



אנליזה

לכיתות י"א - י"ב

מהדורת ניסוי

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע





אנליזה

לכיתות י"א - י"ב

מהדורת ניסוי



המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע



יוצא לאור במסגרת

המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט
מיסודם של

משרד החינוך והתרבות, האוניברסיטה העברית בירושלים ומכון ויצמן למדע, רחובות

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או
אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה.
שימוש מסחרי מכל סוג שהוא בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט אלא ברשות מפורשת בכתב מהמוציא לאור.



כל הזכויות שמורות
מכון ויצמן למדע
ומשרד החינוך התרבות והספורט

נדפס בישראל תשנ"ט - 1999
הרצות פילמיס: גרפאור בע"מ

חובר על ידי:

נורית הדס

שרה קירו

ייעוץ:

טומי דרייפוס

הדפסה ועריכה במחשב:

יעל עמנואל-אדרי

שרטוטים:

סיגלית בר-מנשה (משה)

שולי זהרונ

עיצוב גרפי ועטיפה:

אגי (רחל) בוקשפן

תוכן ענינים

85-7	פרק א: פונקציות מנה
7	אסימפטוטה, מהי?
12	עוד על אסימפטוטות
15	שברים עשרוניים קטנים
17	אחת מהמשפחה, $f(x) = \frac{1}{x}$
33	פונקציות חזקה נוספות
42	פעולות אלגבריות והזווט
47	עוד הזווט ושיקופים של $y = \frac{1}{x}$
53	קצת "מתיחות"
68	על משיק לפונקציה
74	חקירה של פונקציות מנה נוספות (רשות)
79	גרף עם חור וצימצום שברים (רשות)
140-86	פרק ב: הפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$
86	פונקציה המוגדרת בקטע סגור
98	ומה אם התחום לא סגור?
106	ומה אם הגרף חותך את ציר ה- x ?
121	שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$ כאשר ידוע החוק של f
171-141	פרק ג: עוד משפחה של פונקציות
141	התאמה והתאמה הפוכה
150	פונקציית השורש
155	עוד על שורשים
163	על שורשים ונגזרת

פרק ד: פונקציה מורכבת 215-172

מהי פונקציה מורכבת? 172

נגזרת של פונקציה מורכבת 185

חקירה של פונקציות מורכבות 193

אינטגרל של פונקציה מורכבת 211

פרק ה: הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת 247-216

קצב שינוי של פונקציה (מ- f ל- f') 216

מגרף הנגזרת f' לגרף הפונקציה f 239

פרק ו: מכפלה של פונקציות 274-248

גרפים של מכפלה של פונקציות 248

נגזרת של מכפלת פונקציות 256

חקירה של מכפלת פונקציות 261

משוואת משיק 271

פרק ז: מבחר בעיות קיצון 305-275

תשובות 371-307

לתלמידים

במהלך חוברת זו, תלמדו על משפחות חדשות של פונקציות (בנוסף לאלה שהכרתם בעבר), תכירו מושגים חדשים הקשורים לכל משפחה, ותשתמשו במושגים אותם הכרתם.

חלק מהנושאים משולבים בפעילויות בעזרת מחשב או מחשבון גרפי. פעילויות בעזרת מחשב אומנם כתובות עם הוראות לאחת מהתוכנות *Excel* או "הנדסה בתנועה", אך ניתן להתאימם גם לתוכנות אחרות.

בכל סעיף שני חלקים, בחלק הראשון מובא הנושא והמושגים החדשים, ובחלק השני מובא תרגול לביסוס החומר שנלמד בסעיף עצמו ובסעיפים קודמים.

אנו מקווים שתהנו ותפיקו תועלת מלימודיכם בחוברת זו.

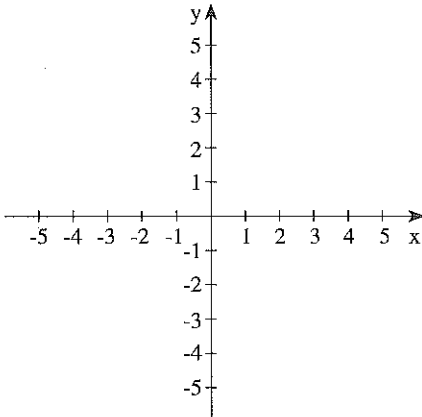
באור סמלים:

תזכורת		תלמידי "מפתח" בו נלמד ענין חדש	
תרגיל הכנה		לעבודה עצמית	
חזרה		תרגיל "קצת יותר קשה"	
מורה מסביר		פעילות בעזרת מחשב	
		פעילות בעזרת מחשב או מחשבון גרפי	

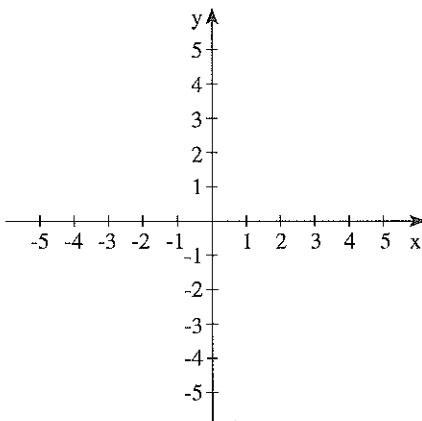
פרק א: פונקציות מנה

אסימפטוטה, מהי?

1. Ⓚ (א) שרטטו גרף של פונקציה, שיורדת עבור כל x .



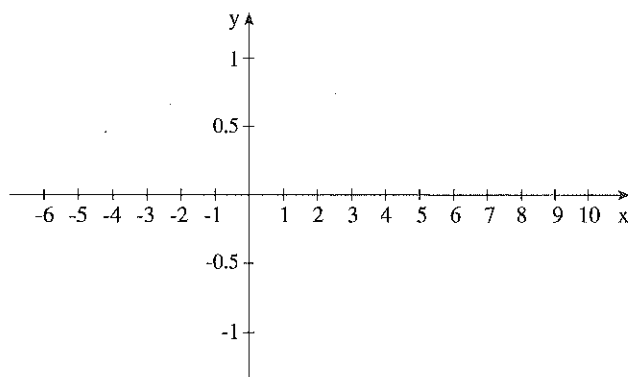
ב) נסו לשרטט גרף של פונקציה, שיורדת עבור כל x , ואינה חותכת את ציר x .



בפרק זה נעסוק בפונקציות בעלות תכונות מהסוג שראיתם בתרגיל וגם תכירו את צורתן האלגברית.

2. נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$ המוגדרת עבור כל המספרים.

א) ידוע כי נקודות הקיצון היחידות שלה הן $(1, 1)$ ו- $(-2, -0.5)$.
סמנו אותן במערכת הצירים.



ב) מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y וסמנו.

ג) לפניכם נקודות השייכות לגרף הפונקציה h . הציבו, השלימו וסמנו.
דוגמה: נמצא שעור y של הנקודה $(8, \quad)$.

ניעזר במחשבון, לביצוע תרגיל החילוק. יש להשתמש בסוגריים

ובחילוק כתחליף לקו השבר. למשל, נציב 8 במקום x ונקבל:

$$\text{ונחשב באופן הבא: } \frac{2 \cdot 8 + 1}{8^2 + 2}$$

(	2	×	8	+	1	)	÷	(	8	SHIFT	x^2	+	2	)	=
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-------	-------	---	---	---	---

$$(2, \quad) \quad (-3, \quad) \quad (-6, \quad)$$

ד) נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה עם ציר x היא $(-0.5, 0)$,
סמנו.

ה) רשמו מאיזה סוג כל אחת מנקודות הקיצון.

ו) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה (שימו לב, יש רק נקודת חיתוך אחת
עם ציר x , ואין נקודות קיצון נוספות).

ז) סמנו את הטענות הנכונות ונמקו.

אם הנקודה $(20, \quad)$ על גרף הפונקציה אז המספר במשבצת:

– יכול להיות שלילי.

– יכול להיות אפס.

– יכול להיות 0.5.

– חייב להיות חיובי.

– קטן מ- 0.24.

ח) הציבו בחוק הפונקציה והשלימו:

$(100, \quad)$ $(150, \quad)$ $(200, \quad)$

ט) אם תציבו בחוק הפונקציה מספר גדול מאוד, איזה סוג של מספר תקבל

(חיובי/שלילי/אפס)?

קשה להשתכנע שישנן פונקציות שהגרף שלהן הולך ומתקרב לקו גבולי כלשהו, כמו ציר x . בהמשך תכירו ביתר פירוט פונקציות כאלה.

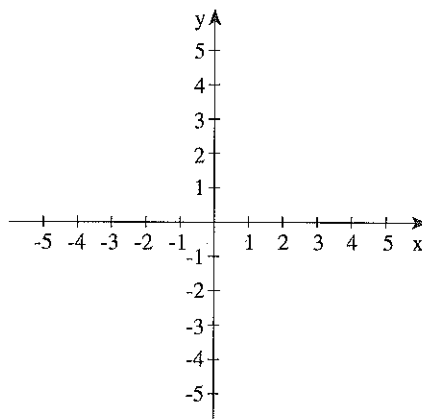


הקו הגבולי, אליו הפונקציה מתקרבת, נקרא **אסימפטוטה**.

3. א) שרטטו את הישר $y = 3$.



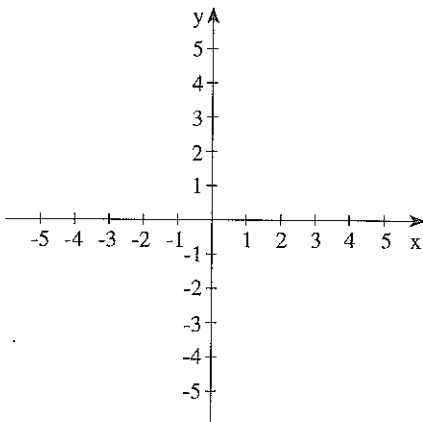
ב) שרטטו גרף של פונקציה, כך שהישר $y = 3$ יהיה אסימפטוטה שלה.





4. (א) שרטטו גרף של פונקציה המקיימת:
– $(-1, -4)$ היא נקודת הקיצון היחידה.
– ציר x הוא אסימפטוטה.
(ב) רשמו את סוג נקודת הקיצון.
(ג) רשמו את משוואת האסימפטוטה.

גרפים



5. (א) שרטטו גרף של פונקציה, שיורדת עבור כל x וכל ערכיה שליליים.
(ב) שרטטו גרף של פונקציה, שעולה עבור כל x , וכל ערכיה שליליים.

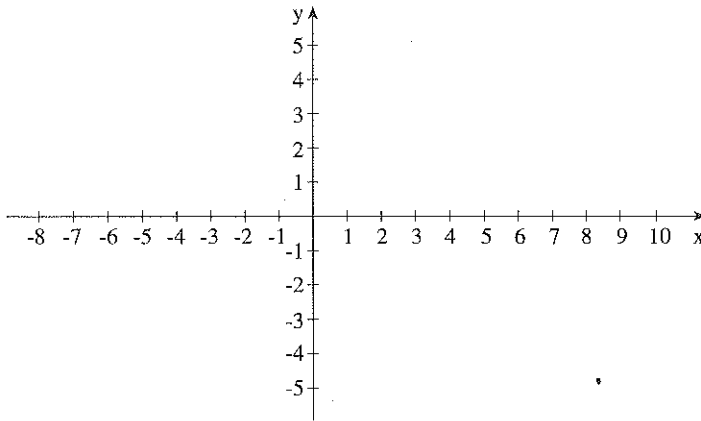
6. שרטטו את הישר $y = -2$.

שרטטו גרף של פונקציה, כך שהישר $y = -2$ הוא אסימפטוטה שלה.

7. (א) נסו לשרטט גרף של פונקציה שיש להן שלוש נקודות קיצון, ו- $y = -1$ הוא אסימפטוטה שלה.

