הסתברות

לתלמידי 3–4 יחידות לימוד

מהדורת עיצוב

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

הסתברות

לתלמידי 3–4 יחידות לימוד

מהדורת עיצוב

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

יוצא לאור במסגרת
המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט
מיסודם של
משרד החינוך והתרבות, האוניברסיטה העברית בירושלים ומכון ויצמן למדע, רחובות

דפוס מאירי בע"ם
תשנ"ו - 1996

חובר על-ידי:
נורית הדס
טטיאנה זסלבסקי

ייעוץ:
אברהם הרכבי

צוות ניסוי:
שרה קירו
ליליה קוט

הדפסה ועריכה במחשב:
אבי טל

שרטוטים:
חגית עפרוני

עצוב גרפי ואיורים:
אגי (רחל) בוקשפן

לתלמיד

הסתברות עוסקת במושגים שניתן למצוא אותם בחיי יום יום בפירסומת, בסקרים, במשחקים שונים וכו'.

בספר תכיר מושגים בהסתברות ותוכל להבין, לבדוק ולבקר פרסומים והערות העושים שימוש בהסתברות.

תוך כדי לימוד הסתברות תכיר דרכי חשיבה שונות מאלה שהורגלת אליהן עד כה בלימוד המתמטיקה. יתכן ותופתע לגלות שלעיתים קרובות חישוב או ניסוי יביאו אותך לתוצאה בלתי צפוייה.

נושאי הלימוד בספר מקיפים את כל הנושאים הכלולים בתכנית הלימודים ברמה של 3 ו 4 יחידות לימוד.

תודתנו נתונה לכיתה י"ב תשנ"ה בבית הספר האיזורי ברנר, בגבעת־ברנר, על שיתוף הפעולה והנכונות שגילו, כאשר למדו מגרסת ניסוי של החוברת, תגובותיהם והערותיהם עזרו לנו רבות, בעיצוב הגירסה הנוכחית.

תוכן העניינים

באור סמלים:

 תרגיל "מפתח" - יש בו ענין הדורש הסבר או דיון.

 עבודה עצמית

 הכנה

 שים לב

 תרגיל אתגר

 סיכום

פרק א'

דרכי ייצוג לחישובי הסתברות

שער ובדוק

השאלות הבאות רומזות באיזה סוג של בעיות נעסוק ביחידת לימוד זו.

1. דני עובד בחנות אחרי הלימודים. בסוף כל יום הוא מקבל על עבודתו 50 ש״ח. ביום בהיר אחד הציע בעל החנות לדני: במקום לשלם לך כל יום 50 ש״ח, נזרוק בכל יום קובית משחק. אם ״יצא״ $\boxed{\cdot}$ תקבל 200 ש״ח, אם יצא מספר אחר של נקודות (שונה מ 1) תקבל 10 ש״ח.

א) מה דעתך, כדאי לדני להסכים? רשום את השערתך ונמק בכתב.

ב) כדי לעזור לדני נערוך ניסוי: זרוק את הקוביה 10 פעמים ורשום כמה פעמים קיבלת $\boxed{\cdot}$.

שמור על התוצאה שקיבלת (מספר הפעמים שהתקבל $\boxed{\cdot}$). תשתמש בתוצאה זו גם בשיעור הבא.

ג) נניח שדני קיבל את הצעת בעל החנות, כמה היה מרוויח ב 10 ימים על פי הניסוי שביצעת?
כמה היה מרוויח ב 10 ימים, אילו קיבל 50 ש״ח בכל אחד מהימים?

ד) איספו את תוצאות הניסוי מהכיתה כולה.
כמה היה דני מרוויח בכל הימים על פי הניסוי של כל הכיתה?
כמה היה מרוויח סה״כ, בכל הימים האלה, אילו קיבל 50 ש״ח בכל יום?

ה) השווה עם ההשערה שרשמת בסעיף א'.

בארבעת התרגילים הבאים (5-2) שער ונמק את השערותיך. בהמשך הלימוד נבדוק השערות אלה.

2. איילת וחגית זרקו כל אחת חמש פעמים קובית משחק רגילה. איילת קיבלה 3 פעמים שש וחגית לא קיבלה שש כלל.
שתיהן עומדות לזרוק את הקוביה פעם נוספת.
איזה סיכוי גדול יותר לדעתך:
- שאיילת תקבל שש?
- שחגית תקבל שש?
- לשתיהן אותו סיכוי לקבל שש? נמק את השערתך.

3. במשפחה שלושה בנים והאם בהריון.
איזה סיכוי גדול יותר לדעתך:
- שיוולד בן?
- שתיוולד בת?
- סיכוי שווה לבן ולבת? נמק את השערתך.

4. זורקים שתי קוביות משחק.
שחקן אחד ינצח אם כל אחת משתי הקוביות תראה אותו מספר. השחקן השני ינצח אם כל קוביה תראה מספר אחר.
איזה שחקן היית בוחר להיות? רשום את בחירתך ונמק.

5. זורקים שתי מטבעות של שקל.
אלכס ינצח אם שתי המטבעות תראנה אותו צד.
ברוך ינצח אם כל מטבע תראה צד אחר.

האם המשחק הוגן?

6. בארץ מסוימת מתכונן המלך הרשע למלחמה עם השכנים. לשם כך זקוק המלך לחיילים רבים ולכן חוקק את החוק הבא: בכל משפחה מותר שתהיה ילדה אחת לכל היותר. לכן, לאחר לידת בת במשפחה, לא נולדו במשפחה זו ילדים נוספים.

א) האם אתה חושב שהמלך הצליח בכוונתו להגדיל את כמות הבנים במדינה ולהקטין את כמות הבנות? רשום ונמק את השערתך.

ב) כדי לבדוק את ההשערה נצא מהנחה ש- $\frac{1}{2}$ ממספר היולדות במדינה בכל שנה, ילדו בנים ו- $\frac{1}{2}$ מהן ילדו בנות.

נניח גם שלא מצטרפות יולדות חדשות לרשימה ונניח שהיו בשנה הראשונה 1000 יולדות. השלם את הטבלה.
אם המספר אינו מתחלק ב-2 חלק בערך.

מספר השנה	מספר הלידות	מספר הבנים שנולדו	מספר הבנות שנולדו
1	*1000*	*500*	*500*
2	*500*	*250*	*250*
3			
4			
.			
.			
.			

ג) האם המלך הצליח בכוונתו להגדיל את כמות הבנים ולהקטין את כמות הבנות?

שכיחות יחסית והסתברות

1. א) 12 תלמידים מכיתה י"1 עברו בחינה במתמטיקה. 15 תלמידים מכיתה י"2 עברו אותה הבחינה.
האם תוכל לקבוע באיזו כיתה ההצלחה גדולה יותר?
ב) בכיתה י"1 סך הכל, 15 תלמידים ובכיתה י"2 30 תלמידים. האם תוכל כעת לקבוע באיזו כיתה ההצלחה גדולה יותר?

2. אבנר ירה חץ למטרה 20 פעם ופגע 15 פעם.
עוזי ירה 30 פעם ופגע 20 פעם.
מי מהם הצליח יותר?

כפי שראית בתרגילים 1 ו 2 לא מספיק לדעת את מספר ה"הצלחות" של ניסוי מסוים. כדי לקבוע איזו תוצאה טובה יותר, צריך לדעת כמה פעמים בוצע הניסוי, ולחשב את היחס בין מספר ההצלחות למספר הניסויים.
יחס זה נקרא **"שכיחות יחסית"**.

3. א) רשום בטבלה (בטור "יחיד") כמה פעמים התקבל ⊡ כשזרקת קוביה בתרגיל 1 בסעיף הקודם.
חשב את היחס בין מספר הפעמים שהתקבל ⊡ למספר הזריקות ורשום בטבלה.
ב) צרף את תוצאותיך לתוצאות שכנך (רשום בטבלה). חשב את היחס המתאים.
צרפו תוצאות של כל הטור (או קבוצה). חשבו את היחס ורישמו בטבלה.
איספו את תוצאות הכיתה כולה, והשלימו את הטבלה.

מספר זריקות	יחיד	זוג	טור או קבוצה	כיתה
מספר פעמים שהתקבל ⊡				
$\frac{\text{מספר פעמים שהתקבל ⊡}}{\text{מספר הזריקות}}$	$\frac{\quad}{10}$	$\frac{\quad}{20}$		

ג) מהו הערך המינימלי ומהו הערך המכסימלי של השכיחות היחסית?

בתרגיל זה הדגמנו את הנטיה של השכיחות היחסית להתקרב למספר מסוים כאשר מספר הניסויים הולך וגדל. כמו כן ראינו, שאם נגדיל עוד ועוד את מספר הניסויים, השכיחות היחסית של הופעת ⚀ כמעט לא תשתנה כלומר, היא ***תתייצב*** *סביב מספר מסוים.*

4. במקרה של הניסוי בתרגיל 3, ניתן היה לשער מה יהיה "המספר" שיתקבל גם **ללא ניסוי** ולהשתמש בו כדי לאמוד מספר תוצאות שמתקבלות.

א) לאיזה מספר מתקרבת השכיחות היחסית של הופעת ⚀ כשזורקים קוביה?

נניח שנזרוק קובית משחק 1000 פעמים.

ב) כמה פעמים **בערך** יופיע על הקוביה ⚀ ?

ג) כמה פעמים **בערך** יופיע על הקוביה ⚂ ?

ד) כמה פעמים **בערך** יופיע על הקוביה מספר זוגי?

> המספר אליו מתקרבת ועליו מתייצבת השכיחות היחסית, כשמספר הניסויים גדֵל, נקרא בשם **ההסתברות** של המאורע.

לעתים ניתן לקבוע מהי ההסתברות ללא ניסוי (כמו בתרגילים 3 ו 4). בסעיפים הבאים תלמד כיצד לעשות זאת. גם במקרים אלה אפשר לבצע ניסוי ולבדוק אם ההסתברות חושבה נכון.

במקרים בהם לא ניתן לקבוע מה ההסתברות, יש לבצע ניסוי (כמו בתרגיל 12 כאן בהמשך) או, לקחת את המידע הדרוש מנתונים שנאספו בעבר (כמו בתרגיל 9 כאן בהמשך).

5. בטבלה מוצגת שכיחות המשכורות של עובדים במפעל.

משכורת חודשית (בש״ח)	1500	1700	2100	2500	3200	7500	9000	150,000
מסי עובדים (שכיחות)	2	4	2	8	5	1	2	1

א) כמה עובדים משתכרים מעל 2000 ש״ח?

שם של עובד נבחר באקראי מרשימת העובדים.

ב) מה ההסתברות שמשכורתו מעל 2000 ש״ח?

ג) מה ההסתברות שמשכורתו מתחת ל 2000 ש״ח?

ד) מה ההסתברות שמשכורתו בין 2000 ש״ח ל 3500 ש״ח?

ה) חשב את סה״כ הסכום שמשלם המפעל בכל חודש למשכורות של עובדיו.

ו) חשב את ממוצע המשכורת במפעל.
האם הממוצע מאפיין את שכר העובדים במפעל?

ז) מה ההסתברות שמשכורתו של עובד תהיה מתחת לממוצע?

6. על קוביית משחק מופיעים רק שני מספרים 1 ו 2.
זרקו את הקוביה 100 פעמים.
63 פעמים התקבל 1 ו 37 פעמים התקבל 2.
על כמה מפיאות הקוביה מופיע המספר 1 ועל כמה פיאות המספר 2?

תרגילים

7. נועה נגשה לשני שלבים של מבחן קבלה.
בשלב הראשון ענתה נכון על 15 מתוך 20 שאלות. בשלב השני ענתה נכון על 24 מתוך 30 שאלות.
א) על איזה חלק מהשאלות ענתה נכון בשלב הראשון? בשני?
ב) באיזה משני השלבים הצליחה נועה יותר?

8. איילת ונועה משחקות בסביבון.
איילת תזכה בנקודה אם הסביבון יראה **פ**, או **ג**, או **ה**, נועה תזכה בנקודה אם הסביבון יראה **נ**.
א) האם אפשר לחזות מי תנצח אם הן תסובבנה את הסביבון פעם אחת?
ב) האם אפשר לחזות מי תנצח אם הן תסובבנה את הסביבון 2000 פעם?
ג) בכמה נקודות **בערך**, אתה מצפה שאיילת תזכה, אם הן תסובבנה את הסביבון 1000 פעמים?

9. בטבלה מופיע אחוז האוכלוסיה לפי קבוצת גיל.

קבוצת גיל	אחוז של אוכלוסיה
0-19.9	40%
20-39.9	30%
40-59.9	17%
60-79.9	11%
80 ויותר	2%

באיזור מסויים גרים 10000 תושבים. על סמך הנתונים שבטבלה, מצא:

– כמה תושבים בערך, צעירים מ-20?
– כמה תושבים בערך, גילם מ 60 ועד 79.9?
– כמה תושבים בערך, גילם מ 60 ומעלה?

10. הטבלה מתארת את שכיחות הגבהים בקבוצה בת 100 תלמידים.

גובה (בס"מ)	183-187.9	178-182.9	173-177.9
מסי תלמידים	20	50	30

תלמיד נבחר באקראי מתוך הקבוצה.

א) מה ההסתברות שגובהו מ 183 ס"מ ומעלה?

ב) מה ההסתברות שגובהו מ 178 ס"מ ומעלה?

ג) מה ההסתברות שגובהו מתחת ל 183 ס"מ?

ד) מה ההסתברות שגובהו מתחת ל 188 ס"מ?

11. בטבלה מוצגת שכיחות המשקלים של קבוצה בת 110 אנשים.

משקל (בק"ג)	60-63.9	56-59.9	52-55.9	48-51.9	44-47.9	40-43.9	36-39.9
שכיחות (מסי אנשים)	3	8	25	33	27	10	4

אדם נבחר באקראי מהקבוצה.

א) מה ההסתברות שמשקלו מ 60 ק"ג ומעלה?

ב) מה ההסתברות שמשקלו מ 52 ק"ג ומעלה?

ג) מה ההסתברות שמשקלו קטן מ 48 ק"ג?

ד) לפי שתי התשובות האחרונות באיזו קבוצה לדעתך, נמצא החציון של הקבוצה?

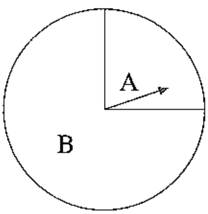
12. אנה עולה חדשה. היא לומדת עברית ובמקרים רבים מתלבטת איזו אות צריך לכתוב במילה, ח׳ או כ׳, יש לה הרגשה שאות ח׳ שכיחה יותר מאשר כ׳ לכן היא כותבת בכל מקרה שאינה יודעת ח׳.
בחר בעיתון מאמר בו כ 20 שורות ורשום את מספר המילים שבהם מופיע ח׳ או כ׳, ואת מספר המילים בהם מופיע ח׳.
חשב השכיחות היחסית של הופעת ח׳.
מה ההסתברות של אנה לטעות אם כתבה ח׳ בכל מקרה?

13. ההסתברות שלאדם יהיה סוג דם A היא 0.4. בודקים 10,000 אנשים.
לכמה מהם בערך, יש סוג דם A?

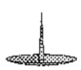
14. בקופסה נמצאים 5 כדורים בשני צבעים. מבצעים את הניסוי הבא 1000 פעמים: מוציאים כדור אחד מבלי להסתכל, רושמים את צבעו ומחזירים אותו לקופסה.
התקבלו התוצאות הבאות: כדור שחור הופיע 756 פעמים.
כדור לבן הופיע 244 פעמים.

האם אפשר לקבוע **בערך**, כמה כדורים לבנים וכמה כדורים שחורים בקופסה?

15. קבע אם **ניתן לדעת** ללא ניסוי, או מידע מצטבר, מהי ההסתברות בכל אחד מהמקרים הבאים.



א) שעון חולק לשני חלקים A ו-B כמשורטט.
סובבו את המחוג.
ההסתברות שהמחוג יפול באיזור A.

ב) כשזורקים נעץ הוא נופל באחת משתי הצורות  או .
ההסתברות שהנעץ יפול בצורה .

ג) ההסתברות לזכות בפרס הגדול בהגרלת פיס.

ד) בקופסה נמצאים עשרה פתקים עם שמות שונים. על אחד מהפתקים רשום רותי. ההסתברות להוציא את הפתק עליו רשום רותי.

קו סיכוי

1. משה זורק קובית משחק רגילה ומתכנן כך:
אם יצא 6, אלך לשחק כדור-רגל.
אם יצא מספר קטן מ 6, אלך לקולנוע.
אם יצא מספר גדול מ 6, אתחיל לעשות שיעורי בית.

רשום ליד כל מאורע אם הוא **יכול** לקרות, חייב לקרות, או בלתי אפשרי.
משה יכין שיעורי בית.
משה יצא מהבית.
משה ילך לקולנוע.

אומרים שמאורע **ודאי** אם הוא יתגשם בוודאות. מאורע **בלתי אפשרי** אם לא יתכן שהוא יתגשם. מאורע **אפשרי** בכל מקרה אחר כלומר, אם יש אפשרות שהוא יתגשם אך אינו חייב להתגשם.

2. שמים בקופסה 3 כדורים אדומים, 3 כדורים לבנים ו 3 כדורים כחולים.
מוציאים מהקופסה בלי להסתכל ארבעה כדורים בזה אחר זה.
(לא מחזירים לאחר כל הוצאה.)
רשום ליד כל מאורע אם הוא בלתי אפשרי, אפשרי, או וודאי.

א) לכל ארבעת הכדורים צבע זהה.

ב) שניים מהכדורים לבנים ושניים אדומים.

ג) לכל אחד מארבעת הכדורים צבע שונה.

ד) בין ארבעת הכדורים אין אף כדור לבן.

ה) לשניים מבין ארבעת הכדורים צבע זהה.

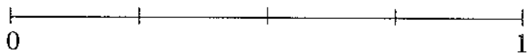
3. כפי שראית בסעיף הקודם השכיחות היחסית, ולכן גם ההסתברות, מקבלת ערכים מ 0 ועד ל 1 .
לאיזה מאורע מתאימה הסתברות 0?
לאיזה מאורע מתאימה הסתברות 1?

בחיי יום יום משתמשים לעיתים במושג "סיכוי" ואומרים משפטים כמו "יש לו סיכוי להצליח במבחן" או "יש לו סיכוי טוב להרוויח". ההסתברות היא למעשה המספר ש"מודד" את הסיכוי הזה.

בסעיף זה נשתמש ***בקו סיכוי*** *כדי לאפיין את ההסתברות, כאשר בנקודה 0 נמצאים מאורעות בלתי אפשריים, ובנקודה 1 נמצאים מאורעות וודאיים.*

4. מיין את המאורעות הבאים וסמן את האות המציינת את הסעיף על קו סיכוי לפי ההסתברות שלו להתגשם. (בחלק מהמקרים יכולות להתקבל תשובות שונות).

קו סיכוי:



א) בן אדם יחיה חודשיים בלי נוזלים.

ב) הליכוד ינצח בבחירות הבאות.

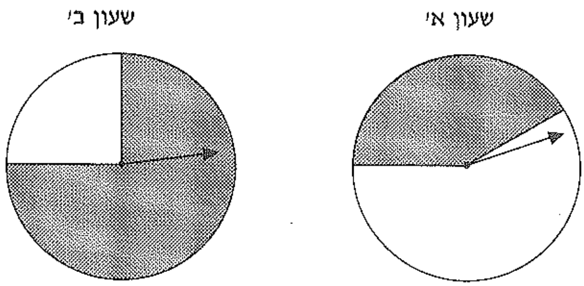
ג) שמים קוביית קרח על השולחן ביום קיץ והיא תימס.

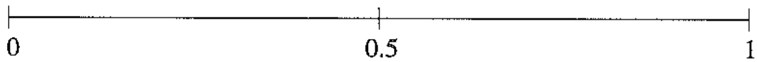
ד) התינוק הבא שיוולד בבית חולים בלינסון יהיה בן.

ה) תקבל 100 במבחן הבא במתמטיקה.

ו) יצא 4 כשתזרוק קובית משחק.

5. מסובבים את המחוג בכל אחד מהשעונים המשורטטים. מצא באיזה משני השעונים ההסתברות שהמחוג יעצור באזור המושחר גבוהה יותר.
סמן בערך, על קו הסיכוי את ההסתברות המתאימה לכל שעון.





6. בקופסה נמצאים 100 פתקים מהם 99 לבנים ו 1 אדום.
אמוד את ההסתברות וסמן בערך, על קו הסיכוי, את אות הסעיף המציינת כל מאורע.

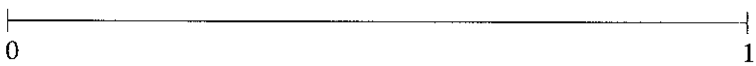
א) להוציא שני פתקים לבנים.

ב) להוציא פתק אדום.

ג) להוציא שני פתקים אדומים.

ד) להוציא פתק אדום ופתק לבן.

ה) להוציא לפחות פתק אחד לבן.



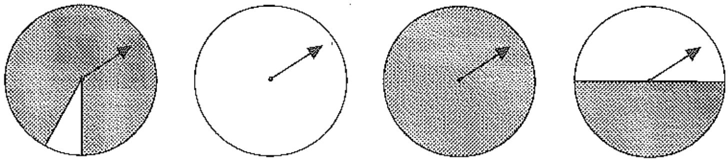
ההסתברות של מאורע בלתי אפשרי שווה ל-0 (סעיף ג׳ בתרגיל 6).
הסתברות של מאורע וודאי שווה ל-1 (סעיף ה׳ בתרגיל 6).
בכל מקרה אחר, הסתברות של מאורע היא בין 0 ל 1 .
כלומר, לכל מאורע A מתקיים: $0 \le$ הסתברות של A ≤ 1 .

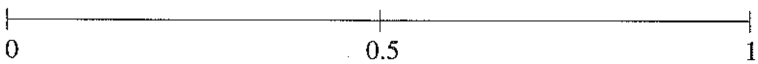
תרגילים

7. מסובבים את מחוגי ה"ישעונים" הבאים ובודקים אם המחוג נעצר באיזור המושחר.

רשום את האות המציינת את הסעיף, במקום המתאים על קו הסיכוי.

א) ב) ג) ד)





8. מטילים מטבע 1000 פעמים.

א) סמן בערך על קו הסיכוי את המאורעות הבאים:

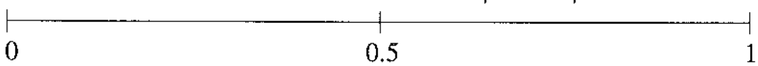
A: יצא 1000 פעמים עץ.

B: יצא 1010 פעמים עץ.

C: יצא עץ יותר מ 450 ופחות מ 550 פעמים.

D: יצא עץ בין 850 ל 950 פעם.

E: לא יצא אף פעם עץ.



ב) לאיזה מהמאורעות הבאים יש סיכוי גדול יותר? נמק.

A: שיצא עץ בין 450 ל 550 פעם.

B: שיצא עץ בדיוק 500 פעם.

9. מסובבים סביבון של חנוכה 100 פעמים (האותיות המופיעות נ, ג, ה, פ).

סמן בערך, על קו הסיכוי את המאורעות הבאים.

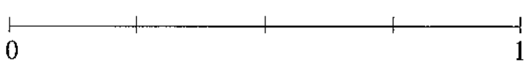
A: יצא 100 פעמים נ.

B: לא יצא אף פעם נ.

C: יצא 110 פעמים נ.

D: יצא נ בין 20 ל 30 פעם.

E: יצא נ בין 80 ל 90 פעם.



תוצאות שוות הסתברות

בסעיפים הקודמים ראית שלפעמים אפשר לקבוע את ההסתברות ללא ניסוי, ובחלק מהמקרים לא ניתן לקבוע מה ההסתברות בדרך זו. כלומר, לעיתים יש הכרח לבצע ניסוי, או לבדוק תוצאות שנאספו בדרך כל שהיא, כדי לקבוע את ההסתברות.

בסעיף זה וברוב הפרק נעסוק בדרכים לחישוב הסתברות במקרים בהם ניתן למצוא הסתברות ללא ניסוי, אך נעזר לעיתים בניסוי כדי לבדוק את החישוב.

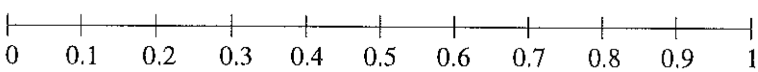
1. בתוך קופסה נמצאים 3 כדורים לבנים, 2 כדורים אדומים ו 5 כדורים כחולים.
מוציאים מבלי להסתכל כדור אחד.
נסה למצוא מה ההסתברות של כל מאורע וסמן את האות המתאימה לסעיף על קו הסיכוי.

א) להוציא כדור לבן.

ב) להוציא כדור אדום.

ג) להוציא כדור כחול.

ד) להוציא כדור ירוק.



לצורך חישוב ההסתברות, בתרגיל 1, חישבת ודאי את היחס בין התוצאות המתאימות למאורע, לבין כל התוצאות האפשריות (למשל בסעיף א' $\frac{3}{10}$).

בתרגילים הבאים, כשנעסוק בהסתברויות הקשורות בזריקת קוביה הכוונה היא (אם לא יצויין אחרת) לקוביה מאוזנת. כלומר, כשזורקים קוביה כזו ההסתברות שהיא תיפול על כל אחת מהפיאות זהה. (באופן דומה כשמדובר בזריקת מטבע, הכוונה למטבע מאוזנת.)

2. זורקים קובית משחק.
חשב את ההסתברות של המאורעות הבאים וסמן את האות "המתאימה" על קו הסיכוי.

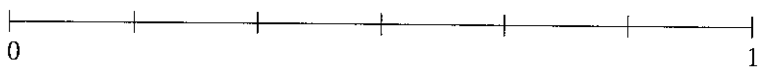
א) יופיע מספר זוגי.

ב) יופיע מספר המתחלק ב 3.

ג) יופיע מספר זוגי המתחלק ב 3.

ד) יופיע מספר קטן מ 7.

ה) יופיע מספר גדול מ 6.



3. ארה"ב כוללת 50 ארצות.

ניצן טוענת: ההסתברות שהנשיא האמריקני הבא יהיה מטקסס היא $\frac{1}{50}$.

האם ניצן צודקת? נמק.

4. נדב ורינה רצו לחשב מה ההסתברות שאם זורקים שתי מטבעות של 5 ו 10 אגורות יחד, על האחת יופיע מספר ועל השניה תופיע תמונה.
נדב רשם את קבוצת התוצאות האפשריות כך:
{על שתי המטבעות מספר, על שתי המטבעות תמונה, על מטבע אחת תמונה ועל האחרת מספר.}
נדב טען שההסתברות שיצא על מטבע אחת מספר ועל האחרת תמונה היא $\frac{1}{3}$.

רינה רשמה את התוצאות האפשריות כך:
(5 , 10) ; (תמונה , תמונה); (10, תמונה); (תמונה, 5)

רינה טענה שההסתברות שיצא על מטבע אחת מספר ועל אחרת תמונה היא $\frac{1}{2}$.

א) מי משניהם צודק לדעתך? נמק.

ב) בדוק בעזרת ניסוי:
זרוק שתי מטבעות 20 פעם ורשום את התוצאות בטור הראשון בטבלה.
לאחר איסוף התוצאות מכל הכיתה, השלם את הטור השני בטבלה.

	יחיד	כיתה
מספר תוצאות שונות. (על מטבע אחת מספר ועל השניה תמונה.)	$\frac{\quad}{20}$	$\overline{\quad}$
מספר תוצאות שוות. (על שתי המטבעות מספר, או על שתיהן תמונה).	$\frac{\quad}{20}$	$\overline{\quad}$

ג) מי משניהם צדק? האם תוכל להסביר מדוע?

הנוסחה: ההסתברות של המאורע A = (מספר תוצאות במאורע A) / (מספר כל התוצאות האפשריות)

משמשת לחישוב הסתברות כאשר ידוע מספר כל התוצאות האפשריות ומספר התוצאות במאורע A, וכאשר לכל תוצאה אפשרית **אותה הסתברות**.

