במעלה שבילי הממוצעים

דוד רימר
מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

דוד בן-חיים
אוניברסיטת חיפה
בית הספר לחינוך, אורנים

Augustin Cauchy
(1789-1857)
אינדוקציה בהתקדמות ובנסיגה

Joseph Liouville
(1809-1882)
הוכחה אנליטית לאי-שוויון הממוצעים

אם $x_1 \, x_2 \, x_3 \dots x_n = 1$ $\quad x_i \in R$

אז $x_1+x_2+x_3+\dots x_n \geq n$

אם $x_1+x_2+x_3+\dots+x_n = 1$ $\quad x_i \in R$

אז $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$

אי השוויון הכפול על שם Cauchy

$$nb^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a - b} < na^{n-1}$$

$a > b > 0$

פונקציה קעורה

$$f\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right) \geq \frac{f(a_1)+f(a_2)+\dots+f(a_n)}{n}$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ נקודות בתחום הפונקציה

מבוא

במאמרים הקודמים ב"שבבים" 25 ו-26 הגדרנו את הממוצעים השונים עבור 2, 3, ו-n מספרים חיוביים, בדקנו את יחס הסדר בין הממוצעים השונים עבור 2 מספרים וחקרנו והוכחנו את ההתנהגות המונוטונית של הממוצע השורשי הריבועי המוכלל. הדרך שנקטנו בה, היתה להציג הוכחות בשיטות המתבססות על גישות שונות מתחומים שונים של המתמטיקה.

במאמר הנוכחי, נתרכז בקשר בין הממוצע החשבוני A והממוצע ההנדסי G של n מספרים חיוביים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (בדרך כלל מתיחסים אל קשר זה בשם אי-שוויון הממוצעים):

$$(1) \qquad A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqq G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

חשיבותו של משפט אי-שוויון הממוצעים בולטת לאור העסוק של מתמטיקאים רבים במציאת שיטות שונות להוכחתו, בנוסף לשימושים רבים בתוצאות שלו. סקירה מקפת של הספרות המקצועית מגלה שבמשך 200 השנים האחרונות, הרבה מתמטיקאים וביניהם מפורסמים מאוד עסקו בניסיון להוכיח את הקשר הנ"ל. אי לכך, קיימות מספר שיטות ודרכים להוכיח את אי-השוויון (1). יש לציין, שהצטברה בביליוגרפיה רחבה מאוד בנושא, המתיחסת למתמטיקאים מתקופות שונות, מהצרפתי Cauchy מלפני כמעט מאתיים שנה ועד לשמות חדשים יחסית המופיעים רק לאחרונה בכתבי עת מתמטיים מקצועיים. Polya, בספרו How To Solve It (1957, מתורגם גם לעברית) מתיחס לענין מציאת תוצאות או הוכחות שונות בציינו "אפילו הצלחנו למצוא פתרון מניח את הדעת, ייתכן כי עדיין יש לנו ענין למצוא פתרון נוסף. אנו מבקשים להיווכח בדבר נכונותה של התוצאה העיונית בשתי דרכי-הוכחה שונות, ממש כשם

שמשתוקקים אנו לחוש מציאותו של חפץ גשמי בשני חושים שונים. משמצאנו הוכחה אחת, אנו רוצים למצוא אחת נוספת, ממש כדרך שנרצה לגעת בחפץ לאחר שראינוהו. טובים השניים מן האחד. טובות שתי הוכחות מהוכחה יחידה!! (עמ' 111 במהדורה העברית).

הבביליוגרפיה בנושא אי-שוויון הממוצעים מכילה רעיונות והוכחות כלליים למדי ודרוש עיבוד נוסף עבור הקורא הממוצע ובפרט אם רוצים להפנות חומר זה גם לתלמידי תיכון. נציג במאמר זה עיבוד מפורט יחסית של 9 הוכחות שונות לאי-שוויון הממוצעים (1), כאשר בכל הוכחה יש רעיון מתמטי או גישה שונה. אנו מאמינים, שחלק גדול מן החומר המופיע להלן, מתאים להצגה לתלמידים בחטיבה העליונה של ביה"ס התיכון. לדעתנו, בעזרת ההוכחות השונות, כפי שמתוארות להלן, התלמידים יכולים להעשיר את ידיעותיהם במתמטיקה וללמוד על דרכי הוכחה מגוונות. במרבית ההוכחות נחוץ ידע בסיסי של הוכחה בעזרת אינדוקציה מתמטית, יסודות של חקירת פונקציות בעזרת שיטות אלמנטריות של האנליסה וטכניקות אלגבריות פשוטות יחסית. כמעט בכל ההוכחות משתמשים באינדוקציה מתמטית בדרכים ובגישות שונות,כך שאנו משוכנעים שההבנה של נושא האינדוקציה תועמק ותגבר בעקבות השימוש בה בהוכחות אלו. יש לציין, שחלק מן ההוכחות מלווה בדוגמאות פרטיות כדי להבהיר את הרעיון העיקרי בהוכחה הכללית. כמו כן, אין תלות בין הוכחה אחת לשניה וניתן להתיחס לכל אחת בנפרד. רשימת ההוכחות לפי סדר הצגתן:

1. באמצעות "החלפות".
2. בעזרת משפטי עזר.
3. בשיטת Cauchy - אינדוקציה בהתקדמות ובנסיגה.
4. באינדוקציה על פי Dianada.

5. באינדוקציה על פי Chong.

6. בעזרת אי-שוויון Cauchy.

7. באינדוקציה ישירה על פי Novoselov.

8. בעזרת הפונקציה הלוגריתמית הקעורה.

9. בשיטת Liouville (בעזרת אנליסה).

לפני שנתחיל בהצגת ההוכחות השונות, נעיר הערה מתמטית חשובה על פי Hardy et. al (1952, עמ' 2-3). שתי פונקציות של אותם משתנים $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ו- $g(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ נקראות בנות השוואה (Comparable functions) אם עבור כל הערכים האי-שליליים של המשתנים $a_1,a_2,\ldots,a_n$ קיים אי-שוויון אחד ורק אחד מן הסוג $f(a_1,a_2,\ldots,a_n) < g(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ או מן הסוג $g(a_1,a_2,\ldots,a_n) > f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. יש להדגיש כי לא כל שתי פונקציות הן בנות השוואה.

לדוגמה, שני פולינומים הומוגניים עם כל המקדמים חיוביים אבל ממעלות שונות אינם בני השוואה. $g(a,b) = a^3 + b^3$ ו- $f(a,b) = a^2 + b^2$ הן שתי פונקציות חיוביות עבור כל $a > 0$, $b > 0$ וגם הומוגניות אבל אינן בנות השוואה, מאחר שלא נקבל עבור כל זוג ערכים של a ו b אותו סוג של אי-שוויון $f < g$ או $f > g$. אנו מציעים לקורא לבדוק עבור הזוגות $(3, \frac{1}{2})$ ו- $(\frac{1}{10}, \frac{1}{2})$. לעומת זאת, הממוצע החשבוני והממוצע ההנדסי הם פונקציות שעבור כל הערכים החיוביים של $a_1, a_2, \ldots, a_n$ הן חיוביות, הומוגניות ומאותה מעלה (ראה "שבבים" תיק מס' 25, עמ' 24-26) ולכן הן גם בנות השוואה.

הרעיון הבסיסי בגישת ה"החלפות" הוא , לבחון איך משתנה אחד הממוצעים כאשר משנים את המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ באופן שהממוצע השני נשמר קבוע. לכן, קיימות שתי שיטות החלפה: א לשמור על הממוצע החשבוני קבוע ולבדוק כיצד הממוצע ההנדסי משתנה. ב לשמור על הממוצע ההנדסי קבוע ולבדוק כיצד הממוצע החשבוני משתנה. (ראה לדוגמא, Niven, 1981 ; Hardy et. al., 1952).

<u>שיטה א'</u> ה"החלפות" מתבצעות כך, שמספר האיברים בסידרה $a_1, a_2, \ldots, a_n$ נשמר וכמו כן <u>סכום</u> איברי הסידרה נשאר קבוע.

