המחשת קשרים בין משטחי סיבוב

מאת: דוד רימר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן

הקדמה

הגליל והחרוט מוכרים לתלמידי בית הספר. תכונה מעניינת של הגליל היא, כי נמצאת עליו משפחה אינסופית של ישרים (כולם מקבילים זה לזה ומאונכים לבסיס). גם על חרוט נמצאת משפחה אינסופית של ישרים (אשר כולם עוברים דרך קודקוד החרוט). במאמר זה נכיר משטח סיבוב נוסף אשר מהווה מעין מצב-מעבר בין הגליל והחרוט ועליו נמצאות שתי משפחות של ישרים.
משטח זה נקרא **היפרבולואיד סיבובי חד-יריעתי**. נתאר דגם הממחיש את שלושת המשטחים והקשרים ביניהם. דגם זה הוא שכלול של ((1), עמ' 178).
השימוש בדגם בהוראת המתמטיקה, עשוי להוסיף אספקטים חשובים לתפישת התלמידים, ולהעמיק את הבנתם.

ההדגמה האנליטית ביחס למערכת צירים קרטזית Oxyz.

א. גליל: $x^2 + y^2 = a^2$

ב. חרוט: $x^2 + y^2 = a^2 \quad z^2$

ג. היפרבולואיד סיבובי חד-יריעתי: $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{c^2} + a^2$

תיאור הדגם (ראה תמונה 1)

המכשיר מורכב משני בסיסים עגולים שווים שרדיוסם 14 ס"מ.
הבסיס התחתון עשוי מאלומיניום (1) וצמוד למעמד מעץ (2).
הבסיס העליון (3) עשוי מפרספקס, ונשמר בגובה קבוע מעל הבסיס התחתון בעזרת צינור מתכת (4), אך ניתן לסיבוב ולקיבוע באמצעות בורג מתאים (5).

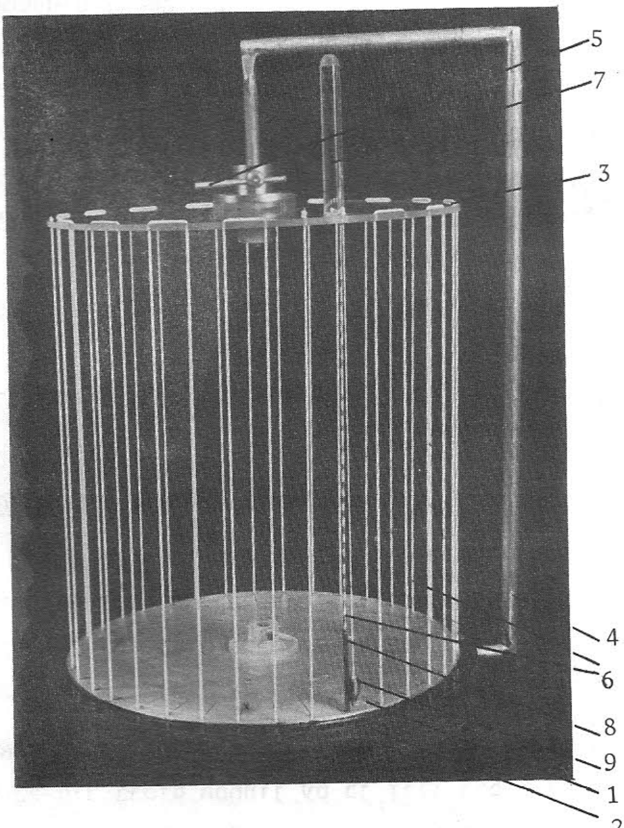
על כל אחד מהבסיסים חורים ברווחים של 10° זה מזה ו 36 חוטי גומי (6) מחברים כל חור בבסיס התחתון עם בן זוגו בבסיס העליון. החורים על הבסיס התחתון ממוספרים מ0 עד 18 בשני הכוונים והחוט היוצא מחור מס' 0 בצבע שונה משאר החוטים. כאשר החוטים רפויים, וחוטים מתאימים נמצאים זה מעל זה, מתארים החוטים מעטפת של גליל.

ידית מפרספקס (7) צמודה לבסיס העליון. בעזרתה מסובבים אותו כדי לשנות את הגליל להיפרבולואיד סיבובי חד-יריעתי ולחרוט כפול.