- (ב) נסו לשרטט גרף של פונקציה שיש לה שתי נקודות קיצון, ו- $y = -1$ הוא אסימפטוטה שלה.

8. נתונה הפונקציה $y = \frac{3x^2}{x^2 + 3}$.



(א) נקודת הקיצון היחידה היא $(0, 0)$, סמנו אותה.

(ב) השלימו את שיעורי הנקודות הבאות השייכות לגרף הפונקציה.
 $(10, \quad)$ $(2, \quad)$ סמנו את הנקודות במערכת הצירים.

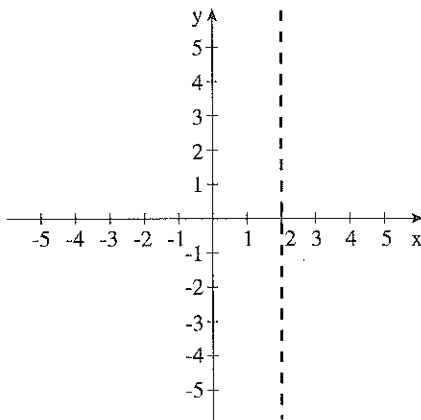
(ג) השלימו את שיעורי הנקודות הבאות השייכות לגרף הפונקציה.
 $(1000, \quad)$ $(200, \quad)$ (רשמו 4 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
 מהי, לדעתכם, משוואת האסימפטוטה? שרטטו את הישר.

(ד) הסבירו מדוע הפונקציה זוגית (סימטרית לגבי ציר ה-y).

(ה) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

עוד על אסימפטוטות

בסעיף זה נעסוק גם בפונקציות להן אסימפטוטות מקבילות לציר y .
פונקציות אלו אינן "רציפות" (לא ניתן לשרטטן מבלי להרים את העיפרון מהדף).



1. משורטט הישר $x = 2$ שהוא

אסימפטוטה של גרף פונקציה.

שרטטו באותה מערכת צירים גרף של פונקציה המקיימת את התכונות הבאות:

(א) $(-3, -2)$, $(4, 1)$ הן נקודות מינימום (סמנו אותן).

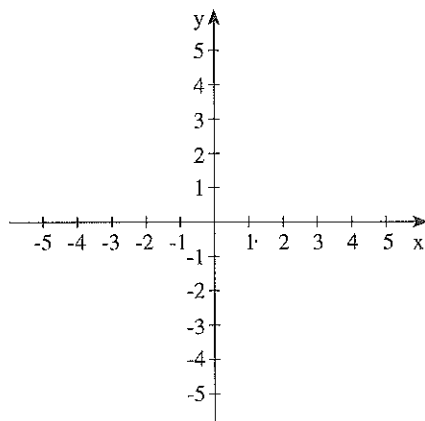
(ב) הפונקציה עוברת דרך ראשית הצירים (סמנו).

(ג) כשערכי x קרובים ל-2, ערכי

הפונקציה גדולים מאוד משני צידי האסימפטוטה.

אסימפטוטה מקבילה לציר y היא משני המינים.

בסעיף הבא תכירו תבניות אלגבריות המתאימות לפונקציות כאלה.



2. (א) שרטטו גרף של פונקציה, שיש

לה שתי נקודות מקסימום, אין

לה נקודות מינימום, ויש לה

אסימפטוטה.

(ב) מהי משוואת האסימפטוטה ששרטטתם?



3. (א) שרטטו במערכת צירים, במקווקו, את הישרים
 $y = 1$, $x = -1$.

(ב) שרטטו גרף של פונקציה, שהישרים הנ"ל הם אסימפטוטות שלה.

גרפיקס

4. (א) שרטטו גרף של פונקציה, שיש לה שתי נקודות מינימום, אין לה נקודות מקסימום ויש לה אסימפטוטה אחת.

(ב) קרשמו את משוואת האסימפטוטה.

5. (א) שרטטו גרף של פונקציה שיש לה:

- אסימפטוטה אחת.
- נקודת מקסימום אחת.
- נקודת מינימום אחת גבוהה יותר מהמקסימום (ערך הפונקציה שלה גבוה יותר).

(ב) קרשמו את משוואת האסימפטוטה.

6. (א) שרטטו, במקווקו, את הישרים

$$y = -1 \text{ , } x = 2$$

(ב) שרטטו באותה מערכת צירים

גרף של פונקציה המקיימת:

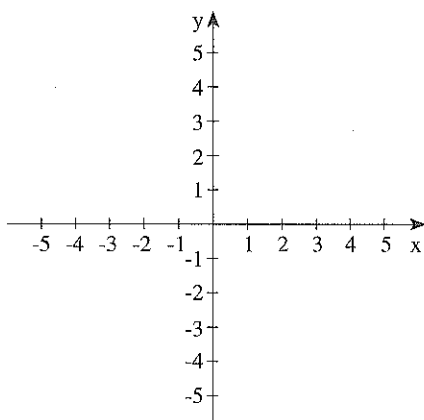
– הנקודה $(3, -2)$ היא

נקודת מינימום, וזו נקודת

קיצון יחידה, סמנו.

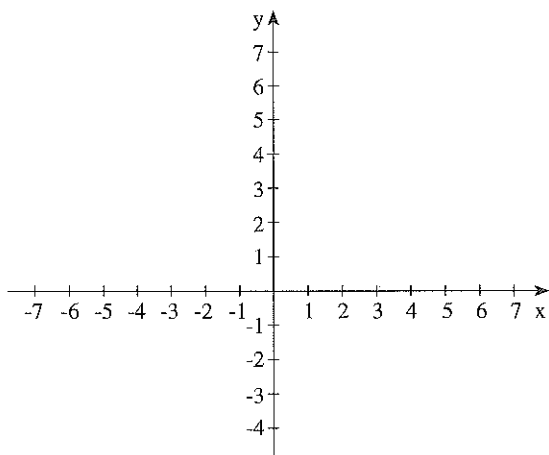
– הישרים $y = -1$, $x = 2$

הם אסימפטוטות שלה.



7. שרטטו גרף של פונקציה המקיימת:

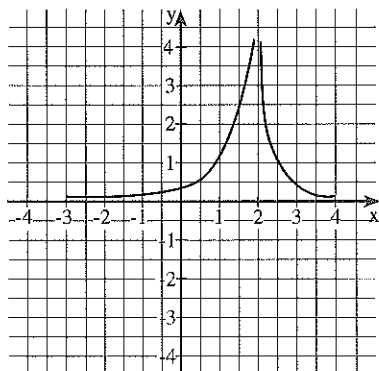
(א) הישר $x = -1$ הוא אסימפטוטה של גרף של פונקציה, שרטטו אותו במקווקו.



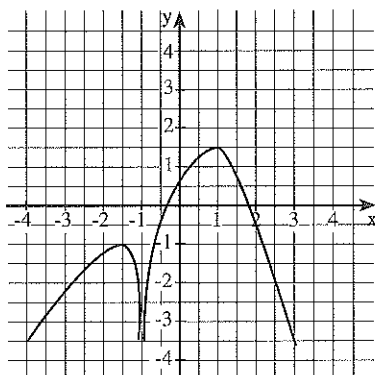
- (ב) הנקודה $(2, 3)$ היא נקודת מקסימום, סמנו.
 (ג) הנקודה $(-4, -3)$ היא נקודות מינימום, סמנו.
 (ד) נקודות החיתוך עם הצירים הן: $(-6, 0)$, $(-2, 0)$, $(-0.5, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 1)$ סמנו אותן. (השלימו את שרטוט הגרף).

8. הדגישו את האסימפטוטות (המקבילות לצירים), ורשמו ליד כל ישר את משוואתו.

(ב)



(א)



שברים עשרוניים קטנים

1. בצעו את התרגילים הבאים בעזרת מחשבון.



ורשמו מה כתוב על המצג.

דוגמה: $0.000025^2 =$

היעזרו בסדרת ההקשות והשלימו את הדוגמה:

0.000025	SHIFT	x^2	=	

(א) $0.000015^2 =$

(ב) $0.0000037^2 =$

שברים עשרוניים קטנים נכתבים במחשבון כמספר בין 1 ל-10 (ספרה אחת שונה מאפס משמאל לנקודה). מספר האפסים, שלפני הספרה הזו, כולל האפס שלפני הנקודה, רשום למעלה במעריך. למשל $6.25 \cdot 10^{-10}$ פירושו 0.000000000625 (יש 10 אפסים).



ההסבר לצורת הרישום קשור בחזקות של 10, ובהגדרת פעולת החזקה עבור מעריך שלילי. בהמשך תלמדו להסביר צורת כתיבה זו.

2. (א) רשמו כשבר עשרוני רגיל.



$8^{-02} =$

$2^{-03} =$

$35^{-03} =$

(ב) כדי לרשום מספרים, כמו אלו הרשומים בסעיף א', אפשר להיעזר במחשבון במקש EXP.

(i) $4^{-02} =$ היעזרו בסדרת ההקשות והשלימו.

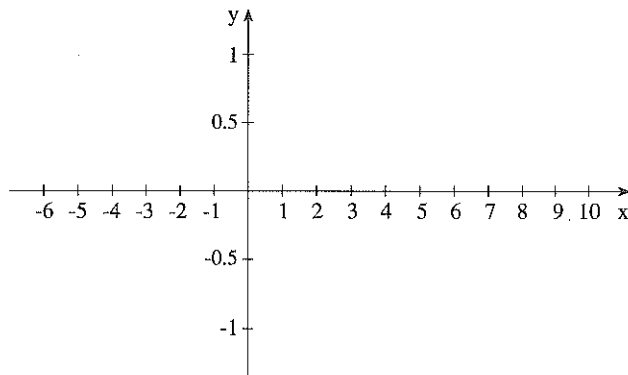
4	Exp	+/-	2	=	

שימו לב: בחלק מהמחשבוניים על המצג נשאר כתיב חזקות (אחרי ההקשה על =).

(ii) היעזרו ב-Exp ובדקו אם רשמתם נכון את החזקות שבסעיף א'.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ עיין

א) מצאו נקודת חיתוך עם ציר y , וסמנו במערכת הצירים.



ב) – ידוע כי נקודות הקיצון היחידות הן:

$(1, 0.5)$, $(-1, -0.5)$, סמנו במערכת צירים.

– קבעו את סוג הקיצון, לשם כך חשבו וסמנו נקודות נוספות.

ג) הציבו והשלימו את שיעורי הנקודות הבאות השייכות לגרף הפונקציה.

$(10000, \quad)$, $(1000, \quad)$, $(100, \quad)$, $(-100, \quad)$.

מהי לדעתכם משוואת האסימפטוטה?

ד) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

אחת מהמשפחה, $f(x) = \frac{1}{x}$

1.  כשהתחלנו ללמוד חילוק בבית ספר יסודי, בדקנו כל תרגיל חילוק בעזרת כפל. השלימו את המספרים החסרים במשבצות.

(א) $\frac{12}{3} = \square$, בדיקה בעזרת כפל: $3 \cdot \square = 12$

(ב) $\frac{8}{4} = \square$, בדיקה בעזרת כפל: $4 \cdot \square = 8$

(ג) $\frac{9}{0} = \square$, בדיקה בעזרת כפל: $0 \cdot \square = 9$

— האם נוכל למצוא מספר המתאים למשבצות בסעיף ג'?

לא קיים מספר, שהוא תוצאה חלוק באפס. אמרו, לא ניתן להציב אפס כמכנה $\frac{1}{x}$.

2.  רשמו ליד כל תבנית איזה מספר לא ניתן להציב בה.