הכלל על פיו מבצעים את ה"החלפות" בכל פעם הוא:

האיבר הקטן ביותר		הממוצע החשבוני
X	$\longrightarrow$	A
האיבר הגדול ביותר		
y	$\longrightarrow$	x + y - A

ברור, שאנו שומרים על סכום האיברים קבוע. נראה, מה קורה למכפלה על ידי כך שנחשב את ההפרש:

$$(x + y - A)A - xy = Ax + Ay - A^2 - xy$$

$$= y(A - x) - A(A - x)$$

$$= (A - x)(y - A) > 0$$

התוצאה חיובית, מכיוון שקיים $x < A < y$ בהסתמך על אחת התכונות היסודיות של הממוצע החשבוני, להמצא בין המספר הקטן ביותר ובין המספר הגדול ביותר מבין מספרי הסידרה שהממוצע מתיחס אליה (ראה הוכחה ב"שבבים" 25, עמ' 22). לכן, בכל שלב שמבצעים את ה"החלפות" הנ"ל, המכפלה גדלה ובעקבות כך גם הממוצע ההנדסי עד אשר משתווה לממוצע החשבוני. כלומר, הממוצע ההנדסי הולך וגדל עד לחסם העליון שלו שהוא הממוצע החשבוני. טבלה 1 מדגימה את שיטה א' עבור סידרת המספרים: 1, 2, 3, 4, 8, 12.

1	2	3	4	8	12	$A = 5 \quad G = \sqrt[6]{720}$
A ↓					1+12-5 ↓	
5	2	3	4	8	8	$A_1 = 5 \quad G_1 = \sqrt[6]{7,680}$
	A ↓			2+8-5 ↓		
5	5	3	4	5	8	$A_2 = 5 \quad G_2 = \sqrt[6]{12,000}$
		A ↓			3+8-5 ↓	
5	5	5	4	5	6	$A_3 = 5 \quad G_3 = \sqrt[6]{15,000}$
			A ↓		4+6-5 ↓	
5	5	5	5	5	5	$A_4 = 5 \quad G_4 = \sqrt[6]{15,625}$

טבלה 1

יש לשים לב, שעבור מספר כלשהו של איברים, לאחר מספר סופי של "החלפות" כל איברי הסידרה משתווים ואם היינו מבצעים "החלפה" נוספת שתשמור על הסכום קבוע, הממוצע ההנדסי היה קטן, כי אז המכפלה היתה קטנה. באופן כללי, על פי שיטה א', אם מספר ה"החלפות" עד לשוויון האיברים הוא m, אזי מתקיים:

$$A = A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_m = G_m > G_{m-1} > G_{m-2} > G_{m-3} > \ldots > G_1 > G$$

ולכן:

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

<u>שיטה ב':</u> ה"החלפות" מתבצעות כך, שמספר האיברים בסידרה נשמר וכמו כן <u>מכפלת</u> איברי הסידרה נשארת קבועה. הכלל, על פיו מבצעים את ה"החלפות" בכל פעם הוא:

הממוצע ההנדסי		האיבר הקטן ביותר
G	$\longleftarrow$	x
		האיבר הגדול ביותר
$\frac{x \cdot y}{G}$	$\longleftarrow$	y

ברור, שאנו שומרים על מכפלה קבועה. נראה מה קורה לסכום על ידי כך שנחשב את ההפרש בין סכום האיברים לאחר ה"החלפה" לעומת סכומם לפני ה"החלפה":

$$\left(G + \frac{x \cdot y}{G}\right) - (x + y) = \frac{1}{G}(G^2 + xy - Gx - Gy)$$

$$= \frac{1}{G}(G - x)(G - y) < 0$$

התוצאה שלילית, מכיוון שקיים $x < G < y$ ולכן בכל שלב שמבצעים את ה"החלפות", הסכום קטן ובעקבות כך גם הממוצע החשבוני עד אשר הממוצע החשבוני משתווה לבסוף לממוצע ההנדסי. מכאן, החסם התחתון של הממוצע החשבוני הוא הממוצע ההנדסי. טבלה 2 מדגימה את שיטה ב' עבור הסידרה: 27, 8, 3, 2.

2	3	8	27	$G = 6$	$A = 10$
$\downarrow G$			$\downarrow \frac{2\cdot 27}{6}$		
6	3	8	9	$G_1 = 6$	$A_1 = 6.5$
	$\downarrow G$		$\downarrow \frac{3\cdot 9}{6}$		
6	6	8	4.5	$G_2 = 6$	$A_2 = 6.125$
		$\downarrow \frac{4.5\cdot 8}{6}$	$\downarrow G$		
6	6	6	6	$G_3 = 6$	$A_3 = 6$

<u>טבלה 2</u>

גם במקרה זה, לאחר מספר סופי של "החלפות", כל איברי הסידרה משתווים ואם היינו מבצעים "החלפה" נוספת השומרת על מכפלה קבועה, הממוצע החשבוני היה גדל.

באופן כללי, על פי שיטה ב', אם מספר ה"החלפות" עד לשוויון האיברים הוא m, אז מתקיים:

$$G = G_1 = G_2 = G_3 = \ldots = G_m = A_m < A_{m-1} < A_{m-2} < \ldots < A_1 < A$$

ולכן:
$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

לסיכום גישת ה"החלפות" נעיר מספר הערות. הערה אחת מתיחסת לבחירת המספר הקטן ביותר והמספר הגדול ביותר בכל החלפה. נוכל להבטיח את כל התנאים בשיטת ה"החלפות" גם אם נבחר מספר כלשהו הקטן מן הממוצע עליו אנו רוצים לשמור לפי שיטה א' או ב', ואם נבחר מספר כלשהו הגדול מן הממוצע עליו רוצים לשמור. הערה שניה מתיחסת לדמיון הרב במהלכים של שתי שיטות ה"החלפה" כפי שתוארו לעיל, כך שנוהגים לקרוא לכל שיטה כשיטה <u>דואלית</u> לשניה (ראה Niven, 1981, עמ' 121-124).

הערה אחרונה והחשובה ביותר מתיחסת לדיוק מתמטי הקשור לבסיס רעיון ה"החלפות" (מוזכרת על ידי Hardy et. al., 1952, עמ' 12). למעשה, בשיטת ההחלפות, אנו מחליפים באופן כללי קבוצת מספרים $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

בקבוצה אחרת $(a'_n, \ldots, a'_2, a'_1)$, כך שסכומם קבוע (לפי שיטה א') או מכפלתם קבועה (לפי שיטה ב') ומניחים קיום הקבוצה האחרת $(a'_n, \ldots, a'_2, a'_1)$ שעבורה ה-G מקבל מכסימום (לפי שיטה א') או ה-A מקבל מינימום (לפי שיטה ב'). כדי שגישת ה"החלפות" תתקבל כשיטה מתמטית שלמה, דרושה הוכחה לקיום הקבוצה $(a'_n, \ldots, a'_2, a'_1)$ ואכן ניתן להוכיח זאת בעזרת האנליסה על פי משפט הערך המכסימלי (או הערך המינימלי). המשפט טוען (עבור פונקציות של משתנה אחד או מספר משתנים) שאם הפונקציה f מוגדרת על קבוצה סגורה וחסומה M והיא רציפה ב-M אז קיימות נקודות ב-M עבורן f מקבלת מכסימום וקיימות נקודות ב-M עבורן f מקבלת מינימום (Courant & Yohn, 1974, כרך II, עמ' 325). נדגים זאת עבור שיטה א' של ה"החלפות" במקרה של 2 ו-3 מספרים.

<u>n = 2</u>: כאשר מדובר בממוצעים של 2 מספרים אי-שליליים a_1 , a_2 אז $a_1 + a_2 = 2A \Longleftarrow a_2 = 2A - a_1$ והפונקציה שלנו g במשתנה אחד a_1:

$$g = \sqrt{a_1a_2} = \sqrt{a_1(2A - a_1)}$$

$$= \sqrt{-a_1^2 + 2Aa_1}$$

המירווח עליו g מוגדרת הוא $[0, 2A]$ והיא רציפה בתחום זה כי a_1 יכול לקבל כל ערך בין 0 ל-2A ולכן על פי משפט הערך המכסימלי קיים ל-g מכסימום בתחום $[0, 2A]$ ואכן, על פי שיטות האנליסה, הערך הזה מתקבל כאשר $a_1 = A$ ומכאן $a_2 = 2A - a_1 = A$.