התוצאה (5, תמונה) והתוצאה (תמונה, 10) הן שתי תוצאות שונות ***ולכל אחת מהן*** *אותה ההסתברות כמו לתוצאה (תמונה, תמונה) או לתוצאה (מספר, מספר).*
לכן הסיכוי לתוצאות שונות הוא 2 מתוך 4.
באופן כללי, יש לרשום את כל התוצאות בנפרד, כך שכולן תהיינה שוות הסתברות.

ד) אם נדב ורינה יזרקו שתי מטבעות שוות (של 10 אגורות למשל), האם ההסתברות שעל מטבע אחת יצא מספר ועל השניה תמונה, תשתנה?

ע"ע 5. במשפחה שלושה ילדים:

א) השלם את כל שמונה השלשות האפשריות:

בכור	בינוני	צעיר

(בן, בן, בן) (בן, בן, בת) (בן, בת, בן) ...

ב) חשב את ההסתברות של המאורעות הבאים.

A: הבכור הוא בן.

B: **רק** הבכור הוא בן (והשאר בנות).

ג) בדוק בשלושת המקרים הבאים אם ההסתברויות שוות. אם לא, קבע איזו הסתברות גדולה יותר ונמק.

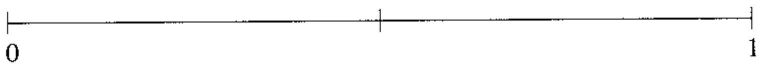
(i) שיהיו במשפחה 2 בנים, או שיהיו במשפחה 3 בנים?

(ii) שיהיו במשפחה 2 בנים, או שיהיה במשפחה בן אחד?

(iii) שיהיו במשפחה לפחות 2 בנים, או לכל היותר 2 בנים?

תרגילים

6. מסובבים סביבון של חנוכה (האותיות המופיעות נ, ג, ה, פ). חשב את ההסתברות ורשום את האות המציינת את הסעיף במקום המתאים על קו הסיכוי.



א) יֵצא נ.

ב) לא יֵצא נ.

ג) יֵצא נ או ג.

ד) יֵצא ש.

ה) לא יֵצא ש.

7. א) נניח כי ההסתברות, שגובהו של גבר בסקנדינביה 1.70 מ' או יותר, היא 0.8 .
אקראי מרשימת העובדים עובד, ששכרו מעל מסוים מקבלים 1.70 מ'?

ב) נניח כי ההסתברות לחלות כתוצאה מאכילת חומוס בישראל היא 0.02 . מה ההסתברות לא לחלות כתוצאה מאכילת חומוס?

ג) במפעל מסוים מקבלים 80% מהעובדים שכר של 4000 ש"ח או פחות. מה ההסתברות לבחור באקראי מרשימת העובדים עובד, ששכרו מעל 4000 ש"ח.

8. זורקים קוביה שעל אחת מפיאותיה מופיע המספר 1.
על שתיים מפיאותיה מופיע המספר 2.
על שלוש הפיאות האחרות מופיע המספר 3.

נועה רשמה את קבוצת התוצאות האפשריות כך: $\{1, 2, 3\}$.
איילת רשמה את קבוצת התוצאות האפשריות כך: $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}$.

א) מי משתי הבנות רשמה באופן המתאים לחישוב הסתברויות? נמק.

ב) מה ההסתברות שיתקבל 2?

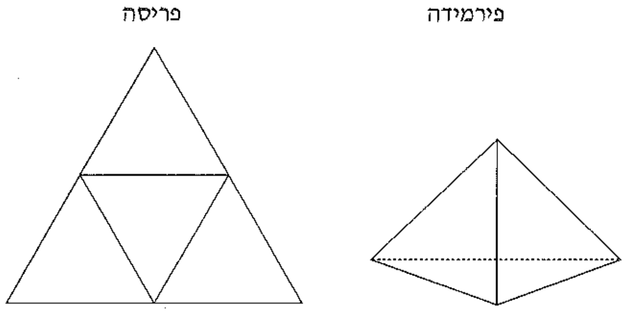
ג) מה ההסתברות שלא יתקבל 2?

9. רושמים על פתקים את המספרים מ 1 עד 40. מניחים את הפתקים בסל, מערבבים ומוציאים מספר מבלי להסתכל.

א) – מה ההסתברות להוציא מספר גדול מ 21?
– מה ההסתברות להוציא מספר קטן מ 30?
– מה ההסתברות להוציא מספר גדול מ 21 וקטן מ 30 ?
– מה ההסתברות להוציא מספר גדול מ 0 ?
– מה ההסתברות להוציא מספר קטן מ 100 ?
– מה ההסתברות להוציא מספר גדול מ 40 ?

ב) מה ההסתברות להוציא מספר המתחלק ב 67?
– מה ההסתברות להוציא מספר המתחלק ב 2?
– מה ההסתברות להוציא מספר המתחלק ב 3?
– מה ההסתברות להוציא מספר המתחלק ב 3 וגם ב 2?

10. לפניך שרטוט פירמידה משולשת משוכללת ופריסה שלה.



א) רשום על הפריסה משמאל:
על אחת הפאות את המספר 1, על שתי פאות את המספר 2, ועל פיאה אחת את המספר 3.

ב) זורקים את הפירמידה ובודקים מה המספר הרשום למטה.
חשב את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:
- הפירמידה תיפול על 1.
- הפירמידה תיפול על מספר גדול מ 1.
- הפירמידה תיפול על 2.
- הפירמידה תיפול על מספר שאינו מתחלק ב 3.

11. זורקים קובית משחק.

א) מה ההסתברות לקבל מספר המתחלק ב 3?

ב) מה ההסתברות לקבל מספר גדול מ 1?

ג) רשום מאורע שההסתברות שלו $\frac{1}{2}$.

ד) רשום מאורע שההסתברות שלו 1 .

ה) רשום מאורע שההסתברות שלו 0.

12. א) מה ההסתברות שבמשפחה בה שני ילדים יהיו שני בנים?

ב) מה ההסתברות שבמשפחה בה שני ילדים לא יהיו בנים?

13. על כל פיאה של קובית משחק רשום אחד המספרים $1, 2, 3$.

א) נתון שההסתברות לקבל $\boxed{2}$ היא $\frac{1}{6}$ וההסתברות לקבל $\boxed{3}$ היא $\frac{1}{3}$.
על כמה פיאות רשום כל אחד מהמספרים?

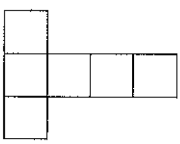
ב) מה ההסתברות לקבל $\boxed{1}$?

14. על כל פיאה של קוביה רשום אחד מהסימנים $*$, ○, △.

האם יתכן שבזריקת הקוביה ההסתברות לקבל $*$ היא $\frac{1}{2}$, לקבל ○
היא $\frac{1}{6}$ וההסתברות לקבל △ היא $\frac{1}{3}$? נמק.

15. על כל פיאה של קוביה רשום אחד מהסימנים $*$ או △.

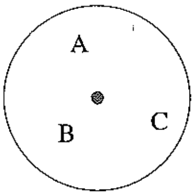
ההסתברות לקבל $*$ היא $\frac{2}{3}$.



א) על כמה פיאות מופיע כל אחד מהסימנים?
רשום על הפריסה משמאל.

ב) מה ההסתברות לקבל △ ?

16. שעון מחולק לשלושה חלקים, לאו דוקא שווים: A, B ו C .
נתון כי ההסתברות שהמחוג המסתובב יעצור ב A
היא 0.2. וההסתברות שהמחוג יעצור ב B היא 0.5 .
מצא מה ההסתברות שהמחוג יעצור ב C .
חלק בערך, את השעון לאזורים לפי ההסתברויות.



17. א) זורקים מטבע **לא מאוזנת**. ההסתברות שיצא עץ היא 0.4. מה ההסתברות שיצא מספר?

ב) זורקים קוביה מאוזנת עליה רשומים המספרים 1, 2, 3 .
ההסתברות שהקוביה תראה 1 היא $\frac{1}{3}$.
ההסתברות שהקוביה תראה 2 היא $\frac{1}{6}$.
– מה ההסתברות שהקוביה תראה 3?
– על כמה פיאות מופיע כל אחד מהמספרים?

18. לכל אדם יש אחד מארבעת סוגי הדם: A, B, AB, O .
ל 40% מהאוכלוסיה סוג דם A, ל 20% סוג דם B ול 5% סוג דם AB .

א) לכמה אחוזים מהאוכלוסיה סוג דם O?

ב) בעלי סוג דם A יכולים לקבל תרומת דם מבעלי סוג דם A או O.
מה ההסתברות, שתורם מקרי יוכל לתרום לפצוע בעל סוג דם A?

ג) בעלי סוג דם B יכול לתרום דם לבעלי סוג דם B ו AB .
מה ההסתברות, שתורם בעל סוג דם B יוכל לתרום דם לפצוע מקרי?

19. אילת, בני, גליה, דן ותילה משתתפים בהגרלה.
שניים מהם יזכו בפרס. קיימים עשרה זוגות אפשריים.

א) רשום את כולם (אות ראשונה).
א, ב   א, ג   ...

ב) מה ההסתברות שאיילת תזכה?

ג) מה ההסתברות ששתי בנות תזכינה?

20. רושמים על פתקים את כל המספרים בני שלוש ספרות **שונות** שניתן לרשום מהספרות 1, 2, 5 ומניחים אותם בסל.

א) רשום את כל המספרים. כמה מספרים קיבלת?
ב) מה ההסתברות, להוציא מבלי להסתכל, מספר המתחלק ב 5?
ג) מה ההסתברות, להוציא מבלי להסתכל, מספר זוגי?
ד) מה ההסתברות, להוציא מבלי להסתכל, מספר המתחלק ב 3?
ה) מה ההסתברות, להוציא מבלי להסתכל, מספר גדול מ 300?
ו) מה ההסתברות, להוציא מבלי להסתכל, מספר קטן מ 500?
ז) מה ההסתברות, להוציא מבלי להסתכל, מספר גדול מ 100?
ח) מה ההסתברות, להוציא מבלי להסתכל, מספר גדול מ 540?

*לצורך פתרון תרגילים דומים לשני האחרונים, צריך תחילה **לחשב** את מספר התוצאות האפשריות ואת מספר התוצאות המתאימות למאורע שבו מדובר. כשמדובר במספר רב של תוצאות יש צורך ללמוד פרק שנקרא בשם קומבינטוריקה. אנו לא נעסוק בו כאן. נחשב הסתברויות במקרים בהם ניתן לרשום במפורש את כל התוצאות האפשריות, כפי שעשינו עד כה, או במקרים בהם ניתן לחשב הסתברויות על סמך נתונים שונים כפי שתראה בסעיפים הבאים.*

רישום כל התוצאות האפשריות וחישוב הסתברויות

1. א) זרקו מטבע של שקל. מהן התוצאות האפשריות?

ב) זרקו מטבע של שקל פעמיים. רשום את כל התוצאות האפשריות (ארבעה זוגות) **ת** - תמונה **מ** - מספר

זריקה I	זריקה II	זריקה I	זריקה II	I	II	I	II
(מ	מ)	(ת	מ)	(	)	(	)

– מה ההסתברות שבשתי הזריקות יתקבל מספר?

– מה ההסתברות שבזריקה **הראשונה** יתקבל מספר ובזריקה **השניה** תתקבל תמונה?

– מה ההסתברות **שבאחת** הזריקות יתקבל מספר ובזריקה **האחרת** תתקבל תמונה?

ג) זרקו מטבע שלוש פעמים. רשום את כל התוצאות האפשריות. (קיימות 8 שלשות).

(מ , מ , מ) (מ , ת , מ) ...

– מה ההסתברות שבשלוש הזריקות יתקבל מספר?

– מה ההסתברות שבשתי הזריקות הראשונות יתקבל מספר ובזריקה השלישית עץ?

– מה ההסתברות שבשתי זריקות **כלשהן** יתקבל מספר ובזריקה האחרת יתקבל עץ?

במקרה שזורקים שתיים או שלוש מטבעות, במקום לזרוק מטבע פעמיים או שלוש פעמים מתקבלות בדיוק אותן תוצאות אפשריות, כמו בסעיפים ב׳ ו ג׳ בתרגיל זה.

בתרגיל 1 רשמת את כל התוצאות האפשריות בשורה: בסעיף א׳ 2 תוצאות בודדות. בסעיף ב׳ 4 זוגות של תוצאות ובסעיף ג׳ 8 שלשות של תוצאות.
*כשיש מספר תוצאות גדול יותר יש צורך בשיטות נוספות ויעילות לרשום את כל התוצאות האפשרויות. כשמדובר **בזוגות** של תוצאות (כמו בסעיף ב׳), אפשר להיעזר בטבלה. בכך עוסקים התרגילים הבאים.*

2. א) זרקו קובית משחק. כמה תוצאות אפשריות קיימות? רשום אותן.

ב) זורקים שתי קוביות משחק, (אדומה ולבנה), האם תוכל לקבוע כמה זוגות של תוצאות אפשריות שוות הסתברות קיימות?

במקרה שיש מספר רב של זוגות. נוח לרשום את התוצאות בטבלה.

ג) השלם את הטבלה.

קוביה לבנה

קוביה אדומה

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)		
⚁						(2,6)
⚂				(3,4)		
⚃		(4,2)				
⚄					(5,5)	
⚅			(6,3)			

ד) כמה תוצאות אפשריות יש? השווה עם תשובתך בסעיף ב'.

ה) חשב בעזרת הטבלה.

– מה ההסתברות לקבל אותו מספר של נקודות על שתי הקוביות?
השווה עם מה שרשמת בסעיף הראשון בתרגיל 4 .

– מה ההסתברות לקבל ⚃ על הקוביה האדומה?

– מה ההסתברות **שלפחות** על אחת הקוביות יתקבל ⚃?

– מה ההסתברות לקבל על הקוביה האדומה מספר **גדול יותר** של נקודות, מאשר על הקוביה הלבנה?

ע"ע 3. א) בתרגיל 1ב' רשמת את התוצאות של זריקת שתי מטבעות כזוגות.
רשום כעת את התוצאות האפשריות בזריקת שתי מטבעות של שקל בטבלה:

I

		1	עץ
II	1		
	עץ		

ב) בסעיף הראשון בתרגיל 5 עמ' 8, עסקנו בשאלה דומה בדוק מה היתה השערתך ואם היא היתה נכונה.

תרגילים

4. שתי חברות, אפרת ודנה משחקות. שתיהן מראות מספר אצבעות בבת אחת. אפרת מנצחת אם סכום האצבעות הוא מספר זוגי, ודנה מנצחת אם סכום האצבעות הוא אי זוגי.

א) האם לדעתך, המשחק הוגן? אם כן, נמק אם לא, למי משתיהן סיכוי גדול יותר לנצח?

ב) השלם את הטבלה ובדוק את השערתך שבסעיף א'.

סכום האצבעות	1	2	3	4	5
1				5	
2			5		
3					
4				8	
5					10

ג) מה ההסתברות של כל אחת מהן לזכות?

ד) במקרים רבים משתמשים ילדים רק ב 4 אצבעות במשחק זה. הסבר מדוע.

ה) האם המשחק הוגן במקרה **שכופלים** את מספרי האצבעות שהילדות מראות? (מדובר בשימוש בכל חמש האצבעות).

5. נועה ואיילת זרקו שתי קוביות רגילות.

נועה מקבלת נקודה אם מתקבל ⚃ ⚃

איילת מקבלת נקודה אם מתקבל ⚃ על אחת הקוביות ו ⚀ על הקוביה האחרת.

א) האם לדעתך המשחק הוגן?

ב) סמן נ במשבצות שמתאימות לנצחון של נועה ו א במשבצות שמתאימות לנצחון של איילת ובדוק את השערתך.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀						
⚁						
⚂						
⚃						
⚄						
⚅						

6. זורקים שתי קוביות משחק רגילות ומחשבים את הסכום.
עודד ינצח אם **הסכום** של הנקודות יהיה זוגי, דניאל ינצח אם **הסכום** של הנקודות יהיה אי זוגי.

א) האם המשחק הוגן? אם כן נמק, אם לא למי סיכוי טוב יותר לנצח?

ב) השלם את הטבלה (רשום את הסכומים).

הסכום	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀						
⚁						
⚂						
⚃						
⚄						
⚅						

ג) האם השערתך בסעיף א' נכונה?

ד) – מה ההסתברות שהסכום של הנקודות יצא 8?
רשום מאורע **שווה** הסתברות לקודם.

– לאיזה סכום הסתברות **גדולה ביותר**? מהי ההסתברות שיתקבל סכום זה?

– לאיזה סכום הסתברות **קטנה ביותר**? האם יש עוד סכום שיש לו אותה הסתברות?

7. זורקים שתי קוביות משחק רגילות ומחשבים את המכפלה. יעל תנצח אם המכפלה של מספר הנקודות זוגית וורד אם המכפלה אי זוגית.

א) שער אם המשחק הוגן. אם כן, נמק אם לא למי סיכוי טוב יותר לנצח?

ב) רשום את כל האפשרויות בטבלה ובדוק את השערתך.

ג) – מה ההסתברות שהמכפלה שתתקבל היא 24?
– מה ההסתברות שהמכפלה שתתקבל היא 9?

ד) – כמה תוצאות **שונות** יכולות להתקבל?
– למי מהמכפלות הסתברות **גדולה ביותר**? מהי ההסתברות?

8. א) רשום את כל האפשרויות של בנים ובנות במשפחה לה שני ילדים.

ב) קבע אם המאורעות שווי הסתברות. אם לא, קבע לאיזה מהם הסתברות גדולה יותר.
– שני בנים לעומת בן ובת.
– שני בנים לעומת שתי בנות.
– הבכור בן והצעירה בת, לעומת הבכורה בת והצעיר בן.
– הבכור בן והצעירה בת, לעומת בן ובת במשפחה.

9. זורקים שתי קוביות רגילות ורושמים את המספר הגדול יותר (אם על שתי הקוביות אותו מספר רושמים מספר זה).

א) רשום בטבלה כל התוצאות האפשריות.

הגדול מבין השניים	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

ב) – מה ההסתברות שהגדול משני המספרים שעל הקוביות יהיה 6?

– מה ההסתברות שהגדול משני המספרים שעל הקוביות יהיה זוגי?

– מה ההסתברות שהגדול משני המספרים שעל הקוביות יהיה קטן מ 4?

"מאורעות משולבים" – מטבלה לריבוע שטח

1. בתוך קופסא נמצאים 20 פתקים עליהם רשומים המספרים מ 11 ועד 30.
(מספר אחד על כל פתק.)

א) – מה ההסתברות להוציא מספר המתחלק ב 3?
– מה ההסתברות להוציא מספר זוגי?

– מה ההסתברות להוציא מספר המקיים את שתי הדרישות הנ"ל? (מתחלק ב 3 וזוגי.) רשום את המספרים וסמן את אלו המתאימים לדרישה.

– מה ההסתברות להוציא מספר המקיים **לפחות** אחת משתי הדרישות? כלומר, מתחלק ב 3, או זוגי, או שניהם? (רשום את המספרים וסמן את אלו המתאימים לדרישה.)

ב) מה ההסתברות להוציא מספר המסתיים ב 2?
מה ההסתברות להוציא מספר המתחלק ב 5?
מה ההסתברות להוציא מספר המקיים את שתי הדרישות הנ"ל?
מה ההסתברות להוציא מספר המקיים **לפחות** אחת משתי הדרישות?

*עד לתחילת סעיף זה עסקת בחישובי הסתברויות של כל מאורע בנפרד. בתרגיל 1 נזכר לראשונה **שילוב** של שני מאורעות: "מתחלק ב 3 **וגם** זוגי", "מתחלק ב 3 **או** זוגי". בתרגיל זה אפשר היה לחשב הסתברויות על סמך רישום בשורה של כל התוצאות האפשריות. בהמשך סעיף זה תלמד כיצד לייצג מאורעות משולבים במקרים מורכבים יותר.*

ע״ע 2. זרקו שתי קוביות. צבע משבצות המתאימות למאורע ״בזריקת קוביה I יצא מספר זוגי של נקודות״.

I

	2	4	6	1	3	5
II 2						
4						
6						
1						
3						
5						

א) צבע, בצבע שונה, משבצות המתאימות למאורע ״בזריקת הקוביה I יצא מספר זוגי של נקודות״.

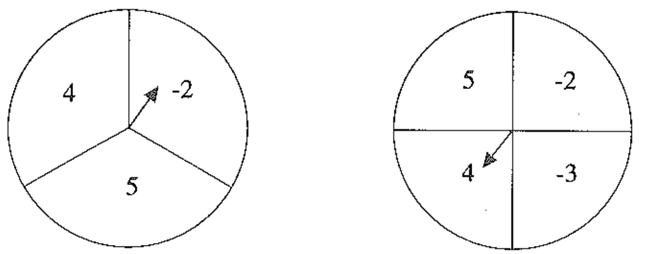
ב) – כמה משבצות צבועות בשני הצבעים?
– מה ההסתברות לקבל בשתי הקוביות מספר זוגי?
– מה ההסתברות לקבל בקוביה אחת מספר זוגי ובאחרת אי זוגי של נקודות?
(סמן משבצות מתאימות בטבלה).
– מה ההסתברות לקבל בשתי הקוביות מספר אי זוגי של נקודות?

המספרים בראש הטבלה, מסודרים באופן שמדגיש את האזורים המתאימים לכל מאורע אליו מתיחסים בתרגיל.

בשני התרגילים הבאים תלמד לייעל את הטבלה, כך שתוכל להתאים לרישום תוצאות אפשריות במקרים בהם ההסתברות של התוצאות אינה שווה.

3. מסובבים את המחוגים של שני ה"שעונים" המשורטטים. עד שהם נעצרים.

II I



יעל מנצחת אם מכפלת שני המספרים שמורים המחוגים היא חיובית. ורד מנצחת אם מכפלת המספרים שמורים המחוגים היא שלילית. (כל שעון מחולק לחלקים שווים.)

א) האם המשחק נראה הוגן?

ב) השלם טבלה מתאימה.

I

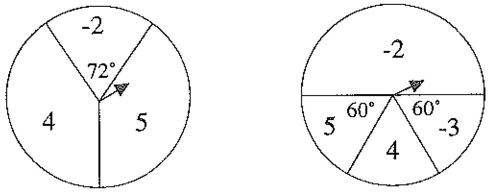
II

מכפלה	-2	-3	4	5
-2				
4				
5				

ג) חשב את ההסתברות של יעל לנצח.
חשב את ההסתברות של ורד לנצח.
האם המשחק הוגן?

4. לפניך שני "שעונים" אחרים, עם אותם מספרים כמו בשאלה הקודמת. מסובבים את המחוגים של שני ה"שעונים" האלה.

II I



כדי לחשב הסתברויות ולבדוק את הגינות המשחק הפעם, יש לחלק את הטבלה **יחסית לגודל** השטח המתאים לכל מספר.

א) הדגש קווי חלוקה אנכיים (מלמעלה למטה) כך שתקבל חלוקה של הריבוע לפי שעון I .

I

			-2			-3	4	5
	-2							
II	4							
	5							

ב) הדגש קווי חלוקה אופקיים שיתאימו לשעון ב' .

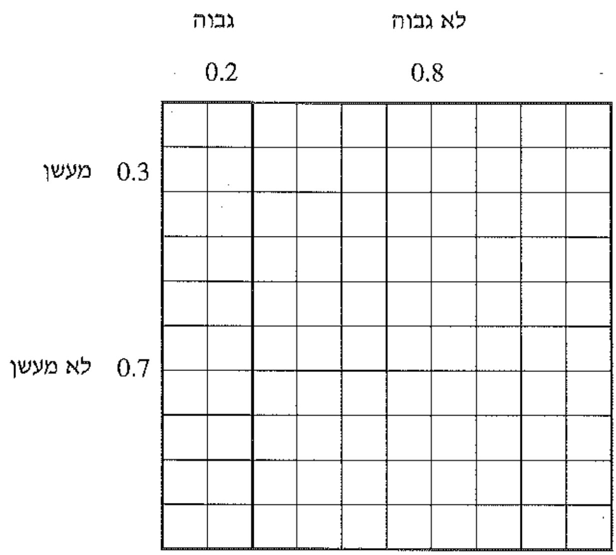
ג) צבע את השטחים המתאימים לניצחון של יעל (מכפלה חיובית) וחשב את ההסתברות שלה לנצח.

ד) מה ההסתברות של ורד לנצח? האם המשחק הוגן?

בתרגיל האחרון הכרת למעשה את "מודל השטח". מודל זה יעיל לחישוב הסתברויות גם במקרים בהם לא ניתן לרשום את כל התוצאות האפשריות במפורש, אלא רק לייצג את ההסתברויות שלהן, כפי שתראה בתרגיל הבא.

5. ההסתברות לפגוש אדם מעשן בעיר "סרטן סיטי" היא 0.3 . ההסתברות לפגוש אדם שגובהו יותר ממטר ושמונים בעיר הנ"ל, היא 0.2 . (גבוהים כאן פירושו גובהם מעל 1.80).
נניח שאחוז המעשנים מבין הגבוהים הוא כמו באוכלוסיה כולה.

לשם חישוב ניעזר בריבוע המשורטט. נניח שהריבוע מתאר את כל האוכלוסיה.
לפניך חלוקה של הריבוע לפי ההסתברות לפגוש אדם גבוה, (הקו "האנכי").



ב) סמן חלוקה נוספת בעזרת קו אופקי - לפי מעשנים ולא מעשנים.

ג) - צבע את השטח המתאים לאנשים הגבוהים וגם מעשנים, ורשום בתוכו גבוהים ומעשנים.
- איזה חלק הוא מהווה משטח הריבוע כולו? (אפשר לספור משבצות).

- מה ההסתברות לפגוש אדם מעשן גבוה?

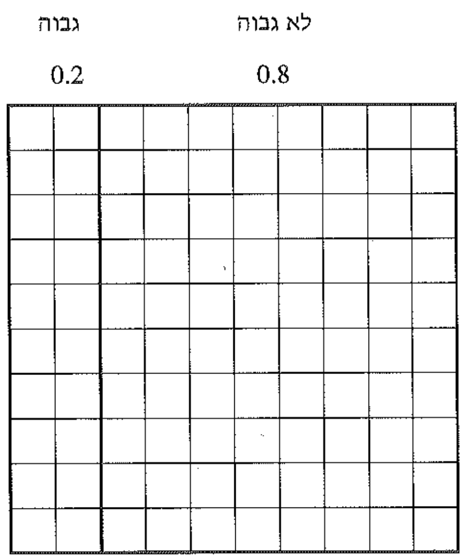
ד) - צבע שטח המתאים לאנשים שאינם גבוהים וגם אינם מעשנים, ורשום בתוכו לא גבוהים ולא מעשנים.
- מה ההסתברות לפגוש אדם שאינו גבוה וגם אינו מעשן?

ה) האם המאורעות בהם עסקת בסעיפים ג' ו ד' "משלימים זה את זה" לקבוצת כל התוצאות האפשריות? נמק.

ו) רוצים למצוא את ההסתברות לפגוש אדם המקיים לפחות אחת משתי הדרישות: הוא גבוה או מעשן.
- הקף את השטח המתאים בריבוע השטח.
- האם נכון לחבר $0.3 + 0.2$? אם כן, נמק. אם לא, נמק על ידי חישוב.

6. ההסתברות לפגוש בעיר מסויימת אדם שגובהו מעל מטר ושמונים היא 0.2. וההסתברות לפגוש שחקן כדורסל היא 0.02 .
למטה נמצא, שוב, הריבוע משאלה 5, עם החלוקה לגבוהים ולא גבוהים.