(ד) $\frac{4}{3x+3}$

(א) $\frac{1}{x-2}$

(ה) $\frac{x-1}{x}$

(ב) $\frac{1}{x+2}$

(ו) $\frac{x}{x-1}$

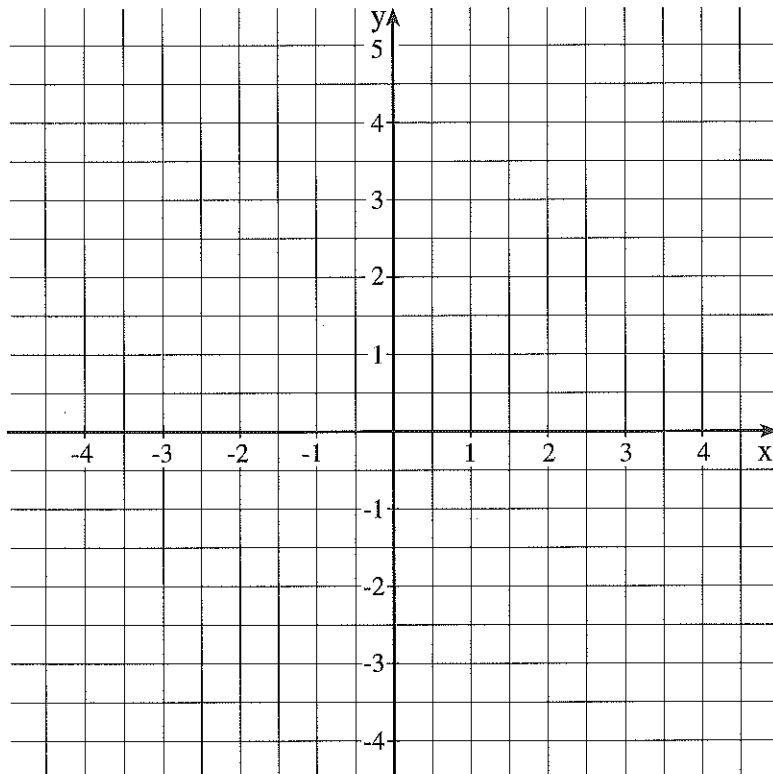
(ג) $\frac{3}{2x-6}$

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

(א) השלימו את הטבלה וסמנו במערכת הצירים (אפשר להיעזר בכפתור $\frac{1}{x}$ שבמחשבון).

x	1	2	3	4	5
f(x)					

(ב) הציבו, השלימו וסמנו: (0.25,), (0.4,), (0.5,), (0.75,)



(ג) האם יש לגרף הפונקציה נקודת חיתוך עם ציר y? הסבירו.

כפי שראינו, לא ניתן להציב $x = 0$ בפונקציה f , לכן הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x = 0$.

(ד) נבדוק מה קורה לגרף הפונקציה כשמתקרבים לישר $x = 0$.

- השלימו: $(0.1, \quad)$ $(0.01, \quad)$ $(0.001, \quad)$
- מה קורה לערכי הפונקציה y , אם מציבים ערכי x קרובים יותר ויותר לאפס?

$$\text{ציר } y \text{ הוא אסימפטוטה של הפונקציה } f(x) = \frac{1}{x}$$

(ה) בדקו מה קורה כשערכי x גדלים,

- הציבו ורשמו כשבר עשרוני
- $(10, \quad)$ $(10,000, \quad)$ $(1,000, \quad)$ $(100, \quad)$
- מה קורה לשיעורי y , כאשר מציבים ערכים מאוד גדולים של x ?

$$\text{ציר } x \text{ גם הוא אסימפטוטה של הפונקציה } f(x) = \frac{1}{x}$$

(ו) השלימו שרטוט של הגרף בתחום המספרים החיוביים.

(ז) האם לגרף הפונקציה יש נקודות חיתוך עם ציר x ? הסבירו.

(ח) השלימו וסמנו את הנקודות במערכת הצירים.

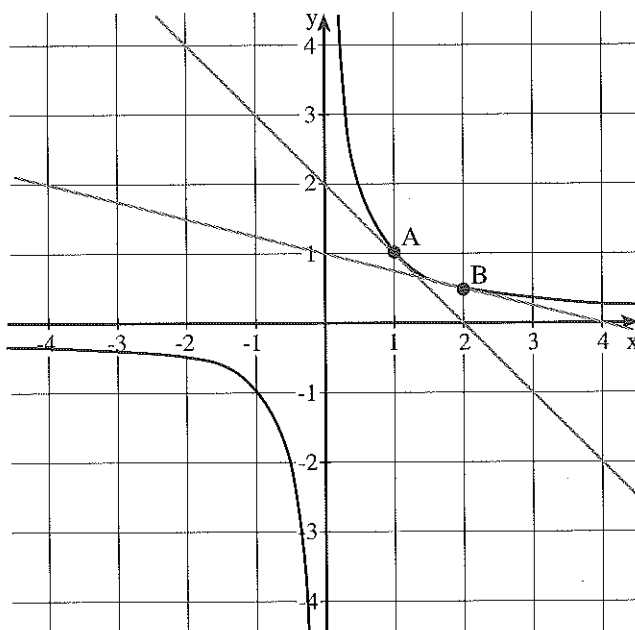
$$\begin{array}{llll} f(0.25) = & f(0.5) = & f(3) = & f(1) = \\ f(-0.25) = & f(-0.5) = & f(-3) = & f(-1) = \end{array}$$

- מצאו נקודה נוספת ששיעוריה מנוגדים.
- האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית, או אחרת?

(ט) גזרו את דף שקוף א', (i) הוא "ענף" של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

הניחו אותו במערכת הצירים, בה שרטטתם קודם, כך שיתקבל הגרף גם עבור המספרים השליליים.
הורידו את הגרף השקוף, והשלימו את השרטוט בתחום המספרים השליליים.

4. משורטטים: הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ ושני משיקים בנקודות A ו-B.



- (א) האם לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ יש נקודות קיצון? (קבעו לפי הגרף).
- (ב) מה הם תחומי העלייה של הפונקציה? מה הם תחומי הירידה? (קבעו לפי הגרף).
- (ג) – קראו ורשמו את שיפועי שני המשיקים המשורטטים (בנקודות A ו-B).
- רשמו את שיפועי המשיקים בכתב מתמטי.
- בנקודה A: $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$, השלימו.
- בנקודה B: $\underline{\hspace{2cm}}$, השלימו.
- היעזרו בישר, קראו את שיפועי המשיקים בנקודות ששיעור x שלהן רשום, והשלימו:

$$f'(0.5) = \underline{\hspace{2cm}} \qquad f'(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f'(-0.5) = \underline{\hspace{2cm}} \qquad f'(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{פונקצית הנגזרת של } f(x) = \frac{1}{x} \text{ היא } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

(ד) (i) בדקו (על ידי הצבה בפונקצית הנגזרת הרשומה במסגרת) את השיפועים שקראתם בסעיף ג'.

(ii) חשבו את שיפוע המשיק בנקודה $(3, \frac{1}{3})$, שרטטו את המשיק.

(iii) – הסבירו בעזרת הנגזרת מדוע אין לפונקציה נקודות קיצון.

– הסבירו בעזרת הנגזרת מדוע הפונקציה יורדת בכל התחום.

5. (א) את הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ הזיזו ביחידה אחת למעלה.

לאן תזוז הנקודה המסומנת? סמנו אותה במערכת הצירים.

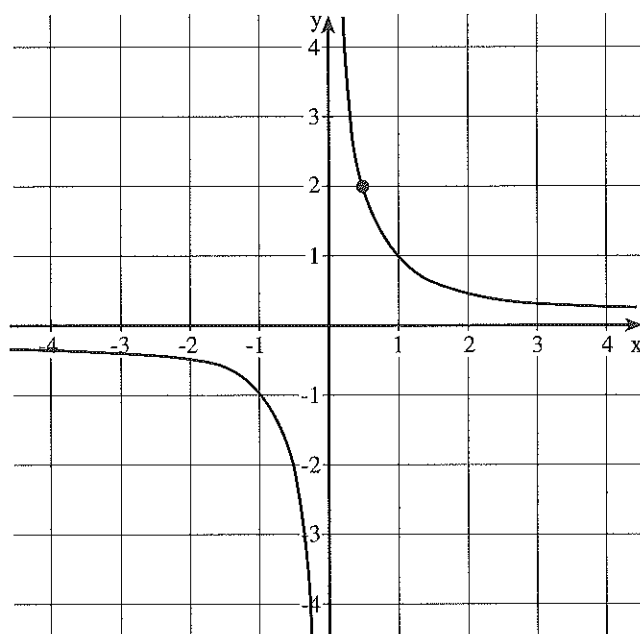
– בדף שקוף א' תמצאו גרף של $f(x) = \frac{1}{x}$ ללא ציר x, (ii).

הניחו אותו על הגרף המשורטט, והזיזו במקביל לציר y, אותו

ביחידה אחת למעלה. (היעזרו בנקודה שסימנתם). מהו חוק

הפונקציה המוזזת?

– הציבו בחוק שרשמתם את הנקודה שסימנתם ובדקו.



(ב) השיבו לגבי הפונקציה המוזהבת:

(i) מהן משוואות האסימפטוטות?

(ii) מהן נקודות החיתוך שלה עם הצירים? הציבו בחוק שרשמתם ובדקו.

(iii) האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית, או אחרת?

ג) הנגזרת של $f(x) = \frac{1}{x}$ היא: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

מהי הנגזרת של הפונקציה המוזהבת $g(x) = \frac{1}{x} + 1$?

ד) הציבו בנגזרת ומצאו את שיפוע הפונקציה הנתונה והמוזהבת כאשר $x = 2$.

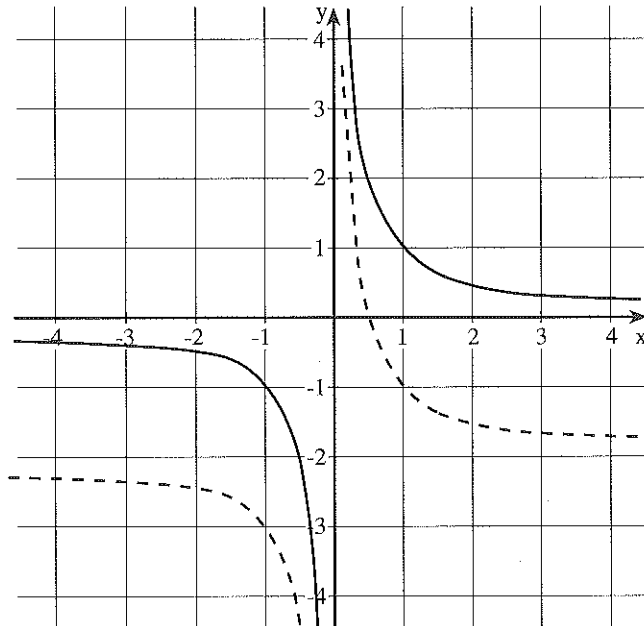
הסבירו בעזרת הגרף מדוע לפונקציות $f(x) = \frac{1}{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{x} + 1$ אותה נגזרת.

6. משורטטים הגרפים של הפונקציות $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x} - 2$.

א) התאימו חוק לגרף (רשמו בשרטוט ליד כל ענף).

ב) מצאו את שיפוע המשיק של כל פונקציה בנקודה בה $x = 1$.

ג) שרטטו בקירוב את שני המשיקים, ורשמו מה המצב ההדדי ביניהם.