<u>n = 3</u>: כאשר מדובר בממוצעים של 3 מספרים אי-שליליים a_1, a_2, a_3 אז $a_1 + a_2 + a_3 = 3A \Longleftarrow a_3 = 3A - a_1 - a_2$ והפונקציה g בשני משתנים a_1, a_2:

$$g = \sqrt[3]{a_1a_2a_3} = \sqrt[3]{a_1a_2(3A - a_1 - a_2)}$$

כאשר g מוגדרת על התחום הסגור $a_1 + a_2 \leqq 3A$, $a_2 \geqq 0$, $a_1 \geqq 0$.
כמו כן, a_1 ו- a_2 יכולים לקבל ערך כלשהו בין 0 ל-3A ולכן g גם רציפה ועל פי משפט הערך המכסימלי קיים ל-g מכסימום.

2. <u>הוכחת אי-שוויון הממוצעים בעזרת משפטי עזר</u>

אחד הרעיונות השימושיים בהוכחות מתמטיות הוא להשתמש במשפטי עזר ולעיתים משפט העזר מהווה את הכלי העיקרי בהוכחה של המשפט הראשי. לדוגמה, השימוש במשפט אויקלידס (הקובע כי כל ניצב במשולש ישר-זוית הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל הניצב על היתר) כמשפט עזר, הופך את הוכחת משפט פיתגורס לקצרה וטריביאלית. גם בהקשר לאי-שוויון הממוצעים, ניתן להצביע על משפטי עזר מן הסוג הזה. משפטים אלה קשורים בערכים, שהסכום של n מספרים חיוביים מקבל כאשר מכפלת המספרים קבועה, או בערכים שהמכפלה של n מספרים חיוביים מקבלת כאשר סכומם קבוע. באופן עקרוני, באמצעות משפטי העזר שיובאו להלן, נקבל בגישה שונה את המסקנות העיקריות משיטת ה"החלפות" בהוכחה הקודמת.

<u>משפט עזר א' והשימוש בו</u> יהי n מספר טבעי גדול מ-1 ו-$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ מספרים חיוביים כך ש-$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, אז $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geq n$.

הוכחת משפט העזר בעזרת אינדוקציה: עבור $n = 2$ נתון $x_1 x_2 = 1$ כלומר $x_2 = \frac{1}{x_1}$ ומכאן

$$x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1^2 + 1}{x_1} = \frac{x_1^2 - 2x_1 + 1}{x_1} + 2$$

$$= \frac{(x_1 - 1)^2}{x_1} + 2 \geq 2$$

נניח שהמשפט נכון עבור $n - 1$ ונוכיח את המעבר עבור n:

ברור, שאם כל המספרים x_i שווים ל-1 אז $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = n$ וזה מקיים את טענת המשפט. נניח שלא כל ה-x-ים שווים ולפחות אחד מהם גדול מ-1 (נסמנו x_n) ולכן יש גם אחד קטן מ-1 (נסמנו x_1), כלומר

$$x_1 < 1 < x_n \qquad (1)$$

ומכאן

$$(x_n - 1)(1 - x_1) > 0 \qquad (2)$$

כלומר $\quad$ (3) $\quad x_1x_n < x_1 + x_n - 1$

לפי הנחת האינדוקציה $\quad$ (4) $\quad x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + (x_1x_n) \geqq n - 1$

(יש לשים לב כי המכפלה x_1x_n מהווה איבר אחד).

אם ב-(4) נחליף את האיבר x_1x_n בביטוי $x_1 + x_n - 1$ הגדול ממנו על פי (3) הרי כיוון סימן אי-השוויון ב-(4) יישאר תקף (עיקרון בו משתמשים לרוב כאשר יש להוכיח נכונות אי-שוויון באינדוקציה) ולכן:

(5) $\quad x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + (x_1 + x_n -1) \geqq n - 1$

כלומר $\quad x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geqq n$

ובזה הושלמה הוכחת משפט העזר באינדוקציה.

כדי להוכיח את אי-שוויון הממוצעים באמצעות משפט עזר א'

נסמן $\quad x_1 = \frac{a_1}{G} \;, \quad x_2 = \frac{a_2}{G} \;, \quad \ldots \;, \quad x_n = \frac{a_n}{G}$

כאשר $a_1, a_2, \ldots, a_n$ מספרים ממשיים חיוביים ו-G הממוצע ההנדסי שלהם.

המכפלה $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots x_n$ שווה 1 כי

$$\frac{a_1}{G} \cdot \frac{a_2}{G} \cdot \frac{a_3}{G} \quad \ldots \cdot \frac{a_n}{G} = \frac{G^n}{G^n} = 1$$

ולכן בהסתמך על טענת משפט העזר, נובע כי

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geqq n$$

כלומר, $\quad \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{G} \geqq n$

ומכאן $\quad \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geqq G$

השקול לאי-שוויון הממוצעים

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqq G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

משפט עזר ב' והשימוש בו: גם במקרה זה מודגם עיקרון הדואליות (כמו בשיטת ה"החלפות") כאשר על פי משפט עזר ב' נתון n מספרים חיוביים כך ש- $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1$ וצריך להוכיח כי המכפלה של המספרים הללו מכסימלית כאשר כולם שווים, כלומר $x_1x_2x_3 \dots x_n = (\frac{1}{n})^n$.

כדי להוכיח משפט זה, נשתמש בפונקציה של n-1 משתנים ובעזרת נגזרות חלקיות למצוא את נקודות המכסימום שלה. (רעיון אחר להוכחת משפט עזר ב' מופיע ב-Bellman, Beckenbach 1965, עמ' 6). על פי רעיון זה משתמשים בפונקציות ונוסחאות נסיגה המקשרות אותן).

הוכחת משפט עזר ב:

מהנתון $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, נובע כי $x_n = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}$

נקבע פונקציה G של n - 1 משתנים בלתי תלויים השווה למכפלת ה-x-ים:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots\ x_{n-1} \cdot (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1})$$

נגזור את G לפי x_1 ונאפס את הנגזרת, נגזור את G לפי x_2 ונאפס את הנגזרת וכן הלאה עד x_{n-1}:

$$G'_{x_1} = x_2x_3\dots x_{n-1}\ (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) - 1 \cdot x_1x_2x_3\dots x_{n-1} = 0$$

$$\Longrightarrow x_1 = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}$$

$$G'_{x_2} = x_1x_3\dots x_{n-1}\ (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) - 1 \cdot x_1x_2\dots x_{n-1} = 0$$

$$\Longrightarrow x_2 = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$G'_{x_{n-1}} = x_1x_2\dots x_{n-2}\ (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) - 1 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} = 0$$

$$\Longrightarrow x_{n-1} = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}$$

ולכן הנגזרות החלקיות הראשונות של G לפי $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ בהתאמה מתאפסות כולן כאשר

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = \alpha$$

כמו כן, הנגזרות השניות של G לפי x_1 , x_2 , ... , x_{n-1} שליליות ולכן זו נקודת מכסימום של G. נשאר לטפל ב- x_n, כאשר כל שאר ה-x-ים שווים α

$$x_n = 1 - (n - 1)\alpha$$

נסתכל עתה על המכפלה של כל ה-x-ים באמצעות הפונקציה f של α: $\alpha^{n-1}\cdot[1-(n-1)\alpha] =$

הנגזרת הראשונה של f על פי

$$f'_\alpha = (n - 1)\ \alpha^{n-2}\ [1 - (n-1)\alpha] + \alpha^{n-1}\ [-(n-1)]$$

כאשר

$$f'_\alpha = 0 \Longrightarrow 1 - \alpha(n - 1) - \alpha = 0$$

$$\Longrightarrow 1 - n\alpha + \alpha - \alpha = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{1}{n}$$

ולכן גם $x_n = \frac{1}{n}$ כי אז $x_n = 1 - (n-1)\alpha = 1 - (n-1)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$.

בדיקת הנגזרת השניה של f לפי α בנקודה $\alpha = \frac{1}{n}$ מראה כי היא שלילית ומכאן המכסימום של המכפלה $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots\ x_n$ הוא $(\frac{1}{n})^n$, ובזה הושלמה הוכחת משפט עזר ב'.