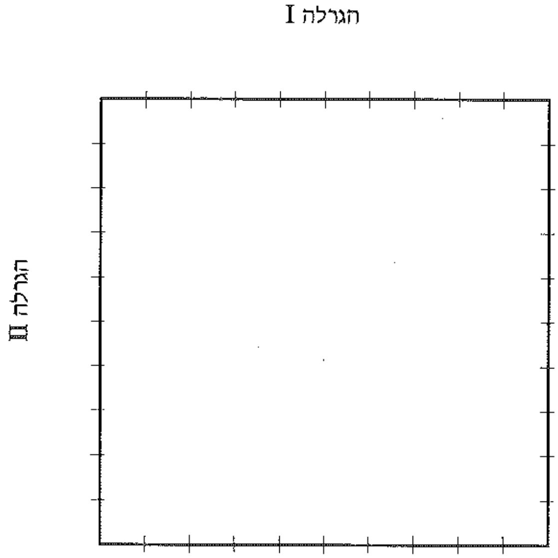
- האם נכון לחלק את הריבוע על ידי העברת קו אופקי דרך 0.02 כדי למצוא את האנשים הגבוהים שהם גם שחקני כדורסל?
- אם מעבירים קו כזה מה פירושו?



בסעיף הבא תעסוק שוב בשאלה זו, אך יופיעו בה נתונים נוספים כך שתוכל לחשב הסתברויות.

ע"ע 7. לצורך עידוד מכירות במרכז קניות גדול ערכו שתי הגרלות.
בהגרלה הראשונה זכו 10% מהקונים, שנבחרו באופן מקרי על ידי דיילים.
בהגרלה השניה זכו בעת התשלום 20% מהקונים.

א) – העבר קו אנכי המחלק את הריבוע לזוכים/לא זוכים בהגרלה ראשונה.



– העבר קו אופקי המחלק את הריבוע לזוכים/לא זוכים בהגרלה השנייה בעת התשלום.
– רשום, בכל מלבן, את המאורע המתאים לו (למשל, "זכו בשתי הגרלות").

ב) מה ההסתברות שקונה יזכה בשתי ההגרלות גם יחד? (סמן שטח מתאים.)

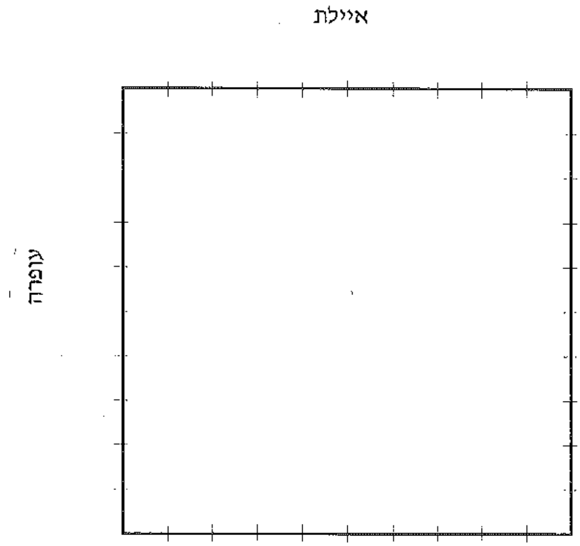
ג) מה ההסתברות שקונה לא יזכה כלל? (סמן את השטח המתאים.)

ד) רשום מאורע המשלים את המאורע שבסעיף ג' לכל התוצאות האפשריות.

כדי למצוא מספר משבצות בכל מלבן, אין צורך לספור את כולן. אפשר, במקום לספור, לכפול את אורכי הצלעות של המלבן. למעשה מחשבים בצורה כזו, את שטח המלבן במשבצות ריבועיות.

8. עפרה ואיילת יורות חץ למטרה.
ההסתברות שעפרה תפגע במטרה היא 0.3.
ההסתברות שאיילת תפגע במטרה היא 0.5.

א) חלק את הריבוע בעזרת קווים אופקיים ואנכיים, לפי ההסתברות של כל אחת מהן לפגוע או לא לפגוע. (תוכל לרשום בכל מלבן את המאורע המתאים).



ב) מה ההסתברות, ששתיהן גם יחד תפגענה במטרה?

ג) מה ההסתברות, ששתיהן **לא** תפגענה במטרה?

ד) המאורעות הרשומים בסעיפים ב׳ ו ג׳ אינם משלימים לכל התוצאות האפשריות, נמק.

ה) סמן ב $\sqrt{}$ את המלבנים המתאימים למאורע "**לפחות** אחת משתיהן תפגע במטרה". מה ההסתברות של מאורע זה?
- איזה, מהמאורעות הקודמים שחישבת, משלים מאורע זה לכל התוצאות האפשריות.

(תוכל לפתור תרגילים 13, 14 מהתרגילים).

9. ההסתברות שיעל תפגע במטרה ביריה אחת היא 0.5. יעל יורה פעמיים.

א) שרטט ריבוע וחלק אותו, (2 חלוקות) לפי ההסתברות לפגוע ולא לפגוע בכל יריה.

ב) מה ההסתברות שיעל תפגע **פעמיים** במטרה?

ג) מה ההסתברות שיעל תפגע **לפחות פעם אחת** במטרה? (סמן תחילה את המלבנים המתאימים.)

ד) מה ההסתברות שהיא **לא תפגע כלל** במטרה?

ה) מה ההסתברות שהיא תפגע **לכל היותר** פעם אחת במטרה? (סמן תחילה את המתלבנים המתאימים.)

ריבוע השטח עוזר לחישוב הסתברויות כשמדובר בניסוי או במשחק בו יש שני שלבים: 2 קלעים יורים למטרה או קלע יורה פעמיים, זריקת 2 קוביות או זריקה של קוביה אחת פעמיים. זריקת מטבע פעמיים, או זריקת שתי מטבעות וכו'.

10. במבצע הגרלות ניתן לזכות בקלטת וידאו או בקלטת לטייפ.
ההסתברות לזכות בקלטת וידאו היא 0.1 ובקלטת לטייפ 0.2 .
אבנר קנה שני כרטיסי הגרלה.

א) שרטט ריבוע וחלק אותו בהתאם (כל צלע ל 3 חלקים).

ב) מה ההסתברות שאבנר יזכה בקלטת וידאו וגם בקלטת לטייפ?

ג) מה ההסתברות שלא יזכה כלל?

ד) מה ההסתברות שיזכה לפחות בקלטת אחת? (סמן את המלבנים המתאימים).

ה) מה סכום ההסתברויות שחישבת בסעיפים ג' וד' נמק.

11. אדם השתתף פעמיים בהגרלה, ידוע שההסתברות שהוא יזכה לפחות פעם אחת היא 0.78.
מה ההסתברות שהוא לא יזכה כלל.

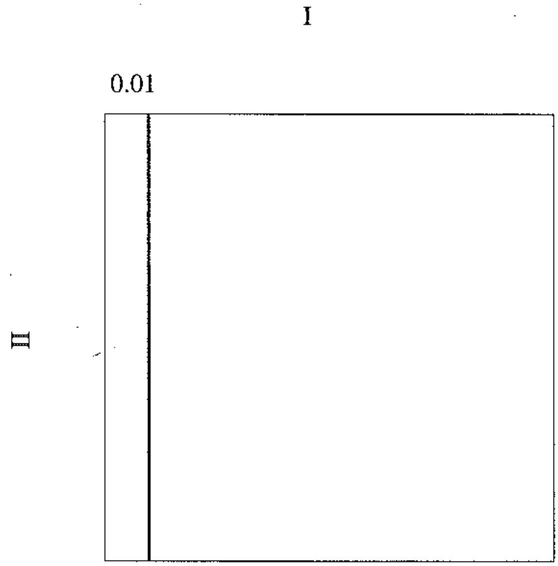
(תוכל לפתור את תרגילים 15, 16 ו 17 שבתרגילים.)

12. לשם הבטחת פעולתה התקינה של מכונה הותקנו שני מנגנוני בטיחות.

הראשון **איננו** פועל כהלכה ב-1% של המקרים והשני **איננו** פועל כהלכה ב-2% מהמקרים.

קשה לחלק את הריבוע לפי ההסתברויות מאחר והן קטנות מאד בערכן.
אך אפשר להעביר קווי חלוקה "מדגימים", ללא קנה מידה, לרשום את החלק, ולהיעזר בכך לחישוב.

א) חלוקה אחת משורטטת, השלם את החלוקה השניה של הריבוע.



ב) צבע שטח המתאים למאורע: "שני המנגנונים לא יפעלו".

ג) מה ההסתברות, שלמרות שני מנגנוני הבטיחות, תקרה תקלה?

תרגילים

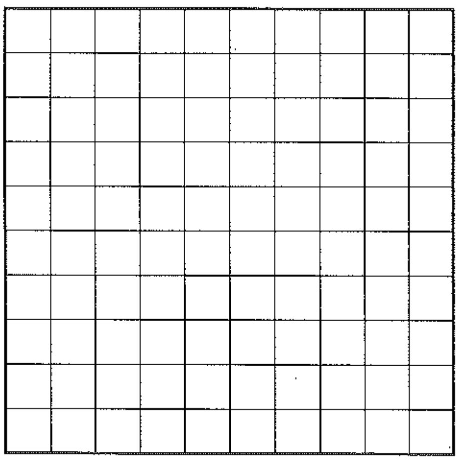
בכל פעם שאתה מחשב הסתברות, סמן תחילה את השטח המתאים בריבוע השטח.

13. לשחקן כדורסל יש סיכוי של 70% לקלוע לסל ו 30% להחטיא. השחקן ניסה לזרוק לסל פעמיים.

א) חלק את הריבוע על פי הנתונים.

זריקה I

זריקה II



ב) מה ההסתברות שהוא לא יקלע כלל?

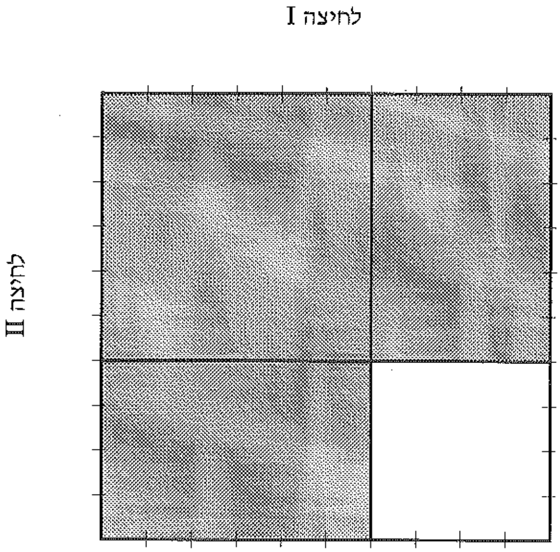
ג) מה ההסתברות שהוא יקלע בדיוק פעם אחת? (סמן תחילה את השטחים המתאימים.)

ד) מה ההסתברות שהוא יקלע **לפחות** פעם אחת?

ה) מה ההסתברות שהוא יקלע **לכל היותר** פעם אחת?

14. במכונת משחק לחיצה על הידית מוציאה מספר.
כל שחקן לוחץ על הידית פעמיים.
ההסתברות להוציא מספר זוגי היא 0.6 .

א) רשום על הצלעות "זוגי ואי זוגי" בהתאם.
– רשום בכל מלבן את המאורע המתאים.



ב) רשום איזה מאורע מתואר בשטח הצבוע וחשב את הסתברותו.

ג) רשום איזה מאורע מתואר בשטח שאינו צבוע וחשב את הסתברותו.

15. כד מכיל 10 כדורים: 6 אדומים ו 4 כחולים.
א) - מה ההסתברות להוציא מהכד כדור אדום?
- מה ההסתברות להוציא מהכד כדור כחול?

גלעד מוציא כדור ומחזירו, ומוציא כדור שני.

ב) שרטט ריבוע וחלק אותו על פי ההסתברות.

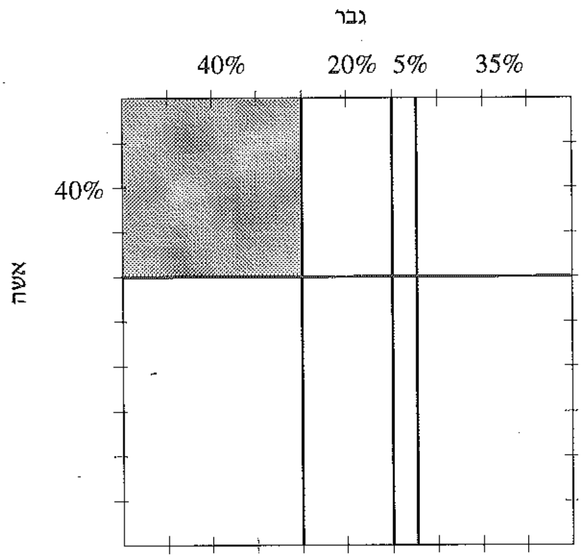
ג) מה ההסתברות שיוציא:
– שני כדורים אדומים?
– שני כדורים כחולים?
– כדור אחד כחול וכדור אחד אדום (לא משנה איזה משני הצבעים הוצא קודם)?

16. בשק אחד 3 כדורים אדומים ו 7 כדורים לבנים.
בשק שני 5 כדורים אדומים ו 5 כדורים לבנים.
מוציאים כדור מכל שק.
א) בנה ריבוע שטח מתאים.
ב) מה ההסתברות להוציא שני כדורים אדומים?
ג) מה ההסתברות להוציא **לפחות** כדור אחד אדום?
ד) מה ההסתברות להוציא **לכל היותר** כדור אחד אדום?

17. התפלגות האוכלוסיה בארץ ל 4 קבוצות דם היא:
(אין הבדל בין נשים וגברים)

A – 40%	AB – 5%
B – 20%	O – 35%

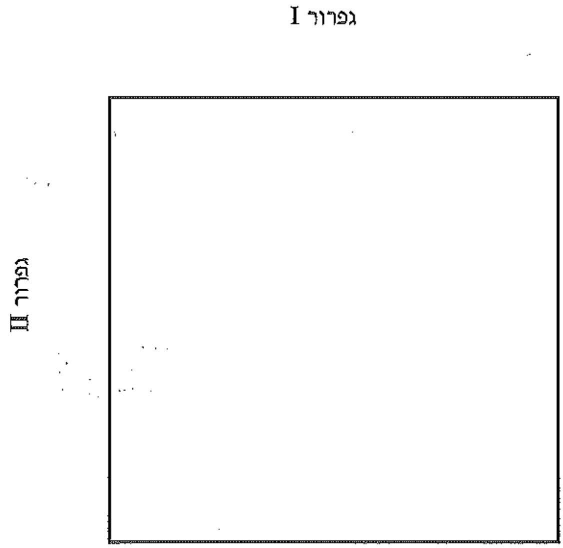
א) בוחרים באקראי "זוג נשוי".
השלם את החלוקה השנייה של הריבוע (קווי חלוקה "מדגימים").



ב) רשום איזה מאורע מתואר במלבן הצבוע וחשב את הסתברותו.
ג) צבע מלבן המתאים למאורע: "סוג הדם של האישה B וסוג הדם של הגבר AB" וחשב את הסתברותו.
ד) חשב את ההסתברות שלשניהם **אותו** סוג דם.
ה) חשב את ההסתברות שלשניהם סוג דם שונה.

18. בדקו ומצאו ש 1% (0.01) מהגפרורים בביח״ר ״אֶשקל״ יוצאים פגומים.

א) חלק את הריבוע חלוקה מדגימה.



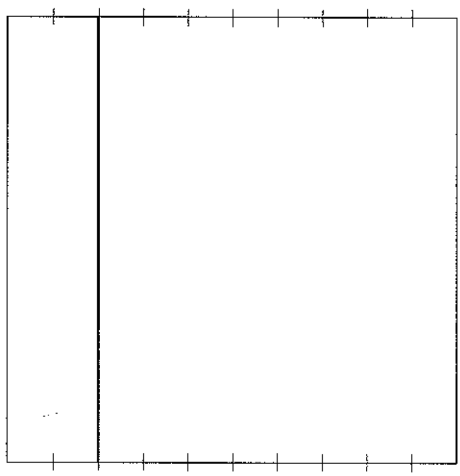
ב) מוציאים שני גפרורים לבדיקה.

- מה ההסתברות ששניהם יהיו פגומים?
- מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם יהיה תקין?
- מה ההסתברות שלפחות אחד מהם יהיה תקין?

עוד על ריבוע שטח

באחד הסעיפים הקודמים עסקת בתרגיל הראשון המופיע כאן. כעת נוסיף נתונים ונדון בפתרון בעיות מסוג זה.

1. א) ההסתברות לפגוש בעיר מסויימת אדם שגובהו מעל מטר ושמונים היא 0.2. וההסתברות לפגוש שחקן כדורסל היא 0.02.
- האם נכון לחלק את הריבוע על ידי העברת קו אופקי דרך 0.02, כדי למצוא את האנשים הגבוהים, שהם גם שחקני כדורסל?
- אם מעבירים קו כזה מה פירושו?



ב) ידוע כי 0.08 מהגבוהים, בעיר זו, הם שחקני כדורסל.
- חלק את המלבן המתאים, חלוקה מדגימה. ידוע גם כי 0.005 מאלה שאינם גבוהים בעיר זאת הם שחקני כדורסל.
- חלק את המלבן המתאים, חלוקה מדגימה.

ג) - מה הסתברות לפגוש, בעיר זו אדם גבוה שהוא גם שחקן כדורסל?
- מה ההסתברות לפגוש, בעיר זו, אדם שאינו גבוה והוא שחקן כדורסל?
- מה ההסתברות לפגוש בעיר זו שחקן כדורסל?

האם התשובה שקיבלת מתאימה לנתון שבסעיף א'?

2. ההסתברות שקלע יפגע במטרה ביריה הראשונה היא 0.8 .

א) שרטט ריבוע וחלק אותו "לפגע ולא פגע" ביריה הראשונה.

ב) ההסתברות לפגוע ביריה השניה תלויה בהצלחתו ביריה הראשונה:

- אם פגע ביריה הראשונה, ההסתברות היא 0.9. חלק את המלבן המתאים לפגע ולא פגע ביריה השניה.
- אם לא פגע ביריה הראשונה, ההסתברות שיפגע ביריה השניה יורדת ל 0.7. חלק את המלבן המתאים בהתאם לנתון זה.

ג) מה ההסתברות שהקלע יפגע בשתי היריות?

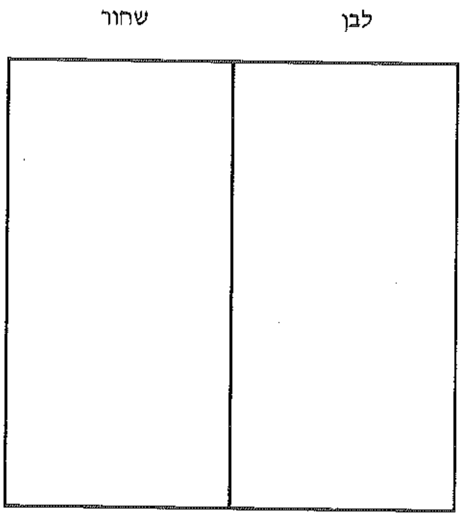
ד) מה ההסתברות שהקלע יפגע **בדיוק** פעם אחת? (סמן מלבנים מתאימים.)

ה) מה ההסתברות שיפגע **לפחות** פעם אחת? (סמן מלבנים מתאימים.)

ו) מה ההסתברות שיפגע **לכל היותר** פעם אחת? (סמן מלבנים מתאימים.)

3. בכד נמצאים 5 כדורים לבנים ו 5 כדורים שחורים.

מוציאים מהכד כדור ראשון מבלי להסתכל ואחר כך כדור שני. חלוקה ראשונה משורטטת.



קבע, בכל מקרה, אם בחלוקה השניה מחלקים את שני המלבנים באותו אופן. כלומר, אם הקו האופקי מועבר באותו גובה או לא:

א) כאשר **מחזירים** את הכדור הראשון ומוציאים פעם השניה.

ב) כאשר **לא מחזורים** את הכדור הראשון ומוציאים פעם שניה.

4. (ע"ע) כל חודש בודקים כינים בגן "הדרדסים".

א) בחודש תשרי מצאו כינים אצל 30% מהילדים.
ההסתברות למצוא כינים בחודש חשוון, אצל ילד שמצאו אצלו כינים בחודש תשרי, היא 0.4.
ההסתברות למצוא כינים בחודש חשוון, אצל ילד שלא מצאו אצלו כינים בחודש תשרי, היא 0.2.
שרטט ריבוע שטח.
חלק חלוקה ראשונה על פי חודש תשרי, וכל מלבן שנוצר, חלק על פי הנתונים לגבי חודש חשוון.

ב) מה ההסתברות למצוא כינים, אצל ילד שנבחר באקראי בחודש חשוון?

5. ההסתברות לזכות במשחק במכונה היא 0.3 . מי שזוכה במשחק הראשון משחק פעם נוספת, ורק אם הוא זוכה גם במשחק השני הוא מקבל פרס.

א) שרטט ריבוע שטח וחלק בהתאם לנתונים.

ב) סמן שטחים שמתאימים **לאי זכיה**, מה ההסתברות לקבל פרס?

בדוק! אם לא טעית, רק אחד מהמלבנים שנוצרו בחלוקה הראשונה, חולק בחלוקה השניה.

תרגילים

6. בשדה כותנה משתמשים בחומר מסוים נגד מזיקים.
ההסתברות שהריסוס הראשון יעזור היא 0.7.

א) שרטט ריבוע וחלק על פי הנתון.

ב) אם נשארו מזיקים בשדה משתמשים בתכשיר אחר שמנקה את השדה מהמזיקים ב 0.4 מהמקרים. חלק את המלבן המתאים.

ג) מה ההסתברות שהתכשיר הראשון לא יועיל והשני כן?

ד) מה ההסתברות ששני התכשירים לא יועילו? (סמן שטח מתאים).

7. חנות "הזמן הנכון" פרסמה את המודעה הבאה.

א) שרטט ריבוע שטח וחלק אותו על פי הנתונים לזכות בפרס.

ב) מה ההסתברות לקנות שעון ולזכות בפרס?

8. בשק נמצאים 10 כדורים: 4 לבנים ו 6 כחולים.

א) מוציאום כדור אחד מבלי להסתכל.

שרטט ריבוע וחלק חלוקה ראשונה, על פי הנתונים.

ב) נניח שהכדור שיוצא יהיה לבן. כמה כדורים ישארו בשק וכמה מהם לבנים?

מוציאים כדור נוסף. חלק את המלבן המתאים.

ג) נניח שהכדור הראשון שיוצא יהיה **אדום**. חלק את המלבן המתאים.

ד) מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו לבנים?

ה) מה ההסתברות שלשני הכדורים שיוצאו אותו צבע?

9. בשק נמצאים כדורים לבנים ושחורים.

מוציאים שני כדורים. ההסתברות להוציא שני כדורים להם אותו צבע הוא 0.51.

מה ההסתברות להוציא שני כדורים להם צבעים שונים?

מציאת P

1. במבצע מסויים ניתן לזכות בשתי הגרלות. ההסתברות לזכות בראשונה מיוצגת על ידי P.

א) מה ההסתברות של משתתף לא לזכות בהגרלה?

ב) שרטט ריבוע וחלק חלוקה מדגימה ראשונה.

ג) ההסתברות לזכות בהגרלה השניה היא 0.2.
חלק חלוקה שניה.

ד) ההסתברות לזכות בשתי ההגרלות היא 0.15.
רשום בתוך המלבן המתאים 0.15 וחשב את צלע המלבן שאורכה לא ידוע.
מה ההסתברות לזכות בהגרלה הראשונה (p) ?

ה) מה ההסתברות לא לזכות כלל?

2. ההסתברות של יעל לפגוע במטרה ביריה בודדת מיוצגת על ידי p.
יעל יורה למטרה פעמיים.
שרטט ריבוע וחלק שתי חלוקות מדגימות.

א) סמן שטחים המתאימים למאורע: "יעל תפגע בדיוק פעם אחת".

ב) ההסתברות שיעל תפגע בדיוק פעם אחת היא 0.32.
רשום משוואה מתאימה וחשב את p.

ג) מה ההסתברות שיעל תפגע **לפחות** פעם אחת?

3. יורם ויוסי יורים למטרה פעם אחת.
ההסתברות של יורם לפגוע במטרה ביריה אחת היא 0.8 .
ההסתברות שיוסי יפגע במטרה ביריה אחת מסומנת ב p .

א) שרטט וחלק ריבוע בהתאם.

ב) סמן מלבנים המתאימים למאורע: "אחד יפגע והשני יחטיא" ובטא את שטחם בעזרת p.

ג) ידוע שההסתברות שאחד יפגע והשני יחטיא היא 0.38 .
רשום משוואה ומצא את ההסתברות של יוסי לפגוע ביריה בודדת.

תרגילים

4. 0.6 מהאוכלוסיה קיבלו זריקת חיסון נגד שפעת.
ההסתברות של אדם, שקיבל זריקה, לחלות בשפעת מיוצגת על ידי p.
ההסתברות של אדם, שלא קיבל זריקה, לחלות בשפעת היא 0.3.
א) שרטט ריבוע וחלק חלוקות מתאימות.
ב) ההסתברות, שאדם שנבחר באקראי, קיבל זריקה וחלה בשפעת היא 0.06. רשום במלבן המתאים.
רשום משוואה מתאימה וחשב את p.
ג) מה ההסתברות, שאדם שנבחר באקראי, **לא** קיבל זריקת חיסון **ולא** חלה בשפעת?
ד) מה ההסתברות, שאדם שנבחר באקראי, חלה בשפעת?

5. ההסתברות שריסוס נגד נמלים של החברה "אַנְטִיחַרַק", ינקה את הבית מנמלים, מיוצגת על ידי p.
א) שרטט ריבוע וחלק חלוקה עבור ריסוס אחד.
ב) אם ריסוס אחד לא מועיל מבצעת החברה, ריסוס נוסף.
חלק את המלבן המתאים חלוקה שניה וסמן שטח המתאים "לשני הריסוסים לא יועילו".
ג) ידוע כי ההסתברות ששני ריסוסים לא יועילו היא 0.01, חשב את p.

ריבוע שטח ושאלות מהחיים...

1. לפי דיווחי המורים 0.7 מהתלמידים שנבחנו במבחן ארצי במתימטיקה **ידעו** היטב את החומר. 0.8 מאלה, שלפי הדיווחים הנ״ל, **ידעו** את החומר הצליחו במבחן והשאר נכשלו. 0.3 מאלה, שלפי הדיווחים, **לא ידעו** את החומר הצליחו במבחן והשאר נכשלו.

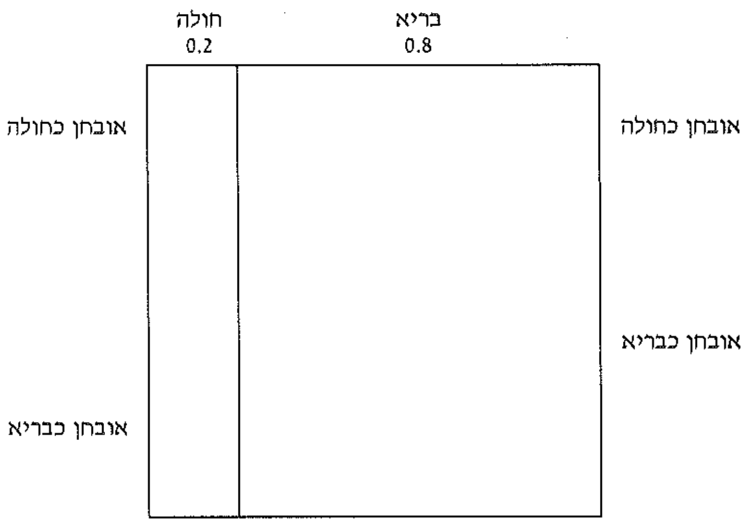
א) שרטט ריבוע שטח מתאים.

ב) - סמן מלבנים המייצגים את אלה **שלא הצליחו** במבחן.

- איזה חלק מאלה **שלא הצליחו** בעצם **יודעים** את החומר לפי דיווחי המורים?

2. שכיחותה של מחלה באפריקה היא 20%.
ההסתברות שבדיקה מסוימת לאבחון המחלה תגלה אותה אצל אדם חולה היא 0.9. ההסתברות, שהיא תאבחן אדם בריא כחולה, היא 0.2.

א) השלם את ריבוע השטח.