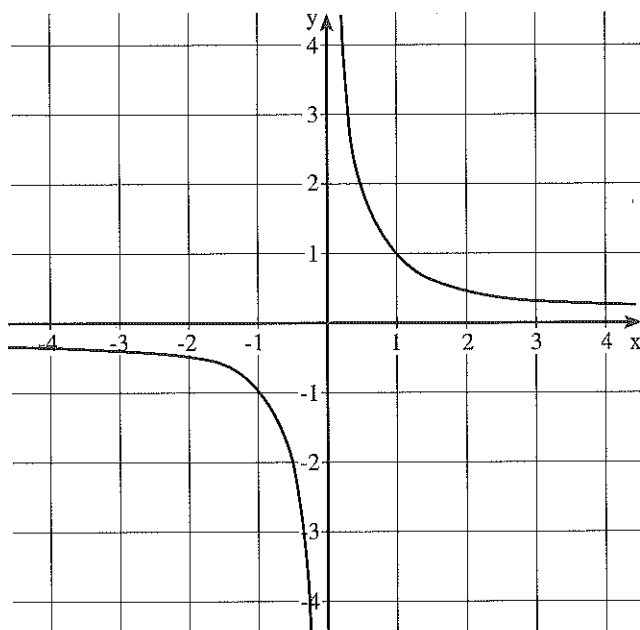


7. (א) גזרו: $y = \frac{1}{x} - 4$, $y = 5 + \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 3$.

(ב) רשמו פונקציה נוספת שהנגזרת שלה היא: $y' = -\frac{1}{x^2}$.



8. (א) הניחו את הגרף השקוף $y = \frac{1}{x}$ ללא ציר y (iii), על הגרף המשוורטט ושקפו אותו בציר x . מהו חוק הפונקציה שהתקבלה?



(ב) רשמו שיעורי נקודה, הנמצאת על הגרף שהתקבל. הציבו בחוק שרשמתם ובדקו.

(ג) ענו על השאלות הבאות לגבי הפונקציה שהתקבלה מהשיקוף.

(i) מהן משוואות האסימפטוטות של גרף הפונקציה?

(ii) מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים?

(iii) מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(iv) האם הפונקציה זוגית, אי-זוגית, או אחרת?

ד) נגזרת הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ היא: $y' = -\frac{1}{x^2}$, לכן נגזרת הפונקציה

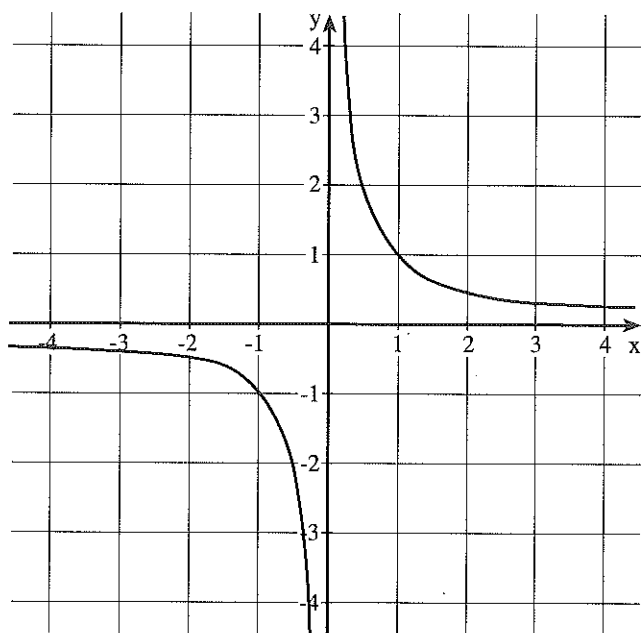
$y = -\frac{1}{x}$ היא: $y' = \frac{1}{x^2}$. הסבירו.

הסבירו בעזרת הנגזרת מדוע הפונקציה $y = -\frac{1}{x}$ עולה בכל התחום.

ה) גזרו: $y = -\frac{1}{x} + 3$, $y = 4 - \frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x} - 2$.

ו) קשמו פונקציה נוספת שהנגזרת שלה היא $y' = \frac{1}{x^2}$.

9. עי"ע  הניחו את הגרף השקוף (ii), כך שיתאר את הפונקציה: $y = -\frac{1}{x} + 1$.



א) מהן נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים?

ב) קשמו את משוואות האסימפטוטות.

10. פתרו את המשוואות הבאות: 

דוגמה: $\frac{1}{x} - 9x = 0 \quad / +9x$

$$9x = \frac{1}{x} \quad / \cdot x$$

$$9x^2 = 1 \quad / :9$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{או} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$9 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad (\text{ה})$$

$$4x + \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{ג})$$

$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{א})$$

$$\frac{3}{x} = x \quad (\text{ו})$$

$$4x - \frac{1}{x} = 0 \quad (\text{ד})$$

$$-\frac{1}{x^2} + 4 = 0 \quad (\text{ב})$$

11. נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{x} + 4x$ 

(א) עבור איזה ערך של x
הפונקציה לא מוגדרת?

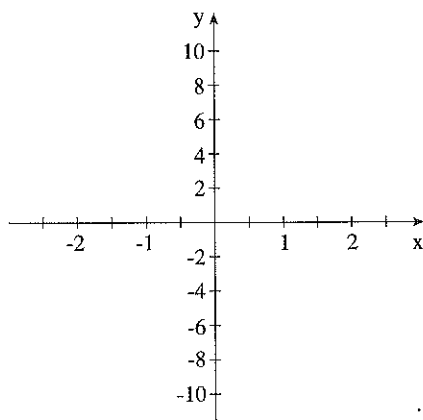
(ב) (i) מצאו את נגזרת
הפונקציה.

(ii) מצאו נקודות חשודות,
וסמנו אותן במערכת הצירים.

(iii) השלימו:

(-1,) (-0.25,) (0.25,) (1,)

(iv) מאיזה סוג הנקודות החשודות?



- (i) (ג) בטבלה רשומים שיעורי x של נקודות קרובות לנקודת אי-ההגדרה. השלימו את הטבלה:

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
y			לא מוגדרת		

- (ii) תארו מה קורה לערכי הפונקציה, אם מציבים ערכי x קרובים יותר ויותר לאפס.
 (iii) רשמו את משוואת האסימפטוטה.

- (ד) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

בפונקציות שאינן רציפות ויש להן אסימפטוטה אנכית, יש לבדוק נקודות **משני הצדדים**, בסביבה קרובה של כל נקודה חשודה. הנקודות הנבדקות צריכות להיות משני צידי הנקודה החשודה **ומאותו צד של האסימפטוטה**.

12. נתונה הפונקציה $y = -\frac{1}{x} - x + 2$.



- (א) עבור איזה ערך של x הפונקציה לא מוגדרת?

- (ב) - מצאו נקודות קיצון.

(לשם כך: מצאו נגזרת,

מצאו נקודות חשודות,

ומצאו נקודות משני

צידי כל נקודה חשודה).

- רשמו את סוג הנקודות

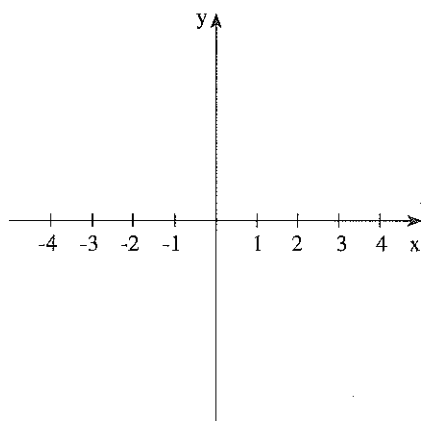
החשודות (מינימום)/

מקסימום).

מערכת הצירים מיועדת

לעזור לכם בקביעת סוג

נקודות הקיצון.





13. הראו כי לפונקציה $y = \frac{1}{x} - 4x + 1$ אין נקודות קיצון.



14. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} - 2x^2$ (שרטטו תחילה מערכת צירים).

(א) עבור איזה ערך של x הפונקציה לא מוגדרת?

(ב) מצאו את נקודת החיתוך עם ציר x . קראו תחילה את הפתרון והשלימו:

$$\frac{1}{x} - 2x^2 = 0 \quad / + 2x^2$$

$$\frac{1}{x} = 2x^2 \quad / \cdot x$$

$$2x^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x^3 = \frac{1}{2}$$

כדי למצוא x היעזרו בסדרת ההקשות:

0.5	SHIFT	$\frac{1}{x^y}$	3	=
-----	-------	-----------------	---	---

$X = \underline{\hspace{2cm}}$ (עגלו לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית)

השלימו: (____, ____) היא נקודת החיתוך של f עם ציר x . סמנו במערכת הצירים.

(ג) – מצאו את נקודת הקיצון.

(לשם כך: מצאו נגזרת, מצאו נקודה חשודה, מצאו נקודות משני צידי הנקודה החשודה, סמנו את הנקודות שמצאתם במערכת הצירים.)

– רשמו את סוג נקודת הקיצון.

(ד) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

15. א) קשמו ליד כל גרף את החוק המתאים.
לבדיקה, קראו נקודה על הגרף והציבו בחוק שרשמתם.

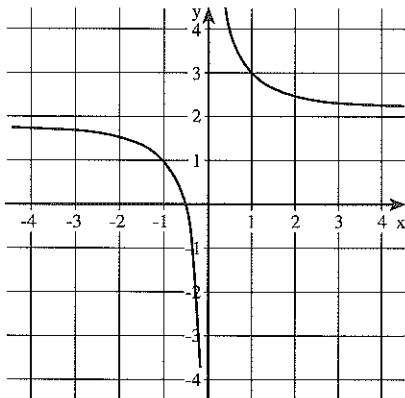
$$h(x) = -\frac{1}{x} + 2$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - 2$$

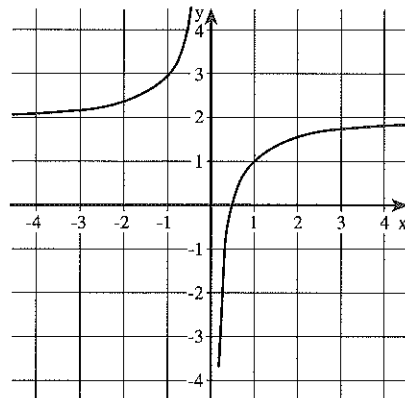
$$m(x) = -\frac{1}{x} - 2$$

$$g(x) = \frac{1}{x} + 2$$

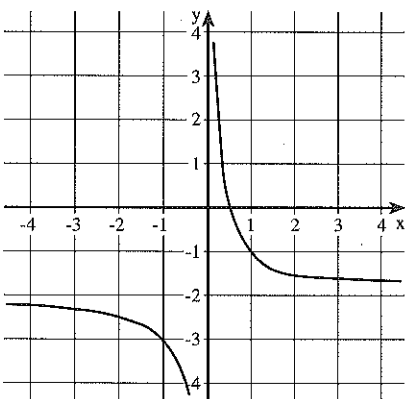
(ii)



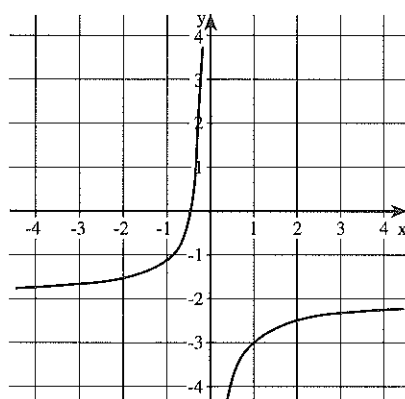
(i)



(iv)

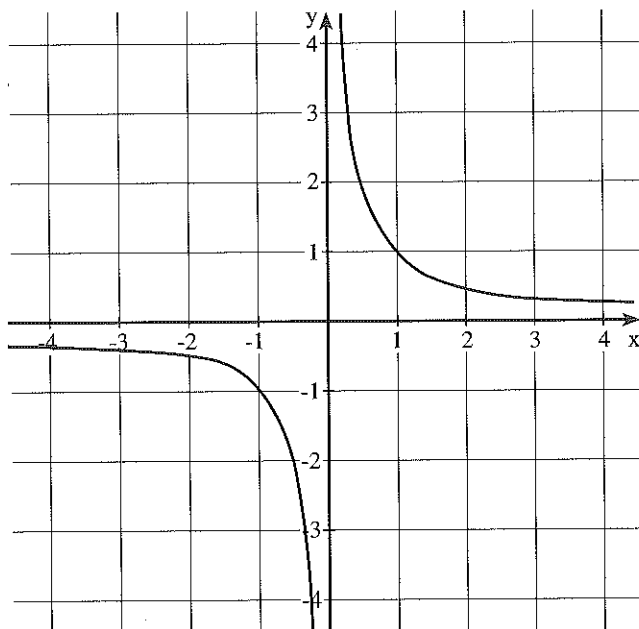


(iii)



ב) למי מהפונקציות יש משיק ששיפועו $-\frac{1}{4}$? הסבירו.