כדי להוכיח את אי-שוויון הממוצעים באמצעות משפט עזר ב', נסמן

$$x_1 = \frac{a_1}{nA} \quad , \quad x_2 = \frac{a_2}{nA} \quad , \dots \quad , \quad x_n = \frac{a_n}{nA}$$

כאשר $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים חיוביים ו-A הממוצע החשבוני שלהם. ברור שהסכום

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

ולכן, בהסתמך על משפט העזר

$$x_1x_2\cdots x_n \leqq (\frac{1}{n})^n$$

יוצא כי
$$\frac{a_1}{nA}\cdot\frac{a_2}{nA}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{a_n}{nA} \leqq (\frac{1}{n})^n$$

ומכאן
$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n \leqq n^n\cdot A^n\cdot(\frac{1}{n})^n = A^n$$

אי לכך
$$G^n \leqq A^n$$

וזה שקול לאי-שוויון הממוצעים: $A(a_1,a_2,a_n) \geqq G(a_1,a_2,\ldots,a_n)$

3. הוכחת אי-שוויון הממוצעים בשיטת Cauchy - אינדוקציה בהתקדמות ובנסיגה

המתמטיקאי הצרפתי Augustin Cauchy שחי במאה ה-19 (1789-1857) הציג הוכחה לאי- שוויון הממוצעים בדרך האינדוקציה בשלבים. תחילה, הוא הוכיח בדרך האינדוקציה הרגילה את נכונות אי-שוויון הממוצעים עבור כל n המקיים: $n = 2^k$ כך ש-k מספר טבעי. לאחר מכן, Cauchy הציע דרך למעבר אחורה, מנכונות עבור n לנכונות עבור n-1 (כמעין אינדוקציה בנסיגה בשלב המעבר לעומת האינדוקציה הרגילה בהתקדמות בשלב המעבר מ-n ל- n+1).

שלב א' הוכחת אי-שוויון הממוצעים עבור כל n כך ש- $n = 2^k$ ו- $k=1,2,3,\ldots$.

עבור k=1, כאשר n = 2, קיים: $a_1\cdot a_2 = (\frac{a_1 + a_2}{2})^2 - (\frac{a_1 - a_2}{2})^2$

ומכיוון ש- $(\frac{a_1 - a_2}{2})^2 \geqq 0$ הרי

$$a_1a_2 \leqq (\frac{a_1 + a_2}{2})^2 \qquad (1)$$

והשוויון מתקיים אם ורק אם $(\frac{a_1 - a_2}{2})^2 = 0$, כלומר אם"ם $a_1 = a_2$.

כדי להבהיר את רעיון ההוכחה במעבר באינדוקציה מ-k ל-$k+1$ נפרט את ההוכחה גם עבור $k = 2$ וגם עבור $k = 3$. אין אלו שלבים הכרחיים, אולם לעיתים בהוכחות באינדוקציה, נחוץ לבצע אותם כדי ללמוד מהם על הטכניקות כגון בשלב המעבר מ-k ל-$k+1$. כמו כן, יש כאן הזדמנות במידת הצורך להכניס סימונים מתמטיים כגון סימני המכפלה והסכום.

<u>עבור $k = 2$</u> כלומר $n = 4$ צריך להוכיח:

$$\prod_{i=1}^{i=2^2} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=4} a_i}{4}\right]^4$$

כדי להוכיח זאת, למעשה נשתמש 4 פעמים באי-השוויון (1):

$$(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

וכשנפעיל שוב את (1) על האגף הימני של (3), נקבל:

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right) \leq \left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^2\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^2 \qquad (4)$$

כלומר

$$\prod_{i=1}^{i=2^2} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \leq \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=4} a_i}{4}\right]^4$$

<u>עבור $k = 3$</u>, כאשר $n = 2^3 = 8$ צריך להוכיח:

$$\prod_{i=1}^{i=2^3} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_8 \leq \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=8} a_i}{8}\right]^8 \qquad (5)$$

נסתכל על האגף השמאלי כעל 2 רביעיות ונשתמש בנכונות עבור $k = 2$

אז:

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)(a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8) \leq \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=4} a_i}{4}\right]^4 \left[\frac{\sum_{i=5}^{i=8} a_i}{4}\right]^4 \qquad (6)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\prod_{i=1}^{i=2^2} a_i \qquad\qquad \prod_{i=2^2+1}^{i=2^3} a_i$$

ועתה, בהסתמך על $k = 1$, כלומר $2 = n$, נקבל:

$$(7) \qquad \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=4} a_i}{4}\right] \left[\frac{\sum_{i=5}^{i=8} a_i}{4}\right] \leq \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=8} a_i}{8}\right]^2$$

וכשנעלה את שני האגפים של (7) בחזקת 4 נקבל:

$$(8) \qquad \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=4} a_i}{4}\right]^4 \left[\frac{\sum_{i=5}^{i=8} a_i}{4}\right]^4 \leq \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=8} a_i}{8}\right]^8$$

ולכן, ההוכחה עבור $k = 3$ הושלמה כתוצאה מ-(6) ו-(8).

חשוב לשים לב, שמספר האיברים מ- 2^k עד 2^{k+1} הוא 2^k כי $2^{k+1} - 2^k = 2^k(2 - 1) = 2^k$.

<u>שלב המעבר.</u> נניח שאי-שוויון הממוצעים נכון עבור $n = 2^k$ ונוכיח עבור $n = 2^{k+1}$, כלומר צריך להוכיח:

$$(9) \qquad \prod_{i=1}^{i=2^{k+1}} a_i \leq \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=2^{k+1}} a_i}{2^{k+1}}\right]^{2^{k+1}}$$

לפי השלבים הספציפיים בדוגמאות הפרטיות עבור $k = 2$ ו- $k = 3$, נחלק את האגף השמאלי של (9) לשני חלקים ונשתמש פעמיים בהנחת האינדוקציה עבור $n = 2^k$:

$$(10) \qquad \prod_{i=1}^{i=2^{k+1}} a_i = \left(\prod_{i=1}^{i=2^k} a_i\right) \left(\prod_{i=2^k+1}^{i=2^{k+1}} a_i\right) \leq \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=2^k} a_i}{2^k}\right]^{2^k} \left[\frac{\sum_{i=2^k+1}^{i=2^{k+1}} a_i}{2^k}\right]^{2^k}$$

בהסתמך על הנכונות עבור $k = 1$:

$$(11) \qquad \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=2^k} a_i}{2^k}\right] \left[\frac{\sum_{i=2^k+1}^{i=2^{k+1}} a_i}{2^k}\right] \leq \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{i=2^k} a_i}{2^k} + \dfrac{\sum_{i=2^k+1}^{i=2^{k+1}} a_i}{2^k}}{2} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=2^{k+1}} a_i}{2^{k+1}}\right]^2$$

כשנעלה את שני האגפים של (11) בחזקת 2^k נקבל:

$$(12) \qquad \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=2^k} a_i}{2^k}\right]^{2^k} \left[\frac{\sum_{i=2^k+1}^{i=2^{k+1}} a_i}{2^k}\right]^{2^k} \leq \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=2^{k+1}} a_i}{2^{k+1}}\right]^{2^{k+1}}$$

ועל סמך אי השוויונים (10) ו-(12) נקבל את (9).

<u>שלב ב'</u> הוכחת אי-שוויון הממוצעים בעזרת אינדוקציה בנסיגה, בהסתמך על שלב א'.