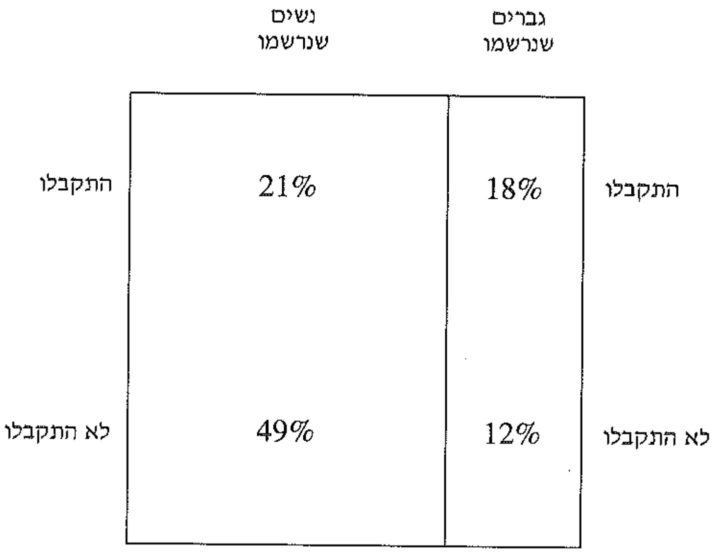
ב) - סמן מלבנים המתאימים למאורע ״אובחן כחולה״, ורשום בתוכם הסתברויות.

- מה ההסתברות שאדם שאובחן כחולה (שהבדיקה הראתה שהוא חולה) הוא בעצם בריא?

ג) מה ההסתברות שאדם שאובחן כבריא הוא בעצם חולה?

3. בדקו את מספר הגברים והנשים שנרשמו ושהתקבלו למוסד להשכלה גבוהה. בריבוע השטח רשום איזה אחוז מהנשים התקבלו ואיזה אחוז מהגברים.

א) מצא על פי הנתונים הרשומים בתוך הריבוע, איזה חלק מאלה **שהתקבלו** הן נשים, ואיזה חלק הם גברים?



ב) ידוע גם ש 0.7 מהנרשמים היו נשים ו 0.3 גברים. ההנהלה טוענת שאין הבדל בין קבלת נשים וגברים למוסד זה, ואפילו יש העדפה לגבי הנשים. השלם את ריבוע השטח ובדוק טענה זו.

4. "עישון מזיק לבריאות וגורם למחלות לב".
כדי לבדוק טענה זו עקבו אחר התפתחות של מחלות לב אצל מעשנים ואצל לא מעשנים.
תוצאות המעקב מופיעות בריבוע השטח.

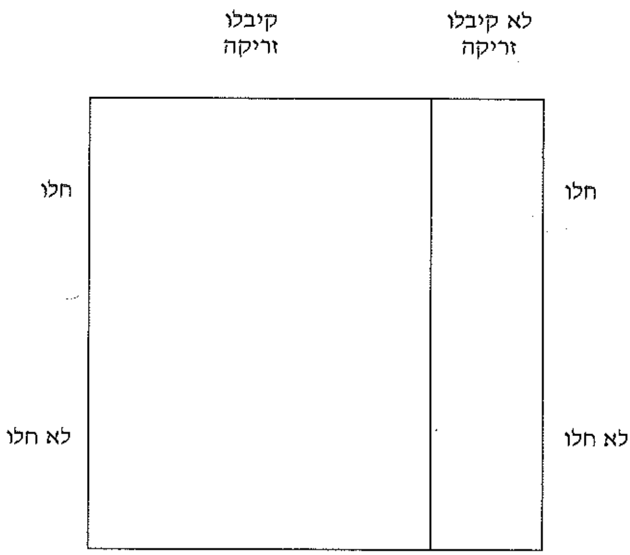
	לא מעשנים	מעשנים	
חלו	0.15%	0.2%	חלו
לא חלו	0.45%	0.2%	לא חלו

א) - איזה אחוז מבין אלה שחלו הם מעשנים?
- האם ניתן להסיק שהעישון אינו גורר מחלות לב?

ב) ידוע גם כי 0.4 מהנבדקים מעשנים ו-0.4 מהם לא מעשנים.
השלם את ריבוע השטח ובדוק איזה חלק מהמעשנים חלו ואיזה חלק מהלא מעשנים חלו.

5. ערכו מעקב אחר 2000 אנשים מעל גיל 65 במטרה לבדוק יעילות של זריקה נגד שפעת.
500 מהם קיבלו זריקה ו 1500 לא קיבלו זריקה.
80 מאלה שקיבלו זריקה חלו בשפעת ו 600 מאלה שלא קיבלו זריקה חלו בשפעת.

א) שבץ מספרים אלה בתוך הריבוע.



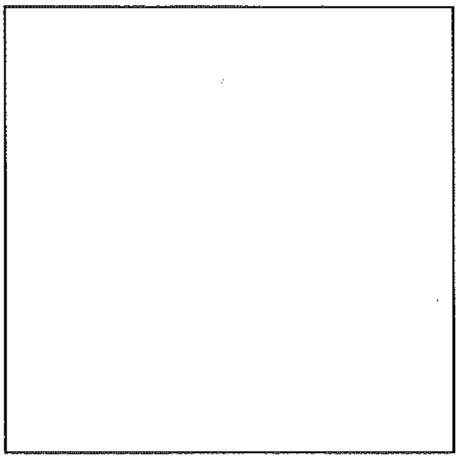
ב) - איזה חלק מאלה שחלו, חלו **למרות** שקיבלו זריקה?
- האם ניתן להסיק שהזריקה יעילה?

ג) - השלם את ריבוע השטח (רשום את החלקים המתאימים על הצלעות.)
- מה ההסתברות לקבל זריקה ולחלות?
- מה ההסתברות לא לקבל זריקה ולחלות?
- מה תוכל לומר כעת על יעילות הזריקה?

ועוד שלבים – מודל העץ

1. ההסתברות לגשם בערב חנוכה היא 0.2 וההסתברות לגשם בערב פורים היא 0.4.

א) חלק את הריבוע על פי הנתונים.

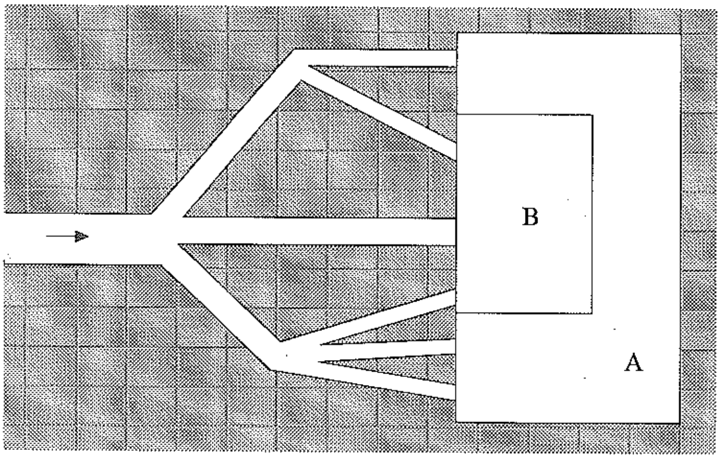


ב) חשב: - מה ההסתברות שירד גשם בערב חנוכה ולא בערב פורים?
- מה ההסתברות שירד גשם בשניהם?
- מה ההסתברות שבשני הערבים לא ירד גשם?
- מה ההסתברות שאחד מערבי החג יהיה ללא גשם?

ג) נניח שנתון גם, שבערב פסח ההסתברות לגשם היא 0.1, ורוצים לחשב הסתברויות שאחד מערבי החג הנ"ל יהיה ללא גשם.
נסה לפתור בעזרת מודל השטח: חלק כל אחד מהמלבנים שהתקבלו על פי ההסתברות לגשם בערב פסח.

כפי שראית כשיש יותר משני שלבים מודל השטח מסורבל, נכיר כעת מודל נוסף שיקל על הפתרון במקרים אלו.

2. לפני שנים רבות חי מלך ולו בת יפיפיה.
המלך הועיד את בתו לנסיך הממלכה השכנה, אך בת המלך אהבה עלם מפשוטי העם. המלך החליט להשאיר לגורל ולחוכמתה של ביתו את ההחלטה וקבע כדלהלן: מתחת לארמון ישנו מבוך, כמשורטט. הנסיכה תחליט אם לעמוד באיזור A או באיזור B, באיזור השני יעמוד נמר. העלם, אהובה של הנסיכה, יעבור במבוך. אם יגיע אל הנסיכה, יכנע המלך לרצון בתו. אם יגיע לנמר הטורף...



א) היכן כדאי לנסיכה לעמוד?

נראה כעת כיצד משתמשים במבוך הנסיכה כמודל. בהמשך תלמד לתרגם בעיות שונות לעץ הדומה למבוך כזה, כך שהחישוב יוכל להיעשות בדומה לחישוב שנדגים כאן.

ב) הוסף בכל שביל, בשרטוט של המבוך, את ההסתברות שהעלם המגיע לצומת יבחר באחד המסלולים: למשל, בצומת הראשון יש פיצול ל 3 מסלולים לכן ההסתברות שיבחר בכל אחד מהם היא $\frac{1}{3}$, רשום והמשך.

ג) ההסתברות שהעלם יגיע ל A דרך המסלול העליון היא $\frac{1}{2}$ מההסתברות שיגיע לצומת הראשון כלומר $\frac{1}{2}$ של $\frac{1}{3}$ חשב: ______

– חשב, באופן דומה, את ההסתברות שהעלם יגיע ל A דרך המסלול התחתון או זה שמעליו.

– סך הכל, ההסתברות שהעלם יגיע ל A היא:

= ______ + ______ + ______

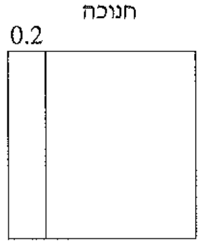
– מה ההסתברות שהעלם יגיע ל B ?

לאחר שהכרת את מודל העץ נחזור ל״שאלת הגשם״, (שאלה 1), ונראה כיצד משתמשים במודל העץ לפתרונה.

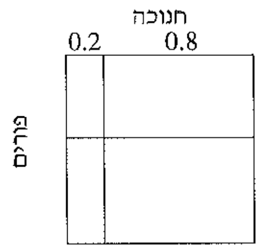
3. ההסתברות לגשם במקום מסוים היא: 0.2 בערב חנוכה, 0.4 בערב פורים ו 0.1 בערב פסח.

במודל העץ המתאים יהיו 3 שלבים:

החלוקה המתאימה במודל השטח נראית כך:



קו לרוחב הריבוע מחלק למעשה **כל אחד מהמלבנים** לפי ההסתברות לגשם בפורים.

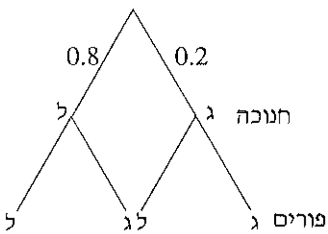


- רשום הסתברויות מתאימות על הצלעות.
- צבע שטח המתאים לגשם בחנוכה וגם בפורים. וחשב את ההסתברות.
- צבע (בצבע שונה) שטח המתאים ל״גשם״ בחנוכה ו״לא גשם״ בפורים. חשב את ההסתברות.

נפצל לשני ענפים לאפשרויות של ״גשם״ **(ג)** או ״לא גשם״ **(ל)** בחנוכה.

רשום על כל ענף את ״משקלו״: ההסתברות המתאימה.

אחר כך נפצל כל ענף לשתי אפשרויות ״גשם״ ״לא גשם״ בפורים.

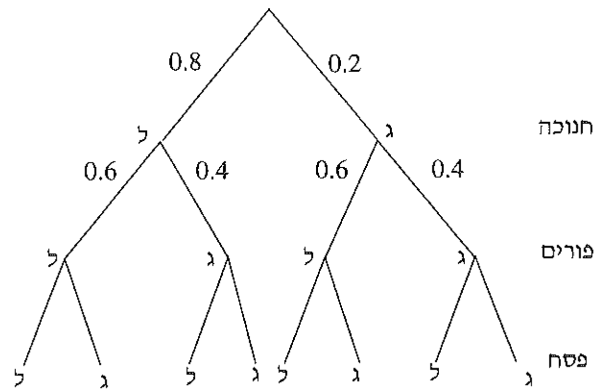


- רשום הסתברויות מתאימות על הענפים.
- צבע מסלול המתאים לגשם בחנוכה וגם בפורים. וחשב את ההסתברות.
- צבע (בצבע שונה) מסלול המתאים ״לגשם״ בחנוכה ו״לא גשם״ בפורים. חשב את ההסתברות.

כפי שראית בתרגיל 1, צריך כעת לחלק כל שטח לפי ההסתברות לגשם בפסח... לא נעשה זאת בגלל הסירבול.

כעת נפצל כל אחד מארבעת הענפים על פי האפשרויות ל"גשם" **(ג)** או "לא גשם" **(ל)** בפסח.

רשום את ההסתברויות המתאימות על הענפים.



– מה ההסתברות לגשם בשלושת ערבי החגים? (סמן מסלול מתאים).

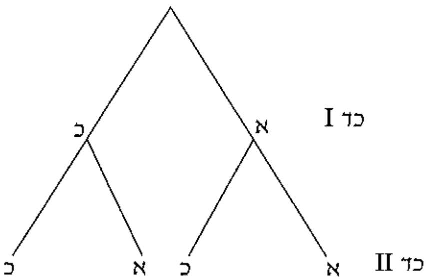
– צבע את כל המסלולים המתאימים לגשם בשני ערבי חג (יש שלושה מסלולים מתאימים).

חשב את ההסתברות, שירד גשם בשני ערבי חג.

תרגילים

4. לפניך שני כדים שכל אחד מהם מכיל כדורים אדומים וכחולים במספר שווה. מבלי להסתכל מוציאים כדור מכל כד.

א) לפניך מודל "עץ" מתאים לבעיה. רשום ליד הענפים את ההסתברויות המתאימות. להוציא כדור אדום (**א**) כדור כחול (**כ**).

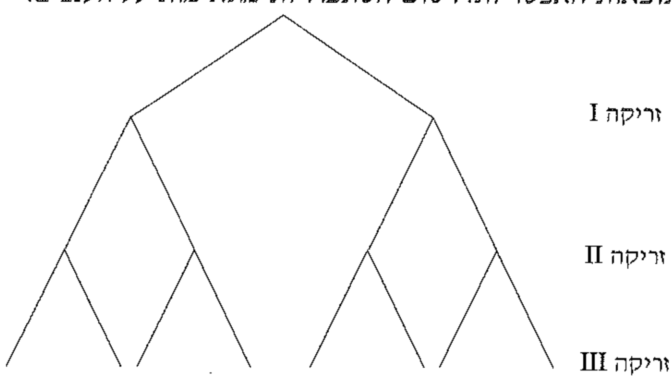


ב) צבע מסלול מתאים למאורע "יוציאו שני כדורים אדומים". מה ההסתברות של מאורע זה?

ג) צבע, בצבע שונה, מסלולים מתאימים למאורע: "יוציאו כדור אחד אדום ואחד כחול", וחשב את ההסתברות של מאורע זה?

5. זורקים קוביות משחק 3 פעמים. בכל פעם שמתקבל ⚅ זוכים בנקודה.

א) - רשום בקצות הענפים "שש", "לא שש" כך שהעץ ייצג את כל התוצאות האפשריות. רשום הסתברויות מתאימות על הענפים.



ב) סמן מסלול מתאים למאורע "לא יתקבל ⚅ כלל". מה ההסתברות של מאורע זה?

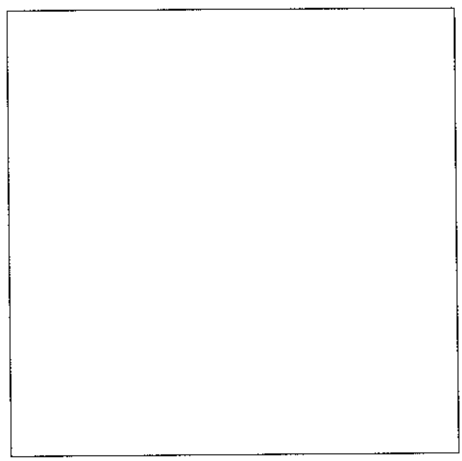
ג) סמן מסלולים מתאימים למאורע "⚅ יתקבל **לכל היותר** פעם אחת". מה ההסתברות של מאורע זה?

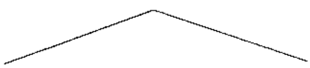
בניית העץ

1. קלעים יורים למטרה פעם אחת. ההסתברות שהראשון יפגע במטרה בירייה בודדת היא 0.7 . ההסתברות שהשני יפגע במטרה בירייה בודדת היא 0.6 .

א) חלק את הריבוע בהתאם.

ב) השלם את מודל ה״עץ״. (כולל רישום ההסתברויות על הענפים המתאימים.)





במודל השטח אפשר במקרים מסוימים, כמו תרגיל זה לשרטט את החלוקה השניה בבת אחת, או לחלק כל מלבן לחוד.
*במודל העץ מפצלים בשלב השני, כל ענף **לחוד**, מה ששקול לחלוקה של כל מלבן בנפרד.*

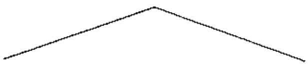
ג) צבע בריבוע השטח מלבנים המתאימים למאורע ״אחד הקלעים יפגע והשני יחטיא״. צבע מסלולים מתאימים למאורע זה, במודל העץ. חשב את ההסתברות של המאורע.

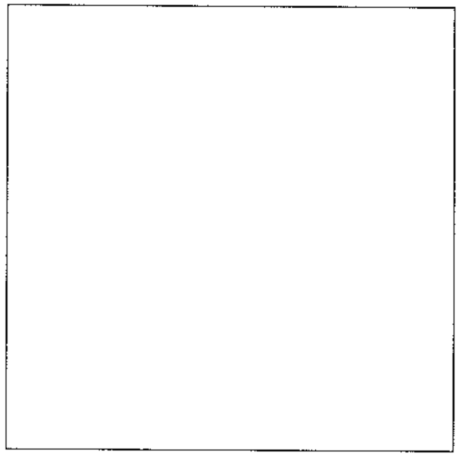
ד) צבע בריבוע השטח שטחים ובמודל העץ מסלולים, המתאימים למאורע ״לפחות קלע אחד יפגע״ וחשב את ההסתברות.

2. טירון משתתף במטווח. ההסתברות שיפגע ביריה הראשונה היא 0.5, אם פגע ביריה קודמת, ההסתברות שיפגע ביריה הבאה היא 0.6. אם לא פגע בקודמת, ההסתברות שיפגע ביריה הבאה היא 0.3 .

הטירון ירה פעמיים.

א) השלם את העץ ואת ריבוע השטח.





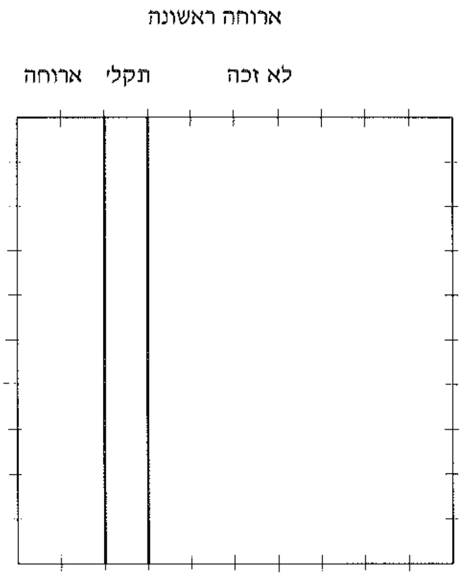
כאן, גם בריבוע השטח, החלוקה השניה מתבצעת על כל מלבן בנפרד.

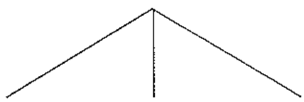
ב) – צבע בריבוע השטח מלבנים מתאימים למאורע "תהיה לפחות פגיעה אחת במטרה".
– צבע מסלולים מתאימים במודל העץ.
– חשב את ההסתברות של המאורע.

ג) – הוסף פיצול נוסף, במודל העץ, למקרה "הצלף יורה יריה שלישית".
– צבע מסלולים מתאימים למאורע: "תהיה רק פגיעה אחת במטרה" וחשב את ההסתברות.

3. רשת המבורגרים "טעים מאוד" הכריזה על מבצע.
כל מי שקונה ארוחה מלאה משתתף בהגרלה, בה ההסתברות לזכות בארוחה חינם היא 0.2, ההסתברות לזכות בתקליטור 0.1.
רותי מתכוונת ללכת פעמיים לאכול במסעדה "טעים מאוד".

א) – השלם תלוקה של ריבוע שטח.
– השלם את העץ.

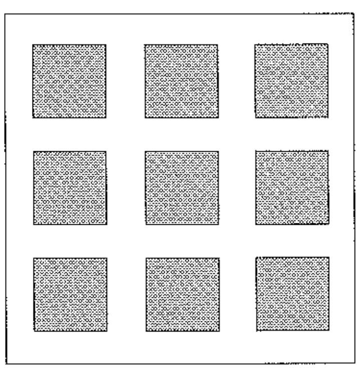




ב) חשב את ההסתברות שהיא תזכה בארוחה ובתקליטור.

ג) חשב את ההסתברות שרותי לא תזכה כלל.

4. בחנות צעצועים הכריזו על מבצע פרסים:
כל קונה מקבל כרטיס עליו תשע משבצות מכוסות.
בשתיים מהן מצויר טרול.
הקונה מגרד שתי משבצות. אם בשתיהן מצוייר טרול הוא זוכה בו.
היעזר במודל שטח, או עץ וחשב את ההסתברות של קונה לזכות בטרול.



תרגילים

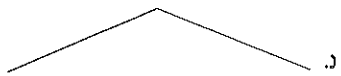
5. בדקו ומצאו שבמפעל ברגים 0.01 של הברגים יוצאים פגומים.
מוציאים שלושה ברגים מארגז.
א) שרטט "עץ" מתאים.
ב) סמן מסלולים מתאימים למאורע יוציאו "בדיוק בורג אחד פגום".
מה ההסתברות של מאורע זה?
ג) סמן מסלולים מתאימים למאורע: יוציאו "לכל היותר בורג אחד פגום".
מה ההסתברות של מאורע זה?

6. ההסתברות לזכות בכרטיס טיסה חינם בחברת "דרך צלחה" היא 0.1.
משפחת "מזלי" קנתה שלושה כרטיסים.
א) שרטט עץ מתאים.
ב) סמן מסלולים מתאימים לזכיה של כרטיס אחד חינם וחשב את ההסתברות?
ג) סמן מסלולים מתאימים למאורע "המשפחה תזכה **בלפחות** כרטיס אחד חינם". מה ההסתברות של מאורע זה?

7. ההסתברות ששחקן כדורסל יקלע לסל בניסיון ראשון היא 0.8 .
א) שרטט ורשום הסתברויות על הענפים עבור הזריקה הראשונה.
ההסתברות שיקלע לסל בזריקות הבאות, תלויה בתוצאת הזריקה הקודמת: 0.9 אם קלע בזריקה הקודמת, 0.6 אם לא קלע בזריקה הקודמת.
השחקן יזרוק לסל עוד פעמיים (סך הכל שלוש פעמים).
ב) השלם את שרטוט העץ ורשום הסתברויות מתאימות.
ג) מה ההסתברות שיחטיא בכל שלוש הזריקות?
ד) מה ההסתברות שיקלע לפחות פעם אחת? (בדוק אלו מסלולים מתאימים למאורע זה.)
ה) מה ההסתברות שיקלע בדיוק פעמיים?

8. במבחן רב ברירה (אמריקאי) שלוש שאלות. לכל שאלה ארבע תשובות אפשריות רק אחת מהן נכונה.
דני אינו יודע דבר על הנושא הנלמד, לכן החליט לבחור בתשובה נכונה על ידי "אֶן דֶן דִינוֹ".

א) רשום הסתברויות מתאימות על הענפים (**נ.** – יענה נכון **ט** – יטעה).



ב) העתק והשלם את העץ לשאר השאלות.

ג) מה ההסתברות שדני יענה על כל שלוש השאלות נכון? (דייק עד שתי ספרות לאחר הנקודה).

ד) מה ההסתברות שדני יענה על שתי שאלות נכון?

ה) מה ההסתברות שדני יענה **לפחות** על שתי שאלות נכון (ויעבור את המבחן)?

9. במבחן רב ברירה חמש שאלות.
ההסתברות של דני, לא לענות על אף שאלה נכון היא 0.24.
מה ההסתברות שדני יענה נכון **לפחות** על שאלה אחת?

10. בטופס טוטו 14 משחקים.

א) מהי ההסתברות לנחש תוצאה נכונה עבור משחק בודד?

ב) מה ההסתברות לנחש נכון את כל התוצאות?

ג) מה ההסתברות לנחש נכון 13 משחקים?

ד) מה ההסתברות לנחש נכון **לפחות** 13 משחקים?

תרגילים נוספים לסיכום וחזרה

בחלק מהתרגילים יש צורך להיעזר במודל העץ, בתרגילים אחרים אפשר להשתמש במודל השטח ותרגילים אחרים תוכל לפתור ישירות על פי הנתונים, או להיעזר ברישום מפורט של התוצאות בשורה או בטבלה.
בחר בדרך מתאימה בכל תרגיל.

1. הטבלה מציגה תוצאות מבחן מתכונת, שניתן בכל כיתות י"ב בביה"ס.
מספר הנבחנים 124.

הציון	מתחת ל 50	59-50	69-60	79-70	89-80	100-90
מסי תלמידים	17	20	33	27	15	12

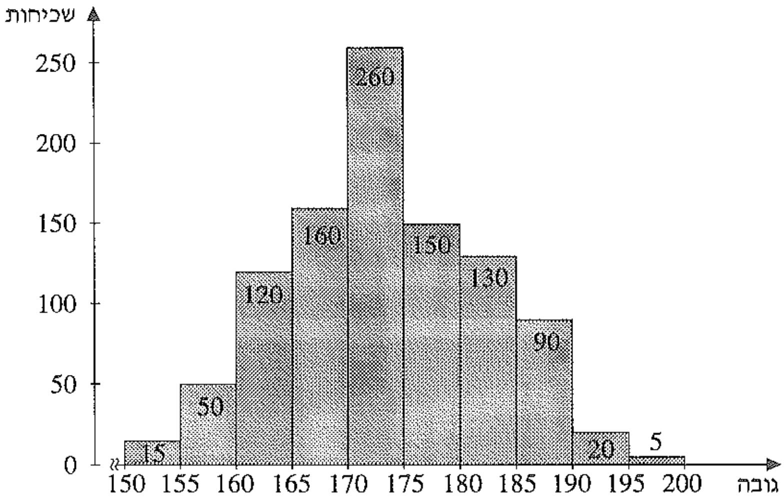
בוחרים באקראי שם של תלמיד מרשימת התלמידים.

א) מה ההסתברות שציונו מתחת ל 90?

ב) מה ההסתברות שציונו בין 60 ל 79?

ג) מה ההסתברות שציונו 80 או יותר?

2. לפניך היסטוגרם המתאר גבהים של 1000 נבדקים בוגרים.
השכיחות של האנשים בכל קבוצת גובה רשומה בתוך המלבנים.



הערך הגבולי בין שתי קבוצות שייך לקבוצה שמעל ערך זה.

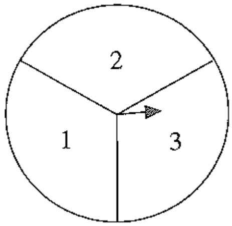
א) מה ההסתברות, שאדם שנבחר באקראי, גובהו מ 170 ועד 175 (לא כולל 175).

ב) הממוצע בערך 173 סמן אותו בערך על הציר האופקי, (ציר הגובה). סטיית התקן 9, סמן על הציר את המקום של סטיית תקן אחת מעל הממוצע, ואת המקום של סטיית תקן אחת מתחת לממוצע.

ג) יש שלוש קבוצות מלאות, שכל האנשים בהם נמצאים בין סטיית תקן אחת מעל ואחת מתחת לממוצע.
בוחרים באקראי אדם מבין כל הנבדקים הבוגרים.
- מה ההסתברות שגובהו נמצא באחת משלוש קבצות אלה?

