בעיות בניה - למה ואיך

מאת: ארנון אברון
ביה"ס למדעי המתמטיקה
אוניברסיטת תל-אביב

I. הקדמה: משפטים אוניברסליים ומשפטי קיום

כל מי שהתנסה בלימוד הצד התיאורטי של החשבון הדיפרנציאלי מודע לקשיים העצומים שיש לתלמידים בכל הרמות בהבנת תוכן המשפטים בתחום זה, שלא לדבר על הוכחותיהם. לקושי זה סיבה אוביקטיבית: מבחינת סיבוכיותם הלוגית משתייכים מרבית משפטי החשבון הדיפרנציאלי לקטיגוריה הידועה בלוגיקה המתימטית כ π_3^o , דהיינו: המשפטים שניסוחם כרוך בשלושה חילופי כמתים לפחות (לכל ϵ קיים δ כך שלכל X...) ולעיתים אפילו ארבעה. מספר לקרוא וגם לתפוס בעת הקריאה. בוגר התיכון, על כל פנים, אינו מוכן לקראתם בשום צורה שהיא.

כמעט כל משפט מתימטי שלומד או מוכיח התלמיד בתיכון הוא מסוג סיבוכיות נמוך: משפט אוניברסלי (π_1^o בלשון הלוגיקאים) מהסוג: "כל X_1, X_2, ... X_n המקיימים תנאים A_1, A_2, ..., A_m מקיימים גם תנאי B" כאשר A_1, ..., A_m הם תנאים הניתנים לבדיקה קונסטרוקטיבית (ובדרך כלל גם פרימיטיביים ביחס לשפת התחום הנדון). המושג הלוגי-מתימטי של "קיום" כמעט לעולם אינו מוכנס במפורש, וכאשר זקוקים לו-עוקפים אותו בצורה זו או אחרת. בהתחילו ללמוד אנליזה מתימטית נדרש, איפוא, התלמיד להתגבר בכוחות עצמו על פער אדיר של שתי רמות סיבוך לוגיות - ורק יחידי סגולה מסוגלים לכך. התוצאה: התלמיד משתלט בדרך-כלל על הצד הטכני של האנליזה (גזירה

וחקירה למשל) אך כשמגיע הדבר להגדרות ומשפטים - הוא מסוגל לכל היותר לדקלמם מבלי שיבין בהם מאומה. (אפילו הדקלוט עלול להיות בעיה, כיוון שחשיבות סדר המילים בניסוחים השונים אינה נהירה לו).

הדרך היחידה לגשר על הפער בין המשפטים האוניברסליים הפשוטים ובין משפטי האנליזה היא להרגיל את התלמיד להבנה והוכחה של משפטים שרמת סיבוכיותם הלוגית היא רמת הביניים. אילו הם משפטי קיום בעלי המבנה: "לכל X_1, ..., X_n המקיימים את התנאים A_1, ..., A_m, קיימים Y_1, ..., Y_2, ..., Y_k המקיימים יחד עם X_1, ..., X_n את התנאי B. משפטים כאלה הם בטווח השגתו של תלמיד התיכון ודרכם הוא יכול ללמוד שורה של מושגים והבחנות מתימטיים, שהבנתם היא תנאי הכרחי להבנת החומר בחשבון דיפרנציאלי (כגון: מושג הקיום המתימטי, ההבדל במשמעות ובשימוש בין "לכל X" ובין "קיים X"). יתר על כן, למשפטים מסוג זה יש כיום חשיבות מרכזית במדעי המחשב (בין היתר ככלי יסודי לניסוח ספציפיקציות של תוכניות) ולכן יש ללימודם לעומק חשיבות רבה כשלעצמה.

לרוע המזל, במרבית החומר המתימטי הנלמד בביה"ס התיכון אין משפטים מסוג זה נכנסים באופן טבעי, וכאשר הם נכנסים - הרי זה בצורה מפוזרת: פה אחד, שם אחר. מיעוט זה של דוגמאות אינו מאפשר טיפול סיסטמתי, ולכן אין משפטים אלה מוצגים ומטופלים בתור שכאלה אלא בצורה עקיפה. נקח למשל את המשפט המרכזי בתחום חקר המשוואות הריבועיות: "לכל שלושה מספרים A, B, C המקיימים: א) $A \neq 0$ ב) $B^2 - 4AC \geq 0$, קיים מספר ממשי X כך ש $AX^2 + BX + C = 0$" או בצורה יותר מלאה: "עבור כל שלושה מספרים A, B, C כך ש $A \neq 0$, תנאי הכרחי ומספיק לקיום X כך ש $AX^2 + BX + C = 0$ הוא ש $B^2 - 4AC \geq 0$".

משפטים אלה נלמדים, כמובן, בתיכון, אך לעולם לא בניסוח כזה. מה שעושים שם, בדרך כלל, הוא ללמד את הנוסחה לפתרון משוואה ריבועית ואח"כ "לחקור אותה". המסקנות מובאות ברוב המקרים בלשון הבאה:
הפתרונות של המשוואה הריבועית $AX^2 + BX + C = 0$ $(A \neq 0)$
הם: $X_1 = \ldots$, $X_2 = \ldots$ כאשר $B^2 - 4AC < 0$ אין למשוואה הנ"ל פתרון . כמעט תמיד מלווים ניסוחים אלה (הנכונים כשלעצמם) בהוכחות הכוללות כשלים לוגיים (עליהם נעמוד בהמשך), למרות שקל מאוד להופכן לתקפות ע"י תוספות קלות. התוצאה הכללית היא שמשפטים כאלה, לא זו בלבד שאינם מסייעים לתלמיד בהבנת משפטי קיום, אלא ניסוחם ו"הוכחותיהם" גורמים עוד נזק, כיוון שהם מחדירים בו אי הבנות בנוגע למהות הוכחה תקפה וההבדל בין תנאים הכרחיים ומספיקים. מאוחר יותר, כאשר יבצע התלמיד שיקולים דומים באוניברסיטה, שוב לא יוכל להבין מדוע נפסלות הוכחותיו.