בסיבוב קטן מ 180^{o} נוצרת מעטפת של היפרבולואיד סיבובי חד-יריעתי, ובסיבוב של 180^{o} נוצרת מעטפת של חרוט כפול.

מוט מתכת (8) שארכו כ-10 ס"מ קבוע במעמד העץ (2) ליד חור מס' 0, ומאונך למעמד. בעזרת מד זוית ניתן למדוד את הזוית בין הקו היוצר מס' 0 לבין הכיוון המאונך לבסיס (שהוא כוון ציר הסיבוב). בעזרת סרגל ניתן למדוד את אורך הרדיוס של כל מעגל שמתקבל על ידי חיתוך המשטח במישור מקביל לבסיסים.

חוט עם משקולת (9) שארכו כ - 30 ס"מ, צמוד לבסיס העליון בחור מס' 0 ובעזרתו מוצאים את זוית הסיבוב של הבסיס העליון.

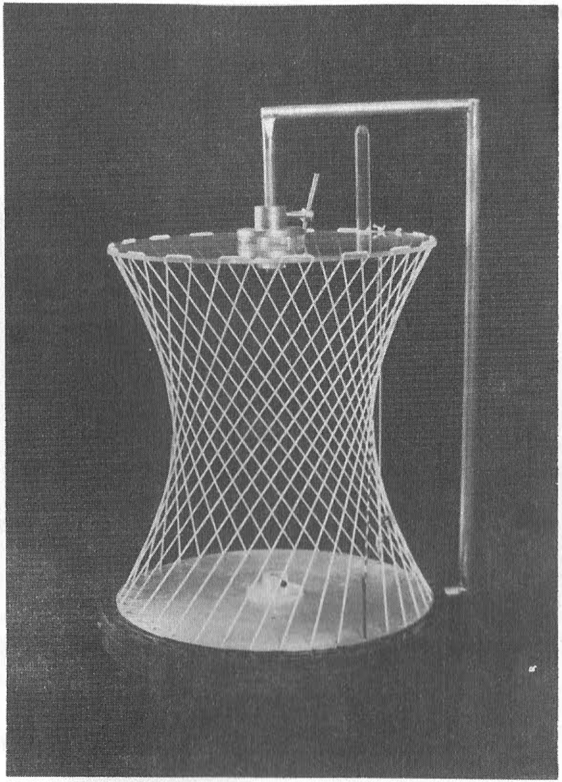


תמונה 1

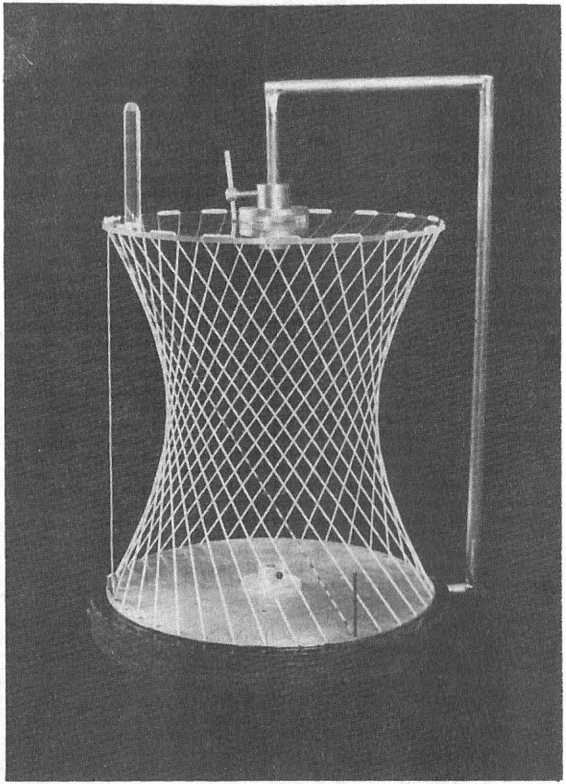
השימוש בדגם

ממצב של גליל (תמונה 1) עוברים למצב של היפרבולואיד סיבובי חד-יריעתי (תמונות 3,2), וממנו למצב של חרוט כפול (תמונה 4) באופן הבא:

בעזרת הידית (7) מסובבים את הבסיס העליון בזוית של α^{o} בכיוון אחד ($\alpha < 180^{o}$). לדוגמא כאשר המשקולת (9) מעל חור מספר 5 - זוית הסיבוב 50^{o}. כך מתקבל היפרבולואיד סיבובי חד-יריעתי שבו רואים משפחה של קוים יוצרים. ניתן לייצב את ההיפרבולואיד בעזרת הבורג (5). אם חוזרים למצב הגליל ומסובבים את הבסיס בכוון ההפוך באותה זוית של α^{o}, מתקבל היפרבולואיד חד-יריעתי שבו רואים משפחה שניה של קוים יוצרים. כפי שנראה בסעיף הבא, היפרבולואיד זה זהה להיפרבולואיד שהתקבל מקודם. בסיבוב של 180^{o} מתקבל חרוט כפול.



תמונה 2א'

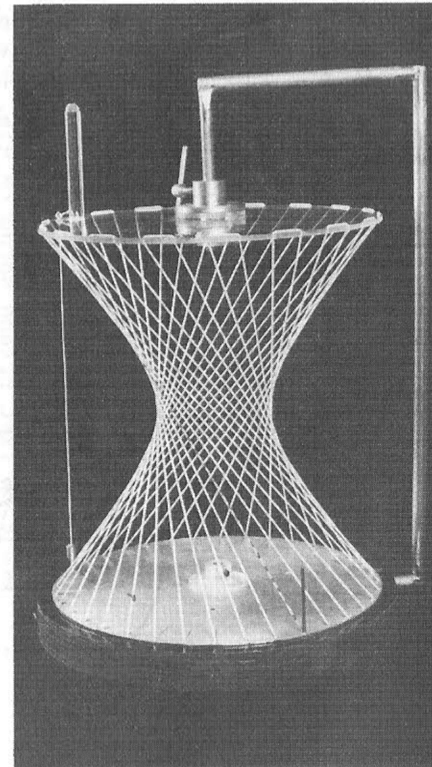


תמונה 2ב'

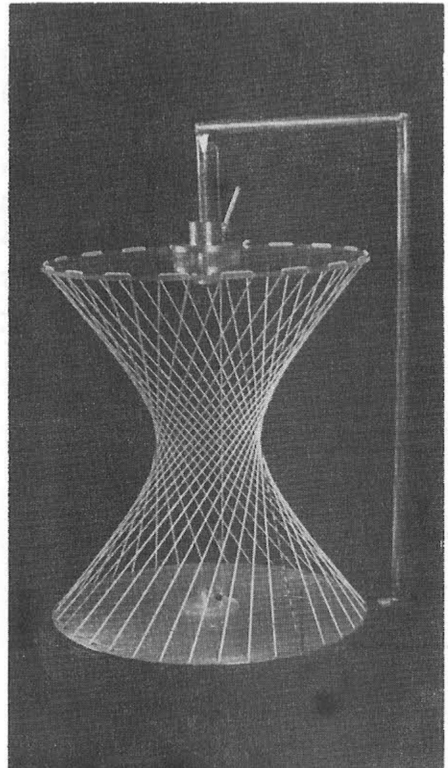
היפרבולואיד סיבובי חד-יריעתי $\alpha = 100^{\circ}$

משפחה אחת
של קוים יוצרים

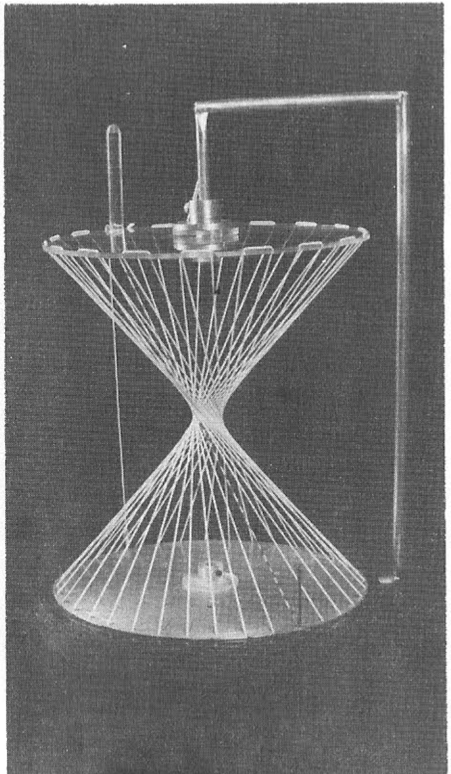
משפחה שניה
של קוים יוצרים



תמונה 3א'