ד) - מה ההסתברות, בערך, שגובהו בין שתי סטיות תקן מעל ושתי סטיות תקן מתחת לממוצע?

3. אפרת וגלעד משחקים.
כל אחד מסובב בתורו פעמיים את מחוג השעון המשורטט. (השעון מחולק לשלושה חלקים שווים.)



אם מכפלת המספרים זוגית מנצחת אפרת.
אם מכפלת המספרים אי זוגית מנצח גלעד.
בדוק אם המשחק הוגן.
אם לא, מצא מה ההסתברות של כל אחד מהם לנצח.
(תוכל להשתמש בטבלה).

4. איילת ודפנה החליטו לשחק בסביבון של חנוכה. בכל תור תסובב השחקנית פעמיים את הסביבון. (התוצאות האפשריות נ, ג, ה, פ).
הן מתכוונות לשנות את הכללים במהלך המשחק.

א) הכלל הראשון: דפנה תנצח אם בשני הסיבובים תצא אותה אות ואיילת תנצח אם בשני הסיבובים תצאנה אותיות שונות. האם המשחק הוגן? (שוב תוכל להיעזר בטבלה). חשב את ההסתברות של כל אחת מהן לנצח.

ב) הכלל השני: איילת תנצח אם בכל אחד שני הסיבובים יוצא נ או ג.
דפנה תנצח אם לפחות באחד משני הסיבובים יצא פ.
(אם שתיהן תצלחנה המשחק יגמר בתיקו).
האם לשתיהן אותו סיכוי לנצח?

ג) הכלל השלישי: איילת תנצח, כמו קודם, אם בכל אחד משני הסיבובים יצא נ או ג ודפנה תנצח אם בשני הסיבובים תצא אותה אות.
(אם שתיהן לא תצלחנה, המשחק יגמר בתיקו.)
חשב את ההסתברות של כל אחת לנצח.

5. בשק אטום נמצאים פתקים בצבע כסף ובצבע זהב. אותו מספר של פתקים מכל צבע. מוציאים פתק, מחזירים ומוציאים פתק נוסף.
אם מוציאים 2 פתקים בצבע זהב זוכים בפרס של 50 ש"ח.
אם מוציאים שני פתקים בצבעים שונים לא זוכים כלל.
אם מוציאים שני פתקים בצבע כסף משלמים 10 שקלים.
לכל משתתף במסיבה תהיה זכות להוציא שני כרטיסים. רשום את כל התוצאות האפשריות. (כזוגות או בטבלה).
א) מה ההסתברות לזכות בפרס?

ב) מה ההסתברות לשלם קנס?

ג) נניח כי מספר המשתתפים במסיבה גדול מאוד, האם לדעתך מארגני המסיבה מסתכנים בהפסד? נמק.

6. זורקים קוביה שעל פיאותיה רשומים המספרים 1, 2, 3, 4, 5, 6 ומסובבים סביבון שעל ארבע פיאותיו רשומים המספרים: 1, 2, 3, 4.
א) מה ההסתברות, שהקוביה והסביבון יראו אותו מספר?

ב) מה ההסתברות, שהסביבון יראה מספר גדול יותר מהמספר שתראה הקוביה?

7. במבצע מכירות בחנות ספרים הוכרז שכל אדם חמישי הקונה בחנות ביום מסוים, יקבל הנחה של 20% על מחיר הקניה. בנוסף לכך יזכו באותו יום, בספרון חינם אלה שיבחרו באחד מהספרים, שסומנו באקראי בסימן נסתר.
בחנות 10000 ספרים ומתוכם סומנו בסימן נסתר 100 ספרים.
א) שרטט ריבוע שטח, או עץ, לתאור כל האפשרויות.

ב) – מה ההסתברות של אדם, שיכנס לחנות ביום המסוים, לזכות בהנחה?
– מה ההסתברות של אדם, שיכנס לחנות ביום המסוים, לקבל ספרון חינם?
– מה ההסתברות של אדם, שיכנס לחנות ביום המסוים, לזכות בשני הפרסים?
– מה ההסתברות של אדם, שיכנס לחנות ביום המסוים, לא לזכות בפרס כלל?

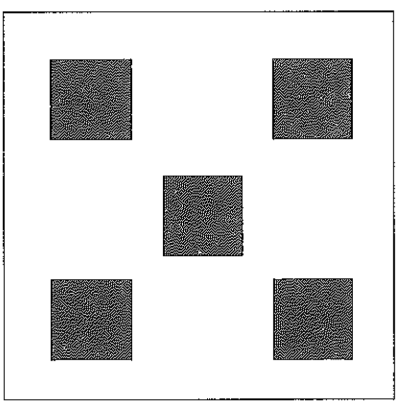
8. צבעו שלוש פאות של קובית משחק בלבן, שתי פאות בכחול ופאה אחת באדום.
זורקים את הקוביה פעמיים.
א) בנה ריבוע שטח, או עץ, שיתאר את כל התוצאות האפשריות.

ב) מה ההסתברות לקבל באחת הזריקות כחול ובזריקה האחרת לבן?
(סמן תחילה מלבנים מתאימים בריבוע השטח, או מסלולים מתאימים בעץ.)
ג) - מה ההסתברות לא לקבל לבן כלל?
- מה ההסתברות לקבל, **לפחות** באחת הזריקות, לבן?
- מה ההסתברות לקבל, **לכל היותר** באחת הזריקות, לבן?

9. יאיר ודפנה משחקים במטבע.
יאיר זוכה בנקודה אם יוצא עץ. דפנה זוכה בנקודה אם יוצא מספר.
ינצח במשחק מי שיגיע ל 10 נקודות. דפנה הגיעה ל 8 נקודות ויאיר הגיע ל 9 נקודות ואז הופסק המשחק...
יאיר טען: "הייתי מנצח בטוח".
דפנה אמרה: "לא נכון, היה לי עדיין סיכוי טוב לנצח".
א) כמה זריקות, לכל היותר, עליהם לזרוק, כדי שאחד מהם יגיע ל 10 נקודות?

ב) חשב את ההסתברות של דפנה לנצח, מהשלב הנ"ל במשחק. (היעזר בריבוע שטח או בעץ.)

10. ב"מזל בורגר" נותנים לכל קונה טופס ובו 5 ריבועים. הריבועים מכסים על 5 ציורים, **שניים** מהם זהים. יש לגרד שני ריבועים. אם בשניהם מופיע אותו ציור מקבלים פרס.
מה ההסתברות לקנות ב"מזל בורגר" ולזכות בפרס?
(היעזר בריבוע שטח או בעץ).



11. ההסתברות להצליח בטסט נהיגה אצל הבוחן ירושע היא 0.3 . (בלי קשר לרמת הנהיגה של הנבחן.)

בחרו **שלושה** שמות של נבחנים, שנבחנו אצל ירושע.

- מה ההסתברות ששלושתם עברו?
- מה ההסתברות **שאף אחד** לא עבר?
- מה ההסתברות **שלפחות** אחד עבר?
- מה ההסתברות **שבדיוק** אחד עבר?

12. ביום א׳ יָרד גשם. ההסתברות שיֵרד גשם ביום מסוים, אם ביום לפניו יָרד גשם היא 0.6. שרטט עץ או ריבוע שטח ורשום הסתברויות לגבי יום ב׳ .

ההסתברות שיֵרד גשם ביום מסוים אם ביום לפניו לא יָרד גשם היא 0.5.

השלם את העץ עבור יום ג׳.

מה ההסתברות שביום ג׳ יָרד גשם?

מציאת p

13. ההסתברות שכדורסלן יפגע בזריקה בודדת מיוצגת על ידי p. הכדורסלן זורק פעמיים את הכדור.

שרטט ריבוע שטח ועץ.

השלם הסתברויות במלבנים ועל הענפים.

ההסתברות שהכדורסלן לא יפגע בשתי הזריקות היא 0.04.

מצא את p.

14. במפעל מייצרים ברגים ובודקים אותם.

ההסתברות שהבורג המוצא פגום מיוצגת על ידי p.

מוציאים באקראי שני ברגים מהערימה.

א) בנה ריבוע שטח, או עץ ורשום הסתברויות.

ב) ההסתברות שיוצא בורג אחד פגום והשני לא היא 0.18, מצא את p .

15. רותי משחקת פעמיים במשחק מזל. ידוע שההסתברות להצליח בשני המשחקים היא 0.0144 .

א) מה ההסתברות שרותי תצליח במשחק בודד? (תוכל לבחור כמשתנה את ההסתברות שלה להצליח במשחק בודד ולבנות עץ, או ריבוע שטח.)

ב) מה ההסתברות שתצליח **בדיוק** במשחק אחד?

ג) מה ההסתברות שתצליח **לפחות** במשחק אחד?

16. במדינה מסוימת חלק מהאוכלוסיה מרכיבים משקפיים.
בוחרים באקראי שני תושבים של מדינה זו. ההסתברות ששניהם שייכים לאותה קבוצה (שניהם מרכיבים משקפיים, או שניהם לא מרכיבים משקפיים) היא 0.68.
מה ההסתברות, שאם בוחרים באקראי תושב הוא מרכיב משקפיים? (בחר משתנה, שרטט עץ או ריבוע שטח, כתוב משוואה ופתור).

⚠ *תלמידי 3 יחידות יעברו מכאן לפרק ב' העוסק בהתפלגות נורמלית.*

הסתברות ובינום ניוטון

סעיף זה מיועד רק לתלמידי 4 יחידות לימוד.

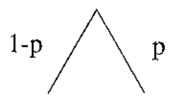
1. ההסתברות שקלע היורה למטרה יפגע בה היא $\frac{2}{5}$.

א) הקלע יורה פעמים למטרה. שרטט עץ מתאים. כמה מסלולים בעץ?

ב) הקלע יורה שלוש פעמים. כמה מסלולים יהיו בעץ?

ג) הקלע יורה ארבע פעמים. כמה מסלולים יהיו בעץ?

בפרק זה נכיר מודל חדש מתאים לשאלות בהן מספר רב של שלבים.
בכל שלב הפיצול הוא ל 2 כלומר:



2. ההסתברות שירד גשם ביום בחודש ינואר היא 0.6.

א) שרטט דיאגרמת עץ שתתאר את ההסתברות לירידה, או אי ירידת גשם, ביומיים הראשונים של חודש ינואר.

ב) המסלולים הקיימים בעץ המתאים ליומיים הראשונים הם:

$$0.6^2 + \boxed{2} \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.4^2$$

- קיימים 2 מסלולים "מהסוג $0.6 \cdot 0.4$" הסבר למה.
- הסבר מדוע סכום המכפלות מתאים ל: $(0.6 + 0.4)^2$

ג) הוסף בעץ ששרטטת שלב נוסף, כך שיתקבל עץ שיתאר את ההסתברות לירידה, או אי ירידת גשם, ב 3 הימים הראשונים של ינואר.
כפלת כל מסלול של "עץ היומיים" פעם ב 0.6 ופעם ב 0.4, לכן מ 4 מסלולים התקבלו 8 מסלולים.
סך הכל כפלת את הביטוי $(0.6 + 0.4)^2$ פעם ב 0.6 ופעם ב 0.4 כלומר, קיבלת $(0.6 + 0.4)^3$.

ד) מה ההסתברות שירד גשם בכל שלושת הימים?
מה ההסתברות, המתאימה **למסלול כלשהו**, של יומיים גשם ויום אחד ללא גשם?

ה) סוגי המסלולים הקיימים בעץ עם 3 השלבים רשומים כאן בהמשך.
- השלם מה מתאר כל סוג של מסלול.
- השלם במשבצות כמה מסלולים מכל סוג קיימים בעץ זה.

------------ ------------ ------------ ------------ 3 ימי גשם

$$0.6^3 + \square\ 0.6^2 \cdot 0.4 + \square\ 0.6 \cdot 0.4^2 + 0.4^3 = \qquad (0.6 + 0.4)^3$$

ו) נניח שרוצים לחשב הסתברויות לגשם בהתיחס ל 4 הימים הראשונים בחודש ינואר. במקרה כזה יש צורך להוסיף שלב נוסף לעץ.
- כמה מסלולים יהי סך הכל בעץ המתאר 4 שלבים?

במקרה כזה מסובך לשרטט עץ ונשתמש בביטוי כמו זה שרשמנו עבור 3 ימים ויומיים.
- מה ההסתברות המתאימה למסלול של 4 ימים ללא גשם?
- מה ההסתברות המתאימה למסלול אחד, המייצג 3 ימים ללא גשם ויום אחד של גשם?
- מה ההסתברות המתאימה למסלול אחד, המייצג 2 ימים ללא גשם ושני ימי גשם?
- מה ההסתברות המתאימה למסלול אחד המייצג, יום אחד ללא גשם ו 3 ימי גשם?
- מה ההסתברות המתאימה למסלול של 4 ימי גשם?

רשום ביטוי לסך כל ההסתברויות השונות: (רשום ביטוי לכל סוג של מסלול והשאר מקום ריק למקדם שלו.)

$$\_\_\_\_ + \square\_\_\_\_ + \square\_\_\_\_ + \square\_\_\_\_ + \_\_\_\_ = (\qquad)^4$$

שורה זו היא תחליף לעץ במקרה שמספר השלבים גדול.

- מה מייצגים הביטויים שרשמת בשורה האחרונה בהתייחס לעץ?
- מה מייצגים המקדמים (החסרים בינתיים) בהתייחס לעץ?

⚠ סכום מעריכי החזקות בכל איבר בביטוי שרשמת למעלה שווה ל 4.
בעץ בו יש 5 שלבים סכום מעריכי החזקות יהיה שווה ל 5 וכו'.
כעת תוכל לפתור את תרגילים 6, 7 שבהמשך.

הבעיה כעת היא לקבוע, כמה מסלולים מכל סוג קיימים, כלומר, את המקדם של כל מחובר.

3. בתרגיל הקודם קיבלת למעשה פיתוח של $(a + b)^2$ אחר כך של $(a + b)^3$ ולבסוף את סוגי המכפלות בפיתוח של $(a + b)^4$. פיתוח של $(a + b)^n$ נקרא בשם הבינום של ניוטון במקרה שמדובר בו כאן, $a + b = 1$ (כי מדובר בהסתברות p ובמשלים $1 - p$).

כדי לקבוע את המקדמים נסתכל על המעבר מ $(a + b)^3$ ל $(a + b)^4$.

העץ "בן" 4 השלבים מתקבל מכפל כל מסלול בעץ של 3 השלבים, פעם ב a ופעם ב b:

הביטוי a^4 התקבל מכפל של המסלול a^3 בעץ ב a.

הביטוי a^3b מתקבל מכפל המסלול a^3 ב b ומכפל 3 המסלולים שצורתם a^2b ב a. לכן בעץ בעל 4 השלבים יהיו 4 מסלולים שצורתם a^3b.

בסך הכל המעבר מ $(a + b)^3$ ל $(a + b)^4$ מיוצג בשורות הבאות:

$$(a+b)^3 = \boxed{1}\, a^3 + \boxed{3}\, a^2b + \boxed{3}\, ab^2 + \boxed{1}\, b^3$$

$$(a+b)^4 = \boxed{}\, a^4 + \boxed{}\, a^3b + \boxed{}\, a^2b^2 + \boxed{}\, ab^3 + \boxed{}\, b^4$$

- רשום במשבצת המתאימה, כמה מסלולים שצורתם a^2b^2 קיימים. רשום גם מה "מקורם".
- רשום במשבצת המתאימה, כמה מסלולים שצורתם ab^3 קיימים. רשום גם מה "מקורם".

4. לפניך שורות המקדמים בפיתוח מספר המסלולים מכל סוג עד לשורה השלישית (שלב שלישי בעץ).

א) השלם את השורה הרביעית.

$a+b$:					1		1		
$(a+b)^2$:				1		2		1	
$(a+b)^3$:			1		3		3		1
$(a+b)^4$:		1							

ב) כל מקדם מתקבל מחיבור 2 המקדמים שמעליו בשורה הקודמת, הסבר למה.

ג) השלם את "המשולש" הזה עד לשורה העשירית.

המשולש שהתקבל נקרא משולש פסקל.

המקדמים בשורה n מייצגים את הפיתוח של $(a+b)^n$. בקודקוד המשולש למעלה יש לרשום 1, שמתאים ל $(a+b)^0 = 1$.
הוסף אותו למשולש פסקל.

ד) - השלם את כל הביטויים המתקבלים בפיתוח של העץ עבור 6 ימים בינואר. כלומר, את הפיתוח של $(0.6+0.4)^6$

$$0.6^6 + \square\ 0.6^5 \cdot 0.4 + \square\ \ldots$$

- רשום את המקדמים.
- חשב את ההסתברות ל 3 ימי גשם ו 3 ימים ללא גשם.
- סמן את האיברים המתאימים ליותר מ 3 ימי גשם וחשב את ההסתברות.

בנוספה, בסוף סעיף זה, תמצא הסבר נוסף למקדמי הבינום.

ע״ע 5. זורקים קוביה הוגנת ובודקים אם יצא מספר גדול מ 4.

השלם, על תחילת העץ, את הסתברויות המתאימות לזריקת הקוביה פעם אחת.

זורקים את הקוביה 5 פעמים.

ב) השלם את הפיתוח $(\_\_\_\_+\_\_\_\_)^5$ היעזר במשולש פסקל.

$$(\quad + \quad)^5 = \_\_\_\_ + \square\_\_\_\_ + \square\_\_\_\_ + \square\_\_\_\_ + \square\_\_\_\_ + \_\_\_\_$$

ג) מה ההסתברות שיתקבל פעמיים מספר גדול מ 4 ושלוש פעמים מספר קטן או שווה ל 4?

ד) סמן איברים המתאימים למאורע: ״לפחות 3 פעמים יתקבל מספר גדול מ 4״. מה ההסתברות של מאורע זה?

ה) סמן איברים המתאימים למאורע: ״לכל היותר 3 פעמים יתקבל מספר גדול מ 4״. מה ההסתברות של מאורע זה?

6. שחקן כדורסל מתאמן בקליעה. ההסתברות שיקלע לסל בזריקה בודדת היא: 0.8.

שחקן זורק 5 פעמים לסל.

א) רשום ביטוי לסך כל ההסתברויות של קליעה ואי קליעה לסל. (השאר מקום ריק למקדמים).

$$(\quad+\quad)^5 = \underline{\quad} + \square\underline{\quad} + \square\underline{\quad} + \square\underline{\quad} + \square\underline{\quad} + \underline{\quad}$$

ב) סמן בקו את האיברים המתאימים לחישוב המאורע, "השחקן יקלע לפחות 3 פעמים".

ג) הקף את האיברים המתאימים לחישוב המאורע, "השחקן יקלע לכל היותר 3 פעמים".

7. בבית חורשת לנרות "נריה" יש 1% של נרות פגומים.
בשלב האחרון של הייצור מוציאים 10 נרות לבדיקה.
א) רשום ביטוי לסך כל ההסתברויות למציאת נרות פגומים או תקינים.

ב) סמן בקו איברים המתאימים למאורע: "יוציאו לכל היותר 2 נרות פגומים".

8. א) רשום את הפיתוח המלא של $(0.5 + 0.5)^6$
ב) רשום את הפיתוח המלא של $(0.2 + 0.8)^{10}$

9. א) מטבע של שקל מוטל 6 פעמים. מה ההסתברות, **שבדיוק** פעמיים התוצאה תהיה עץ? היעזר בפיתוח שרשמת בתרגיל 8א'.

ב) מטבע של שקל מוטל 6 פעמים. מה ההסתברות, **שבדיוק** 3 פעמים התוצאה תהיה "עץ"?

10. במשחק כדור-סל מסוים, 10% מהצופים הם מרמת-גן.
בוחרים באופן מקרי 5 צופים לראיון.
א) רשום ביטוי מתאים לסך כל ההסתברויות. (כולל מקדמים מתאימים.)

ב) מה ההסתברות שכל חמשת הצופים שיבחרו יהיו מרמת-גן?

ג) מה הסתברות, **שבדיוק** 3 מהצופים שיבחרו יהיו מרמת גן?

ד) מה ההסתברות, **שלפחות** 3 מהצופים שיבחרו יהיו, מרמת-גן?

ה) מה ההסתברות, **שאף אחד** מחמשת הצופים שיבחרו לא יהיה תושב רמת-גן?

11. בשל תקלה בבית החרושת המייצר ברגים, יצאו 20% מהברגים (שיוצרו בעת התקלה) פגומים. מבין הברגים שיוצרו באותה תקופה, דגמו אקראית 6 ברגים.
א) רשום ביטוי מתאים.

ב) מה ההסתברות, שבמדגם של 6 הברגים הנ"ל, יהיו לכל היותר 2 ברגים פגומים?

ג) מה ההסתברות, שבמדגם של 6 הברגים הנ"ל, יהיו לפחות 2 ברגים פגומים?

12. בכד 7 כדורים ירוקים ו 5 כדורים צהובים. מוציאים כדור, רושמים את צבעו ומחזירים אותו לכד. בצורה זאת מוציאים סך הכל 4 כדורים.
א) מה ההסתברות להוציא 4 כדורים צהובים?

ב) מה ההסתברות להוציא 3 כדורים ירוקים וכדור אחד צהוב?

ג) מה ההסתברות להוציא **לכל היותר** 3 כדורים ירוקים?

את שאלה 13 לא ניתן לפתור בעזרת נוסחת ההסתברות הבינומית - היעזר במודל העץ.

13. בכד 4 כדורים אדומים ו 3 כדורים לבנים. מוציאים כדור, ולאחר מכן מוציאים כדור נוסף ולבסוף כדור שלישי, ללא החזרה.
א) מה ההסתברות להוציא 3 כדורים אדומים?

ב) מה ההסתברות להוציא כדור ראשון לבן ואחריו שני כדורים אדומים?

14. ההסתברות שנורה המיוצרת במפעל מסוים תהיה פגומה היא 0.3.
בודקים 7 נורות שנבחרות באקראי.
א) מה ההסתברות שבדיוק אחת מהן תהיה פגומה?

ב) מה ההסתברות שבדיוק שתיים מהן תהיה פגומות?

ג) מה ההסתברות שלכל היותר 2 תהיה פגומות?

15. ההסתברות שנורה המיוצרת במפעל מסוים תהיה פגומה היא 0.3.
הוציאו נורות לבדיקה בשיטה הבאה: מוציאים נורה ובודקים אותה. אם היא תקינה, מוציאים נורה נוספת. אם היא פגומה, מסיימים את הבדיקה. מה ההסתברות שהוציאו בבדיקה זו, 5 נורות **בדיוק**? (היעזר בעץ.)

16. זורקים קוביה מאוזנת חמש פעמים.
א) הראה, כי ההסתברות לקבל בדיוק פעמיים מספר גדול מארבע שווה להסתברות לקבל בדיוק פעם אחת מספר גדול מארבע.

ב) מה ההסתברות לקבל **לכל היותר** פעמיים מספר גדול מארבע?

ג) מה ההסתברות לקבל **לפחות** פעמיים מספר גדול מארבע?

17. א) מה ההסתברות שבמשפחה בת שני ילדים יהיו שניהם בנים?

ב) מבין כל המשפחות בארץ, להן שני ילדים, בוחרים באקראי 7 משפחות. מה ההסתברות, שבשתיים מתוך שבע המשפחות האלה, יהיו כולם בנים?

ג) מה ההסתברות, **שלפחות** בשתיים מתוך שבע המשפחות האלה, יהיו כולם בנים?

18. ההסתברות שמסמר המוצא מקו ייצור יהיה פגום היא 0.1.

א) מה ההסתברות, שאם יוציאו באקראי 3 מסמרים, יהיו שלושתם פגומים?

ב) מוציאים לצורך בדיקה שלשות של מסמרים.

- מה ההסתברות, שאם יוציאו 6 שלשות כאלה, בדיוק בשלשה אחת יהיו כל המסמרים פגומים.
- מה ההסתברות, שאם יוציאו 6 שלשות כאלה, **לפחות** בשלשה אחת יהיו כל המסמרים פגומים?

19. ההסתברות לזכות בהגרלה מיוצגת על ידי p.

בועז עומד לקנות 4 כרטיסי הגרלה.

נניח ש q מייצג את ההסתברות לא לזכות בהגרלה. (כלומר $p + q = 1$).

א) רשום ביטוי, לסך כל ההסתברויות של בועז, לזכות או לא לזכות בהגרלה.

ב) ההסתברות שבכל ארבעת הכרטיסים לא תהיה זכיה היא 0.922. מצא את p ו q.

ג) מה ההסתברות שב 2 מארבעת הכרטיסים שבועז יקנה תהיה זכיה?

20. ההסתברות לבחור תלמיד מבית ספר "רם", שגובהו קטן מ 1.60 מ' מיוצגת על ידי p.

אם בוחרים באקראי 6 תלמידים מבית הספר, אז ההסתברות שהגובה כל ששת התלמידים הוא 1.60 ויותר היא 0.2458.

א) מצא את p.

ב) מה ההסתברות שאם יבחרו 6 תלמידים מביה"ס, יהיה הגובה של **לכל היותר** 2 מהם קטן מ 1.60 מ'?

21. בוחרים באקראי ארבעה אנשים ממפעל מסוים. ההסתברות שכולם אינם מעשנים היא 0.6561. מהו אחוז המעשנים במפעל?

22. בוחרים באקראי חמישה תלמידים מבית ספר "גורי". ההסתברות שלפחות אחד מהם אוהב ספורט היא 0.98976. מה ההסתברות שתלמיד אחד, שיבחר באקראי מבית ספר זה, אוהב ספורט?

23. אחוז המקררים העומדים בתקן מיוצג על ידי p. אם בוחרים באקראי 5 מקררים, שעברו את פס הייצור, אז ההסתברות שכל החמישה עומדים בתקן שווה להסתברות שבדיוק ארבעה עומדים בתקן.

א) מצא את p. (רשום ביטוי מתאים בעזרת p ו q, רשום משוואה ומצא את p).

ב) מה ההסתברות שלפחות 4 עומדים בתקן?

24. p מייצג את ההסתברות שתרופה מסוימת תרפא מחלה.

ידוע כי אם בוחרים באקראי 6 אנשים, שיטופלו בתרופה זו, אז ההסתברות ש 5 ירפאו שווה להסתברות ש 3 מהשישה ירפאו.

א) מצא את p.

ב) מה ההסתברות שלפחות 4 משישה המטופלים ירפאו?

25. ההסתברות להצליח בניסוי מסוים היא p. ההסתברות להיכשל באותו ניסוי היא q. מבצעים את הניסוי 5 פעמים. ידוע כי ההסתברות להצליח ב 3 מתוך חמשת הניסויים (ולהיכשל ב 2) היא 0.0512.

כמו כן ידוע כי ההסתברות להצליח ב 2 מתוך חמשת הניסויים (ולהיכשל ב 3) היא 0.2048.

א) מצא את p.

ב) מה ההסתברות שהניסוי יצליח **בלפחות** 3 מתוך חמשת הניסויים?

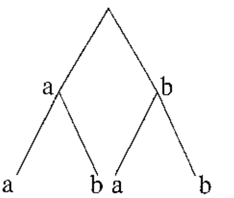
נספח - הסבר נוסף למקדמי נוסחת הבינום.

ראינו שניתן למצוא את המקדמים של איברי הביטוי $(a + b)^n$ בעזרת משולש פסקל אך לא הסברנו מדוע. ננסה כעת להסביר באופן אחר, כיצד למצוא את המקדמים האלה ונראה את הקשר למשולש פסקל.

כאמור אפשר להסתכל על הפיתוח של $(a + b)^n$ כעל בנית עץ בעל n שלבים.