תחילה נדגים את הוכחת אי-שוויון הממוצעים במעבר מ-n ל- $n-1$, כלומר נניח נכונות המשפט עבור n מספרים חיוביים $(n > 2)$ ונוכיח עבור $n - 1$. <u>אנו מייחסים חשיבות להצגת דרך זו, מכיוון שהיא בלתי שיגרתית בהוכחה בעזרת אינדוקציה.</u> כמו כן, גם כאן נבחין בעיקרון הדואליות כאשר נוכל להשתמש לחילופין בממוצע החשבוני או ההנדסי. נסמן את הממוצע החשבוני של $(n - 1)$ המספרים החיוביים $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ב-A ואילו את הממוצע ההנדסי שלהם ב-G. על פי הנחת האינדוקציה במקרה זה עבור n מספרים:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + A \geqq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot A}$$

ולכן $$(n - 1)A + A \geqq n\sqrt[n]{G^{n-1} \cdot A}$$ ז.א. $A \geq \sqrt[n]{G^{n-1} \cdot A}$

ומכאן $$A^n \geqq G^{n-1} \cdot A$$

כלומר $$A \geqq G$$

לחילופין, על פי הנחת האינדוקציה עבור n מספרים

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + G \geqq n\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot G}$$

ולכן $$(n - 1)A + G \geqq n\sqrt[n]{G^{n-1} \cdot G}$$

ומכאן $$(n - 1)A + G \geqq nG$$

כלומר $$A \geqq G$$

עתה נניח שדרוש להוכיח את אי-שוויון הממוצעים עבור m מספרים חיוביים $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m > 2)$ כאשר הממוצע החשבוני שלהם A וההנדסי G. אם $m = 2^k$ עבור k טבעי כלשהו, אז נסתמך על שלב א' בהוכחת Cauchy. במקרה ש-m אינו חזקה שלמה של 2 אז נמצא k טבעי כך ש- $m < 2^k$ וכפי שהדגמנו לפני כן באינדוקציה בנסיגה נוכיח מנכונות עבור 2^k את הנכונות עבור m:

לדוגמה, נשתמש ב-A, על פי הנחת האינדוקציה

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m + (2^k - m)A \geqq 2^k \cdot \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \ldots a_m A^{2^k - m}}$$

ולכן

$$mA + (2^k - m)A \geqq 2^k \sqrt[2^k]{G^m \cdot A^{2^k - m}}$$

ומכאן

$$A^{2^k} \geqq G^m A^{2^k - m}$$

כלומר

$$A^m \geqq G^m$$

וזה גורר

$$A \geqq G$$

ברור, שהוכחה זו, שקולה ל- $2^k - m$ צעדים באינדוקציה בנסיגה.

4. <u>הוכחת אי-שוויון הממוצעים באינדוקציה על פי Dianada</u>

ההוכחה הבאה לאי-שוויון הממוצעים הוצעה בקווים כללים על ידי Dianada ב- American Mathematical Monthly (1960, עמ' 1007).

גם בהוכחה זו, משתמשים בעיקרון האינדוקציה ובתיחכום מסויים בשלב המעבר. נניח שאי-שוויון הממוצעים נכון עבור $n = 2$,

כלומר

$$(1) \quad A_2 \equiv \frac{a_1 + a_2}{2} \geqq (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} \equiv G_2$$

נדגים את רעיון ההוכחה במעבר מ- $n = 2$ ל- $n = 3$:

על סמך (1) נקבל

$$(2) \quad A \equiv \frac{a_3 + A_3}{2} \geqq (a_3 A_3)^{\frac{1}{2}} \equiv G$$

כאשר A_3 ו- G_3 (להלן) מסמנים את הממוצעים החשבוני וההנדסי של a_1, a_2, a_3.

על סמך (1) ו-(2):

$$(3) \quad \frac{A_2 + A}{2} \geqq (A_2 A)^{\frac{1}{2}} \geqq (G_2 G)^{\frac{1}{2}}$$

כמו כן,
$$\frac{A_2 + A}{2} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + A_3}{2}}{2} = \frac{3A_3 + A_3}{4} = A_3$$

ו-
$$(G_2G)^{\frac{1}{2}} = [(a_1a_2)^{\frac{1}{2}} \cdot (a_3A_3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} = [(a_1a_2a_3)A_3]^{\frac{1}{4}} = (G_3^3A_3)^{\frac{1}{4}}$$

לכן, על סמך (3), אנו מקבלים
$$A_3 \geqq (G_3^3A_3)^{\frac{1}{4}} \qquad (4)$$

ומכאן
$$A_3^4 \geqq G_3^3A_3$$

כלומר
$$A_3 \geqq G_3$$

נדגים הלאה במעבר מ- $n = 3$ ל- $n = 4$:

נניח כי,
$$A_3 \equiv \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqq (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3)^{1/3} \equiv G_3 \qquad (5)$$

נסמן A ו-G בהתאם ל-(6) ועל סמך (5) נקבל
$$A \equiv \frac{a_4 + 2A_4}{3} \geqq (a_4 \cdot A_4^2)^{1/3} \equiv G \qquad (6)$$

על סמך (5) ו-(6)
$$\frac{A_3 + A}{2} \geqq (A_3 \cdot A)^{\frac{1}{2}} \geqq (G_3 \cdot G)^{\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

כאשר $A_4 = \frac{A_3 + A}{2}$ ואילו
$$(G_3 \cdot G)^{\frac{1}{2}} = [(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3)^{1/3} \cdot (a_4 \cdot A_4^2)^{1/3}]^{\frac{1}{2}} = [(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4)^{1/3} A_4^{2/3}]^{\frac{1}{2}}$$
$$= (G_4^4 \cdot A_4^2)^{1/6}$$

לכן, על פי (7)
$$A_4 \geqq (G_4^4 \cdot A_4^2)^{1/6}$$

ומכאן
$$A_4^6 \geqq G_4^4 \cdot A_4^2$$

אי לכך
$$A_4 \geqq G_4$$

יש לשים לב, שהשתמשנו בידיעה עבור $n = 2$ וגם בקודם ל- $n = 4$ כלומר במקרה זה עבור $n = 3$. באותה צורה מוכיחים באופן כללי את המעבר מהנחת

נכונות עבור n ל- n + 1:

הוכחנו כבר עבור n = 2 ונניח שאי-שוויון הממוצעים נכון עבור n:

$$A_n \geqq G_n \tag{8}$$

נסמן את A ו-G על ידי $A = \dfrac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n}$

$$G = (a_{n+1} \cdot A_{n+1}^{n-1})^{1/n}$$

ברור כי על פי הנחת האינדוקציה $A \geqq G$ (9)

נראה כי $A_{n+1} = \dfrac{A_n + A}{2}$ (10)

ואכן $\dfrac{A_n + A}{2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \dfrac{a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}}{n}\right]$

$$= \frac{1}{2n}\left[a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} + (n-1)A_{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2n}\left[(n+1)A_{n+1} + (n-1)A_{n+1}\right] = \frac{1}{2n}\left[2n \cdot A_{n+1}\right] = A_{n+1}$$

על סמך (10), (8) ו-(9) ומהנכונות עבור n = 2:

$$A_{n+1} = \frac{A_n + A}{2} \geqq (A_n \cdot A)^{\frac{1}{2}} \geqq (G_n \cdot G)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

כאשר $(G_n\, G)^{\frac{1}{2}} = \left[(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} \cdot (a_{n+1} \cdot A_{n+1}^{n-1})^{1/n}\right]^{\frac{1}{2}}$

$$= (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{2n}} \cdot A_{n+1}^{\frac{n-1}{2n}} = (G_{n+1}^{n+1})^{\frac{1}{2n}} \cdot A_{n+1}^{\frac{n-1}{2n}} = G_{n+1}^{\frac{n+1}{2n}} \cdot A_{n+1}^{\frac{n-1}{2n}}$$

על פי (11): $A_{n+1} \geqq G_{n+1}^{\frac{n+1}{2n}} \cdot A_{n+1}^{\frac{n-1}{2n}}$

נחלק את שני האגפים ב- $A_{n+1}^{\frac{n-1}{2n}}$ ונקבל $A_{n+1}^{\frac{n+1}{2n}} \geqq G_{n+1}^{\frac{n+1}{2n}}$

כלומר $A_{n+1} \geqq G_{n+1}$

5. הוכחת אי-שוויון הממוצעים באינדוקציה על פי Chong

ההוכחה הבאה לאי-שוויון הממוצעים הוצעה בקווים כלליים על ידי Chong
ב- American Mathematical Monthly (1976, עמ' 369).
בעיקרון, משתמשים בתכונה היסודית של הממוצע החשבוני A של n מספרים
חיוביים להיות בין האיבר הקטן ביותר לגדול ביותר שמבין המספרים.
נניח ש- $a_1 < a_2 \leqq \dots \leqq a_n$ ו- $a_1 < a_n$, אז ברור שקיים $a_1 < A < a_n$
ולכן גם

$$(1) \quad A(a_1 + a_n - A) - a_1a_n = (A - a_1)(a_n - A) > 0$$

כלומר

$$(2) \quad (a_1 + a_n - A) > \frac{a_1a_n}{A}$$

עתה, נוכיח את אי-שוויון הממוצעים באינדוקציה: הוכחנו כבר במספר
אופנים, שאי-שוויון הממוצעים נכון עבור $n = 2$. נניח שאי-השוויון נכון
עבור הממוצעים של $n - 1$ מספרים חיוביים.