למיטב ידיעתי, יש רק נושא אחד בחומר הלימוד בביה"ס התיכון שמשפטיו הינם, רובם ככולם, משפטי קיום מקטיגוריה π_2^0 : בעיות בניה בגיאומטריה. ברם, בצורה המסורתית בה מוצג הנושא בתיכון אין בו כאילו משפטים כלל וממילא בלתי אפשרי לתלמיד (וקשה אולי גם למורה) להבחין באופי מיוחד זה של המשפטים. לפי ההצגה הסטנדרטית קשורות כאילו בעיות הבניה בצד ה"מעשי" של הגיאומטריה, דהיינו: בשאלה כיצד ניתן בפועל לשרטט צורות גיאומטריות לפי נתונים שונים. כיוון שמחבר המאמר הינו בור באספקט זה של הענין, לא יעסוק מאמר זה בשימושים המעשיים של בעיות הבניה (אם עוד נותרו כאלה). נציין רק שלהצגת הנושא באור זה מגרעת כפולה: מצד אחד היא מסתירה מהתלמיד את אופין האמיתי של הבעיות ומונעת לכן שימוש יעיל בהן למטרה שצוינה למעלה. מצד שני היא <u>שקרית</u> בעליל, כיוון שהתלמיד

יודע (ומרבית ספרי הלימוד מודים בכך) שהמהנדס והשרטט משתמשים במכשירים נוספים מלבד הסרגל והמחוגה, וקשה מאוד לכן להסביר לו מדוע יש להתעקש ולהשתמש בשני מכשירים אלו דווקא. הנימוקים המובאים בספרי הלימוד למגבלה זו הם (בלשון המעטה) דחוקים, וכבר ראיתי ספר לימוד בישראל המנמק בפשטות ש: "ביוון העתיקה נהגו לשרטט צורות הנדסיות בעזרת סרגל ומחוגה בלבד. בלימוד ההנדסה נשאר הנוהג הזה עד ימינו" (!) (קשה לי להעלות על הדעת נימוק משכנע יותר לחשיבות הנושא, או נימוק שיצליח יותר לעורר כבוד ללימודי הגיאומטריה בפרט ולתוכנית הלימודים בכלל)

דבקותם של היוונים בסרגל ובמחוגה היתה מבוססת על הבנה מעמיקה (ומאוד "מודרנית") של הנושא. מה שמפריע לראות זאת, ומה שבכלל מהווה את הבעיה העיקרית הכרוכה בימינו בלימוד הגיאומטריה ובהפקת תועלת מלימוד זה הם השפה והמונחים של אוקלידס, ששוב אינם מתאימים בימינו. (בקביעה זו אין כוונתי בהכרח, ששפתו ומונחיו של אוקלידס מוצלחים פחות מאשר אלו המודרניים, אלא רק ששוב אין אנו משתמשים בהם בתחומים אחרים של המתימטיקה עתה.) אין אולי מחסום גבוה יותר להבנת עקרונות המשותפים לתחומים שונים מאשר שימוש במונחים לשוניים שונים עבור מושגים זהים (או דומים או קרובים) בשני תחומים אלה - אך זה בדיוק המצב ביחס ללימוד הגיאומטריה לעומת לימוד שאר ענפי המתימטיקה. זוהי, כנראה, הסיבה העיקרית מדוע לימוד הגיאומטריה תורם, כה מעט, יחסית, להבנת התחומים אחרים.

II. בעיות בניה - הוכחות קיום קונסטרוקטיביות

באופן מסורתי נכללים במסגרת הטיפול בבעיות בניה האלמנטים הבאים:

(1) ניסוח הבעיה (בנה...).

(2) נתונים.

(3) ניתוח הבעיה.

(4) תיאור הבניה.

(5) ביצוע הבניה.

(6) הוכחת הבניה.

(7) תנאי הגבלה.

(8) מספר הפתרונות.

נפתח בתרגום עצם מושג ה"בניה" ללשון מודרנית. ובכן, מה שהיוונים ניסחו בצורה: "בנה כך וכך..." נבנסח אנו היום בלשון הבאה: "הוכח בצורה קונסטרוקטיבית קיום של כך וכך...". בניות, אם כך, הן בראש וראשונה מה שנקרא בלשון מודרנית משפטי - קיום. זה שמדובר פה בהוכחות קיום קונסטרוקטיביות דווקא - גם הוא הבחנה מודרנית. ההבדל בין "קיום" אבסטרקטי (שהאינטואיציוניסטים של המאה העשרים נלחמו ונלחמים בו בחרוף נפש) ובין קיום קונסטרוקטיבי היה חסר כל משמעות עבור היוונים שלגביהם "קיים" היה זהה ל"ניתן לבניה". כך למשל האכסיומה המפורסמת, המנוסחת בספרי הלימוד שלנו כ"דרך כל שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד" נוסחה

במקור, אצל אוקלידס כדרישה (פוסטולט)[1]": להעביר ישר דרך כל שתי נקודות[2]". ראוי לציין שמתוך חמשת הפוסטולטים ששם אוקלידס ביסוד הגיאומטריה ארבעה הם מה שאנו מכנים משפטי קיום ומתוך ארבעה אלו שלושה קשורים ישירות בסרגל ובמחוגה (הרביעי הוא הנוסח האוקלידי לאכסיומת המקבילים). שלושה פוסטולטים אלה מהווים את הבסיס לאוסף העצמים המהווה את עולמה של הגיאומטריה האוקלידית, וניתן לכן לאפיין גיאומטריה זו כגיאומטריה של הסרגל והמחוגה[3]. ידוע אכן שאוסף הנקודות במישור הקרטזי שניתן לבנות בעזרת סרגל ומחוגה, כאשר מתחילים ב (0, 0) וב (1, 0) כנתונות, מהווה מודל מינימלי עבור הגיאומטריה האוקלידית האלמנטרית של ספרי הלימוד (כלומר ללא סכימת הרציפות, שהיא במהותה אכסיומה מסדר שני).

חשוב להבין שה"סרגל" וה"מחוגה" אינם כאן יותר מאשר "כיסוי" קונסטרוקטיבי פיקטיבי לדרישות הקיום. כך מהווה המחוגה כיסוי לדרישה שבהנתן שלוש נקודות A, B, C קיים (= ניתן להעביר) מעגל שמרכזו ב A ורדיוסו שווה ל BC[4], והסרגל-"כיסוי" לפוסטולטים הקשורים בישרים. שני המכשירים הם בעצם פיקציות, שמגבלות של אורכים אינן קיימות לגביהן

----

(1) ההבדל בין "אכסיומה" ו"פוסטולט" שהיה קיים אצל אוקלידס, הטשטש בימינו, וחבל.

(2) אצל אוקלידס "ישר" הוא מה שאנו קוראים "קטע סופי". פוסטולט אחד שלו הבטיח האפשרות לחבר כל שתי נקודות בקטע כזה ופוסטולט אחר - את האפשרות להאריך קטע זה כרצוננו בשני הכיוונים. התיחסות לישר "בשלמותו" לא קיימת אצלו.

(3) לעומת זאת הגיאומטריה הפרויקטיבית, לדוגמא, נתנת לאיפיון כגיאומטריה של הסרגל.

(4) אצל אוקלידס הדרישה היתה אפילו מצומצמת יותר: שקיים מעגל שמרכזו ב A ועובר דרך B. הוא הוכיח שמזה נובעת הדרישה הכללית יותר.

וניתן בעזרתם להעביר קוים חסרי עובי. תפקידם דומה לזה של "מכונות טיורינג" בתורת החישוביות. גם אלה האחרונות הינן פונקציות אידיאליות, שמגבלות של קיבול, מרחב וזמן אינן חלות עליהן, ותפקידן הוא להוות "כיסוי קונסטרוקטיבי" לדרישה שכל פונקציה רקורסיבית הינה נתנת לחישוב באופן מיכאני. גם פה וגם בחישוביות אין ליחס חשיבות יתירה ל"מכשירים" הפיקטיביים אלא לפונקציות המתוארות בעזרתן ולהן הם מהווים "כיסוי". מאוחר יותר נסביר מהן פונקציות אלו במקרה של הסרגל והמחוגה.