העץ המתאים ל $a + b$ הוא:

העץ המתאים ל $(a + b)^2$ הוא:
(כשמדובר בחישובי הסתברות $a + b = 1$)



באופן דומה, בעץ המתאים ל $(a + b)^n$ יהיו "n קומות".
ניקח לדוגמא פיתוח של $(a + b)^7$. כל מסלול בעץ מורכב מ 7 גורמים, חלק מהם a וחלק מהם b (כולל האפשרות שהגורמים כולם מאותו סוג). סך הכל, נמצאות בעץ כל המכפלות האפשריות בכל הסידורים האפשריים השונים זה מזה.
במסלול כלשהו המתאים ל ab^6 יש גורם אחד a ו 6 גורמים b. בעץ כולו ישנם **כל** המסלולים השונים מסוג זה, כלומר 7 מסלולים. לכן המקדם של איבר זה הוא 7. (a יכול להופיע במקום ראשון או במקום שני וכו', סך הכל 7 אפשרויות.) באותו אופן המקדם של a^3b^4 בפיתוח של $(a + b)^7$ מתאר את מספר המסלולים בהם נצאים 3 גורמים a ו 4 גורמים b. לכן, כשמחפשים את המקדם a^3b^4 מחפשים למעשה בכמה אפשרויות ניתן לסדר 3 גורמים a ו 4 גורמים b בשורה.

נדון כעת בשאלת מספר הסידורים של עצמים בשורה. נניח לצורך הדיון, שהעצמים הם הספרות ואנו בונים מהן מספרים. מהספרות 1 ו 2 אפשר ליצור שני מספרים 12 ו 21.
את הסיפרה 3 נוכל להוסיף בכל אחד מהמספרים הנ"ל ב 3 מקומות: מימין או משמאל או בין הספרות. באופן כזה נקבל $3 \cdot 2$, כלומר 6 מספרים:
213, 231, 321, 123, 132, 312
את הסיפרה 4 נוכל להוסיף לכל אחד מהמספרים הנ"ל באחד מארבעת המקומות הבאים: _3_2_1_ כלומר נוכל לקבלת $4 \cdot (3 \cdot 2)$ מספרים בעזרת הספרות 4, 3, 2, 1.

באופן דומה מ n ספרות שונות נוכל לבנות $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ מספרים שונים. ביטוי כזה מסומן ב $n!$

תרגיל: חשב את $4!$ $5!$ $6!$ $10!$

⚠ $0!$ מוגדר כ 1.

אם חלק מהספרות זהות למשל $1, 2, 2, 3$ חלק מהמספרים יהיו זהים. בדוגמה של הספרות $1, 2, 2, 3$ נקבל שמספר המספרים השונים זה מזה קטן מ $4!$ פי $2!$ (שהוא מספר האפשרויות להחליף את הספרות 2 זו בזו). כלומר נקבל $4!/2!$ מספרים שונים מהספרות הנ"ל.

תרגיל:

א) חשב את $4!/2!$.

ב) רשום את כל המספרים השונים שניתן לרשום מהספרות $3, 2, 2, 1$ ובדוק.

באופן כללי, אם מסדרים n עצמים בשורה ו k מתוכם זהים, מספר הסידורים יהיה $n! / k!$.

תרגיל:

רשום את כל המספרים שניתן ליצור מהספרות $1, 1, 7, 7, 7$ וספור אותם. חשב על פי הנוסחה $5!/(2!3!)$ והשווה.

באופן דומה המקדם של a^3b^4 בפיתוח של $(a + b)^7$ יהיה $7! /(3!4!)$ (יש 3 גורמים a זהים ו 4 גורמים b זהים), המקדם של a^4b^3 יהיה אף הוא $7!/(3!4!)$.

תרגיל:

א) מה המקדם של a^2b^5 בפיתוח של $(a + b)^7$?

ב) מה המקדם של ab^6 בפיתוח של $(a + b)^7$?

ג) מה המקדם של a^3b^2 בפיתוח של $(a + b)^5$?

ד) לאיזה איבר בפיתוח של $(a + b)^5$ יש אותו מקדם כמו זה שמצאת בסעיף ג'.

ה) מה המקדם של a^7b^5 בפיתוח של $(a + b)^{12}$?

ו) מה המקדם של $(0.3)^4 \cdot (0.7)^2$ בפיתוח של $(0.3 + 0.7)^5$?
למה שווה האיבר הזה בפיתוח?

ז) פתח את $(0.2 + 0.8)^7$.

המקדמים ומשולש פסקל

נהוג לסמן את המקדמים הנ"ל בצורה $\binom{n}{k}$ למשל, $\binom{5}{3}$. והפירוש: המקדם של a^3b^2 בפיתוח של $(a + b)^5$. ערכו $5!/(3!2!)$

תרגילים

1. חשב את $\binom{4}{3}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{6}{3}$

2. חשב את $\binom{5}{4} + \binom{5}{3}$ ואת $\binom{6}{4}$.

3. נרשום את משולש פסקל בצורת רישום זו:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

חשב את המספרים במשולש לעיל ובדוק אם אכן מתקבלות כאן השורות הראשונות של משולש פסקל.

התכונה, בעזרתה בונים את משולש פסקל, באה לידי ביטוי בזהות:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

כלומר, סכום שני מספרים סמוכים בשורה, הוא המספר הרשום ביניהם בשורה שמתחתם.

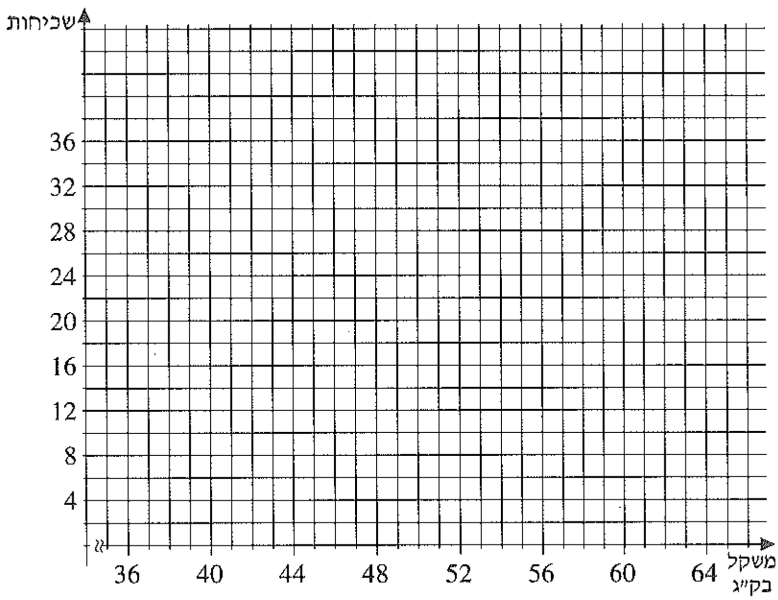
פרק ב' – התפלגות נורמלית

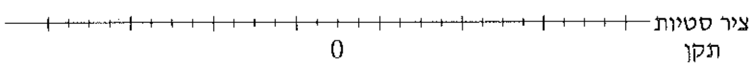
מגרף שכיחויות להתפלגות נורמלית

1. לפניך טבלת התפלגות משקלם של 104 תלמידים.

משקל (ק״ג)	36-39.9	40-43.9	44-47.9	48-51.9	52-55.9	56-59.9	60-64
שכיחות	4	10	26	31	23	7	3

א) שרטט היסטוגרם ומצולע שכיחויות.





ב) הממוצע בערך 50, סמן את מקומו על ציר המשקל.
סטית התקן בערך 5, סמן על ציר המשקל במקומות המתאימים:
- סטיית תקן אחת מעל הממוצע.
- סטיית תקן אחת מתחת לממוצע.

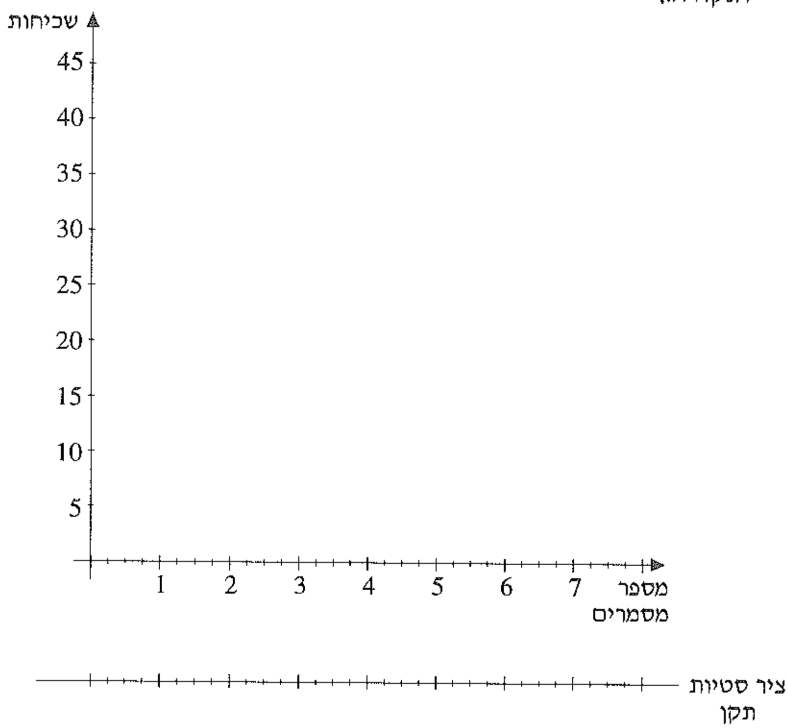
ג) רשום על ״ציר סטיות התקן״ את המספרים 2 , 1 , 1– , 2–,
במקומות המתאימים מתחת ל״ציונים״ שסימנת בסעיף ב'.

ע״י 2. בבדיקה של 110 חבילות מסמרים נמצאו מסמרים פגומים לפי הטבלה:

מספר מסמרים פגומים	0	1	2	3	4	5	6	7
מספר חבילות	2	8	24	36	19	12	5	4

א) שרטט דיאגרמת מקלות ומצולע שכיחויות.

ב) חשב את הממוצע ואת סטיית התקן. (חשב את הממוצע בדיוק של 2 ספרות לאחר הנקודה ואת סטיית התקן בדיוק של סיפרה אחת לאחר הנקודה.)



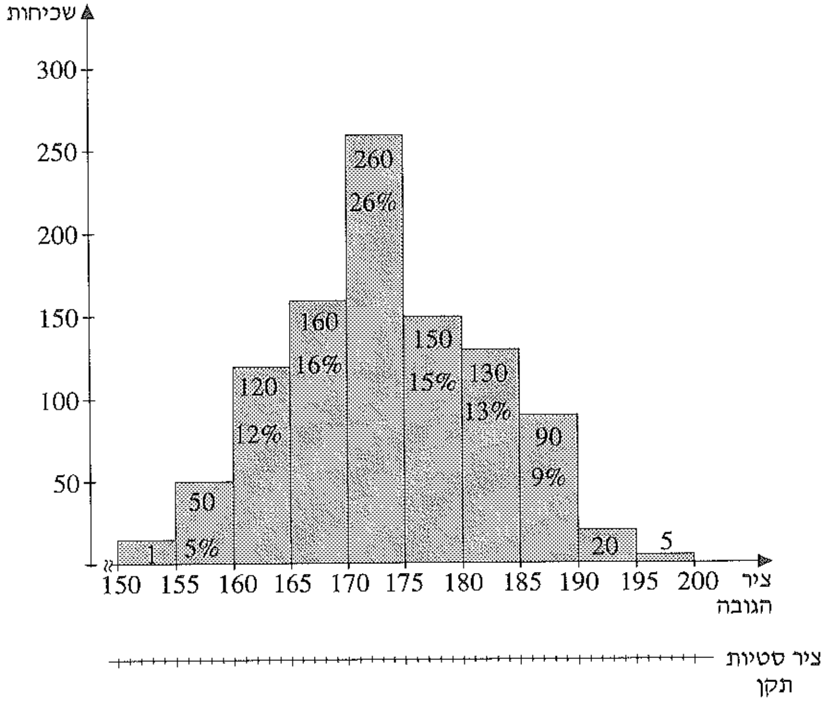
ג) סמן את הממוצע על ציר המסמרים.

ד) סמן, על ציר המסמרים, נקודות המתאימות למספרים הנמצאים סטיית תקן אחת מעל הממוצע וסטיית תקן אחת מתחת לממוצע.
סמן על הציר, נקודות המתאימות למספרים הנמצאים 2 סטיות תקן מעל ומתחת לממוצע.

ה) סמן על ציר "סטיות התקן", במקומות המתאימים, את המספרים
$-2, -1, 0, 1, 2$

(ע"ע) 3. לפניך היסטוגרם המתאר גבהים של 1000 נבדקים בוגרים.

הממוצע $\bar{x} \approx 173$ סטיית התקן $S \approx 9$.



א) סמן על ציר הגובה את הממוצע.

ב) סמן על ציר הגובה את המקום של סטיית תקן אחת ו 2 סטיות תקן מעל ומתחת לממוצע.

ג) סמן על ציר "סטיות התקן" את מספרי הסטיות המתאימות.

4. א) הגרפים של תרגילים 1 ו 2 נמצאים על דף שקוף בסוף הספר. גזור והנח על גרף 3 כך שהממוצעים יתלכדו.

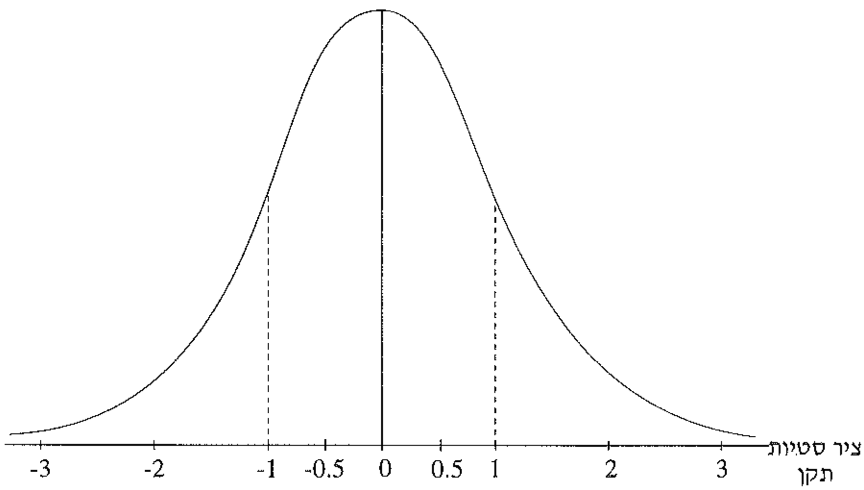
- מה תוכל לומר על מקומם של "סטיות התקן" בכל הגרפים?

תופעות שהתנהגותן דומה להתנהגות התופעות המתוארות בתרגילים 1-3 נקראות "תופעות המתפלגות נורמלית".
צורת הגרף, המתאר שכיחות של תופעות כאלה, דומה לגרפים שהתקבלו: הגרף סימטרי, קו הסימטריה הוא "קו הממוצע", רוב האוכלוסיה נמצא מסביב לממוצע וככל שהמרחק מהממוצע גדֵל השכיחות קטֵנה.

ב) בחר אחד מהגרפים וחשב בערך איזה אחוז מהאוכלוסיה נמצא בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע וסטית תקן אחת מעל לממוצע.
(1– עד 1).
(השווה עם תוצאה של חבר שחישב עבור גרף אחר).

אילו ניתן היה לתאר את גרף השכיחויות (ההתפלגות) של תופעות **כאלה**, לגבי **כל** האוכלוסיה שבה מדובר, היה מתקבל גרף **דומה** לגרף המשורטט כאן בהמשך.

גרף של התפלגות נורמלית.



ג) הנח את הגרפים השקופים על עקומת ההתפלגות הנורמלית.
בגרף זה 68% של השטח, שמתחת לעקומה, נמצא בין 1– ל 1. (כלומר, בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע וסטיית תקן אחת מעליה).
- השווה עם תוצאות החישוב בסעיף ב'.
כמו כן חישבו ומצאו ש: 95% מהשטח נמצאים בין 2– ל 2.
כמובן שמתחת לעקומה כולה נמצא 100% של השטח.

משתמשים בגרף זה כמודל לחישוב אחוזי אוכלוסיה שבין סטיות תקן נתונות. מחישוב זה אפשר להסיק מסקנות על אחוזי האוכלוסיה הנמצאים בין הציונים עצמם, למשל גבהים.

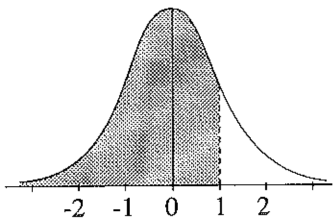
בסוף הפרק (עמ' 115, 117), תמצא שני דפים שבכל אחד מהם טבלה של התפלגות נורמלית מצטברת. גזור **אחד** את הטבלה בעמוד 117.

בטבלה תמצא את השטח הנמצא מתחת לעקומה הזו החל בקצה השמאלי ועד לסטית התקן הנתונה. כלומר, אחוז האוכלוסיה מהקצה התחתון עד לסטיית התקן.

ע"ע 5. א) קרא מהטבלה מהו השטח עד 1.

ב) מה השטח עד 0.2 ?

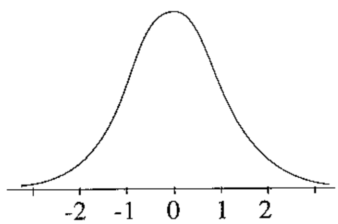
ג) מה השטח עד -1.3 ?



ד) - מה השטח עד 1.5 ?

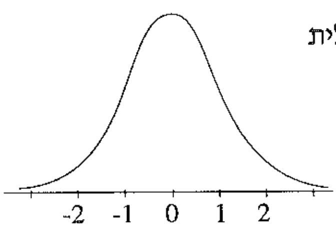
- מה השטח עד -1.5 ?
- מה השטח שבין -1.5 ל- 1.5 ?

צבע בגרף.



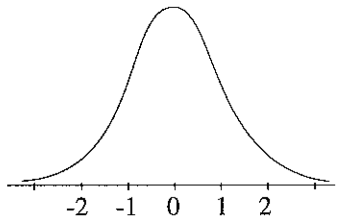
ה) איזה אחוז של אוכלוסיה המתפלגת נורמלית נמצא מתחת לסטיית תקן של 0.75 ?

- צבע את השטח המתאים בגרף.

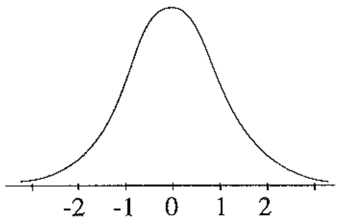


6. צבע, על גרף ההתפלגות המשורטט, את השטח המבוקש, היעזר בטבלה ומצא אותו.

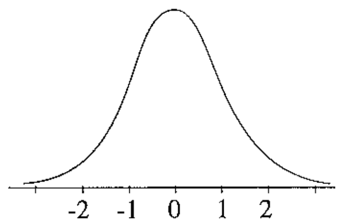
א) מתחת לסטית תקן ‎–0.5.



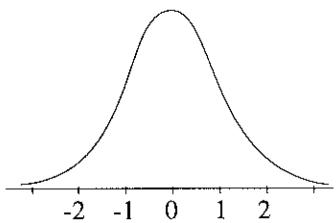
ב) מעל סטיית תקן ‎–0.5.



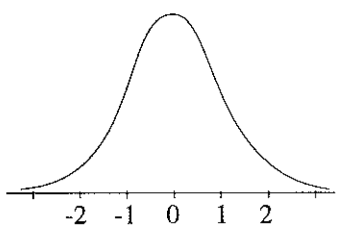
ג) מעל 0.75 סטיות תקן.



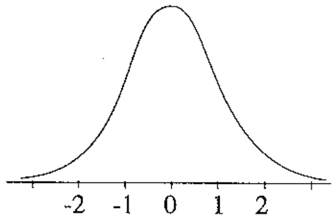
ד) מתחת ל ‎–0.75 סטיות.



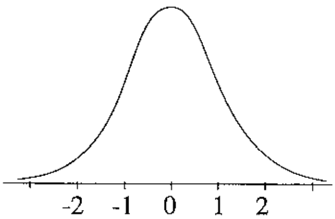
ה) בין ‎–0.75 ל 0.75 סטיות תקן.



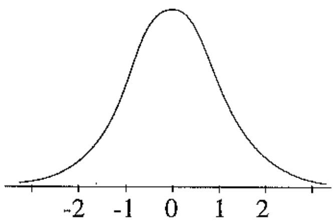
ו) עד 1.4 סטיות תקן.



ז) מתחת ל –0.7 סטיות תקן.



ח) בין –0.7 ל +1.4 סטיות תקן.



7. מצא את אחוז האוכלוסיה, המתפלגת נורמלית, שציונו נתון.
(היעזר בשרטוט עקומה וסימון השטח המתאים):

א) מתחת ל –1.2 סטיות תקן.

ב) מעל שתי סטיות תקן.

ג) מעל –0.75 סטיות תקן.

ד) בין –0.5 סטיות תקן, ו 0.5 סטיות תקן.

ה) בין 0.5 סטיות תקן, ו 1.5 סטיות תקן.

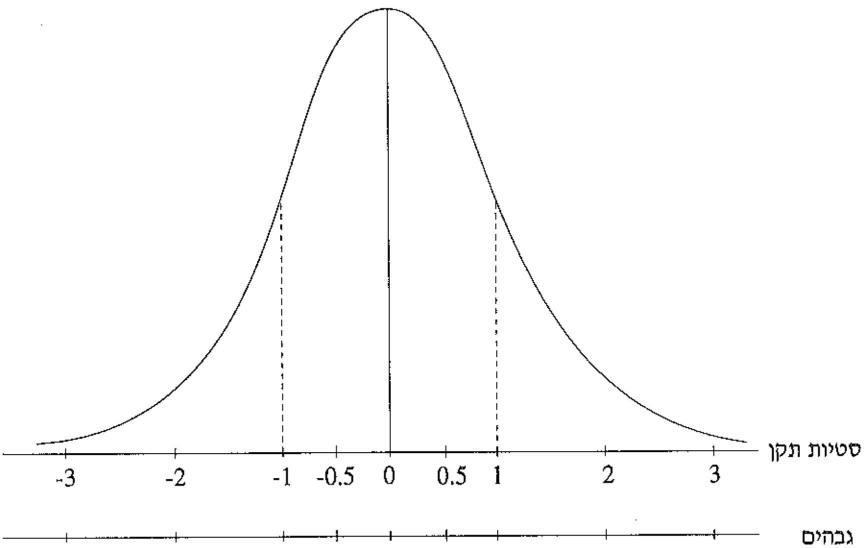
ו) בין –0.5 סטיות תקן, ו 1.5 סטיות תקן.

ז) בין –1.2 סטיות תקן, ו –0.4 סטיות תקן.

ציון תקן

1. גובה ממוצע של תלמידי תיכון הוא 170 ס"מ וסטיית התקן 8 ס"מ.

א) השלם את הגבהים בנקודות המסומנות על ציר "הגבהים".



ב) כמה סטיות תקן מעל, או מתחת לממוצע נמצא נער שגובהו:

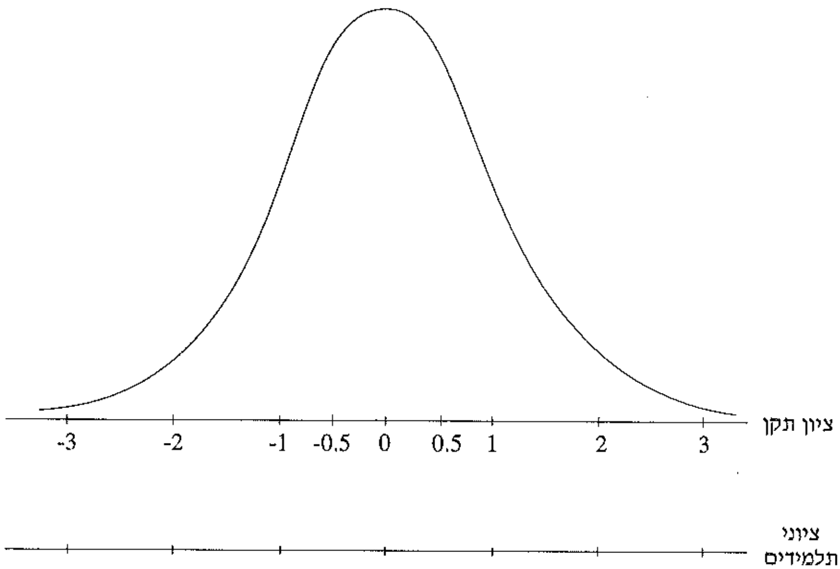
178 ס"מ 162 ס"מ 174 ס"מ 158 ס"מ 154 ס"מ

180 ס"מ 194 ס"מ 152 ס"מ 164 ס"מ

המספרים שרשמת נקראים **ציוני התקן** של הגבהים.

2. ציון ממוצע, במבחן משוב ארצי, היה 75 וסטיית התקן 6.

א) השלם את הציונים בנקודות המסומנות על ציר הציונים.



ב) - בין אלו שתי סטיות תקן נמצא תלמיד שציונו 89 ?

- חלק את הקטע המתאים, על ציר ציוני התלמידים ל 6 חלקים.
סמן את מקום הציון 89 בשני הצירים.

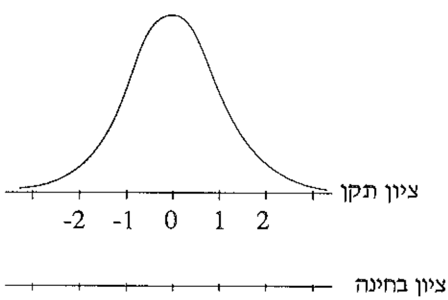
- מה ציון התקן המתאים לתלמיד זה?

ג) מה ציון התקן המתאים לתלמיד שציונו 65 ?

ד) מה ציון התקן המתאים לתלמיד שציונו 80 ?

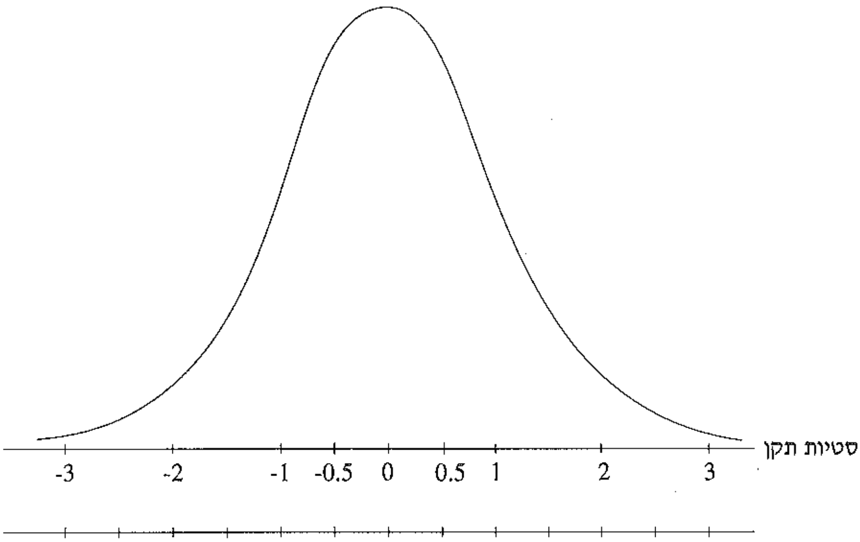
ה) מה ציון התקן המתאים לתלמיד שציונו 60 ?

3. באוניברסיטה ניתנו מבחנים לדרוג תלמידים, איזה ציון טוב יותר:
ציון של 65 בבחינה שהממוצע בה הוא 62 וסטיית התקן 5.
או ציון של 72 בבחינה שהממוצע בה הוא 68 וסטיית התקן 8.



4. ציוני בחינות בית ספר גדול מתפלגים נורמלית.
הציון הממוצע 75 וסטיית התקן 15.

א) רשום על הציר התחתון את הציונים המתאימים לציוני התקן הרשומים על הציר העליון.