תמונה 3ב'



תמונה 4

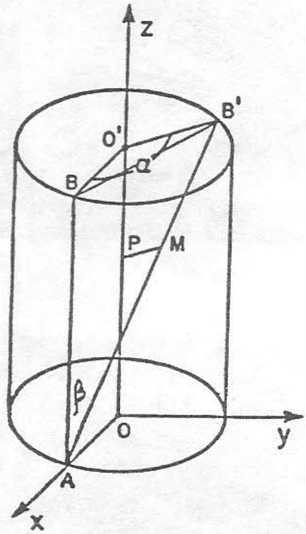
היפרבולואיד סיבובי חד-יריעתי $\alpha = 140^{\circ}$

משפחה אחת
של קוים יוצרים

משפחה שניה
של קוים יוצרים

ניתוח אנליטי

נבחר מערכת צירים קרטזית Oxyz באופן הבא: הראשית O מתלכדת עם מרכז הבסיס התחתון, הצירים Ox ו- Oy מכילים את הנקודות 0^o ו 90^o בהתאמה, שעל בסיס זה. Oz מכיל את ציר הגליל (שרטוט 1).



שרטוט 1

נסמן ב - R את רדיוס הבסיסים וב - h את גובה הגליל. שיעורי הקצוות A ו B של קו יוצר העובר בחור של 0^o הם: $A(R,0,0)$ ו- $B(R,0,h)$.
אחרי סיבוב הבסיס העליון בזוית של α^o, הנקודה B עוברת לנקודה B' - $B'(R\cos\alpha, R\sin\alpha, h)$. AB' הוא קו יוצר של ההיפרבולואיד שנוצר על ידי הסיבוב הזה. מישור מקביל לבסיסים חותך את ציר הגליל OO' בנקודה P ואת AB' בנקודה M. על סמך המשפט הידוע: שלושה מישורים מקבילים זה לזה חותכים על שני ישרים כלשהם קטעים פרופורציוניים, נובע כי $\frac{AM}{MB'} = \frac{OP}{PO'}$. יהא $\frac{m}{1-m}$ $(0 < m < 1)$ הערך המשותף של שני היחסים האלה; אזי השיעורים (x,y) של P הם $x_P = y_P = 0$ ושל M הם:

$$x_M = (1-m)x_A + m\,x_{B'} = (1-m)R + mR\cos\alpha = R(1 - m + m\cos\alpha) = R[1 - m(1-\cos\alpha)]$$

$$y_M = (1-m)y_A + m\,y_{B'} = Rm\sin\alpha$$

ז.א.

$$x_M = R(1 - 2m\sin^2\frac{\alpha}{2})$$

$$y_M = Rm\sin\alpha$$

מכאן נובע כי המרחק בין M והציר, כלומר בין M ו- P הוא:

$$d(P,M)=R\sqrt{x_M^2+y_M^2}=R\sqrt{1-4m\sin^2\frac{\alpha}{2}+4m^2\sin^4\frac{\alpha}{2}+m^2\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$R\sqrt{1-4m\sin^2\frac{\alpha}{2}+4m^2\sin^4\frac{\alpha}{2}+4m^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}\ ;$$

$$d(P,M)=R\sqrt{1+4(m^2-m)\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

המרחק הזה הוא רדיוס המעגל שהמישור חותך על משטח ההיפרבולואיד.

נסמן: $r = d(P,M)$

במקרה הפרטי $m = \frac{1}{2}$, כלומר החיתוך נעשה באמצעות הגובה, המעגל הוא "המעגל האמצעי" של ההיפרבולואיד. (ברור כי, הרדיוס שלו הוא הקטן ביותר מכל רדיוסי מעגלי החיתוך האלה). אם נציב בנוסחת המרחק $d(P,M)$, $m = \frac{1}{2}$, נקבל:

$$r = R\sqrt{1+4\left(-\frac{1}{4}\right)\sin^2\frac{\alpha}{2}} = R\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$r = R\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$$

היות ו $0 \le \alpha \le 180^{o}$ נובע כי $\cos\frac{\alpha}{2} \ge 0$, ולכן

$$r = R\cos\frac{\alpha}{2}$$

נעיר כאן, כי כל מישור חותך את המשטח באותו מעגל כאשר זוית הסיבוב היא α^{o} או $-\alpha^{o}$.