III. דוגמה: פתרון משוואה ריבועית כללית כבעית בניה

כדי להבהיר את הרעיון של זיהוי בעיות הבניה עם משפטי קיום נתחיל בדוגמה בכיוון ההפוך. נקח את משפט הקיום הפשוט אודות שורשי המשוואה הריבועית, שהוזכר למעלה, ונציגו בשפה הדומה לזו המקובלת בבעיות בניה.

(1) בעיה: בנה מספר ממשי X המקים $AX^2 + BX + C = 0$ על פי A, B, C (בהנחה ש $A \neq 0$).

פתרון

(2) נתונים: מספרים ממשיים A, B, C כך ש $A \neq 0$.

(3) ניתוח הבעיה: נניח שכבר בנינו X כנדרש. אז $AX^2 + BX + C = 0$ ולכן $AX^2 + BX = -C$. ננסה להשלים את אגף שמאל לריבוע מלא. בשביל זה נכפול תחילה את שני האגפים ב 4A. נקבל: $4A^2X^2 + 4ABX = -4AC$. נוסיף עתה את B^2 לשני האגפים ונקבל:

$$4A^2X^2 + 4ABX + 4B^2 = B^2 - 4AC$$

כלומר:

$$(2AX + B)^2 = B^2 - 4AC$$

ע"י הוצאת שורשת ריבועי משני האגפים (רק כאשר $B^2 - 4AC > 0$) נקבל שתי משוואות ממעלה ראשונה, וכאלה אנו יודעים לפתור.

(4) <u>תאור הבניה:</u>

$$X_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

(5) <u>ביצוע הבניה:</u> - - - - - - - - -

(6) <u>הוכחת הבניה:</u> מציבים את X_1 ו- X_2 במשוואה המקורית ורואים שמתקבלת זהות.

(7) <u>תנאי הגבלה:</u> $\Delta = B^2 - 4AC \geq 0$

(8) <u>מספר הפתרונות:</u> שנים אם $\Delta > 0$. אחד אם $\Delta = 0$.
(כאשר $\Delta < 0$ אין פתרון).

בנוגע להצגה זו יש מקום להעיר את ההערות הבאות:

1. מה שמקביל פה לבעית בניה הוא לא פתרון משוואה ריבועית ספציפית, אלא פתרון של המשוואה הכללית, המשוואה "באותיות". זוהי בעיה מרמה גבוהה יותר, שמה שאנו מחפשים בפתרונה הוא <u>תהליך</u> למציאת הנעלם, שיעבוד בכל מקרה ספציפי. מה שיקביל כאן למשוואה ספציפית כמו $X^2 - 3X + 2 = 0$ היא בעית בניה עם נתונים ספציפיים.

2. את הסעיף של "ביצוע הבניה" השארנו ריק. בבניות בגיאומטריה נהוג לדרוש כאן מהתלמיד לבצע את הבניה בפועל לגבי מערכת <u>אחת</u> (בדרך כלל) של נתונים, שהבניה המתוארת ישימה לגביה. לעשות זאת כאן פרושו לקחת מערכת אחת של ערכים מספריים עבור A, B, C, כך שהמשוואה המתקבלת פתירה, ולחשב את X_1 ו- X_2 בהתאם. איש לא יטען אבל שזהו חלק חיוני (או חלק בכלל) מפתרון כללי של הבעיה (מה שקורה באמת הוא שלאחר הוכחת משפט הקיום מתורגל התלמיד <u>בהרבה</u> דוגמאות של יישום

הבניה המתוארת, כולל דוגמאות בהן תנאי ההגבלה אינם מתקיימים ולבעיה אין פתרון).

3. תאור הבעיה בדוגמה זו נעשה ע"י מתן נוסחאות למציאת השורשים. נוסחאות אלה הינן סוג פשוט ביותר של אלגוריתם, המתאר, כיצד לקבל את הפתרונות המבוקשים ע"י שמתחילים ב A, B, C הנתונים ומבצעים סדרה סופית של פעולות פרימיטיביות הנחשבות ניתנות לביצוע (במקרה זה - חיבור, חיסור, כפל, חילוק והוצאת שורש ריבועי).

4. האופי הקונסטרוקטיבי של הפתרון נעוץ כאן בעובדה שהוכחת קיום X כנדרש נעשתה ע"י מתן אלגוריתם למציאתו, מלווה בהוכחה שהאלגוריתם אכן עובד (ובמקרה הנידון מוצא אפילו את כל הפתרונות, כאשר יש כאלה).

5. תנאי ההגבלה כאן הם תנאים הכרחיים ומספיקים לקיום X כנדרש והם גם, בו בזמן, תנאים הכרחיים ומספיקים לכך שהאלגוריתם המתואר ישים. (ההכרחיות הוכחה כאן בשלב של "ניתוח הבעיה", המספיקות - בשלב של "הוכחת הבניה").

6. מה שמופיע אצלנו כניתוח הבעיה, מופיע בכל ספרי הלימוד שבדקתי כהוכחת המשפט. זוהי הטעיה! כל מה שהניתוח לעיל, כמו שהוא רשום, מראה, הוא שאם יש פתרון אז הוא אחד משני הערכים X_1 ו- X_2 שמצאנו, ואולי שניהם. הוא איננו מראה, כמות שהוא, שהם אכן מהווים פתרון. במלים אחרות: הניתוח מראה ש"להיות שווה ל X_1 או ל X_2" הינו תנאי הכרחי למספר על מנת שיהווה פתרון, אך הוא איננו מראה שזהו גם תנאי מספיק. מובן, קל מאוד להראות גם זאת אם חוזרים על השלבים בסדר הפוך (מה שאיננו שונה כמעט מהצבת X_1 ו X_2 בביטוי $AX^2 + BX + C$ וחישוב מה שיוצא). אם עושים זאת אזי מתבררת

חשיבות הנתון $A \neq 0$ גם בשלב הניתוח, בו הכפלנו את שני האגפים ב $4A$, ולא רק בעת חילוץ X בסוף.

