההכללה של אי-שוויון ברנולי תקפה עבור כל מעריך ממשי חיובי $\alpha > 1$ וזאת ניתן להוכיח באמצעות חשבון דיפרנציאלי. לכן ההוכחה על פי השיטה השלישית ניתנת להרחבה עבור כל הערכים הממשיים $n > 0$. אי לכך, אם R_n מוגדר עבור כל ערך חיובי ממשי של n אז אם $n_2 > n_1$ אז $R_{n_2} > R_{n_1}$. חיזוק לנקודה זו קיים בדרך ההוכחה האנליטית, שלמעשה אינה מוגבלת לערכים שלמים חיוביים של n בלבד. מסקנה דומה ניתן להסיק על המירווח $0 > n$ וגם שם אם $n_2 > n_1$ אז $R_{n_2} > R_{n_1}$.

מכאן, אם $n \neq 0$, נוכל לדבר על ספקטרום רציף של ערכים ממוצעים במירווח (a, b) הנוצרים על ידי R_n ו- HR_n השווה ל- R_{-n}. לדוגמא:

הממוצע החשבוני $$R_1 = \frac{a + b}{2} = A(a, b)$$

הממוצע השורשי ריבועי $$R_2 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = R(a, b)$$

הממוצע ההרמוני $$R_{-1} = HR_1 = \frac{2ab}{a+b} = H(a, b)$$

הממוצע ההרמוני השורשי $$R_{-2} = HR_2 = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}} = HR(a, b)$$

ב) מעניין גם להראות שכאשר $n \to 0$ אז R_n שואף לממוצע ההנדסי של a ו-b; לשם כך נבחן את $\ln R_n$:

$$\ln R_n = \frac{1}{n} \ln \frac{a^n + b^n}{2}$$

כאשר $n \to 0$ באגף הימני מתקבל הביטוי הלא מוגדר $\frac{0}{0}$ (כי $\ln 1 = 0$) ולכן נשתמש בחוק לופיטל (L'Hôpital) (נגזרת של מונה ומכנה).

$$\lim \ln R_n = \lim_{n \to 0} \frac{a^n \ln a + b^n \ln b}{a^n + b^n} =$$

$$= \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\sqrt{ab} \Longrightarrow \lim_{n \to 0} R_n = \sqrt{ab}$$

תוצאה זו אינה מפתיעה לגמרי אם גם נוכחים ש- $HR_n \cdot R_n = G^2$!

ג) כמו כן אם $0 < a < b$:

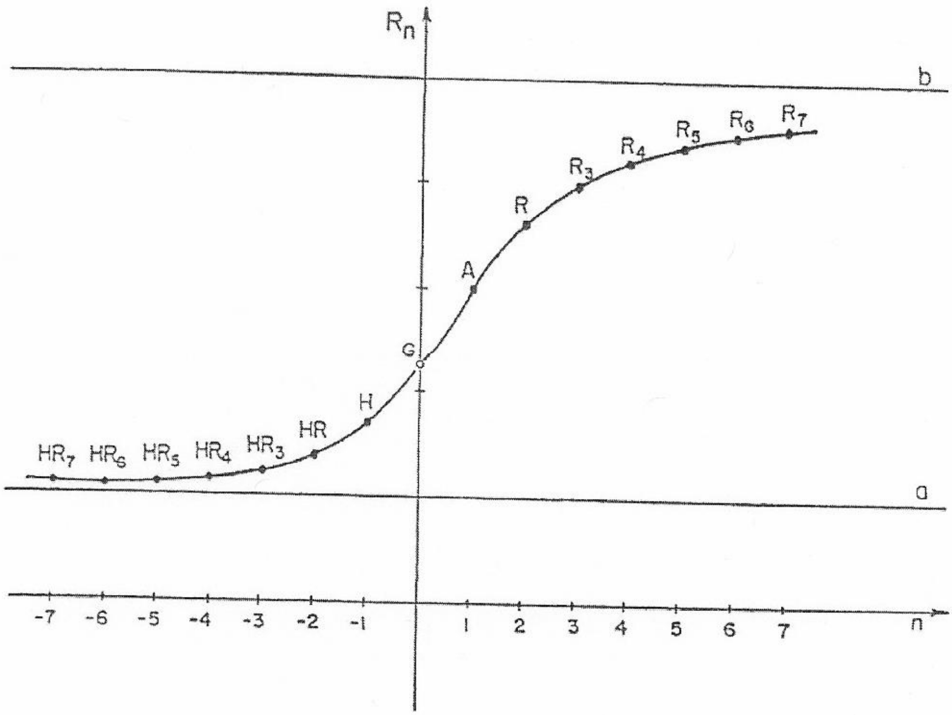
$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left[2^{-\frac{1}{n}}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}\right]\cdot b = b$$