16. א) הניחו את הגרף השקוף $y = \frac{1}{x}$ ללא ציר x (ii), על הגרף המשורטט. שקפו אותו בציר x, ואחר כך הזיזו אותו במקביל לציר y, 3 יחידות למעלה.



- (ב) – מהו חוק הפונקציה שהתקבלה?
 – רשמו שיעורי נקודה על הגרף שהתקבל, הציבו בחוק שרשמתם ובדקו אם החוק מתאים.
 (ג) – מהן משוואות האסימפטוטות של גרף הפונקציה שהתקבלה?
 (ד) – מהן שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים?

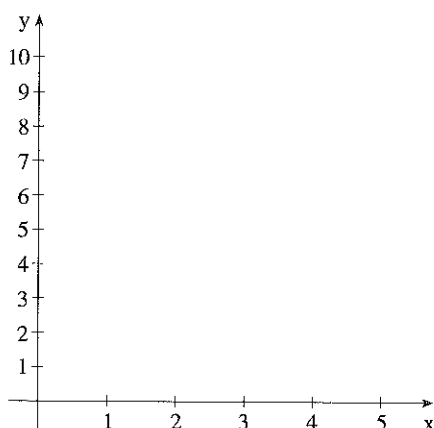
17. שרטטו, לכל סעיף, גרף של פונקציה המקיימת:

- א) – $(1, 2)$ ו- $(-1, 2)$ הן שתי נקודות מינימום.
 – ציר y הוא אסימפטוטה שלה.
 ב) – $(1, 2)$ היא נקודת מינימום, ו- $(-1, 2)$ היא נקודת מקסימום.
 – $(-\frac{1}{2}, 0)$ נקודת חיתוך עם ציר x.
 – ציר y הוא אסימפטוטה שלה.
 – ציר x הוא אסימפטוטה שלה.

- (ג) — $(2, 0)$ היא נקודת חיתוך יחידה עם ציר x .
 — אין לה נקודות קיצון.
 — ציר y הוא אסימפטוטה שלה.

18. בתרגיל זה נעסוק רק במספרים חיוביים.

- (א) חשבו את הסכום של המספר 4 וההופכי לו.
 (ב) חשבו את הסכום של $\frac{1}{3}$ וההופכי לו.
 (ג) מצאו מספר נוסף שהסכום שלו ושל ההופכי לו זהה לסכום שקיבלתם בסעיף ב'.
 (ד) נסו למצוא מספר, שהסכום שלו וההופכי לו קטן מהסכומים שקיבלתם בסעיפים א' עד ג'.
 (ה) ניעזר בפונקציה ובגרף כדי למצוא את המספר, שהסכום שלו וההופכי לו, הוא הקטן ביותר.
 (i) סמנו את המספר ב- x ($x > 0$) ורשמו פונקציה (בעזרת x) המתארת את סכום המספר (x) וההופכי לו.
 (ii) השלימו שיעורי נקודות וסמנו במערכת הצירים.
 $(3, \quad)$ $(\frac{1}{3}, \quad)$ $(4, \quad)$



- (iii) מצאו את המספר
 שעבורו תקבלו סכום
 מינימלי (היעזרו בנגזרת
 ובמציאת נקודות
 חשודות).
 (iv) השלימו סקיצה של גרף
 הפונקציה.

19. בתרגיל זה נחקור את הפונקציה שקיבלתם בשאלה 18: $y = \frac{1}{x} + x$.
ללא ההגבלה למספרים חיוביים בלבד.

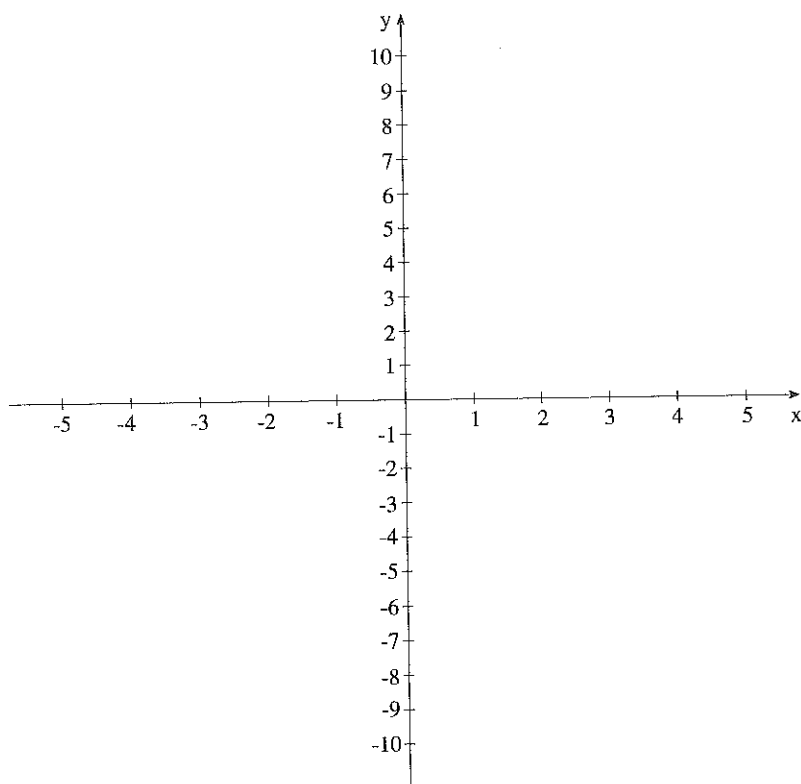
(א) תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \neq 0$, הסבירו.
(נהוג לרשום תחום הגדרה, במקום לרשום עבור איזה ערך של x
הפונקציה לא מוגדרת).

(ב) (i) מצאו את נגזרת הפונקציה.

(ii) מצאו נקודות חשודות וסמנו במערכת הצירים.

(iii) השלימו: $(2, \quad)$ $(0.5, \quad)$ $(-0.5, \quad)$ $(-2, \quad)$

(iv) מאיזה סוג הנקודות החשודות?



ג) (i) השלימו בטבלה שיעורי נקודות קרובות לנקודת אי-ההגדרה.

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
y			לא מוגדרת		

(ii) תארו מה קורה לערכי הפונקציה, אם מציבים ערכי x קרובים יותר ויותר לאפס.

(iii) רשמו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר y.

ד) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

20. הראו שלפונקציה $f(x) = x - \frac{1}{x}$, אין נקודות קיצון.

21. חקרו את הפונקציה $y = \frac{1}{x} + x^2$ לפי השלבים הבאים:

א) רשמו את תחום ההגדרה.

ב) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.

ג) מצאו את נקודות הקיצון.

ד) רשמו את משוואת האסימפטוטה.

ה) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

פונקציות חזקה נוספות

בספר "מבוא לאנליזה" עסקנו בפונקציות חזקה:

$$y = x^2, y = x^3, y = x^4 \text{ וכו'}$$

נטפל כאן גם בפונקציות חזקה: $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^4}$ וכו'.

פעילות מחשב - בעזרת הלומדה *מאמטיקס*

אם אינכם עושים את פעילת המחשב עכיו לעמוד 37.

1. לפניכם רשימה של פונקציות חזקה:

$$y = x^2, y = x^6, y = x^7, y = x^9, y = x^{10}, y = x^4, y = x^3$$

(א) מיינו לשתי קבוצות: פונקציות זוגיות, פונקציות אי-זוגיות. רשמו בטבלה:

פונקציות אי-זוגיות	פונקציות זוגיות

(ב) שרטטו בעזרת מחשב את הקבוצה של הפונקציות הזוגיות, באותה מערכת צירים.

הקישו ALT (ביחד) ורשמו גבולות מתאימים. הקישו F10 לאישור השינויים.

(ג) שנו סקלות ל- $-3 \leq x \leq 3$
 $-9 \leq y \leq 9$

(ד) רשמו שלוש תכונות משותפות לפונקציות הזוגיות ששרטטתם בסעיף ב'.

נקו את המסך ובחרו סקלות מתאימות.

ה) שרטטו בעזרת מחשב את הקבוצה של הפונקציות האי-זוגיות.

ו) רשמו שלוש תכונות משותפות לפונקציות האי-זוגיות ששרטטתם בסעיף ה'.

2. נקו את המסך.

נרחיב את קבוצת פונקציות החזקה הרשומות בתרגיל 1.

א) שרטטו בעזרת המחשב את הפונקציות הבאות ומיינו לשתי קבוצות.

$$y = \frac{1}{x^4}, \quad y = \frac{1}{x^3}, \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x^5}$$

ב) רשמו אותן בטבלה:

קבוצה II	קבוצה I

ג) נקו את המסך.

- שרטטו בעזרת מחשב את הפונקציות שרשמתם בקבוצה I.
- שרטטו פונקציה נוספת השייכת לקבוצה I.

ד) נקו את המסך.

- שרטטו בעזרת מחשב את הפונקציות שרשמתם בקבוצה II.
- שרטטו פונקציה נוספת השייכת לקבוצה II.

- ה) — רשמו שתי תכונות המבדילות בין שתי הקבוצות.
— רשמו שתי תכונות משותפות לשתי הקבוצות.

בפונקציות מהצורה $y = x^n$ ו- $y = \frac{1}{x^n}$ (n טבעי),
 כאשר n זוגי הפונקציה זוגית, וכאשר n אי-זוגי, הפונקציה אי-זוגית.

3. (א) שרטטו בעזרת מחשב את גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x^2}$.

(ב) שרטטו בעזרת מחשב גרף של פונקציה שהיא הזזה ב-2 יחידות כלפי מעלה של הגרף בסעיף א'.

(ג) מה ההבדל בין שתי הפונקציות?

(ד) — רשמו את משוואות האסימפטוטות של הגרפים ששרטטתם.
 — מהי משוואת האסימפטוטה המשותפת?

4. נקו את המסך.

(א) שרטטו בעזרת מחשב את הישר שמשוואתו $y = -4$.

(ב) שרטטו בעזרת מחשב הזזה של הפונקציה $y = \frac{1}{x^2}$, כך שהישר ששרטטתם יהיה אסימפטוטה שלה. (רשמו את החוק גם במחברתכם).

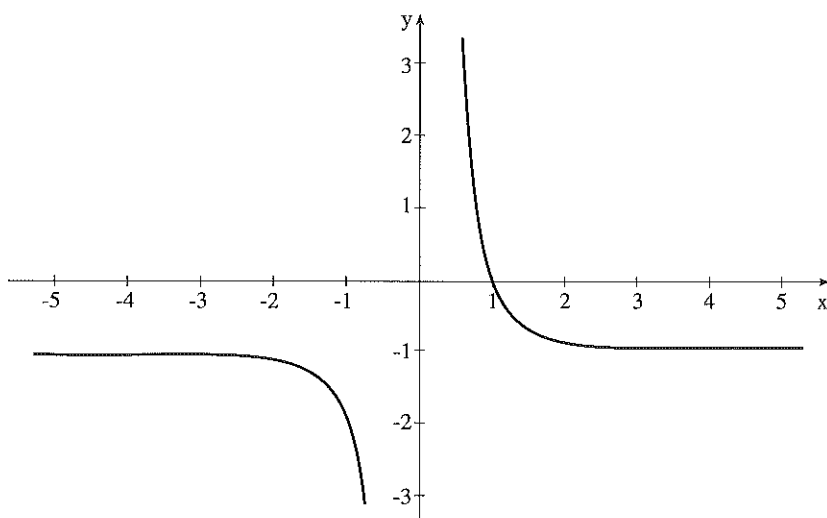
(ג) רשמו 3 תכונות, המבדילות בין שתי הפונקציות $y = \frac{1}{x^2}$ והפונקציה המוזאת).