קצר עוד יותר כאן הוא להשתמש באופן עקבי במושג של משוואות שקולות ולהדגיש בכל שלב שאנו עוברים ממשוואה אחת למשוואה שקולה לה. (בסוף תיווצר אומנם בעיה מסויימת: אנו מחליפים שם משוואה אחת בזוג משוואות שרק יחד (עם "או" באמצע!) הן שקולות למשוואה המקורית, אך מושג שקילות כזה איננו נלמד בדרך כלל בתיכון.) מה שרצוני להדגיש הוא, שלצערי, אין עושים דבר מכל אלה. לדעתי, דווקא בהוכחות כאלה, בהן הוכחות הכיוון הישר וההפוך כה קרובות זו לזו, יש להקפיד על ההבחנה ביניהן ולא לסייע בטשטושן. אם אין עושים זאת בשלב זה- אין מקום להתפלא אחר כך, מדוע אין התלמיד מבין את ההבדל בין הסקת מה שצריך להוכיח מהנתונים ובין קבלת הנתונים ממה שצריך להוכיח, ואיננו מסוגל להבין מהי הוכחה תקפה. הבהרת נקודות כאלה נראית לי כה חשובה, שהייתי שוקל להעדיף גם בדוגמה כמו הנוכחית את הוכחת נכונות הנוסחה ע"י הצבת X_1 ו X_2 במשוואה המקורית על פני השימוש במושג המשוואות השקולות, המיוחד במידה רבה לנושא מסוים זה (אפילו בתעלם מהבעיה הקשורה בו בסיום ההוכחה).

IV. דוגמה: בעית בניה כהוכחת קיום

הדוגמה בסעיף הקודם הבהירה את הקשר בין בעיות בניה ובין משפטי קיום ורמזה על המינוח המודרני של מושגים שונים המופיעים בפתרון בעיות בניה, כמו "תנאי הגבלה" ו"תאור בניה". נגש עתה לחלק המעניין אותנו יותר: כיצד נתרגם בעיות בניה למשפטי קיום. נתאר כיצד תרגום כזה נעשה על-ידי

טיפול בבעיה לדוגמא. בחרתי לצורך זאת בעית בניה פשוטה, שבספר הלימוד ממנו לקחתיה היא מופיעה ממש בהתחלה, עוד בטרם למד התלמיד על ישרים מקבילים. הבעיה הינה: לבנות משולש עפ"י אחת מצלעותיו, התיכון לאותה צלע והגובה לאחת הצלעות האחרות. (כלומר: לפי a, m_a ו h_b). תיאור הבניה אליה התכוון, כנראה, המחבר הינו: "נקצה על ישר קטע DB השווה ל h_b הנתון, ונעלה לו אנך בנקודה D. מ B כמרכז נחוג מעגל ברדיוס a הנתון. תהי C נקודת פגישה של מעגל זה והאנך ל BD. נחצה את BC ומאמצעיתו E נחוג מעגל ברדיוס m_a הנתון. תהי A נקודת פגישה של מעגל זה והישר CD. משולש ABC הוא משולש כמבוקש".

סביר להניח שרוב התלמידים לא יתקשו במציאת בניה זו. הוכחת הבניה תהיה אז כאילו טריביאלית. במה שנוגע לתנאי הגבלה הרי תלמיד טוב יבחין ש $h_b \geqslant a$ הוא כאן תנאי כזה, ובכך יסתפקו הן הוא והן המורה. (במקרה זה, כמו שנראה, לא תהיה להם ברירה אחרת).

תרגום ראשוני של בעית הבניה הנ"ל למשפט קיום יעשה כך - "משפט": לכל שלושה קטעים a, m ו h במישור קיים משולש שאחת מצלעותיו שווה ל a, התיכון בו לאותה צלע שווה ל m ואחד הגבהים לצלעותיו האחרות שווה ל h.

"הוכחת" המשפט בלשון מודרנית (בהתאם לבניה למעלה): יהיו B ו D קצות הקטע h הנתון. תהי C נקודת חיתוך של האנך ל BD ב D ושל המעגל שמרכזו ב B ורדיוסו שווה ל a. תהי E נקודת האמצע של הקטע BC ותהי A נקודת מפגש של הישר CD ושל המעגל שמרכזו ב E ורדיוסו שווה ל m. קל לברר שלמשולש ABC כל התכונות הדרושות.

ניסוח זה של ההוכחה אינו כולל שום התיחסות ל"סרגל" ו"מחוגה" אלא מדבר פשוט על בקודות חיתוך של מעגלים וישרים כאשר קיומם של מעגלים וישרים אלה מובטח ע"י האכסיומות (במקרה של המעגלים) או ע"י משפטים שנובעים מהאכסיומות (במקרה של האנך ל BD ב D). ברור עם זאת ששום קורא בעל הכשרה מתימטית ראויה לשמה לא יקבל הוכחה זו כמלאה (בניגוד למה שעלול לקרות אם אותו קורא עצמו יתיחס לבעיה כאל "בעית בניה" ויקרא את תאור הבניה עליו היא מבוססת!) קורא כזה חונך שלא לקבל משפטים מהסוג: "תהי A נקודה כך ש..." לפני שהוברר שנקודה כזו אכן קיימת. במקרה שלפנינו, לכן, יש להראות תחילה את קיומה של C ואח"כ את קיומה של A. (נניח, לצורך העניין, שקיומו של אמצע לכל קטע הוא ידוע ואין לכן בעיה עם E) דבר זה לא יצלח בידינו, ומסיבה פשוטה ביותר: הן לא תמיד קיימות! הברור מתי הן אכן קימות יוביל אותנו לסדרת תיקונים של ה"משפט" למעלה.

לצורך ברור שאלת קיומן של A ו C עלינו להכיר את התנאים הבסיסיים לקיום נקודות בגיאומטריה האלמנטרית. גיאומטריה זו עוסקת רק בישרים, במעגלים ובחלקי ישרים ומעגלים. כל נקודה שקיומה מוכח מתקבלת לכן כחיתוך של שני ישרים, או של מעגל וישר או של שני מעגלים. התנאים לקיום חיתוכים אלה הינם, בהתאם, שלושה:

1. שני מעגלים שמרכזיהם בנקודות 0_1 ו 0_2 ורדיוסיהם R_1 ו R_2 בהתאמה נפגשים אםם $|R_1 - R_2| \leq \overline{0_1 0_2} \leq R_1 + R_2$. כאשר $\overline{0_1 0_2} = R_1 + R_2$ או כאשר $\overline{0_1 0_2} = |R_1 - R_2|$ קיימת נקודת חיתוך יחידה. אחרת יש שתיים: אחת מכל צד של $0_1 0_2$.

2. מעגל וישר נחתכים אםם מרחק מרכז המעגל מהישר גדול או שווה לרדיוסו. אם מרחק זה שווה לרדיוס - קיימת נקודת חיתוך אחת. אם הוא גדול ממנו אז יש שתי נקודות פגישה, אחת מכל צד של היטל הנקודה על הישר.

3. שני ישרים נפגשים אם סכום הזויות החד-צדדיות הנוצרות ע"י חיתוכם עם ישר שלישי קטן (באחד הצדדים) מ $2d$. נקודת הפגישה תהייה אז בצד בו הסכום הנ"ל קטן מ $2d$ (5).