הממוצע החשבוני של $n - 1$ המספרים $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$ ו- $(a_1 + a_n - A)$
הוא A כי

$$\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + (a_1 + a_n - A)}{n - 1} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - A}{n - 1}$$
$$= \frac{nA - A}{n - 1} = A$$

ולכן על פי הנחת האינדוקציה

$$(3) \quad A^{n-1} \geqq a_2a_3\dots a_{n-1}(a_1 + a_n - A)$$

אם נחליף באגף ימין את הביטוי $(a_1 + a_n - A)$ בביטוי $\frac{a_1 a_n}{A}$ הקטן ממנו על פי (2), אזי בודאי שאי-השוויון (3) יישאר נכון (אבל ללא סימן השוויון):

$$(4) \qquad A^{n-1} > a_2 a_3 \ldots a_{n-1} \cdot \frac{a_1 a_n}{A}$$

$$(5) \qquad A^{n} > a_1 a_2 \ldots a_n$$

וזה שקול לאי-שוויון הממוצעים של n מספרים חיוביים, שלא כולם שווים:

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) > G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

<u>הערה:</u> יש לשים לב, שההוכחה נעשית באינדוקציה והתיחכום העיקרי בהוכחה זו הוא הגילוי והשימוש בביטויים המופיעים ב-(1) ואכן, ככל שההוכחה נעשית באינדוקציה ישירה יותר היא כוללת ביטויים מסובכים יותר באופן יחסי.

6. <u>הוכחת אי-שוויון הממוצעים בעזרת אי-שוויון Cauchy</u>

ההוכחה הבאה של אי-שוויון הממוצעים מסתמכת על אי-שוויון אחר, שבדרך כלל נקרא אי-שוויון Cauchy. תחילה נציג את אי-שוויון Cauchy.

נניח ש- $a \neq b$ ו- $n \in N$, אז כאשר נבצע חילוק של $(a^n - b^n)$ ב- $(a - b)$, נקבל את השוויון (1).

$$(1) \qquad \frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

לחילופין, ניתן להסתכל על האגף הימני של (1) כעל טור גיאומטרי שאיברו הראשון a^{n-1}, מנתו $\frac{b}{a}$ ומספר איבריו n. לכן, על פי נוסחת הסכום של טור גיאומטרי ופעולות אלגבריות אלמנטריות ניתן לקבל את האגף השמאלי של (1).

אם נניח גם ש- $a > b > 0$, אז נקבל את שני אי-השוויונים הבאים (2) ו-(3). האגף הימני של (2) מתקבל בעקבות ההחלפה של b ב-a ואילו האגף הימני באי-השוויון (3) מתקבל בעקבות ההחלפה של a ב-b:

$$a^{n-1}+ba^{n-2}+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1} < a^{n-1}+a^{n-1}+\dots+a^{n-1}+a^{n-1} = na^{n-1} \quad (2)$$

$$a^{n-1}+ba^{n-2}+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1} > b^{n-1}+b^{n-1}+\dots+b^{n-1}+b^{n-1} = nb^{n-1} \quad (3)$$

על פי (1), (2) ו-(3) מקבלים את אי-השוויון הכפול על שמו של Cauchy:

$$nb^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a - b} < na^{n-1} \quad (4)$$

כאשר $a > b > 0$.

אנו נשתמש רק באי-השוויון השמאלי של (4) וברור שעבור $b = 1$ מקבלים את (5).

$$n < \frac{a^n - 1}{a - 1} \quad (5)$$

כאשר על פי ההנחה $a > b$, כלומר $a > 1$.

נציב ב-(5): $a = 1 + \frac{x - u}{nu}$ כאשר $x > u > 0$.

ולכן $n \cdot \frac{x - u}{nu} < a^n - 1$

כלומר $\frac{x}{u} < a^n$

ומכאן $a > \sqrt[n]{\frac{x}{u}}$

ואם שוב נציב את a, נקבל $1 + \frac{x - u}{nu} > \sqrt[n]{\frac{x}{u}}$

ומזה נובע

$$(n - 1)u > n\sqrt[n]{xu^{n-1}} - x \quad (6)$$

כאשר $n \in N$ ו- $0 < u < x$.

עתה נשתמש באי-שוויון (6) כדי להוכיח באינדוקציה את אי-שוויון הממוצעים של n מספרים חיוביים. הוכחנו כבר את נכונות אי-שוויון הממוצעים עבור $n = 2$ ונניח שהאי-שוויון נכון עבור $n - 1$, כלומר

$$(7) \qquad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$$

צריך להוכיח את שלב המעבר מ- $n - 1$ ל-n. נניח שלא כל המספרים שווים, כלומר $a_1 < a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n$. נציב באי-שוויון (6) את $u = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$ ואת $x = a_n$ (ברור שמתקיים $0 < u < x$). לכן

$$(8) \qquad (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} > n\sqrt[n]{a_n \cdot a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} - a_n$$

נחליף את האגף השמאלי של (8) בביטוי הגדול ממנו על פי (7) וזהו השימוש בהנחת האינדוקציה, לכן

$$(9) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} > n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} - a_n$$

כלומר

$$(10) \qquad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

צריך להיות ברור לקורא, שגם בשיטה זו יש תיחכום רב ומלאכותיות מסויימת (שאולי גובלת ב"גאוניות") כדי להגיע מאי-השוויון (4) על שם Cauchy לאי-שוויון (6) ולבצע בו את ההצבות המתאימות. בעזרת הוכחה זו, הקורא (או התלמיד) נתקל באי-שיוויון Cauchy ויותר מכך, לומדים בדרך יוצאת דופן על קשר בין אי-שוויון Cauchy לבין אי-שוויון הממוצעים.

7. הוכחת אי-שוויון הממוצעים באינדוקציה ישירה על פי Novoselov

אחד הרעיונות העיקריים בהוכחה זו, הוא השימוש באי-השוויון הזהותי הבא:

לכל a ו-b חיוביים, ולכל n טבעי קיים

$$(1) \quad (a^{n-1} - b^{n-1})(a - b) \geq 0$$

וזה גורר את אי-השוויון

$$(2) \quad a^n + b^n \geq a^{n-1}b + ab^{n-1}$$

אם $a = x_i$ ו- $b = x_j$, $i,j = 1, 2, 3, \ldots, n$ אז נקבל אי-שוויונים מן הסוג הבא:

כאשר $n = 2$: $\quad x_1^2 + x_2^2 \geq x_1x_2 + x_1x_2$

כאשר $n = 3$:

$$x_1^3 + x_2^3 \geq x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \,,\; x_1^3 + x_3^3 \geq x_1^2x_3 + x_1x_3^2 \,,\; x_2^3 + x_3^3 \geq x_2^2x_3 + x_2x_3^2$$

כאשר $n = 4$, נקבל 6 אי-שוויונים כאלו על פי C_4^2 (מספר הצירופים של 2 מתוך 4) ועבור n כלשהו: $c_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

לפני שנוכיח באופן כללי את שלב המעבר מהנחת נכונות אי-שוויון הממוצעים עבור n-ו מספרים חיוביים לנכונות עבור n, נדגים את המקרה הפרטי של המעבר מ- $n = 3$ ל- $n = 4$. כאשר $n = 4$ נקבל את 6 אי-השוויונים הבאים:

$$x_1^4 + x_2^4 \geq x_1^3x_2 + x_1x_2^3 \,,\; x_1^4 + x_3^4 \geq x_1^3x_3 + x_1x_3^3 \,,\; x_1^4 + x_4^4 \geq x_1^3x_4 + x_1x_4^3$$

$$x_2^4 + x_3^4 \geq x_2^3x_3 + x_2x_3^3 \,,\; x_2^4 + x_4^4 \geq x_2^3x_4 + x_2x_4^3$$

$$x_3^4 + x_4^4 \geq x_3^3x_4 + x_3x_4^3$$

נסכם משמאל ומימין:

$$3(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4) \geqq x_1(x_2^3+x_3^3+x_4^3) + x_2(x_1^3+x_3^3+x_4^3) + x_3(x_1^3+x_2^3+x_4^3) + x_4(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$$

נפעיל עתה את הנחת האינדוקציה עבור $n = 3$ על כל סוגריים באגף הימני

ונקבל:

$$\geqq x_1(3\sqrt[3]{x_2^3x_3^3x_4^3}) + x_2(3\sqrt[3]{x_1^3x_3^3x_4^3}) + x_3(3\sqrt[3]{x_1^3x_2^3x_4^3}) + x_4(3\sqrt[3]{x_1^3x_2^3x_3^3})$$