5. (א) שרטטו בעזרת מחשב את גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x^3}$.

(ב) הגרף שלפניכם מתאר פונקציה שהיא הזזה במקביל לציר y , של

$$y = \frac{1}{x^3}$$

"העתיקו" אותו למחשב. (רשמו את חוק הפונקציה המוזזת גם במחברתכם).



(ג) רשמו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה המוזזת עם ציר x .
רשמו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המוזזת.

6. (א) שרטטו בעזרת מחשב את הישר $y = 3$.

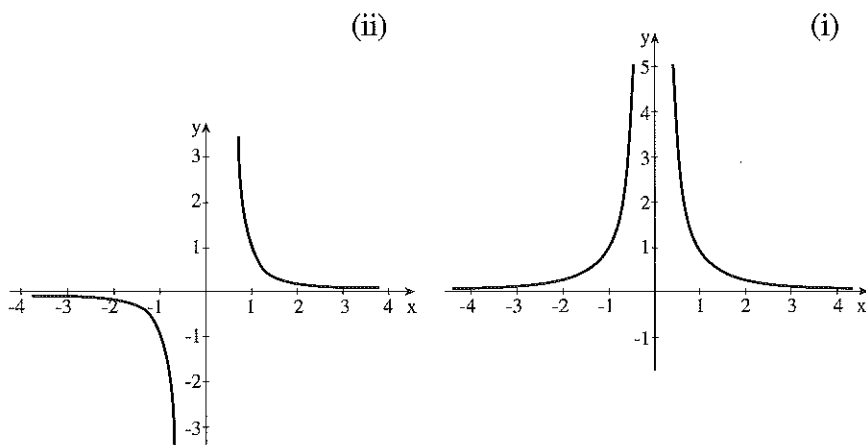
(ב) שרטטו בעזרת מחשב שלושה גרפים שהם הזזות של פונקציות חזקה שונות, שהישר $y = 3$ הוא אסימפטוטה שלהם. (רשמו גם במחברתכם את החוקים המתאימים).

סיימגם כעילוף ממשב, עכיו לעמוד 39.

פונקציות חזקה נוספות – ללא מחשב

7.  לפניכם הגרפים של הפונקציות $y = \frac{1}{x^2}$ ו- $y = \frac{1}{x^3}$.

א) נסו לזהות איזה גרף מתאים לכל פונקציה ונמקו.



ב) הציבו בכל אחת מהפונקציות את הערכים הרשומים מימין, והשלימו טבלה.

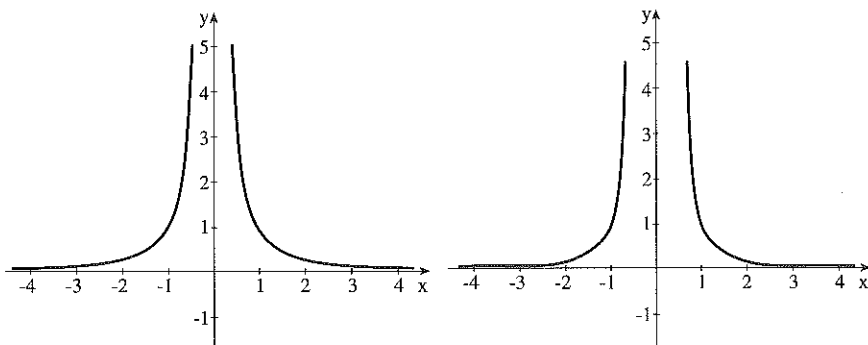
$y = \frac{1}{x^3}$	$y = \frac{1}{x^2}$	
		$x = -2$
		$x = 0.5$

ג) בדקו את השערתכם לסעיף א'.



8. לפניכם הגרפים של הפונקציות $y = \frac{1}{x^2}$ ושל $y = \frac{1}{x^4}$.

א) נסו לזהות איזה גרף מתאים לכל פונקציה.

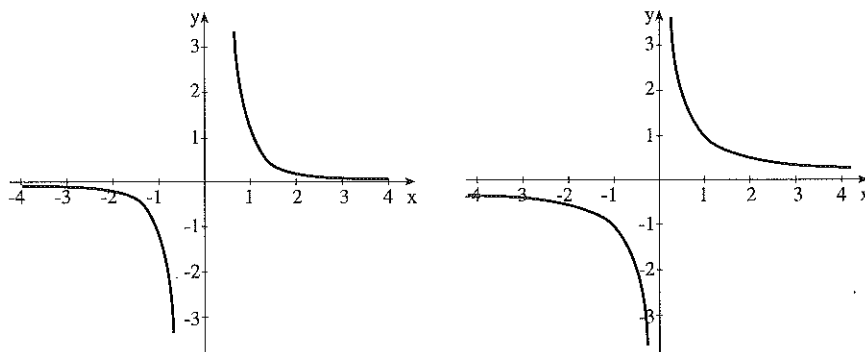


ב) הציבו בכל אחת מהן $x = 2$, ובדקו את השערתכם.



9. לפניכם הגרפים של $y = \frac{1}{x}$ ושל $y = \frac{1}{x^3}$.

א) נסו לזהות איזה גרף מתאים לכל פונקציה.



ב) הציבו בכל אחת מהן $x = 2$, ובדקו את השערתכם.

בפונקציות מהצורה $y = x^n$ ו- $y = \frac{1}{x^n}$ (n טבעי),

כאשר n זוגי הפונקציה זוגית, וכאשר n אי-זוגי, הפונקציה אי-זוגית.



10. רשמו אילו מהפונקציות הבאות הן זוגיות ואילו אי-זוגיות.

ד) $y = \frac{1}{x^5}$

א) $y = \frac{1}{x^2}$

ה) $y = \frac{1}{x}$

ב) $y = \frac{1}{x^3}$

ו) $y = \frac{1}{x^{10}}$

ג) $y = \frac{1}{x^4}$



11. משורטט גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x^3}$.

א) שרטטו, באותה מערכת צירים,

את גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x^3} + 1$.

ב) רשמו את משוואת

האסימפטוטה של

$y = \frac{1}{x^3} + 1$

ג) רשמו את נקודות החיתוך עם

הצירים של $y = \frac{1}{x^3} + 1$.



12. א) שרטטו את הישר $y = 3$.

ב) שרטטו, בקירוב פונקציית חזקה, כך ש- $y = 3$ הוא אסימפטוטה שלה.

רשמו את החוק.

גרפיקים

13. (i) חלק מהפונקציות הבאות מקבלות רק ערכים חיוביים, רשמו אותן.

ז) $y = x^3$

ד) $y = \frac{1}{x^5}$

א) $y = \frac{1}{x^2}$

ח) $y = x$

ה) $y = \frac{1}{x^6}$

ב) $y = \frac{1}{x^3}$

ט) $y = -\frac{1}{x^2}$

ו) $y = \frac{1}{x}$

ג) $y = -\frac{1}{x^4}$

(ii) האם יש פונקציות, מבין הפונקציות שבסעיף (i), שכל ערכיהן שליליים?

אם כן, אילו?

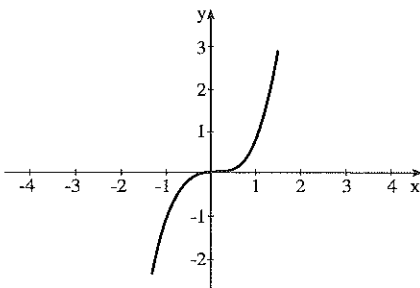
14. הגרפים הבאים מתארים את הפונקציות:

$$y = \frac{1}{x} \quad (\text{v}) \quad y = x^3 \quad (\text{iii}) \quad y = x^2 \quad (\text{i})$$

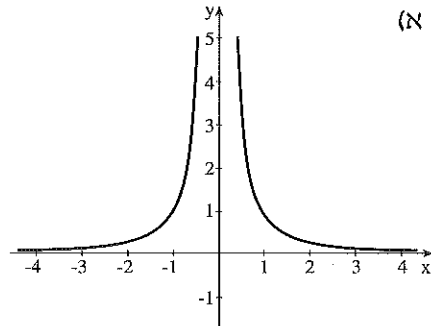
$$y = x^4 \quad (\text{vi}) \quad y = \frac{1}{x^3} \quad (\text{iv}) \quad y = \frac{1}{x^2} \quad (\text{ii})$$

התאימו חוק לגרף. הציבו בחוקים שרשמתם שיעור x של נקודה כלשהי, ובדקו אם הנקודה נמצאת על הגרף.

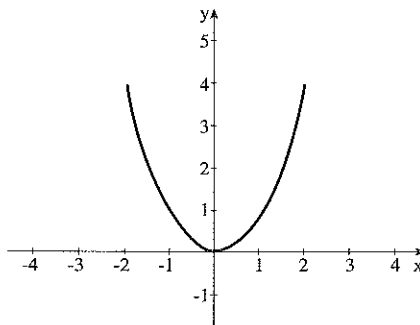
(ב)



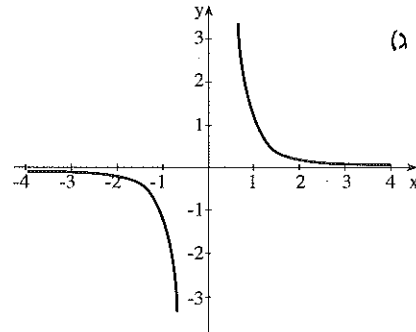
(א)



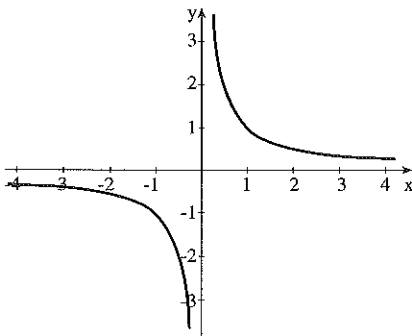
(ד)



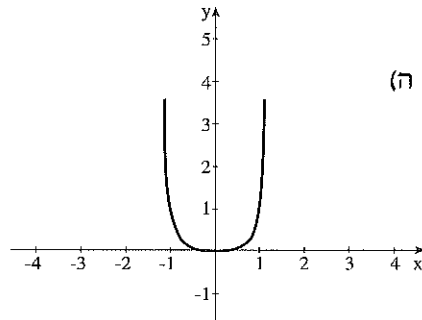
(ג)



(ו)

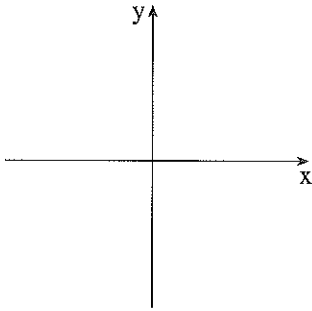


(ה)