בעזרת עקרון 2 לא יהיה זה קשה לקבוע, באילו תנאים קימות הנקודות B ו C. C היא חיתוך של מעגל שמרכזו B ורדיוסו a עם ישר, שמרחקו מ B היא h. התנאי לקיומה הוא לכן $a \geq h$. A, לעומת זאת, היא חיתוך של מעגל, שמרכזו ב E (אמצע BC) ורדיוסו m, עם אותו הישר. מהמשפטים על קטע אמצעים נובע בקלות שמרחק E מהישר הנ"ל הוא $\frac{h}{2}$ ולכן התנאי לקיום A הוא $m \geq \frac{h}{2}$.

האם הוספת שני התנאים הנ"ל להנחות המשפט תהפוך את ה"הוכחה" למעלה לתקפה? עדיין לא! ניסוח אותה "הוכחה" כולל עוד הנחה סמויה בסופו, שלא קל להבחין בה. המשפט "ABC הוא משולש כמבוקש" מניח ש A, B, C יוצרות משולש, כלומר שהן שונות כולן זו מזו, ואינן נמצאות על ישר אחד. גם הנחה זו יש להצדיק! עתה A ו C נמצאות שתיהן, מהגדרתן, על האנך ל BD ב D, בעוד B איננה נמצאת על אנך זה. די לכן להראות ש $A \neq C$. עובדה זו איננה נובעת אבל אפילו מהתנאים $h \leq a$ ו $m \geq \frac{h}{2}$! עלינו להוסיף, איפוא, תנאי (או יותר) שיבטיחו גם זאת. שיקול פשוט לצורך זאת יכול להיות השיקול הבא: כאשר בטלב הסופי אנו מעבירים מעגל שמרכזו ב E ורדיוסו M,

----

(5) כדי למקם את נקודת החיתוך של שני ישרים ביתר דיוק נחוצות, לעיתים קרובות, אכסיומות נוספות, כמו זו של פש. אנו לא נכנס כאן, אבל, לסוגית הניסוח האכסיומטי המדויק. בנוגע לשלושת העקרונות הגישה הפשוטה ביותר אולי, היא לקחת את חלקי ה"מספיקות" של כולם כאכסיומות (ההכרחיות נתנת להוכחה בקלות). לגבי השנים הראשונים יש לתת הסבר אינטואיטיבי הקשור בשיקולי רציפות.

הרי אם מעגל זה חותך את DC **בשתי** נקודות (מה שקורה כאשר $m > \frac{h}{2}$) הרי לפחות אחת משתי נקודות אלה חייבת להיות שונה מ C. נסמן את זו השונה מ C ב A, ואז ABC משולש כמבוקש. אם נחזק לכן את התנאי $m \geq \frac{h}{2}$ ל $m > \frac{h}{2}$, הרי נוכל להוכיח קיום משולש כנטען ב"משפט" למעלה. נוכל, איפוא, לתקן "משפט" זה באופן הבא:

תיקון 1 ל"משפט": אם a, m ו h הם שלושה קטעים במישור כך ש $a \geq h$ ו $m > \frac{h}{2}$ אז קיים משולש שאחת מצלעותיו שווה ל a, התיכון אליה שווה ל m ואחד הגבהים לצלעותיו האחרות שווה ל h.

התיקון הראשון ל"משפט" נותן תנאים **מספיקים** לקיום משולש כמו ב"משפט" המקורי. האם הם גם הכרחיים? בהחלט לא! גם כש $m = \frac{h}{2}$, למשל, אפשרי קיום משולש כזה, כיוון שלפי שיקול בלתי תלוי בזה שהוביל להצעת התנאי $m > \frac{h}{2}$, אם מרחק C מ E ($\frac{a}{2}$) שונה מרדיוס המעגל האחרון הנזכר ב"הוכחת" ה"משפט", אז בהכרח $C \neq A$ (אפילו אם $m = \frac{h}{2}$). תיקון אלטרנטיבי למשפט הינו לכן:

תיקון 2 ל"משפט": אם a, m, h הם שלושה קטעים כך ש $a \geq h$, $m \geq \frac{h}{2}$ ו $m \neq \frac{a}{2}$ אז קיים משולש שבו...

את שני התיקונים ניתן לאחד למשפט חזק יותר באופן הבא:

תיקון 3 ל"משפט": אם a, m ו h הם שלושה קטעים במישור כך ש:

1) $a \geq h$ 2) $m \geq \frac{h}{2}$ 3) $m \neq \frac{a}{2}$ או $m \neq \frac{h}{2}$, אז קיים משולש שבו...

התנאי השלישי בנוסח האחרון הוא תנאי מורכב, "דיסיונקציה" בלשון הלוגיקאים. בשיעור בכיתה יכול המורה לנצל את ההזדמנות ולהסביר את השימוש בתנאי מורכב כזה: איך מוכיחים נכונותו ואיך מסיקים ממנו מסקנות. כדוגמה פשוטה אפשר להראות, שבהנחת התנאים $m \geq \frac{h}{2}$ ו $a \geq h$ שקולה הדיסיונקציה "$m \neq \frac{a}{2}$ או $m \neq \frac{h}{2}$" לדיסיונקציה "$m > \frac{h}{2}$ או $a > h$". נוסח שקול לתיקון 5 יכול להיות, אם כך:

תיקון 4 ל"משפט": אם a, h ו m הם שלושה קטעים כך ש $a \geqslant h$, $m \geqslant \frac{h}{2}$ ובלפחות באחד משני אי-שוויונות אלה מתקיים אי-שוויון ממש, אז קיים משולש שבו...

שוב טבעי לשאול עתה: האם התנאים המספיקים שניתנו בשני התיקונים האחרונים הם גם הכרחיים? יש לנהוג זהירות רבה בטרם תנתן תשובה חיובית. בדיקה יסודית של ההוכחה שנתנו לתיקונים אלה תראה אמנם שתנאים אלה הם אכן הכרחיים לתקפות הוכחה זו. במילים אחרות: שלושת התנאים הללו הם תנאים הכרחיים ומספיקים לכך שהמעגלים והישרים שאמורים להחתך באותה הוכחה אכן נחתכים ושלוש הנקודות A, B, C המתוארות בה אכן יוצרות משולש כמבוקש. יש להדגיש, עם זאת, לתלמידים, שתנאים הכרחיים לצורך תקפות הוכחה מסויימת אינם הכרחיים תמיד גם לנכונות מסקנת המשפט המתאים. עקרונית (וכדאי להביא בשעור דוגמאות למקרים כאלה) יתכן שבתנאים אחרים עדיין מסקנת המשפט נכונה (עם הוכחה אחרת, כמובן). אם רוצים אנו להסתמך על הכרחיות התנאים עבור נכונות ההוכחה הספציפית שלנו