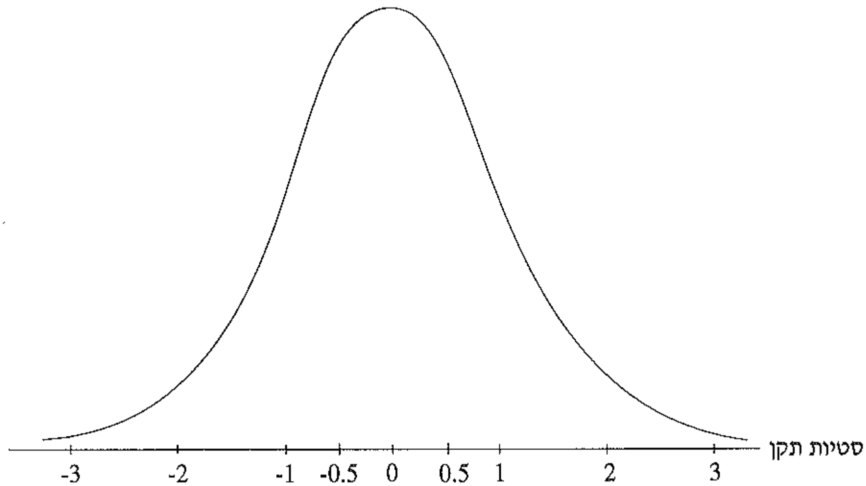


ב) הוסף על הציר התחתון את הציונים 55 , 70 , 80 , 100.
הוסף על ציר ציוני התקן את הציונים המתאימים.

ג) מצא איזה אחוז מהתלמידים קיבלו פחות מ 80 ?
איזה אחוז מהתלמידים קיבלו יותר מ 80 ?
איזה אחוז מהתלמידים קיבלו פחות מ 70 ?
איזה אחוז מהתלמידים קיבלו יותר מ 70 ?
איזה אחוז מהתלמידים קיבלו בין 70 ל 80 ?
איזה אחוז מהתלמידים קיבלו בין 55 ל 90 ?

5. ציוני I.Q מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 וסטית תקן 15.

א) רשום ערכים מתאימים על ציר ציוני .I.Q



ציוני I.Q.

ב) לאיזה אחוז מהאוכלוסיה .I.Q גבוה מ 115?

ג) מה ההסתברות שאם נבחר באקראי אדם מהאוכלוסיה ציון ה .I.Q שלו גבוה מ 115?

משתמשים בעקומה הנורמלית גם לחישובי הסתברויות (דוגמת סעיף ג'). ההסתברות היא בעצם אחוז האוכלוסיה המתאים למאורע, וכידוע אחוז האוכלוסיה, או ההסתברות, נמדד בעזרת השטח המתאים שמתחת לעקומה.

ד) מה ההסתברות שאם נבחר באקראי אדם, ציון ה I.Q שלו:
- נמוך מ 110 ?
- גבוה מ 90 ?
- בין 90 ל 110 ?

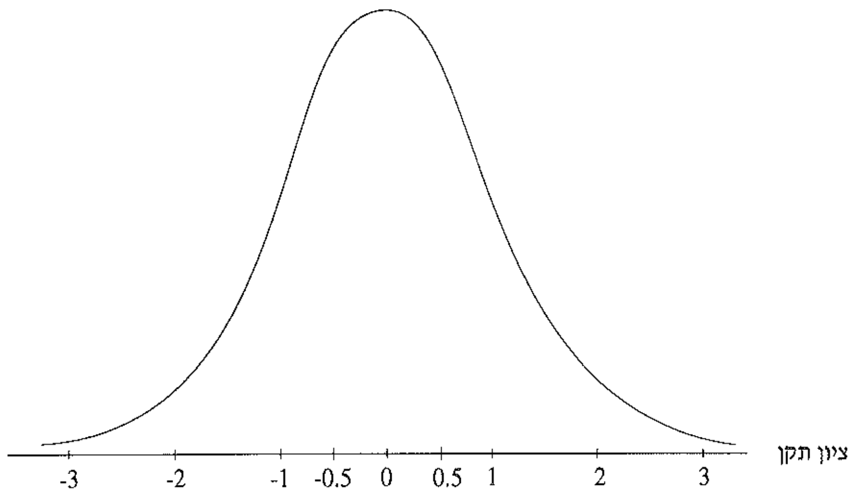
ה) מה הציון המתאים ל 2.5 סטיות תקן מעל הממוצע ?
לאיזה אחוז של האוכלוסיה .I.Q גבוה מהציון שרשמת ?

6. הישגים בתחרויות של ריצת 2000 מ' בנים בתיכון, מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן של דקה אחת.

א) להישג של 9 דקות מתאים ציון תקן 0.5.

סמן על הצירים.

מה הממוצע ?



הישג בריצה ____

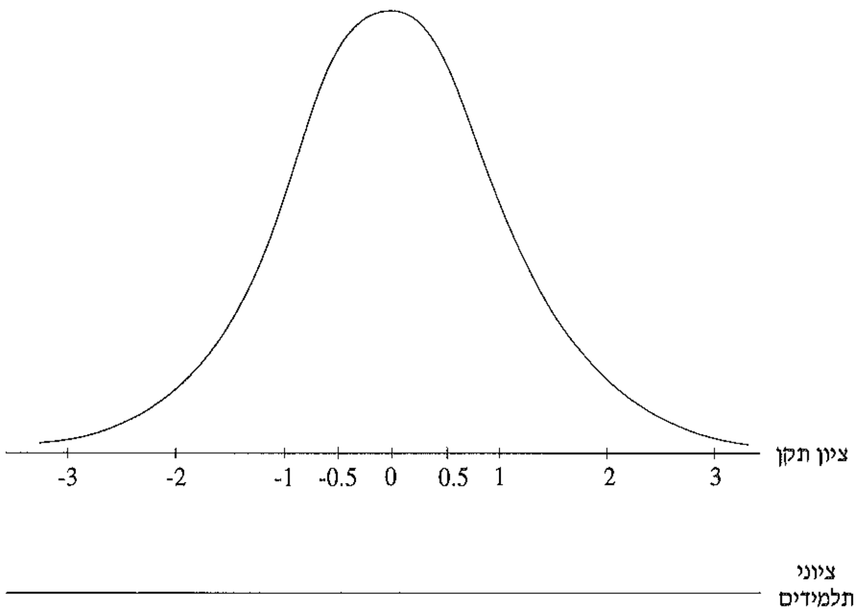
ב) לאיזה אחוז מהאוכלוסיה הישג בריצה שהוא פחות מ 7.5 דקות?

ג) מה ההסתברות, לבחור באקראי תלמיד תיכון, שהישגו בריצה **יותר** מ 9.5 דקות.

תרגילים

7. במבחני משוב ארצי הציון הממוצע 7 וסטית התקן 1.5.

א) בהנחה שהתפלגות הציונים נורמלית, רשום על קו ציוני תלמידים, את הערכים המתאימים לנקודות המסומנות על ציר ציוני התקן.



ב) מה ציוני התקן של תלמידים שקבלו את הציונים:
7.75, 7.5, 5.5, 4, 10, 5.

ג) ציון התקן של תלמיד הוא 0.5 – מה ציונו במבחן ?

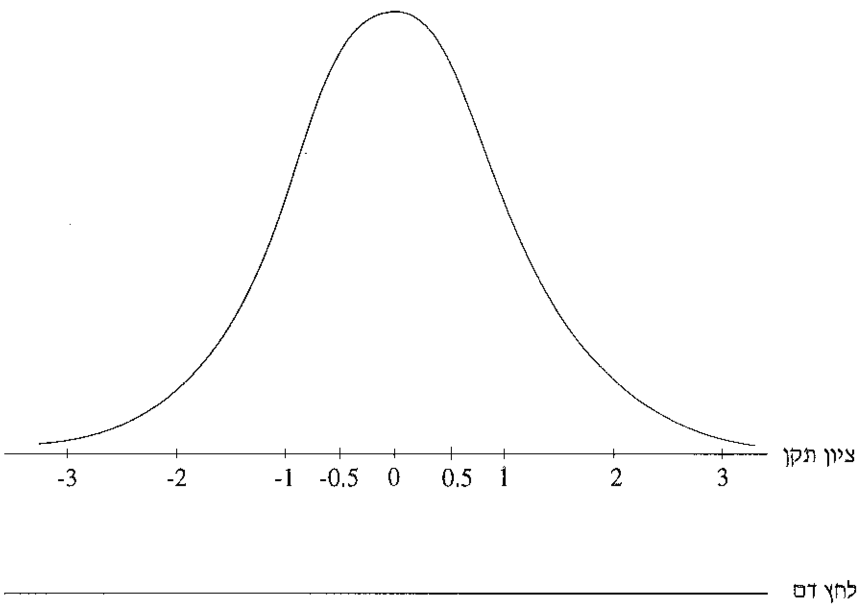
ד) ציון התקן של תלמיד הוא 1.25 מה ציונו במבחן ?

ה) ציון התקן של תלמיד הוא 0.8 – מה ציונו במבחן ?

8. לחץ הדם של מבוגרים, המבוטחים בקופת חולים "לבריאות", מתפלג נורמלית. הממוצע 122 וסטיית התקן 16. (מדובר בערך הגבוה של מידת לחץ הדם.)

א) רשום על ציר "לחץ הדם" את הערכים בנקודות המסומנות.

ב) סמן על שני הצירים, ערכים מתאימים ללחץ דם של: 134, 140, 150, 110, 100.



ג) היעזר בגרף ובטבלה ומצא:

- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **נמוך** מ 130 ?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **גבוה** מ 130 ?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **נמוך** מ 140 ?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **גבוה** מ 110 ?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם בין 110 ל 140 ?
- לאיזה אחוז מהמבוטחים לחץ דם **גבוה** מ 150 ?

9. אורך החיים של נורות מתפלג נורמלית עם ממוצע של 720 שעות וסטיית תקן של 90 שעות.

א) שרטט סקיצה של התפלגות נורמלית עם ציר ציוני תקן וציר "אורך חיים של נורות".

ב) היעזר בגרף ובטבלה ומצא:
- איזה אחוז של הנורות דולקות יותר מ 765 שעות ?
- איזה אחוז של הנורות דולקות פחות מ 500 שעות ?
- מה ההסתברות שנורה תדלוק פחות מ 400 שעות ?
- מה ההסתברות שנורה תדלוק בין 720 ל 840 שעות ?

10. הגובה הממוצע של תלמידים הוא 168 ס"מ וסטיית התקן היא 12 ס"מ. בהנחה שהתפלגות הגבהים נורמלית.

א) מה ההסתברות שאם נבחר באקראי תלמיד מקבוצה זו, גובהו יהיה בין 165 ס"מ ל 177 ס"מ.

ב) ידוע שבקבוצה 10000 תלמידים. כמה תלמידים בערך, גובהם בין 165 ס"מ ל 177 ס"מ.

11. באיזור מסוים נערכו מבחנים משווים בהבנת הנקרא.
במבחן הראשון הציון הממוצע היה 75 וסטיית התקן 10.
במבחן השני הציון הממוצע היה 62 וסטיית התקן 5.

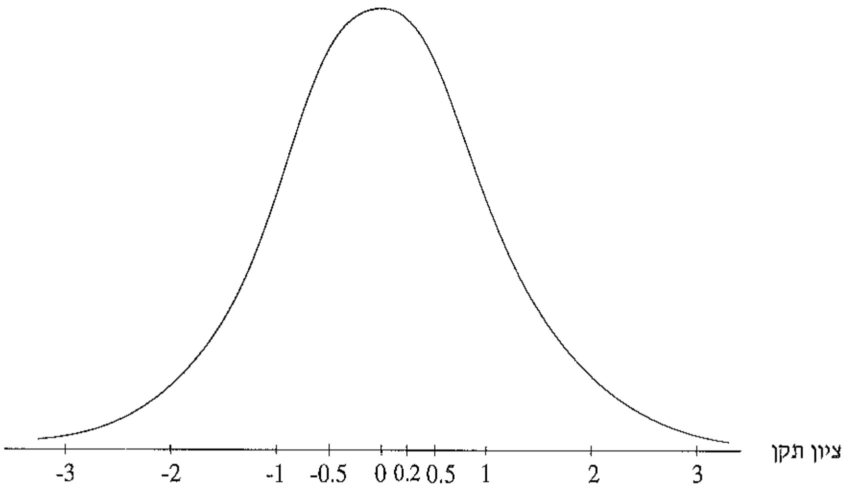
א) איזה ציון טוב יותר יחסית: 80 בראשון או 65 בשני.

ב) איזה ציון במבחן הראשון "שקול" ל 66 במבחן השני ?

12. כמות צריכת החלב למשפחה ביום מתפלגת נורמלית, עם סטיית תקן של 500 מ"ל. צריכה של 1000 מ"ל (1 ליטר) מתאימה לציון תקן של 0.2.

א) מה ממוצע צריכת החלב למשפחה ביום ?
(רשום על הצירים את כל הנתונים.)

ב) איזה אחוז של המשפחות צורכות פחות מ 2000 מ"ל (2 ליטר) ביום?



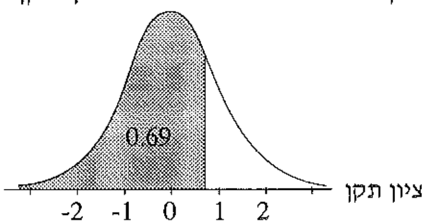
צריכת חלב

ג) מה ההסתברות לבחור באקראי משפחה שצריכת החלב שלה **נמוכה** מ 500 מ"ל ?

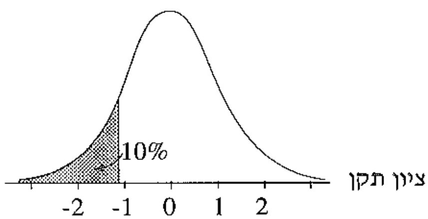
מאחוז האוכלוסיה לציון תקן

בסעיפים הקודמים למדת, שאפשר מהגרף ומהטבלה של ההתפלגות הנורמלית להסיק מהו אחוז האוכלוסיה שנמצא מתחת, או מעל לציון תקן נתון.
בסעיף זה תלמד כיצד להסיק מאחוז אוכלוסיה נתון את ציון התקן המתאים (ומכאן את הציון האמיתי המתאים).

1. א) מצא **בתוך** הטבלה, את המספר הקרוב ביותר ל 0.69 איזה ציון תקן מתאים לו ?
סמן על ציר ציוני התקן.



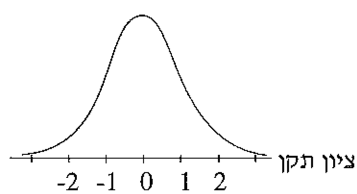
ב) מצא את ציון התקן המתאים ורשום על הציר.

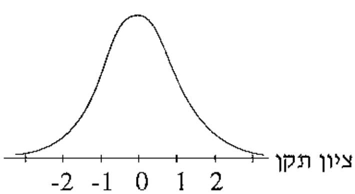


2. קווקו את השטח המתאים על הגרף ומצא ציון תקן המתאים לאחוז האוכלוסיה הנתון.

א) 75% מהאוכלוסיה נמצא מתחתיו.

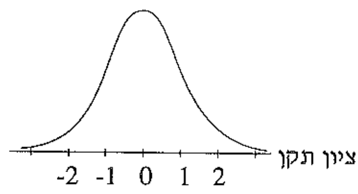
ב) 25% מהאוכלוסיה נמצא מעליו (רבעון עליון).



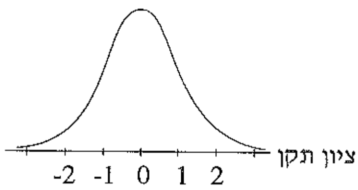


המשך ←

ג) 40% מהאוכלוסיה
גבוה ממנו.

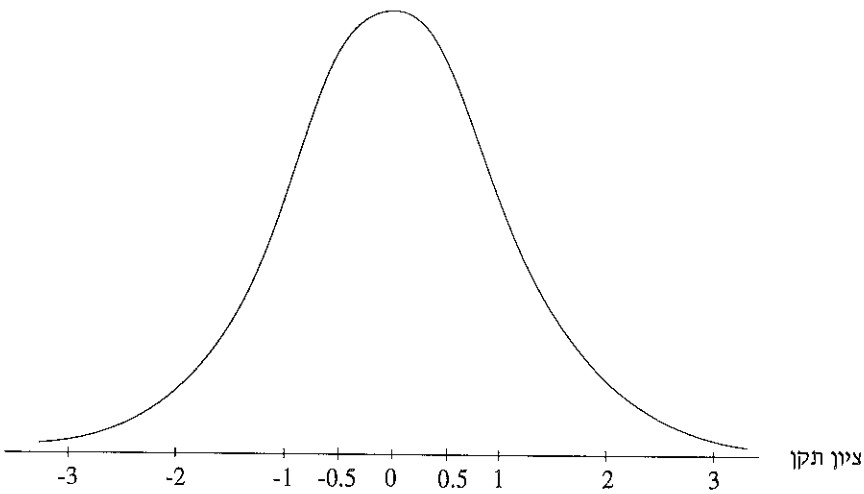


ד) 60% מהאוכלוסיה
גבוה ממנו.



3. משקל של נשים בפֶּטלַנד מתפלג נורמלית עם ממוצע של 68 ק״ג וסטיית תקן של 5 ק״ג.

א) רשום את הנתונים על ציר המשקל.



משקל

ב) מהו **ציון התקן**, שמשקלן של 75% אחוז מהנשים קטן ממנו.
(סמן את השטח בגרף, רשום את ציון התקן המתאים על הציר.)

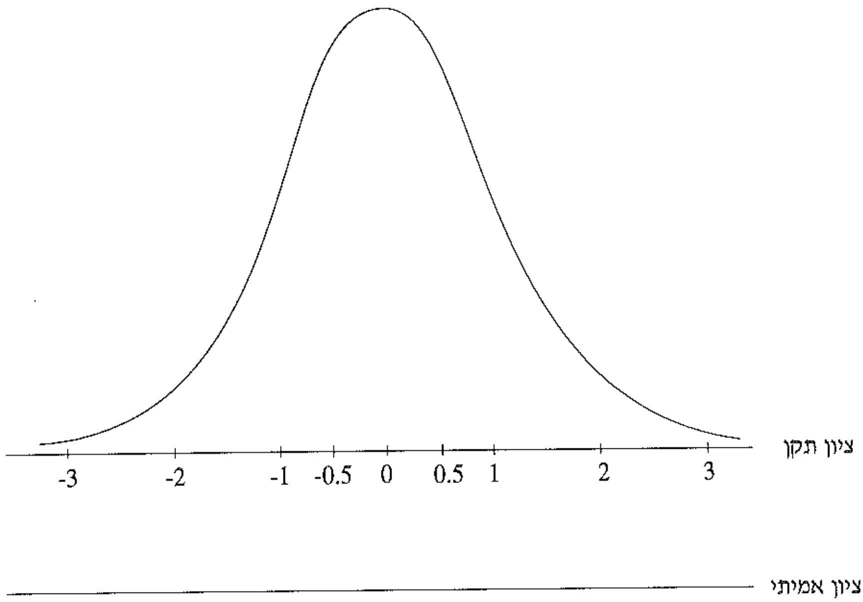
ג) רשום את **המשקל**, המתאים לציון התקן הנ״ל, על ציר המשקל.

ד) רשום **משקל** כך שמשקלן של 80% מהנשים **גדול** ממנו ?

ה) רשום **משקל** כך שמשקלן של 20% מהנשים **קטן** ממנו ?

4. הציונים של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 10.
לציון 55 מתאים ציון של -1.5.

א) מה הממוצע במבחן ? (היעזר בסימון הנתונים על הצירים.)



ב) רשום ציון תקן, וציון אמיתי, ש- 25% מהנבחנים קיבלו ציון נמוך ממנו.

מצאת את הציון המתאים לרבעון התחתון.

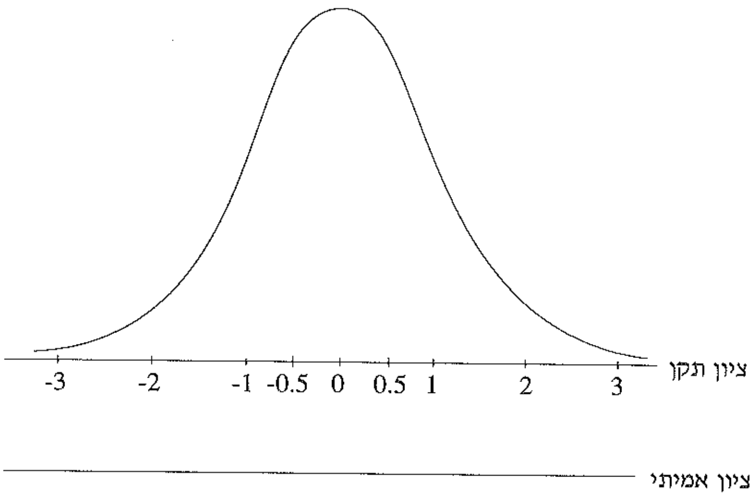
ג) מצא ציון תקן וציון אמיתי, ש 25% מהנבחנים קיבלו ציון גבוה ממנו.

מצאת את הציון המתאים לרבעון העליון.

תרגולים

5. ציוני בחינה של אוכלוסיה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 78 וסטיית תקן 10.

א) רשום ציונים מתאימים על ציר ציוני הבחינה.



ב) מצא ציון אמיתי, שציוני 60% מהאוכלוסיה נמוכים ממנו.
(סמן תחילה שטח מתאים של הגרף, רשום וסמן ציון תקן וציון אמיתי.)

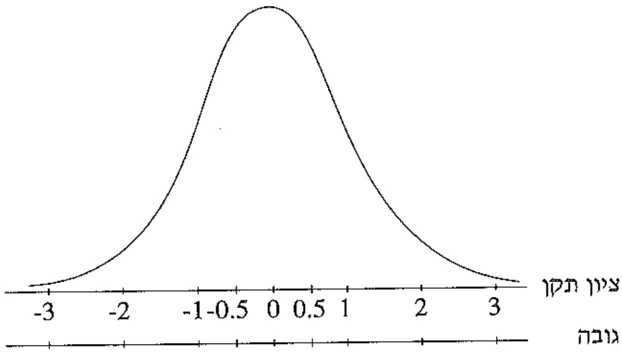
ג) מצא ציון אמיתי, שציוני 75% מהאוכלוסיה גבוהים ממנו.
(חזור על השלבים הנ"ל)

ד) מצא ציון אמיתי, שציוני 25% מהאוכלוסיה נמוכים ממנו. (רבעון תחתון).

ה) מצא ציון אמיתי, שציוני 32% מהאוכלוסיה גבוהים ממנו.

6. הגבהים של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית, עם סטיית תקן 6 ס"מ. לגובה 174 ס"מ מתאים ציון תקן של 1.5.

א) מה ממוצע הגבהים של האוכלוסיה? (היעזר בסימון הנתונים על הצירים.)



ב) מצא ציון תקן שגובה 40% מהאוכלוסיה קטן ממנו.
מה הגובה המתאים לציון התקן שמצאת?

7. הישגים בקפיצה למרחק של בנות בתיכון, מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 10 ס"מ.

לקפיצה למרחק של 230 ס"מ מתאים ציון תקן של 0.5.

א) מה ממוצע ההשגים בקפיצה למרחק של בנות בתיכון ?

ב) מצא ציון תקן והישג בקפיצה למרחק, שהישגי 70% מהאוכלוסיה נמוכים ממנו.

ג) מה ההסתברות, שההישג של תלמידת תיכון שנבחרה באקראי, גבוה מ 2.80 מ'.

תרגילים נוספים

1. הגובה של בנים בגיל גיוס מתפלג נורמלית. הממוצע 174 ס"מ וסטיית תקן 8 ס"מ.

א) מה ההסתברות שאם נבחר מתגייס באקראי, גובהו קטן מ 179 ס"מ.

ב) מה ההסתברות שאם נבחר שני מתגייסים באקראי הגובה של **שניהם** יהיה מתחת ל 179 ס"מ ?
(שרטט ריבוע שטח או עץ לתאור כל האפשרויות).

ג) מה ההסתברות, שאם נבחר שני מתגייסים באקראי, גובה של אחד מהם יהיה קטן מ 179 ס"מ ושל השני גדול מ 179 ס"מ ?

2. ציוניהם של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית, עם ממוצע 75 וסטיית תקן 12 .

א) מצא ציון, שלרבע מהתלמידים ציון גבוה ממנו.
(שרטט עקומה, ציר ציוני תקן וציר ציונים אמיתיים והיעזר בהם).

ב) בוחרים באקראי תלמיד מהאוכלוסיה. מה ההסתברות שהציון שלו בין 63 ל 93?

ג) בוחרים באקראי שני תלמידים מהאוכלוסיה. מה ההסתברות שהציון של שניהם בין 63 ל 93 ?

3. ציוני בחינות של אוכלוסית תלמידים מתפלגים נורמלית.
סטיית התקן 12 והציון שרבע מהציונים גבוהים ממנו הוא 82 (רבעון עליון).

א) מצא את ציון התקן המתאים.
(היעזר בעקומה נורמלית, בציר ציוני תקן וציר ציונים אמיתיים).

ב) מצא את הממוצע.

ג) מצא את הציון, שרבע מהציונים נמוכים ממנו (רבעון תחתון).

4. סדרת מספרים מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן 20 .
לאיבר בסדרה שערכו 71 מתאים ציון תקן של 0.6 .
א) חשב את הממוצע.
(היעזר בשרטוט העקומה והצירים.)
ב) מה ההסתברות, שאיבר שנבחר באקראי מסדרה זו, יהיה נמוך מ 80?
ג) מה ההסתברות **שמשני** איברים שנבחרו באקראי מסדרה זו, יהיה האחד נמוך מ 80 והשני גבוה מ 80 ?

5. הישגים בקפיצה לגובה, של בנים בגיל תיכון, מתפלגים נורמלית עם ממוצע 1.45 מ׳.
לקפיצה של 1.50 מ׳ מתאים ציון תקן של 0.5 .
א) מהי סטיית התקן ?
ב) מה ההסתברות, לבחור באקראי נער, שההישג שלו בקפיצה לגובה הוא בין 1.30 מ׳ ל 1.70 מ׳.

6. תוצאות במבחני משוב במתמטיקה מתפלגים נורמלית.
במבחן המשוב במתמטיקה קיבל אבי ציון 70 .
הממוצע הארצי במבחן היה 60 וסטיית התקן 5.
במבחן המשוב בעברית קיבל דני 85.
הממוצע הארצי במבחן היה 73 וסטיית התקן 7.5.
באיזה משני המבחנים, יש אחוז גדול יותר של תלמידים שקיבלו ציון גבוה מזה של אבי.

7. ציונים של מבחני כניסה, למוסד להשכלה גבוהה, מתפלגים נורמלית.
בשנה מסוימת התקבלו למוסד 30% מהנבחנים. (בעלי ההישגים הגבוהים ביותר.)
הממוצע במבחן היה 77 וסטיית התקן 12. דני קיבל 83 . האם הוא התקבל ללימודים?
בשנה שלאחר מכן נרשם דני לאותו מוסד, על סמך המבחן בו נבחן שנה קודם. (הציון שקיבל 83.)
בשנה זו התקבלו רק 25% מהנבחנים.
הממוצע היה שוב 77 וסטיית התקן 8.5, האם הפעם דני התקבל ?