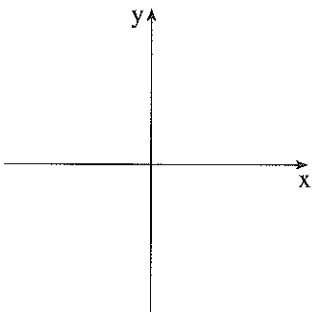
15. א) שרטטו, בקירוב, את גרף הפונקציה

$$y = x^4$$



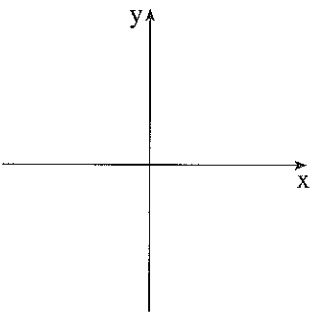
ב) שרטטו, בקירוב, את גרף הפונקציה

$$y = \frac{1}{x^4}$$



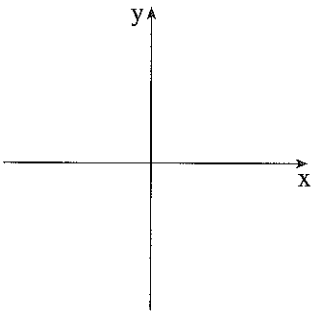
ג) שרטטו, בקירוב, את גרף הפונקציה

$$y = x^7$$



ד) שרטטו, בקירוב, את גרף הפונקציה

$$y = \frac{1}{x^7}$$



פעולות אלגבריות והזזות

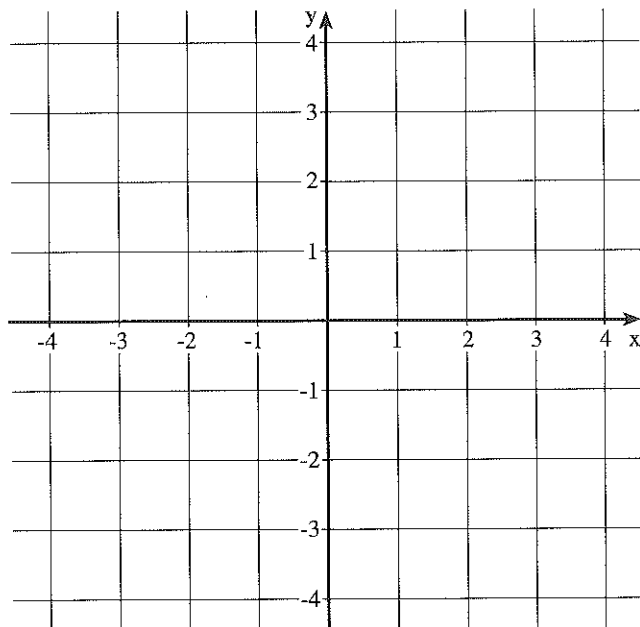
1. נתונה הפונקציה $y = \frac{1+x}{x}$.

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) השלימו את הטבלה.

x	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	1	2	3
y						לא מוגדרת					

שרטטו את גרף הפונקציה.



הגרף שהתקבל הוא הזזה של $y = \frac{1}{x}$. מהי ההזזה התקבלה?
רשמו את החוק על פי ההזזה $y = \underline{\hspace{2cm}}$

בתרגיל 3 תראו שזו אכן הפונקציה הנתונה.

2. רשמו כמכפלה וכפלו. 

שימו לב: קו שבר מסמן פעולה גילוף, אך יש לו גם תפקיד של סוגריים.

$$\frac{4x+2}{2} = \frac{1}{2}(4x+2) = 2x+1$$

דוגמאות:

$$\frac{4x+1}{x} = \frac{1}{x}(4x+1) = 4 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{1-2x}{x} = \quad (א) \quad \frac{6x+8}{2} = \quad (א)$$

$$\frac{3x-1}{x} = \quad (ב) \quad \frac{3x+1}{x} = \quad (ב)$$

3. בתרגיל 1 עסקתם בפונקציה $y = \frac{1+x}{x}$. 

(א) רשמו כמכפלה וכפלו. $y = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x}(\quad) =$

הסבירו את הקשר בין מה שקיבלתם לגרף שבתרגיל 1.

(ב) רשמו ליד כל פונקציה בתרגיל 2, אם היא הזזה של $y = \frac{1}{x}$, או של

$$y = -\frac{1}{x} \text{, או של פונקציה אחרת.}$$



4. פעלו על-פי הדוגמה, וקבעו באיזו הזזה של הפונקציה $y = \frac{1}{x}$ מדובר. אחר כך הניחו את הגרף השקוף $y = \frac{1}{x}$ (ii) על הגרף המשוורטט, ובצעו את ההזזה.

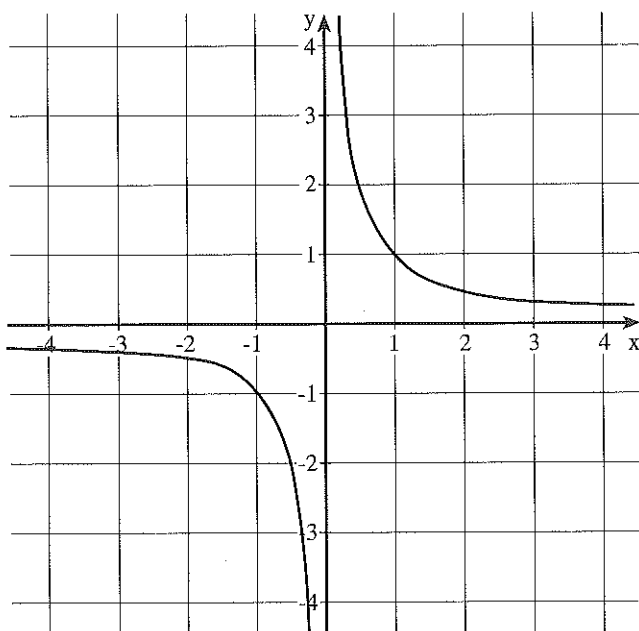
דוגמה: $y = \frac{1+5x}{x} = \frac{1}{x}(1+5x) = \frac{1}{x} + 5$
הזזה ב-5 יחידות למעלה.

(א) $y = \frac{1+3x}{x}$

(ב) $y = \frac{2x+1}{x}$

(ג) $y = \frac{1-2x}{x}$

(ד) $y = \frac{1-x}{x}$



5. נתונה הפונקציה $y = \frac{1+x^2}{x}$.

(א) הראו שאין לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.

(ב) רשמו כסכום (רשמו כמכפלה וכפלוג), גזרו, מצאו נקודות קיצון, ורשמו מאיזה סוג הן (מקסימום, מינימום).

גרפיקים

6. חברו בקו כל זוג של תבניות תואמות.

$$\frac{2+3x}{x} \quad \bullet \quad \frac{3}{x} + 2$$

$$\frac{3+2x}{x} \quad \bullet \quad -\frac{3}{x} + 2$$

$$\frac{3x-2}{x} \quad \bullet \quad \frac{2}{x} + 3$$

$$\frac{2x-3}{x} \quad \bullet \quad -\frac{2}{x} + 3$$

7. (i) רשמו כמכפלה וכפלו.

$$y = \frac{6x+4}{5} = \frac{1}{5}(6x+4) = 1.2x + 0.8 \quad \text{דוגמה:}$$

$$y = \frac{5x+5}{5} = \quad (\text{ד}) \quad y = \frac{4-4x}{8} = \quad (\text{א})$$

$$y = \frac{5x-1}{x} = \quad (\text{ה}) \quad y = \frac{4x-1}{x} = \quad (\text{ב})$$

$$y = \frac{1-x}{x} = \quad (\text{ו}) \quad y = \frac{4+6x}{4x} = \quad (\text{ג})$$

(ii) רשמו ליד כל פונקציה אם היא פונקציה קווית, הווה של $y = \frac{1}{x}$, או

$$\text{הווה של } y = -\frac{1}{x}.$$

8. מצאו נקודות קיצון של הפונקציה $\frac{1-2x^3}{x}$.

(כדאי להיעזר במערכת צירים לקביעת סוג נקודות הקיצון).

9. חקרו את הפונקציה $y = \frac{1-4x^2}{x}$ לפי השלבים הבאים:
(שרטטו תחילה מערכת צירים).

(א) מצאו את תחום ההגדרה.

(ב) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.

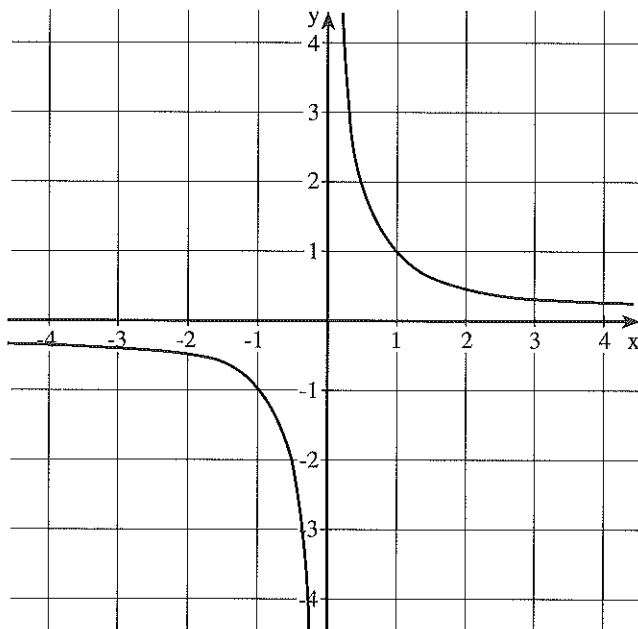
(ג) מצאו את נקודות הקיצון.

(ד) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ה) רשמו תחומי עלייה וירידה.

עוד הזזות ושיקופים של $y = \frac{1}{x}$

1. (א) הניחו את הגרף השקוף $y = \frac{1}{x}$ ללא ציר y (iii), על הגרף המשורטט, והזיזו אותו ב-2 יחידות ימינה (במקביל לציר x).



הפונקציה שהתקבלה היא $g(x) = \frac{1}{x-2}$.

- (ב) עבור איזה ערך של x המכנה הוא אפס?
 השלימו: הפונקציה לא מוגדרת עבור _____.
- (ג) מהן המשוואות של האסימפטוטות לגרף הפונקציה g ?
- (ד) מהי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה g עם ציר y ?

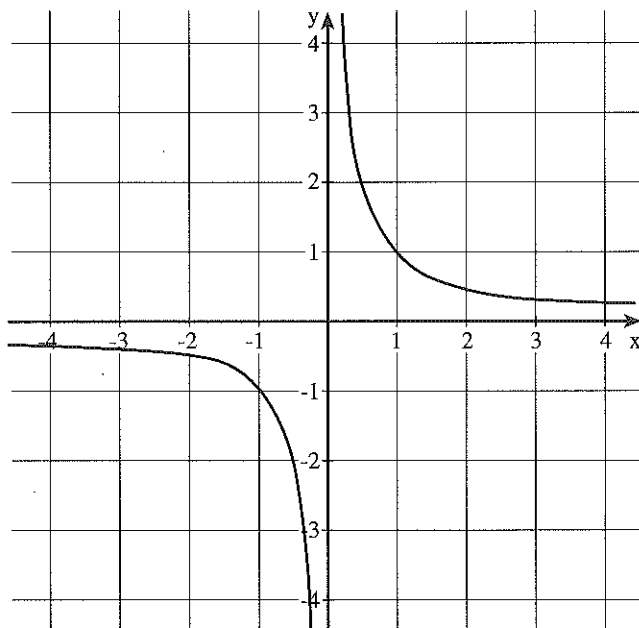


2. נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{x+3}$.

- (א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 (ב) – השלימו בטבלה שיעורי נקודות בסביבת נקודת אי-ההגדרה, וסמנו אותן במערכת הצירים למטה.

x	-3.5	-3.1	-3	-2.9	-2.5
y			לא מוגדרת		

- תארו מה קורה לערכי הפונקציה ליד נקודות אי-ההגדרה.
 – מהי משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר y?
 (ג) חשבו נקודות נוספות, וסמנו אותן במערכת הצירים.
 (2,) (1,) (-1,) (-2,) (-4,)



- (ד) הניחו את הגרף השקוף $y = \frac{1}{x}$ ללא ציר y (iii), על הגרף המשוורט והזיזו, כך שיתקבל גרף הפונקציה הנתונה. איזו הזזה ביצעתם?