ולכן:

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4 \geqq 4x_1x_2x_3x_4$$

ואם נציב $a_i = x_i^4$ $i = 1, 2, 3, 4$ אז

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geqq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

עתה נוכיח את שלב המעבר באופן כללי. נניח נכונות אי-שוויון הממוצעים עבור $n - 1$ וצריך להוכיחו עבור n:

$$x_1^n+x_2^n \geqq x_1^{n-1}x_2+x_1x_2^{n-1}\ ,\ x_1^n+x_3^n \geqq x_1^{n-1}x_3+x_1x_3^{n-1}\ ,\ \ldots, x_1^n+x_n^n \geqq x_1^{n-1}x_n+x_1x_n^{n-1}$$

$$x_2^n+x_3^n \geqq x_2^{n-1}x_3+x_2x_3^{n-1}\ ,\ \ldots, x_2^n+x_n^n \geqq x_2^{n-1}x_n+x_2x_n^{n-1}$$

$$x_{n-1}^n+x_n^n \geqq x_{n-1}^{n-1}x_n+x_{n-1}x_n^{n-1}$$

נסכם משמאל ומימין של כל אי-שוויון ונקבל:

$$(n-1)(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n) \geqq x_1(x_2^{n-1}+x_3^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}) + x_2(x_1^{n-1}+x_3^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}) +$$

$$+\ldots+x_i(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_{i-1}^{n-1}+x_{i+1}^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}) +$$

$$+\ldots+x_n(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_{n-1}^{n-1})$$

וכאשר נפעיל את הנחת האינדוקציה (עבור $n - 1$ מספרים) על כל סוגריים באגף הימני נקבל

$$(n-1)(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_x^n) \geqq x_1[(n-1)x_2x_3\ldots x_n]+x_2[(n-1)x_1x_3x_4\ldots x_n]+\ldots+$$

$$+ x_i[(n-1)x_1x_2\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_n]+\ldots+x_n[(n-1)x_1x_2\ldots x_{n-1}]$$

ומכאן: $(n-1)(x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n) \geqq (n-1)\ n(x_1x_2\ldots x_n)$

כלומר: $\dfrac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{n} \geqq x_1x_2\ldots x_n$

ואם נציב $x_i^n = a_i$ נקבל את אי-שוויון הממוצעים עבור n מספרים חיוביים

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

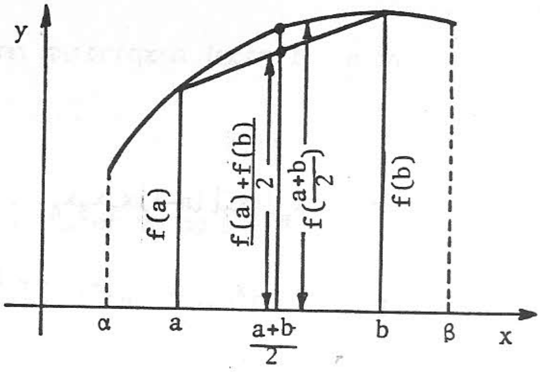
8. הוכחת אי-שוויון הממוצעים בעזרת הפונקציה הלוגריתמית הקעורה

בסעיף זה, נציג הוכחה לאי-שוויון הממוצעים, כאשר נשתמש בתכונות של פונקציות קעורות. תחילה נגדיר פונקציה קעורה ונוכיח תכונה עיקרית שלה ולאחר מכן נוכיח את אי-שוויון הממוצעים בעזרת הפונקציה הלוגריתמית הקעורה. באופן עקרוני, רעיון זה מופיע ב-.Mitrinovic et. al (1964, עמ' 23-30).

הגדרה: פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום (α, β) נקראת קעורה בתחום זה, אם עבור כל שתי נקודות $a, b \in (\alpha, \beta)$ מתקיים אי-השוויון (1):

$$(1) \qquad f\left(\frac{a + b}{2}\right) \geqq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ראה ציור 1.



ציור 1

פונקציה קעורה מאופיינת על ידי כך שכל מיתר שלה נמצא מתחת לגרף. כמו כן, תנאי מספיק כדי שפונקציה $f(x)$ תהיה קעורה בתחום מסויים הוא ש-$f''(x) < 0$ עבור כל x בתחום המסויים.

נוכיח תכונה עיקרית של פונקציה קעורה: עבור כל n נקודות $a_1, a_2, \dots, a_n$ בתחום הפונקציה, קיים אי השוויון (2):

$$f\left[\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right] \geq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n} \qquad (2)$$

הוכחת תכונה זו נעשית באינדוקציה ובאופן עקרוני בשיטת Cauchy (אינדוקציה בהתקדמות ובנסיגה). אי-שוויון (2) נכון עבור $n = 2$ על פי הגדרת פונקציה קעורה. נניח שאי-שוויון (2) נכון עבור $n = 2^k$ (k טבעי) ונוכיח שהוא נכון גם עבור $m = 2^{k+1} = 2n$:

$$f\left[\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{2n}\right] = f\left[\frac{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}}{2}\right]$$

על פי נכונות עבור 2
$$\geq \frac{f\left[\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right] + f\left[\frac{a_{n+1} + \dots + a_{2n}}{n}\right]}{2}$$

על פי הנחת האינדוקציה עבור n
$$\geq \frac{\frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n} + \frac{f(a_{n+1}) + \dots + f(a_{2n})}{n}}{2}$$

$$= \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n) + f(a_{n+1}) + \dots + f(a_{2n})}{2n}$$

עתה נוכיח באינדוקציה בנסיגה, שאם התכונה נכונה עבור n אז היא נכונה עבור n-1:

נתון
$$f\left[\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right] \geq \frac{f(a_1) + \dots + f(a_n)}{n}$$

נציב באי השוויון
$$a_n = f\left[\frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}\right]$$

ולכן:
$$f\left[\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n} + \frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n(n-1)}\right] \geq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_{n-1})}{n} + \frac{f\left[\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n-1}\right]}{n}$$

$$\Longrightarrow f\left[\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n-1}\right] \geq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_{n-1})}{n} + \frac{f\left[\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n-1}\right]}{n}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} f\left(\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n-1}\right) \geq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_{n-1})}{n}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{a_1+\dots+a_{n-1}}{n-1}\right) \geq \frac{f(a_1)+\dots+f(a_{n-1})}{n-1}$$

ומכאן ברור שאי-שוויון (2) נכון עבור כל n.

עתה נוכיח את אי-שוויון הממוצעים בעזרת התכונה (2) של פונקציה קעורה.

הפונקציה הלוגריתמית $y=\log_b x$ כאשר $b > 1$ היא פונקציה קעורה בתחום $0 < x < \infty$ כי:

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

ולכן, על פי התכונה העיקרית של פונקציה קעורה שהוכחנו הרי

$$(3)\quad \log_b \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqq \frac{\log_b a_1 + \log_b a_2 + \dots + \log_b a_n}{n}$$

כאשר $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$

מאי-שוויון (3) נובע

$$\log_b \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqq \log_b \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

ומכאן אי-שוויון הממוצעים

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

9. הוכחת אי-שוויון הממוצעים בשיטת Liouville (בעזרת אנליסה) ועל סידרת ההפרשים בין הממוצעים

המתמטיקאי הצרפתי Joseph Liouville (1809-1882) נתן בשנת 1831 הוכחה אנליטית למשפט אי-שוויון הממוצעים (על פי Mitrinovic, 1970, עמ' 28-30). יש להדגיש, שגם הוכחה זו נעשית באינדוקציה, אבל נעזרים בפונקציות ובחקירתן בעזרת שיטות האנליסה כדי להוכיח את שלב המעבר של האינדוקציה.

בעיקרון, חוקרים את הפונקציה המביעה את ההפרש בין הממוצע החשבוני לממוצע ההנדסי של n מספרים חיוביים, כאשר מחזיקים קבוע את $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ ומאפשרים ל- $a_n = x$ להשתנות באופן רציף ומחפשים מינימום לפונקציה זו.