כדי להסיק הכרחיותה עבור טענת ה"משפט", יש להראות שאם משולשים כמו ב"משפט" קיימים בכלל, אז הבניה שתארנו חייבת לספק אחד מהם. במילים אחרות: יש להראות, שאם באיזה מקום במישור קיים משולש כמו ב"שרטוט" אז כל הנקודות שתוארו בהוכחה שלנו קיימות, וש A, B, C של הוכחה זו יוצרות אז משולש. ניתן אכן להראות זאת על סמך הומוגניות המישור. חשיבה ברוח זו מעניקה אף, אולי, תובנה מעמיקה יותר של הנושא הנדון. עם זאת, ניסוח ההוכחה בקוים כאלה איננו כה קל, והשיקולים הכרוכים בה אינם מהסוג המקובל בהוכחות גיאומטריות בתיכון (והם מסתמכים על אכסיומות שאינן נלמדות שם בדרך כלל). גרוע מזאת: מתן הוכחת ההכרחיות ברוח זו עלול לטשטש את ההבדל בין תנאים מספיקים והכרחיים - שעה שהבהרת הבדל זה צריכה להיות אחת המטרות העקריות בשלב זה של הלימוד. מומלץ הרבה יותר, לכן, להבהיר, שהכרחיות התנאים עבור קיום משולש כנטען איננה דבר הקשור לבניה הספציפית המתוארת, אלא לכל בניה בכלל (של משולש כנטען). משמעות ההכרחיות נתנת במשפט הבא:

משפט הפוך לתיקון 4: בכל משולש שצלעותיו a, b, c מתקיימים:

א) $a \geq h_b$ ב) $m_a \geq \frac{h_b}{2}$ ג) $a \neq h_b$ או $m_a \neq \frac{h_b}{2}$.

המשפט האחרון הוא מהסוג שאופיין קודם כאוניברסלי (π_1^0). הוכחת חלקים א) ו ב) שלו היא קלה. חלק ג) הוא מעט יותר בעיתי, כיוון שהוא תנאי מורכב, דיסיונקציה, שבהוכחתו התלמיד מורגל פחות. אין אבל בשום פנים ואופן (לדעתי) להתחמק מהוכחת דיסיונקציה זו. להיפך יש לשמוח על ההזדמנות ללמד איך עושים זאת. במקרה שלפנינו (כמו ברבים אחרים) הדרך הטובה ביותר לכך היא להראות שאם הדיסיונקט הראשון, $a \neq h_b$, איננו

מתקיים (כלומר, אם $a = h_b$) אז השני, $m_a \neq \frac{h_b}{2}$, חייב להתקיים. דבר זה הינו קל (ומהסוג שהתלמיד מתורגל בו). חייב, כמובן, לקדום לכך הסבר, שכדי להוכיח "A או B" מספיק להוכיח ש B נובע משלילת A(6). אלטרנטיבה אחרת, פחות נוחה במקרה הנוכחי, היא ללכת בדרך השלילה: להניח שהדיסיונקציה איננה נכונה (ולכן $a = h_b$ וגם $m_a = \frac{h_b}{2}$) ולקבל סתירה. כך או כך, ההוכחה אינה חורגת ממה שמקובל בהוכחת משפטים אוניברסליים, והיא מרמת סיבוך נמוכה מזו הכרוכה בהוכחת מספיקות התנאים, שהיא משפט קיום (π_2^o).

איחוד של תיקון 4 ל"משפט" עם המשפט ההפוך לו יתן לנו את הנוסח השלם הבא:

<u>תיקון ה"המשפט", נוסח סופי:</u> יהיו a, m, h שלושה קטעים במישור. תנאים הכרחיים ומספיקים לקיום משולש, שאחת מצלעותיו שווה ל a, התיכון אליה שווה ל m ואחד הגבהים לצלעותיו האחרון שווה ל h הם:

א) $a \geq h$ ב) $m \geq \frac{h}{2}$ ג) $a \neq h$ או $m \neq \frac{h}{2}$.

V. <u>כיצד נתרגם בעיות בניה</u>

הדיון בסעיף הקודם הראה בצורה ברורה את החשיבות המרכזית שיש במסגרת לימוד בעיות בניה לטיפול ב"תנאי הגבלה". משמעות מושג זה איננה ברורה,

---

(6) לפי הלוגיקה הקלאסית שני הדברים שקולים אפילו, ברם הכוון שאם "A או B" אז "B נובע משלילת A" איננו כה אינטואיטיבי, וגם איננו בחוץ לנו פה.

ולמעשה כלל לא ברור לתלמיד אם הכוונה לתנאים בהם הבניה שהציע ניתנת לביצוע ופותרת את הבעיה (שאז אלה הם תנאים מספיקים לקיום מה שאמור להבנות) או אם המדובר בתנאים כלליים, החייבים להתקיים בכל משולש המתאים לתנאי הבעיה (שאז אלה הם תנאים הכרחיים לקיום פתרון). למעשה, עצם ההבדל אינו נהיר כלל לתלמיד! אידיאלית, כמובן, תנאי ההגבלה אמורים להיות גם מספיקים וגם הכרחיים, אך מה שקורה בפועל (בדרך כלל), הוא שהתלמיד מוצא אי אלו תנאים הכרחיים מהסוג $a \geq h_a$ בדוגמה למעלה, ובכך מסתפקים הכל. לעתים קרובות אף אם יתאמץ התלמיד, לא יוכל למצוא את כל התנאים ולהוכיח הכרחיותם ומספיקותם, כיוון שאין בידו עדיין הכלים לכך. בדוגמה בסעיף הקודם, למשל, אי אפשר לעשות זאת ללא ידע על קטע אמצעים במשולש (או לפחות על מקבילים) ועל חיתוכי ישרים ומעגלים, אך השאלה ניתנה עוד לפני הפרק על המקבילים!

בעת התרגום של בעיות בניה למשפטי קיום בלשון מודרנית יוחלף, איפוא, המונח "תנאי הגבלה" במונח "תנאים הכרחיים ומספיקים". עצם התרגום יכול וצריך להעשות בשתי רמות שונות:

א) ברמה הפחות קשה יכתבו לתלמיד התנאים לקיום העצם אותו צריך "לבנות" ומשימתו תהיה להוכיח הכרחיותם ומספיקותם. ניסוח הבעיה יהיה אז בעל המבנה הבא: "הוכח, שתנאים הכרחיים ומספיקים לקיום - - - - - - - כך ש- - - הם: _ _ _ _ _" כדי לעמוד במשימה יהיה על התלמיד להוכיח שני כיוונים. האחד: "בכל - - - - - כך ש - - - - - - מתקיים ש _ _ _ _ _", השני: "אם מתקיימים התנאים _ _ _ _ _ _ אז קיים - - - - - - - - כך ש - - - -". הראשון בין השנים הוא בעל אופי אוניברסלי מהסוג הרגיל. השני הוא בעל אופי אכסיסטנציאלי ובו יהיה על התלמיד לתת הוכחה קונסטרוקטיבית (שתכלול, בין היתר, את "תאור הבניה").