עבור $\alpha = 180^{o}$, $r = 0$, מה שמתקבל גם בנסיון עם הדגם, היות ובסיבוב של 180^{o} ההיפרבולואיד הופך לחרוט כפול.

כדי לקבוע באיזו זוית α נסובב את הבסיס העליון, כך שהקוים היוצרים יהיו בעלי שיפוע מסויים $tg\beta$, נחשב את $tg\beta$.

נסמן $\beta = \sphericalangle BAB'$ $\tan\beta = \frac{BB'}{AB}$.

מן המשולש $BO'B'$ מתקבל $\frac{BB'}{\sin\sphericalangle BO'B'} = \frac{O'B}{\sin\sphericalangle B'}$

ומכאן $\frac{BB'}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\frac{(180-\alpha)}{2}} \Leftarrow BB' = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$

ולכן $\tan\beta = \frac{2R}{h}\sin\frac{\alpha}{2}$

היות ו - $\frac{2R}{h}$ קבוע וידוע עבור מודל מסויים, α מתקבל מיד מנוסחה זו.
בעבודה זו השתמשנו כשרצינו לבנות את ההיפרבולואידים שבתמונות 2 ו-3.

האיפיון המתמטי של הטרנספורמציות המוגדרות על ידי הדגם

ההתאמה המוגדרת על ידי סיבוב זה, מהווה התאמה בין קבוצת נקודות הגליל (נסמנה G), וקבוצת נקודות ההיפרבולואיד (נסמנה H), שהיא בעלת התכונות הבאות:

1. ההתאמה היא חד-חד ערכית, כלומר, לכל נקודה ב G מתאימה נקודה אחת בלבד ב H , ולהיפך, כל נקודה ב H מתאימה לנקודה אחת בלבד ב G.

2. ההתאמה היא רציפה בשני הכיוונים, כלומר, אם המרחק בין שתי נקודות ב G ישאף לאפס, גם המרחק בין תמונותיהן ב H ישאף לאפס, ולהיפך.

טרנספורמציה בעלת שתי תכונות אלה נקראת טרנספורמציה טופולוגית.

נסמן את קבוצת נקודות החרוט ב C. ההתאמה בין H ו C היא רציפה; היא חד-חד ערכית עבור כל הנקודות פרט לנקודות אמצעי קוי היוצרים, היות ולשתי נקודות האמצע של שני קוים יוצרים של ההיפרבולואיד, מתאימה רק נקודה אחת של החרוט - קודקוד החרוט. אם כך, הטרנספורמציה מ H ל C אינה טופולוגית.

טרנספורמציה טופולוגיה זו שומרת על ישרים מסויימים (קוי-יוצרים), וכן שומרת על היחס בין שלוש נקודות על קו-יוצר (בדגם מניחים כי הגומי מתמתח בצורה אחידה לכל ארכו). הטרנספורמציה הזו שומרת גם על מעגלים מסויימים: התמונות של כל שלוש נקודות הנמצאות על מעגל חיתוך מקביל לבסיסים, נמצאות אף הן על מעגל, אבל הרדיוס של מעגל התמונה אינו שווה לרדיוס מעגל המקור.

ס פ ר ו ת

1. H.M. Cundy and P. Rollet, Mathematical Models Oxford Univ. Press (1961).

הבעת תודה

לד"ר מ רשפון וד"ר נ. מעוז, מנהל וסגן מנהל של היחידה לפעולות נוער של מכון ויצמן, על האישור לבנות את הדגם בבית המלאכה של היחידה. תודה מיוחדת לאמיר עמיאל שבנה את הדגם ומצא פתרונות לבעיות הטכניות שהתעוררו.

- לשלום ממעבדת הצילום של מכון ויצמן אשר ביצע את צילומי הדגם שנכללו במאמר.

- לד"ר מ. קורן וד"ר נ. זהבי אשר סייעו בעריכת המאמר.