כדי להגדיר את הרעיונות בהוכחה הכללית, גם כאן נדגים על מספר מקרים פרטיים וכתוצאת לואי נקבל גם סדר בהפרשים המתאימים בין A_n (הממוצע החשבוני של n מספרים חיוביים) ו-G_n (הממוצע הגיאומטרי של אותם n מספרים חיוביים).

עבור $n = 2$: נחקור את הפונקציה של x
$$f(x) = \frac{a_1 + x}{2} - (a_1 \cdot x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - a_1^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$f'(x)$ מתאפסת כאשר $x = a_1$ ואילו הנגזרת השניה של $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{1}{4} a_1^{\frac{1}{2}} x^{-3/2} > 0$$

אי לכך, קיים מינימום ל-$f(x)$ בנקודה $(a_1, 0)$.

כלומר, הערך המינימלי של הפרש הממוצעים של שני מספרים חיוביים $A_2 - G_2$ הוא 0 ולכן $A_2 - G_2 > 0$ לכל a_1, a_2 חיוביים.

עבור $n = 3$: נחקור את הפונקציה של $x > 0$
$$f(x) = \frac{a_1 + a_2 + x}{3} - (a_1 a_2 x)^{1/3}$$
$$= \frac{2A_2 + x}{3} - G_2^{2/3} x^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} - G_2^{2/3} \cdot \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$f'(x)$ מתאפסת כאשר $x = G_2$ ואילו הנגזרת השניה של $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{9} G_2^{2/3} x^{-5/3} > 0$$

ולכן בנקודת האפס של $f'(x)$ קיים מינימום.

נחשב את ערך המינימום של $f(x)$:

$$f(G_2) = \frac{2A_2 + G_2}{3} - G_2^{2/3} \cdot G_2^{1/3} = \frac{2}{3}[A_2 - G_2]$$

ובהסתמך על ההוכחה עבור $n = 2$ (וזהו המקום בו משתמשים בהנחת האינדוקציה) $f(G_2) \geq 0$. אבל, כתוצאת לואי יש לנו יותר מכך. אם ל-$f(x)$ יש מינימום $\frac{2}{3}[A_2 - G_2]$, זה גורר ש-

$$f(a_3) = A_3 - G_3 \geqq \frac{2}{3} [A_2 - G_2]$$

$$0 = A_1 - G_1 \leqq 2(A_2 - G_2) \leqq 3(A_3 - G_3)$$

בהוכחת שלב המעבר הכללי מ-$(n - 1)$ ל-n נקבל גם הכללה לשרשרת הנ"ל.

רעיון זה הוצג על ידי Long בג'ורנל Mathematical Guzette (1985 עמ' 39).

<u>הוכחת שלב המעבר של האינדוקציה</u> נניח שאי-שוויון הממוצעים נכון עבור

$n - 1$ מספרים חיוביים, כלומר $A_{n-1} - G_{n-1} \geqq 0$ ונוכיח את המעבר ל-n.

נחקור את הפונקציה של x

$$f(x) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + x}{n} - (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} x)^{1/n}$$

$$= \frac{(n-1)A_{n-1} + x}{n} - G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} x^{1/n}$$

$$f'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$f'(x)$ מתאפסת כאשר $x = G_{n-1}$ ואילו הנגזרת השניה של $f(x)$:

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{n}\right) G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{n} - 1\right) x^{\frac{1}{n}-2} = \frac{n-1}{n^2} G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} x^{\frac{1}{n}-2} > 0$$

ולכן, קיים מינימום בנקודת האפס של $f'(x)$.

נחשב את ערך המינימום של $f(x)$:

$$f(G_{n-1}) = \frac{(n-1)A_{n-1} + G_{n-1}}{n} - G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} G_{n-1}^{\frac{1}{n}} = \frac{n-1}{n} A_{n-1} + \frac{1}{n} G_{n-1} - G_{n-1}$$

$$= \frac{(n-1)A_{n-1}}{n} - \frac{n-1}{n} G_{n-1} = \frac{n-1}{n} \left[A_{n-1} - G_{n-1}\right]$$

על פי הנחת האינדוקציה $A_{n-1} - G_{n-1} \geqq 0$ ולכן $f(G_{n-1}) \geqq 0$, כלומר

$f(a_n) \geqq A_n - G_n \geqq 0$ ובזה הושלמה ההוכחה.

גם כאן, כתוצאת לואי, אנו מקבלים $f(a_n) \geq f(G_{n-1}) \geq 0$ כלומר

$A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n}[A_{n-1} - G_{n-1}]$ ומכאן השלמת שרשרת הסדר של ההפרשים.

$$0 = A_1 - G_1 \leq 2(A_2-G_2) \leq 3(A_3-G_3) \leq \dots \leq (n-1)(A_{n-1}-G_{n-1}) \leq n(A_n-G_n)$$

אנו מציעים לאותם מורים המעונינים להציג חומר זה בכיתה, לנצל את המחשבונים או המחשבים כדי לחקור ולחשב את סידרת ההפרשים על קבוצת מספרים במקרים פרטיים. במקרה זה, מוצע להתחיל עם 2 מספרים חיוביים כלשהם ולחשב A_2 ו- G_2 ומכאן את $(A_2 - G_2)$. לאחר מכן להוסיף מספר שלישי חיובי כלשהו ולחשב את $(A_3 - G_3)$ וכו'. לא תמיד נקבל שזו סידרה עולה, אבל אם נשווה $n(A_n - G_n)$ עם $(n-1)(A_{n-1} - G_{n-1})$ כן נקבל סידרה עולה. כמו כן, רצוי לחקור עבור 2 מספרים או יותר איזה מספר נוסף יקטין הכי הרבה את ההפרש בין הממוצעים המתאימים וכמובן שבמקרה זה, אם נוסיף את G_{n-1} נקבל $(A_n - G_n)$ מינימלי.

ס י כ ו ם

סידרת המאמרים על הממוצעים בתיקי "שבבים" מס' 25, 26 והנוכחי מכילה חומר עשיר ברעיונות מתמטיים שברובם מתאימים להצגה בפני תלמידי החטיבה העליונה של ביה"ס התיכון. מהחומר שהצטבר בנושא זה ניתן ללמוד הרבה על התפתחות המתמטיקה ושיטותיה. במרבית המקרים נעשה נסיון להציג מספר הוכחות מגוונות לכל טענה. נשאיר לקורא לשפוט איזו הוכחה מוצאת חן בעיניו ודרך איזו הוכחה המתמטיקה נראית יפה יותר, אסתטית יותר ובעלת עוצמה נראית לעין.

נשמח לקבל תגובות ממורים המנסים להורות חומר זה בכיתות השונות.

ביבליוגרפיה

1. E. Beckenbach and R. Bellman, Inequalities. Springer Verlag, Berlin, (1971).
2. K.M. Chong, An induction proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality, Amer. Math. Monthly, Vol. 85, (1976), p. 369.
3. R. Courant and F. John, Introduction to Calculus and Analysis. Interscience Publishers, New-York (1965).
4. P.H. Dianada, A simple proof of the arithmetic-geometric mean inequality. Amer. Math. Monthly, Vol. 67 (1960), p. 1007.
5. R.H. Eddy, The arithmetic-geometric mean inequality. College Math. Journal, Vol. 16, No. 3, (1985), p. 208.
6. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, Inequalities, Cambridge Univ. Press, (1952).
7. G. Long, Geometric and arithmetic means again, Math. Gazette, Vol. 69, (1985), p. 39.
8. D.S. Mitrinovic, E.S. Barnes, D.C.B. Marsh, J.R.M. Radok, Elementary Inequalities, Nordhoff Groningen, (1964).
9. D.S. Mitrinovic, Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin, (1970).
10. I. Niven, Maxima and Minima without calculus, Math. Assoc. of America, (1981).
11. S.I. Novoselov, Spezialnii kurs elementarnoi algebra. Sovietskaia Nauka, Moskva, (1954).
12. D. Schattmacher, The arithmetic mean-geometric mean inequality, Math. Magaz., Vol. 59, (1986), p. 11.
13. דוד רימר ודוד בן חיים, מרוב ממוצעים רואים את היער. שבבים, כרך ט', תיק מס' 25. מכון ויצמן למדע רחובות 1985/86.
14. דוד בן חיים ודוד רימר, ההתנהגות המונוטונית של הממוצע השורשי ריבועי המוכלל. שבבים, כרך ט', תיק מס' 26, מכון ויצמן למדע רחובות, 1985/86.