ב) ברמה היותר קשה יוטל על התלמיד לגלות את התנאים ההכרחיים והמספיקים בכוחות עצמו, ורק אח"כ יצטרך להוכיח טענתו כמו ברמה הראשונה. (לצורך זאת הוא יאלץ לעשות "ניתוח" לבעיה). נסוח הבעיה יהיה אז כדלקמן: "יהיו נתונים- - . מצא תנאים הכרחיים ומספיקים (על - -) לקיום - - - - - - כך ש - - -, הוכח טענתך". התנאים שעל התלמיד למצוא חייבים להיות בעלי אופי קונסטרוקטיבי (7). (בסופו של דבר, אם יענה התלמיד, שתנאי הכרחי ומספיק לקיום המשולש הוא שהמשולש קיים, הוא יצדק מבחינה לוגית...).

כדאי להעיר בנקודה זו על הדמיון הרב שיש בין הצגות אלו של בעיות בניה לבין מה שקורה בנושא של "מקומות גיאומטריים": גם שם יש שתי רמות לשאלות. האחת: "הוכח, כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור כך ש - - - הוא ________" השניה: "מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור כך ש........, הוכח טענתך". (נסיוני הראה לי שתלמידים מתקשים לעיתים קרובות ברמה הראשונה דווקא יותר מאשר בשניה, למרות שעקרונית השניה קשה יותר. הסיבה לכך נעוצה בקשיים בהבנת הנקרא: הניסוח ברמה הראשונה ארוך יותר. זו סיבה טובה למה יש להרבות בניסוחים ברמה הראשונה!) ברמה הראשונה על התלמיד להוכיח שני כיוונים, ישר והפוך (הכרחיות ומספיקות). בשניה הוא חייב לפני כן למצוא (בעזרת "ניתוח") תיאור קונסטרוקטיבי ל"קבוצת הנקודות במישור כך ש.....".

---

(7) משמעות המושג בהקשר הנוכחי תנותח במאמר המשך.

ראוי לציין שבמשפטים על מקומות גיאומטריים שני הכיוונים שצריך להוכיח הם אוניברסליים. מכאן שבעיות הבניה מובילות אותנו צעד אחד קדימה, מעבר למקומות גיאומטריים, בסולם הסיבוכיות הלוגית. המסקנה המתבקשת היא, שהנקודה הטבעית ללימוד סיסטמתי של בעיות בניה הוא מיד לאחר הנושא של מקומות גיאומטריים[8]. קביעה זו מקבלת חיזוק מהעובדה ששימוש בידע על מקומות גיאומטריים הוא אחד מכלי הנשק החדים ביותר לפתרון בעיות בניה.

לסיכום, הברור עד כה מראה, שמרשימת האלמנטים הנכללים מסורתית בבעיות בניה (ראה תחילת סעיף II) "תנאי ההגבלה" הינם התנאים ההכרחיים והמספיקים לקיום עצם כנדרש, "תיאור הבניה" יחד עם "הוכחת הבניה" מהווים את ההוכחה הקונסטרוקטיבית למספיקות תנאים אלו, בעוד "ניתוח הבעיה" הוא כל מה שאנו עושים על מנת לגלות את התנאים אלו ואת ההוכחה. ה"ניתוח" אינו מהווה, לכן, חלק "רשמי" שחייב להכלל בפתרון (אם כי נכללת בו לעיתים קרובות הוכחת ההכרחיות של התנאים בצורה מובלעת). "ביצוע הבניה" אינו רלוונטי ואינו נחוץ במסגרת ראיה זו של הנושא. תהיה לו, עם זאת, חשיבות רבה יותר במסגרת הצגה אחרת שלו, שונה במקצת (אם גם לא באופן מהותי) המקשרת את בעיות הבניה לתיאוריה של יסודות מדעי המחשב. להצגה זו נקדיש מאמר נפרד.

VI. מסקנות אופרטיביות

בסעיף אחרון זה נדון בהשלכות האופרטיביות של הדיון עד כה. מסקנות ישירות ומלאות תתכנה, למעשה, רק במסגרת ראיה כוללת חדשה של לימודי

----

(8) במאמר ההמשך נחזור ביתר פרוט לנקודה זו.

המתימטיקה בתיכון. דעתי האישית הינה שאכן יש צורך במהפיכה כללית בכל הקשור בלימודים אלה: בתוכן, בצורה, בסדר, ברמה ובעיקר-ביעדים ובמטרות. ברם, דיון בנושא כללי זה הוא מעבר לטווח של המאמר הנוכחי, שכוונתו העיקרית היתה לשפוך אור על הנושא הספציפי של בעיות בניה. לא הייתי רוצה, עם זאת, שיווצר הרושם כאילו יש לתוכן הדברים שנאמרו ערך רק במסגרת מהפיכה. ההיפך הוא הנכון. אביא לכן את דעתי במספר נקודות אופרטיביות:

א) הייתי ממליץ להתחיל, בשלב ראשון, בהצגה המתימטית הטהורה של בעיות בניה כמשפט קיום - ולצורך אותן מטרות שתוארו בתחילת הדיון. בשלב שני, לאחר שהתלמיד התוודע למספר ניכר של דוגמאות כאלה אפשר להציג בפניו את המשותף לכולן - מושג ההוכחה הקונסטרוקטיבית, כדאי להביא דוגמאות בשלב זה גם למשפטי קיום אבסטרקטיים ולהוכחות קיום לא קונסטרוקטיביות (אולי בתחומים אחרים של המתימטיקה) כדי להבהיר את ההבדל. ניתוח מושג הקונסטרוקטיביות יוביל באופן טבעי למושג האלגוריתם, אותו יכיר התלמיד (כך אני מקווה) עוד קודם. (אז אפשר יהיה לעבור אל הפן השני של הנושא, כאשר יש להדגיש את הקשר ההדוק בינו ובין הפן הראשון). פה יהיה המקום גם לדבר על הסרגל והמחוגה הקלאסיים, להסביר מהותם והקשר שלהם לנושא. (אם רוצים, אפשר גם לתת אז מובן אלגוריתמי לבעיות בניה עם מחוגה בלבד או סרגל בלבד, ולהשתמש בהם לצורך הצגת רעיונות יסוד באינטליגנציה מלאכותית; דוגמאות נביא במאמר אחר.)

ב) כבר רמזנו למעלה שהן מבחינת הסיבוכיות הלוגיות והן מבחינת התוכן והשימוש - המקום המתאים ללימוד סיסטמתי של בעיות בניה כענף בפני עצמו הוא מיד לאחר הנושא של מקומות גיאומטריים - ולפני הנושאים של דמיון ושטחים. אין פרוש הדבר שאי אלו בעיות בניה לא תובאנה בצורת משפטי

קיום עוד קודם (הבניות ה"אלמנטריות" למשל). את הרעיון של הוכחות קיום קונסטרוקטיביות יש להציג בהדרגה! בכלל, קשה לעשות כאן הבחנה ברורה, כי להבדל בין האבסטרקטי והקונסטרוקטיבי יש חשיבות מכרעת גם לצורך הבנת מהותו של נושא המקומות הגיאומטריים ולכן ידע כלשהו על בעיות בניה הוא חיוני לצורך נושא זה. מעשית, יצטרך כנראה לבוא תחילה פרק מקדים, שישים את היסודות לשני הנושאים גם יחד. אח"כ יבוא אולי פרק המוקדש רק למקומות גיאומטריים ועוד אחר-כך - פרק המוקדש לפתירה סיסטמטית של "בעיות בניה".