ו-

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} HR_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a^nb^n}{a^n+b^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}\ ab}{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}b} = a$$

כך שהערכים a ו b מהווים אסימפטוטות אופקיות לגרף של R_n.

ד) האינפורמציה הנ"ל על R_n בתוספת להתנהגות המונוטונית של R_n (שמובנה $R_n' > 0$ עבור $n \neq 0$) הובילה להשערה שצורת הגרף של R_n היא כבציור 1 בו מוצג הגרף של R_n לדוגמא עבור $a = 1$, $b = 5$.



ציור 1

ברור לנו, שיש ל- R_n נקודת פיתול בעקבות כך שהפונקציה מונוטונית עולה וקיום השינוי במגמת העקמומיות, אבל מאד מסובך לחשב ישירות את הערך של n עבורו הנגזרת השניה מתאפסת. בכל אופן, בדקנו את הערכים של R''_n בעזרת תכנית מחשב וקירובים ליניאריים וקבלנו שעבור ערכים שונים של a ו b, הנגזרת השניה מתאפסת בקירוב כאשר n בסביבות הערך של 0.5.

בנוסף לכך, יש לציין שהגרף של R_n מצביע על יחס סדר בין הערכים הממוצעים השונים של a ו b.

VII. סיכום

לסיכום, הצגנו התפתחות של נושא באמצעות הוכחות מנקודות ראות שונות, כאשר ניתן להעמיק ולהעשיר ידע מתמטי באמצעותן, בנוסף להשלכות וכווני חקירה נוספים. נקודה נוספת חשובה לא פחות, רצינו להדגים כיצד נוצרים רעיונות (כגון למהלכים מסויימים בשיטה האלגברית ובמיוחד לשיטה האנליטית) ונמנענו מלהציג הוכחה אחת אלגנטית, קצרה ו"נקיה".

אנו מציעים לקוראים להציג לתלמידים כיצד רעיונות נוצרים, להדגים במקרים הפרטיים ולבקשם להשלים הוכחות כלליות, או לעיין בהן אם מתעוררים קשיים. כמו כן, להציג ולפתח גישות שונות ולהשוות ביניהן.

נציין גם, ששימוש במחשב או במיקרומחשב עשוי לעזור לחקירה גרפית של פונקציות וביטויים אלגבריים. מאחר וקיימות תוכנות עזר המתאימות לצרכים אלה, ניתן לכוון תלמידים להשתמש בהן לחקירת נושאים מן הסוג המופיע במאמר זה.

מקורות

Freudenthal, H. (1973), Mathematics as an Educational Task, Reidel Publishing Company/Dordrecht - Holland.

Freudenthal, H. (1983), Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Reidel Publishing Company/Dordrecht - Holland.

Kazarinoff, N.D. (1961), Analytic Inequalities, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Maor, E. (1977), A mathematician's Repertoire of means, The Mathematics Teacher, 70, 1, pp. 20-25.

Polya, G. (1962), Mathematical Discovery, (two volumes), John Wiley & Sons Inc., New York.

דוד רימר ודוד בן חיים (1985) מרוב ממוצעים רואים את היער שבבים, תיק מס' 25.