טבלה של התפלגות נורמלית מצטברת

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
-2.9	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
-2.8	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
-2.7	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
-2.6	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
-2.5	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
-2.4	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006
-2.3	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008
-2.2	0.014	0.014	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011
-2.1	0.018	0.017	0.017	0.017	0.016	0.016	0.015	0.015	0.015	0.014
-2.0	0.023	0.022	0.022	0.021	0.021	0.020	0.020	0.019	0.019	0.018
-1.9	0.029	0.028	0.027	0.027	0.026	0.026	0.025	0.024	0.024	0.023
-1.8	0.036	0.035	0.034	0.034	0.033	0.032	0.031	0.031	0.030	0.029
-1.7	0.045	0.044	0.043	0.042	0.041	0.040	0.039	0.038	0.038	0.037
-1.6	0.055	0.054	0.053	0.052	0.051	0.049	0.048	0.047	0.046	0.046
-1.5	0.067	0.066	0.064	0.063	0.062	0.061	0.059	0.058	0.057	0.056
-1.4	0.081	0.079	0.078	0.076	0.075	0.074	0.072	0.071	0.069	0.068
-1.3	0.097	0.095	0.093	0.092	0.090	0.089	0.087	0.085	0.084	0.082
-1.2	0.115	0.113	0.111	0.109	0.107	0.106	0.104	0.102	0.100	0.099
-1.1	0.136	0.133	0.131	0.129	0.127	0.125	0.123	0.121	0.119	0.117
-1.0	0.159	0.156	0.154	0.152	0.149	0.147	0.145	0.142	0.140	0.138
-0.9	0.184	0.181	0.179	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161
-0.8	0.212	0.209	0.206	0.203	0.200	0.198	0.195	0.192	0.189	0.187
-0.7	0.242	0.239	0.236	0.233	0.230	0.227	0.224	0.221	0.218	0.215
-0.6	0.274	0.271	0.268	0.264	0.261	0.258	0.255	0.251	0.248	0.245
-0.5	0.309	0.305	0.302	0.298	0.295	0.291	0.288	0.284	0.281	0.278
-0.4	0.345	0.341	0.337	0.334	0.330	0.326	0.323	0.319	0.316	0.312
-0.3	0.382	0.378	0.374	0.371	0.367	0.363	0.359	0.356	0.352	0.348
-0.2	0.421	0.417	0.413	0.409	0.405	0.401	0.397	0.394	0.390	0.386
-0.1	0.460	0.456	0.452	0.448	0.444	0.440	0.436	0.433	0.429	0.425
-0.0	0.500	0.496	0.492	0.488	0.484	0.480	0.476	0.472	0.468	0.464
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

טבלה של התפלגות נורמלית מצטברת

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
-2.9	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
-2.8	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
-2.7	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003
-2.6	0.005	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004	0.004
-2.5	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
-2.4	0.008	0.008	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0.007	0.007	0.006
-2.3	0.011	0.010	0.010	0.010	0.010	0.009	0.009	0.009	0.009	0.008
-2.2	0.014	0.014	0.013	0.013	0.013	0.012	0.012	0.012	0.011	0.011
-2.1	0.018	0.017	0.017	0.017	0.016	0.016	0.015	0.015	0.015	0.014
-2.0	0.023	0.022	0.022	0.021	0.021	0.020	0.020	0.019	0.019	0.018
-1.9	0.029	0.028	0.027	0.027	0.026	0.026	0.025	0.024	0.024	0.023
-1.8	0.036	0.035	0.034	0.034	0.033	0.032	0.031	0.031	0.030	0.029
-1.7	0.045	0.044	0.043	0.042	0.041	0.040	0.039	0.038	0.038	0.037
-1.6	0.055	0.054	0.053	0.052	0.051	0.049	0.048	0.047	0.046	0.046
-1.5	0.067	0.066	0.064	0.063	0.062	0.061	0.059	0.058	0.057	0.056
-1.4	0.081	0.079	0.078	0.076	0.075	0.074	0.072	0.071	0.069	0.068
-1.3	0.097	0.095	0.093	0.092	0.090	0.089	0.087	0.085	0.084	0.082
-1.2	0.115	0.113	0.111	0.109	0.107	0.106	0.104	0.102	0.100	0.099
-1.1	0.136	0.133	0.131	0.129	0.127	0.125	0.123	0.121	0.119	0.117
-1.0	0.159	0.156	0.154	0.152	0.149	0.147	0.145	0.142	0.140	0.138
-0.9	0.184	0.181	0.179	0.176	0.174	0.171	0.169	0.166	0.164	0.161
-0.8	0.212	0.209	0.206	0.203	0.200	0.198	0.195	0.192	0.189	0.187
-0.7	0.242	0.239	0.236	0.233	0.230	0.227	0.224	0.221	0.218	0.215
-0.6	0.274	0.271	0.268	0.264	0.261	0.258	0.255	0.251	0.248	0.245
-0.5	0.309	0.305	0.302	0.298	0.295	0.291	0.288	0.284	0.281	0.278
-0.4	0.345	0.341	0.337	0.334	0.330	0.326	0.323	0.319	0.316	0.312
-0.3	0.382	0.378	0.374	0.371	0.367	0.363	0.359	0.356	0.352	0.348
-0.2	0.421	0.417	0.413	0.409	0.405	0.401	0.397	0.394	0.390	0.386
-0.1	0.460	0.456	0.452	0.448	0.444	0.440	0.436	0.433	0.429	0.425
-0.0	0.500	0.496	0.492	0.488	0.484	0.480	0.476	0.472	0.468	0.464
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.520	0.524	0.528	0.532	0.536
0.1	0.540	0.544	0.548	0.552	0.556	0.560	0.564	0.567	0.571	0.575
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.610	0.614
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.670	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.800	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839
1.0	0.841	0.844	0.846	0.848	0.851	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.900	0.901
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.910	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.960	0.961	0.962	0.962	0.963
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.971
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977
2.0	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.980	0.980	0.981	0.981	0.982
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989
2.3	0.989	0.990	0.990	0.990	0.990	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
3.0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

מבחר תשובות

פרק א' – דרכי ייצוג לחישוב הסתברויות

שכיחות יחסית והסתברות (עמודים 10 - 15)

.5 א) 19 עובדים ב) $\frac{19}{25}$ ג) $\frac{6}{25}$ ד) $\frac{3}{5}$

ה) סכום המשכורות 225500 ש"ח

ו) ממוצע המשכורות 9020 ש"ח. ז) $\frac{24}{25}$

.6 1 מופיע ארבע פעמים ו 2 מופיע פעמיים.

.7 בשלב ראשון ענתה על 0.75 מהשאלות ובשלב שני על 0.8 מהן.

.9 4000 תושבים

1100 תושבים

1300 תושבים

.10 א) 0.2 ב) 0.7 ג) 0.8 ד) 1.

.11 א) $\frac{3}{110}$ ב) $\frac{18}{55}$ ג) $\frac{41}{110}$

ד) החציון נמצא בקבוצת המשקל: 48 ק"ג - 51.9 ק"ג.

.13 ל 4000 תושבים בערך, יש סוג דם A.

.14 סביר להניח שבקופסה 4 כדורים שחורים וכדור אחד לבן.

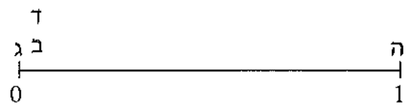
.15 א) ההסתברות היא $\frac{1}{4}$ ב) לא ניתן לדעת.

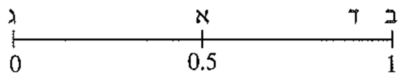
ג) לא ניתן לדעת. ד) ההסתברות היא $\frac{1}{10}$.

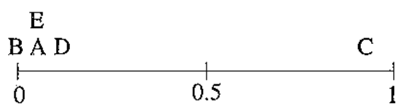
קו סיכוי (עמודים 16 - 19)

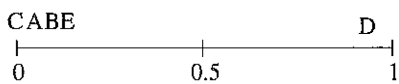
2. א) בלתי אפשרי ב) אפשרי ג) בלתי אפשרי ד) אפשרי
ה) וודאי

5. שעון א׳ 0.3 שעון ב׳: 0.75

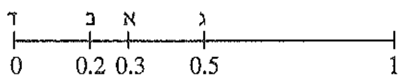
6.


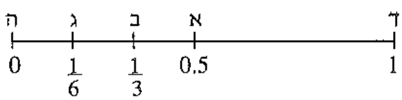
7.


8.


9.


תוצאות שוות הסתברות (עמודים 20 - 29)

1.


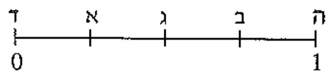
2.


3. ניצן אינה צודקת. ההסתברות תלויה במספר האנשים בכל מדינה, במספר המועמדים לנשיאות ובגורמים נוספים.

4. א) רינה צודקת מאחר והתוצאות שרשמה שוות הסתברות.
ד) כמובן שאין הבדל כשזורקים מטבעות זהות.

5. ב) מאורע A: $\frac{1}{2}$ מאורע B: $\frac{1}{8}$
ג) i) ההסתברות שיהיו 2 בנים גדולה יותר.
ii) ההסתברות של שני המאורעות שווה.
iii) ההסתברות שיהיו לכל היותר 2 בנים גדולה יותר.

6.



7. א) 0.2 ב) 0.98 ג) 0.2

8. א) איילת ב) $\frac{1}{3}$ ג) $\frac{2}{3}$

9. א) $\frac{19}{40}$, $\frac{29}{40}$, $\frac{8}{40}$, 1, 1, 0
ב) 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{13}{40}$, $\frac{6}{40}$

10. ב) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$

11. א) $\frac{1}{3}$ ב) $\frac{5}{6}$

12. א) 0.25 ב) 0.25

13. א) 2 רשום על פיאה אחת, 3 על שתי פיאות, ו 1 על שלוש פיאות.
ב) ההסתברות לקבל 1 היא $\frac{1}{2}$.

14. יתכן, כאשר על 3 פיאות מופיע *, על פיאה אחת ○, ועל 2 פיאות Δ.

15. * מופיע על 4 פיאות ו Δ על 2 פיאות.

16. ההסתברות שהמחוג יעצור ב C היא 0.3 .

17. א) 0.6 ב) ההסתברות שהקוביה תראה 3 הוא $\frac{1}{2}$.
1 מופיע על שתי פיאות, 2 על פיאה אחת ו 3 על שלוש פיאות.

18. א) 35% סוג דם O. ב) 0.75 ג) 0.25

19. ב) 0.4 ג) 0.3

20. א) 6 מספרים ב) $\frac{1}{3}$ ג) $\frac{1}{3}$ ד) 0 ה) $\frac{1}{3}$ ו) $\frac{2}{3}$
ז) 1 ח) 0

רישום כל התוצאות האפשריות וחישוב הסתברויות

(עמודים 30 - 37)

1. ב) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ג) $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$

2. א) 6 תוצאות ד) 36 תוצאות ה) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$.

4. א) לאפרת סיכוי גדול יותר. ג) ההסתברות של אפרת לנצח $\frac{13}{25}$
ההסתברות של דנה $\frac{12}{25}$.

5. המשחק אינו הוגן: הסיכוי של איילת לנצח גדול פי 2 מזה של נועה

6. א) המשחק הוגן.
ד) $\frac{5}{36}$.
- לסכום 7 הסתברות גדולה ביותר ($\frac{1}{6}$).
- לסכום 12 ולסכום 2 הסתברויות קטנות ביותר ($\frac{1}{36}$).

7. א) לא הוגן, ליעל סיכוי טוב יותר.

ג) $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{36}$.

ד) - יכולות להתקבל 18 תוצאות שונות.

- למכפלה 12 ולמכפלה 6 הסתברות גדולה ביותר $(\frac{1}{9})$.

8. ב) - ההסתברות של בן ובת גדולה יותר.
- ההסתברות שווה.
- ההסתברות שווה.
- ההסתברות של בן ובת גדולה יותר.

9. ב) $\frac{11}{36}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{1}{4}$.

מאורעות משולבים – מטבלה לריבוע שטח

(עמודים 38 - 51)

1. א) 0.35, 0.5, 0.2, 0.65
ב) 0.1, 0.2, 0, 0.3

2. ב) 0.25, 0.5, 0.25

3. ג) 0.5, 0.5

4. ג) 0.4 ד) 0.6

5. ג) 0.06, 0.06 ד) 0.56 ה) המאורעות אינם משלימים ו) 0.44

6. העברת קו דרך 0.02 פירושו ששחקני הכדורסל מהווים אותו חלק (0.02) מהגבוהים ומאלה שאינם גבוהים.

7. ב) 0.02 ג) 0.72 ד) זכה לפחות באחת מהגרלות.

8. ב) 0.15 ג) 0.35 ה) 0.65

9. ב) 0.25 ג) 0.75 ד) 0.25 ה) 0.75

10. ב) 0.02 ג) 0.72 ד) 0.28 ה) 1

11. 0.22

12. ג) 0.0002

13. ב) 0.09 ג) 0.42 ד) 0.91 ה) 0.51

14. ב) לפחות פעם אחת יצא מספר זוגי 0.84
ג) פעמים מספר אי-זוגי 0.16

15. א) 0.6, 0.4 ג) 0.36, 0.16, 0.48

16. ב) 0.15 ג) 0.65 ד) 0.85

17. ב) סוג הדם של שניהם A וההסתברות 0.16 ג) 0.01 ד) 0.325
ה) 0.675

18. 0.0001, 0.0198 0.9999

עוד על ריבוע שטח (עמודים 52 - 55)

1. ג) 0.016, 0.004, 0.02

2. ג) 0.72 ד) 0.22 ה) 0.94 ו) 0.28

4. ב) 0.26

5. 0.09

6. ג) 0.12 ד) 0.18

7. ב) $\frac{1}{15}$

8. ג) $\frac{2}{5}$ ד) $\frac{2}{15}$ ה) $\frac{7}{15}$

9. 0.49

מציאת P (עמודים 56 - 57)

1. ד) 0.75   ה) 0.2

2. ב) 0.2 או 0.8   ג) 0.36 או 0.96

3. ג) 0.7

4. ב) 0.1   ג) 0.12   ד) 0.18

5. ג) 0.9

ריבוע שטח ושאלות מהחיים... (עמודים 58 - 61)

1. ב) 0.4 מאלה שלא הצליחו בעצם יודעים את החומר.
2. ב) 0.47 מאלה שאובחנו כחולים הם בעצם בריאים.
   ג) 0.03 מאלה שאובחנו כבריאים הם בעצם חולים.
3. א) 0.54 מאלה שהתקבלו הן נשים.
   ב) רק 0.3 מהנשים שנרשמו התקבלו ואילו מהגברים התקבלו 0.6 מאלה שנרשמו.
4. א) 57% מאלה שחלו הם מעשנים.
   ב) 0.5 מהמעשנים חלו. מאלה שאינם מעשנים חלו רק 0.25.
5. ב) 0.117 מאלה שחלו, חלו למרות שקיבלו זריקה.
   ג) 0.4 מאלה שלא קבלו זריקה חלו ורק 0.16 מאלה שקיבלו זריקה חלו.

ועוד שלבים – מודל העץ (עמודים 62 - 66)

1. ב) 0.12, 0.08, 0.48, 0.44

3. 0.008, 0.116

4. ב) 0.25, ג) 0.5

5. ב) $\frac{125}{216}$ ג) $\frac{25}{72}$

בניית העץ (עמודים 67 - 71)

1. ג) 0.46 ד) 0.88
2. ב) 0.65 ג) 0.305
3. ב) 0.04 ג) 0.49
4. $\frac{1}{36}$
5. ב) ≈ 0.029 ג) ≈ 0.9997
6. ב) 0.243, 0.271
7. ג) 0.032 ד) 0.968 ה) 0.228
8. ג) ≈ 0.016 ד) ≈ 0.14 ה) ≈ 0.16
9. 0.76
10. א) $\frac{1}{3}$ ב) $(\frac{1}{3})^{14}$ ג) $14 \cdot (\frac{1}{3})^{13} \cdot (\frac{2}{3})$

    ד) הסכום של התשובות בסעיפים ב' וג'.

תרגילים נוספים לסיכום וחזרה (עמודים 72 - 78)

1. א) $\frac{28}{31}$ ב) $\frac{15}{31}$ ג) $\frac{27}{124}$
2. א) 0.26 ג) 0.57 ד) 0.96
3. ההסתברות של אפרת לנצח $\frac{5}{9}$ ושל גלעד $\frac{4}{9}$.
4. א) דפנה $\frac{1}{4}$, ואיילת $\frac{3}{4}$

   ב) איילת $\frac{1}{4}$, ודפנה $\frac{7}{16}$

ג) איילת $\frac{1}{4}$, ודפנה $\frac{1}{4}$

5. ג) 0.25 ב) 0.25

6. א) $\frac{1}{6}$ ב) $\frac{1}{4}$

7. ב) 0.2, 0.01, 0.02, 0.792

8. ב) $\frac{1}{3}$ ג) $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$

9. ב) 2 ג) 0.25

10. $\frac{1}{10}$

11. 0.027, 0.343, 0.657, 0.441

12. 0.56

13. 0.8

14. ב) 0.1 או 0.9

15. א) 0.12 ב) 0.2112 ג) 0.2256

16. 0.2 או 0.8

הסתברות ובינום ניוטון (עמודים 79 - 88)

1. א) 4 ב) 8 ג) 16

2. ד) 0.216, 0.144
ו) 16, 0.0256, 0.0384, 0.0576, 0.0864, 0.1296

4. ד) 0.276, 0.544

5. ג) 0.329 ד) 0.21 ה) 0.95

9. א) 0.234   ה) 0.3125

10. ב) $0.1^5 = 0.00001$ ג) 0.0081   ד) 0.00856
ה) $0.9^5 = 0.59049$

11. ב) 0.90112   ג) 0.3446

12. א) $(\frac{5}{12})^4 \approx 0.0301$ ב) $4 \cdot \frac{5}{12} \cdot (\frac{7}{12})^3 \approx 0.3308$ ג) 0.884

13. א) $\frac{4}{35}$ ב) $\frac{6}{35}$

14. ב) 0.247   ג) 0.647

15. 0.072

16. $\frac{80}{243}$ ב) $\frac{192}{243}$ ג) $\frac{131}{243}$

17. א) 0.25   ב) 0.3115   ג) 0.555

18. א) 0.001   ב) 0.00597,   0.00599

19. ב) 0.02   ג) 0.0023

20. א) 0.21   ב) 0.87

21. 10%

22. 0.6

23. א) $\frac{5}{6}$ ב) ≈ 0.8

24. א) $p \approx 0.646$ ב) ≈ 0.639

25. א) 0.2   ב) 0.05792

פרק ב' התפלגות נורמלית

מגרף שכיחויות להתפלגות נורמלית (עמודים 92 - 98)

2. $\bar{x} = 3.25$ $s = 1.5$

5. א) 0.841 ב) 0.579 ג) 0.097
ד) 0.933, 0.067, 0.866, ה) 77.3%

6. א) 0.309 ב) 0.691 ג) 0.227 ד) 0.227
ה) 0.546 ו) 0.919 ז) 0.242 ח) 0.677

7. א) 0.115 ב) 0.023 ג) 0.773 ד) 0.382 ה) 0.242
ו) 0.624 ז) 0.23

ציון תקן (עמודים 99 - 107)

1. ל 178 מתאים 1+, ל 162 מתאים 1–, ל 174 מתאים 0.5,
ל 158 מתאים 1.5–, ל 154 מתאים 2–, ל 180 מתאים 1.25,
ל 194 מתאים 3, ל 152 מתאים 2.25–, ל 164 מתאים 0.75–.

2. ב) 2.33 ג) 1.66– ד) 0.83 ה) 2.5–

3. 65

4. ג) 62.9%, 37.1%, 37.1%, 62.9%, 25.8%, 74.9%

5. ב) 15.9% ג) 0.159 ד) 0.745, 0.745, 0.49
ה) ציון ה .I.Q המתאים 137.5 אחוז האוכלוסיה מעליו 0.6%.

6. א) 8.5 ב) 15.9% ג) 0.159

7. ב) 0.5, 0.33, 1–, 2–, 2, 1.33–
ג) 6.25 ד) 8.875 ה) 5.8

8. ב) 0.75, 1.125, 1.75, 0.75–, 1.375–
ג) 69%, 30.9%, 87.1%, 77.3%, 64.4%, 4%

9. ב) 30.9%, 0.7%, 0%, 40.8%

10. א) 0.372 ב) 3720

11. א) 65 ב) 83

12. א) הממוצע 900 מ"ל ב) 98.6% ג) 21.2%.

מאחוז האוכלוסיה לציון תקן (עמודים 108 - 112)

1. א) ≈ 0.5 ב) ≈ -1.28

2. א) 0.67 ב) 0.67 ג) 0.25 ד) -0.25

3. א) 0.67 ב) 71.35 ג) 63.8 ד) 63.8

4. א) 70 ב) ציון תקן -0.67, ציון אמיתי 63.3
   ג) ציון תקן 0.67, ציון אמיתי 76.7

5. ב) 80.5 ג) 71.3 ד) 71.3 ה) 82.7

6. א) 165 ב) ציון תקן -0.25, הגובה 163.5 ס"מ.

7. א) 225 ב) ציון תקן 0.523, הישג בקפיצה 230.25 ס"מ ג) 0

תרגילים נוספים (עמודים 113 - 114)

1. א) 0.734 ב) 0.539 ג) 0.195

2. א) 83 ב) 0.774 ג) 0.599

3. א) 0.67 ב) ≈ 74 ג) 66

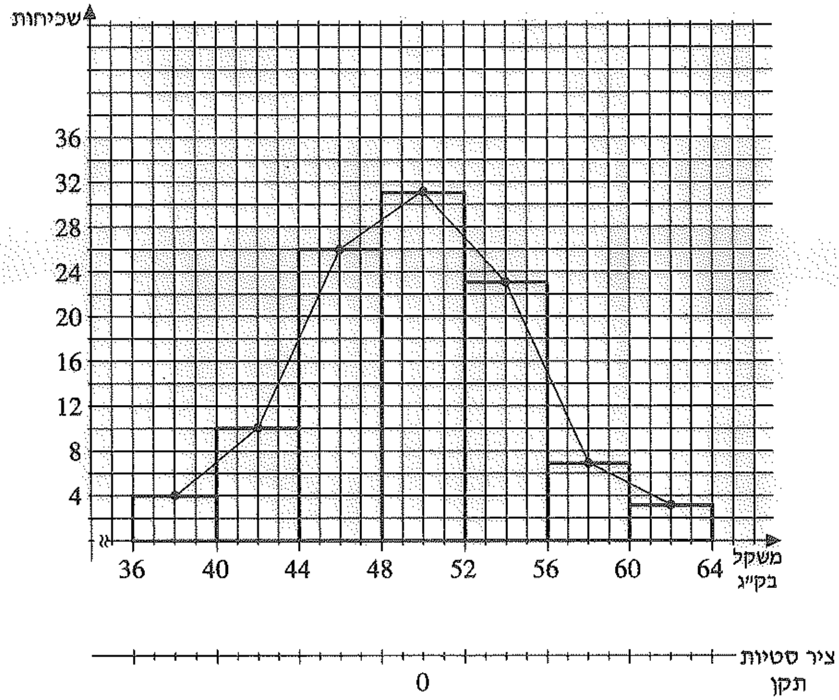
4. א) 59 ב) 0.853 ג) 0.125

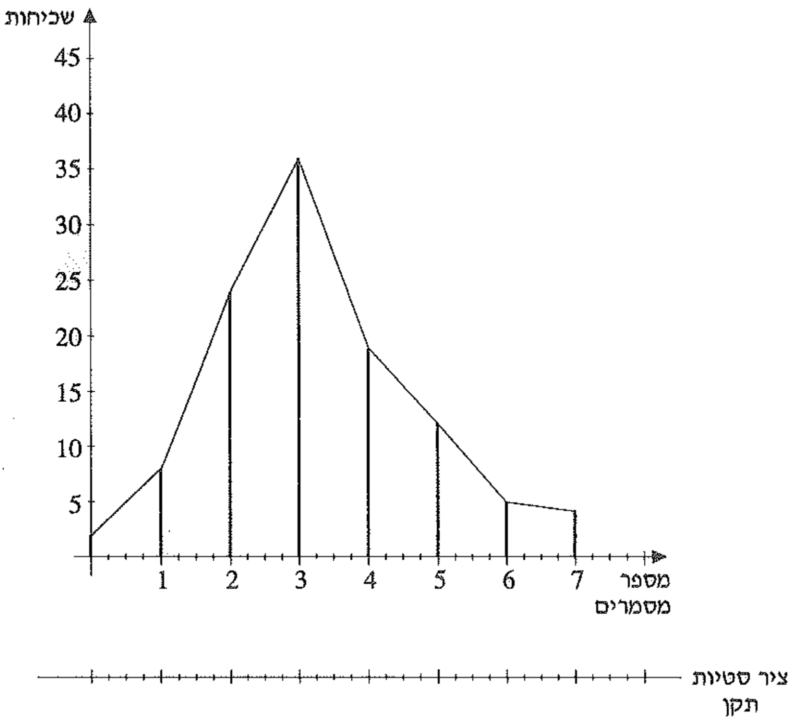
5. א) 0.1 ב) 0.927

6. במבחן בעברית

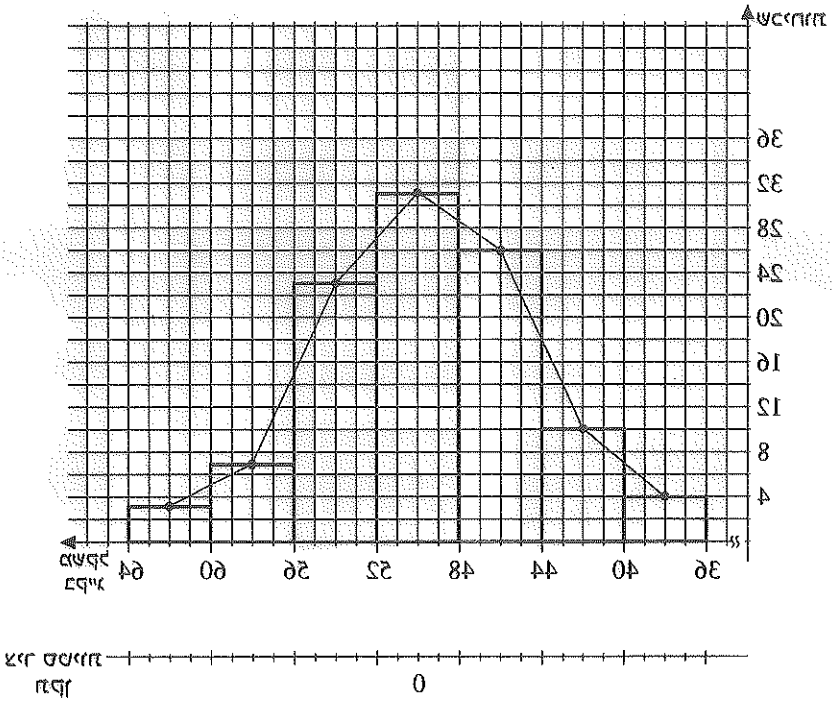
7. בשנה הראשונה לא התקבל ובשניה התקבל.

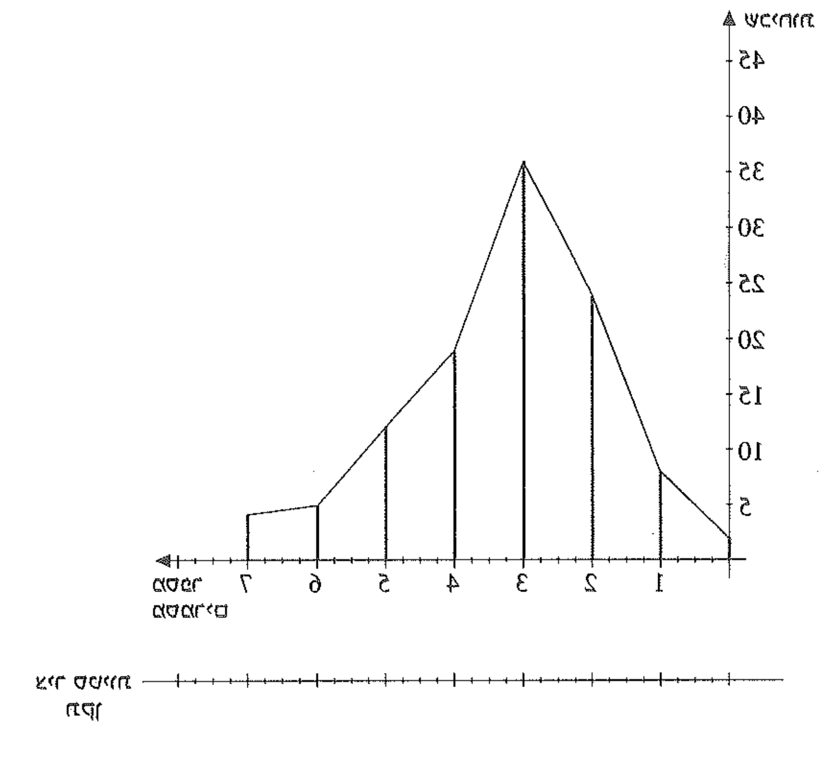
דף שקוף לעמ׳ 94





דף שקוף לעמ' 94






מתמטיקה