ג) מה שידוע כ"בניות האלמנטריות" מהווה בעיה לא-קלה במסגרת ראית הדבריט הנוכחית. מצד אחד קשה, כאילו, להציגן כמשפטי - קיום. מצד שני יראה הדבר מעוות כלשהוא, אם נלמד את הנושא של בעיות בניה בלי להתיחס לבניות האלמנטריות.

בשתי דרכים שונות ניתן להתגבר על בעיה זו:

1) את הבניות האלמנטריות אפשר <u>בהחלט</u> להציג כמשפטי קיום[9] דבר זה מן הראוי שיעשה בשלב מוקדם של הלימוד, כיוון ש"בניות עזר" המסתמכות על הבניות האלמנטריות נפוצות כבר במשפטים ותרגילים על חפיפה. בהקשר זה כדאי להעיר שלוש הערות לוגיות חשובות:

I) משפטי הקיום שבותבנות הבניות האלמנטריות הם פשוטים בהרבה מאלה הניתנים בדרך-כלל ע"י בעיות בניה (כמו למשל זו שעסקנו בה בסעיף IV) כיוון <u>שאין בהם תנאי הגבלה:</u> כל קטע וכל זוית ניתן לחצות. בכל נקודה על ישר ניתן להעלות אנך לישר זה וכו'. ההבחנות שאיבחנו על ההבדל בין

----

(9) זו היתה, למעשה, גישתו של אוקלידס עצמו. מובן שהוא השתמש בטרמינולוגיה אחרת.

תנאים הכרחיים ומספיקים אינן רלוונטיות לכן בהקשר של הבניות האלמנטריות, ומכאן שהן אכן אינן צריכות להיות חלק מהפרק שיעסוק בבעיות בניה באופן סיסטמתי, אלא לבוא מוקדם יותר.

II) מבחינה לוגית טהורה אין זה הכרחי, למעשה, להוכיח קיום חוצה הזוית, האנך האמצעי וכו' בהתחלת הלימוד. זאת, כיוון שהם מופיעים שם בתוך ההנחות של המשפטים האוניברסליים ("אם" AD הוא חוצה זוית הראש במשולש שווה השוקיים ABC אז AD הוא הגובה לבסיס במשולש זה"[10]) ולכן משפטים אלו יכולים (לפי הלוגיקה הקלאסית אפילו חייבים!). להיות נכונים גם אם אין חוצי הזוית, האנך האמצעי וכו' קיימים כלל. ברם, מבחינה פדגוגית לא יהיה זה טוב להסתמך על זה בשלב כה מוקדם של הלימוד.

III) אפשר לטעון שלצורך הוכחת נכונות הבניות האלמנטריות יש להניח מראש קיום העצמים הנבנים, ולכן אי אפשר לראות בהן הוכחה לקיום עצמים אלה בלי להסתבך במעגליות. טענה זו, אבל, אינה מדויקת. הבניות האלמנטריות מסתמכות, ברובן, על משפט הדלתון, אותו מוכיחים בעזרת המשפט על זוויות הבסיס במשולש ש"ש. משפט אחרון זה מוכיחים בדרך כלל בתיכון בעזרת בנית העזר של העברת חוצה זוית הראש (מה שיוצר את המעגליות). אפשר אבל, כידוע, להוכיח את המשפט על שוויון זויות הבסיס במשולש שווה השוקיים ABC ללא כל בניות עזר ע"י חפיפת ABC ו ACB [11]. מנקודה זו אפשר להפוך את כל הבניות האלמנטריות למשפטי קיום פשוטים - פרט להעתקת זווית.

----

(10) הניסוח המקובל בתיכון שונה, כידוע: "חוצה זוית הראש במשולש ש"ש הוא גם גובה". ברם מה שמוכיחים הוא האימפליקציה למעלה. זה מתברר מיד מהתרגום הסטנדרטי של המשפט ל: נתון-צ"ל.

(11) הבאת הוכחה זו הינה מומלצת מסיבות בלתי תלויות בנושא הנדון, כיוון שהיא עוזרת להעמיק את הבנת מושג החפיפה וחשיבות הרישום המדויק שלו. מאוחר יותר יעזור הדבר מאוד לצורך הבנת מושג הדמיון וצורת הרישום שלו.

אם מקבלים כאכסיומה את משפט החפיפה השלישי (צ.צ.צ.) כי אז אין בעיה גם עם בניה זו. ברמת ביה"ס התיכון - זה לא בלתי מתקבל על הדעת, כיוון שבין כך ובין כך אין מביאים שם הוכחה שלמה ומדויקת של משפט זה. עם זאת, בלקיחת משפט חפיפה זה כאכסיומה יש מידה כלשהיא של רמאות: באכסיומטיקות המקובלות כיום לגיאומטריה האוקלידית בלקחת אפשרות העתקת הזווית כאכסיומה ומשפט החפיפה השלישי מוכח בעזרתה. (נוסח האכסיומה הוא כרגיל אבסטרקטי ולא קונסטרוקטיבי). אפשר לכן ללכת בדרך זו גם ברמה התיכונית, ולדחות בהתאם את לימוד הבניה האלמנטרית של העתקת זוית עד השלב שבו מנותחים: ההבדל בין קיום אבסטרקטי וקיום קונסטרוקטיבי ומשמעותם של הסרגל והמחוגה. בשלב כזה אפשר להודות שהגיוני היה אולי, לאור האכסיומות, להכניס מכשיר בסיסי שלישי המאפשר העתקת זוויות. ניתן להביא שתי סיבות מדוע אין עושים זאת:

- כל מה שאפשר לעשות בעזרת המכשיר השלישי אפשר גם בלעדיו - <u>דבר שהבניה האלמנטרית של העתקת זוית מוכיחה!</u>

- באכסיומה המקבילה מובן ה"קיום" הינו אבסטרקטי, ואילו הבניה האלמנטרית מוכיחה משהו חזק יותר: "קיום קונסטרוקטיבי" נימוק כזה יתכן, כמובן, רק לאחר שהובהר מה נחשב בגיאומטריה אלמנטרית כ"קונסטרוקטיבי" ולמה. נושא העתקת זוית יכול לשמש אז דוגמה גיאומטרית להבדל.

2) הגישה השניה האפשרית לבניות האלמנטריות היא לטפל <u>בכולן</u> כמו שהוצע לטפל בהעתקת זוית בפיסקה הקודמת, כלומר: לקבל תחילה קיום אבסרקטי של מה שהן בונות, ולראות בבניות הוכחה לקיום קונסטרוקטיבי (אישית, אני מעדיף את הגישה הקודמת).