3. מהו תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות?

$$y = \frac{2}{x+1} \quad (א)$$

$$y = \frac{x}{x-4} \quad (א)$$

$$y = \frac{x-1}{2x-1} \quad (ב)$$

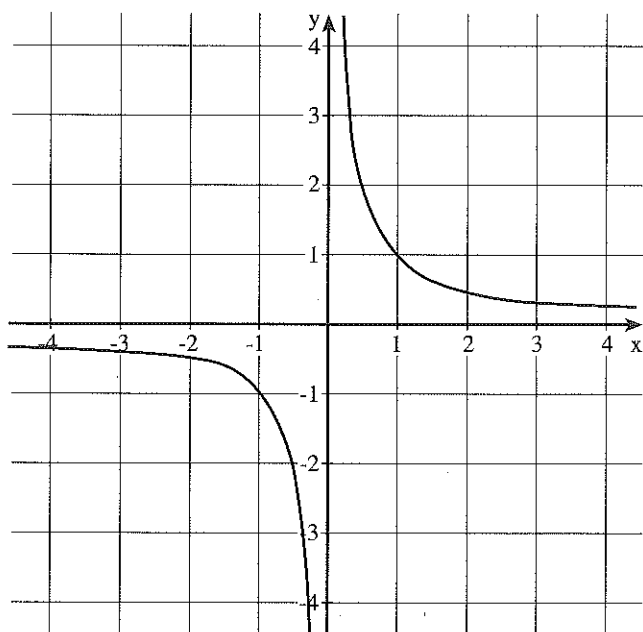
$$y = \frac{x+1}{2x-4} \quad (ב)$$

גר גיליון

4. (i) רשמו ליד כל פונקציה עבור איזה ערך של x היא לא מוגדרת.
 (ii) הניחו את הגרף השקוף $y = \frac{1}{x}$ ללא ציר y (iii), כך שיתאר את הפונקציה. איזו הזזה ביצעתם?

$$y = \frac{1}{x+2} \quad (ב)$$

$$y = \frac{1}{x-1} \quad (א)$$



5. מהו תחום ההגדרה של כל פונקציה?

$$y = \frac{1}{3x-6} \quad (\text{ד})$$

$$y = \frac{1}{2x+2} \quad (\text{א})$$

$$y = \frac{3x+1}{x} \quad (\text{ה})$$

$$y = \frac{1}{x+1} \quad (\text{ב})$$

$$y = \frac{x^2-4}{x-1} \quad (\text{ו})$$

$$y = \frac{4}{3x+6} \quad (\text{ג})$$

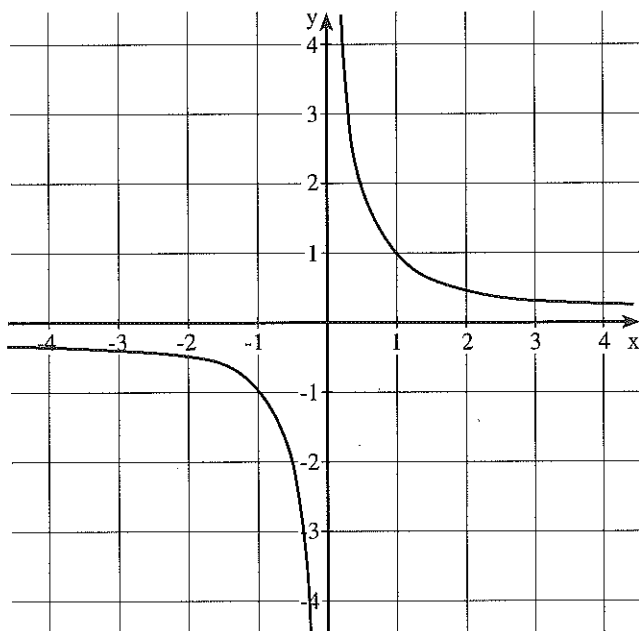
6. בכל סעיף הניחו את הגרף השקוף על הגרף המשוורטט ($y = \frac{1}{x}$), בצעו את

ההוראות, ורשמו את חוק הפונקציה שהתקבלה.

(א) הזזה, במקביל לציר x , של הגרף ב- 2 יחידות ימינה (גרף שקוף iii).

(ב) הזזה, במקביל לציר y , של הגרף ביחידה אחת למעלה (גרף שקוף ii).

(ג) הזזה של הגרף ב- 2 יחידות ימינה, וביחידה אחת למעלה (במקביל לצירים).



7. - מהו תחום ההגדרה של כל פונקציה?

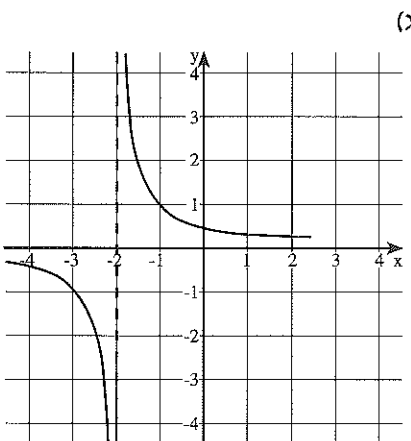
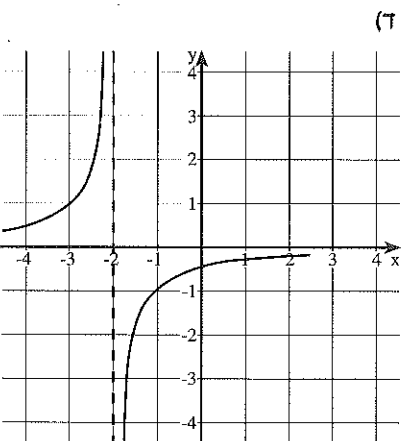
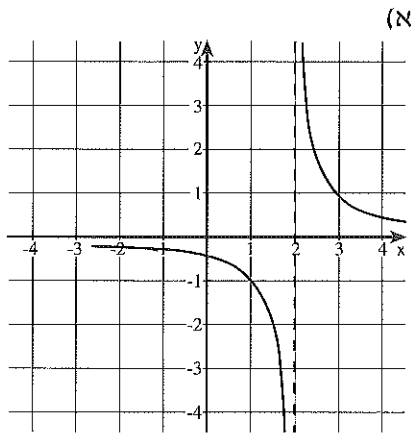
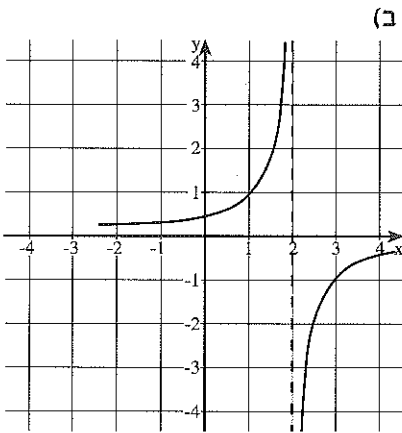
$$y = \frac{1}{x-2} \quad (\text{iii})$$

$$y = \frac{1}{x+2} \quad (\text{i})$$

$$y = -\frac{1}{x-2} \quad (\text{iv})$$

$$y = -\frac{1}{x+2} \quad (\text{ii})$$

- התאימו חוק לגרף.



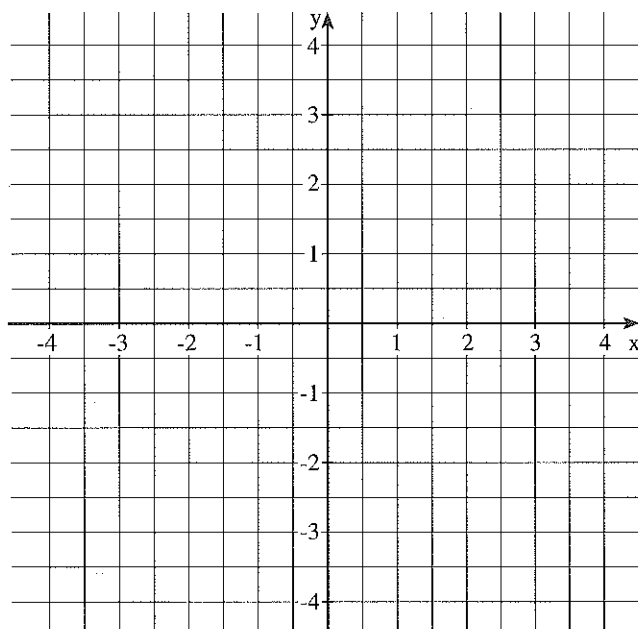
8. נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{x+2} - 1$.

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) גרף הפונקציה הנתונה מתקבל מהזזה של גרף הפונקציה $y = \frac{1}{x}$.

(i) תארו במילים את ההזזה.

(ii) שרטטו במערכת הצירים שלפניכם את גרף הפונקציה (אפשר להיעזר בדף שקוף).



(ג) רשמו נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

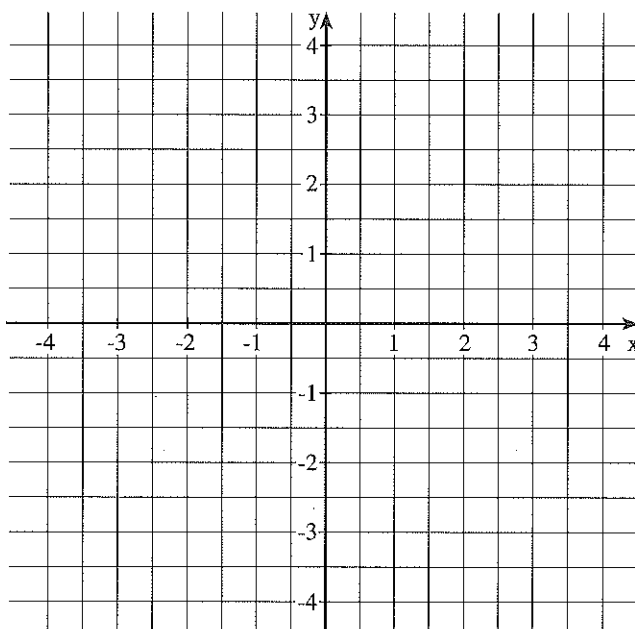
(ד) מהן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה הנתונה?

קצת "מתיחות"

1. נתונה הפונקציה $y = \frac{2}{x}$. 

(א) השלימו את הטבלה, סמנו את הנקודות, ושרטטו את גרף הפונקציה.

x	-4	-2	-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	1	2	4
y						לא מוגדרת					



(ב) לצורך השוואה הניחו את הגרף השקוף (ii), כך שיתאר את $y = \frac{1}{x}$.
רשמו במה דומה הגרף המונח לגרף המשורטט, ובמה הוא שונה ממנו.

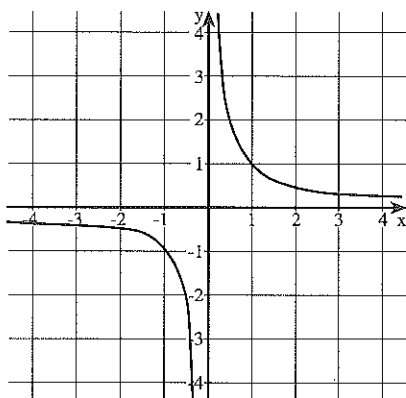


2. בכל סעיף משורטט הגרף של הפונקציה $y = \frac{1}{x}$, ורשום חוק של פונקציה נוספת.

- השלימו את שיעורי הנקודות וסמנו.
- השלימו סקיצה של גרף הפונקציה הרשומה.

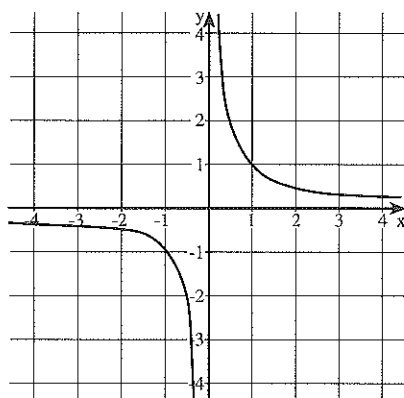
ב) $y = \frac{0.5}{x}$

(2,) (1,) (0.5,)
(-2,) (-1,) (-0.5,)



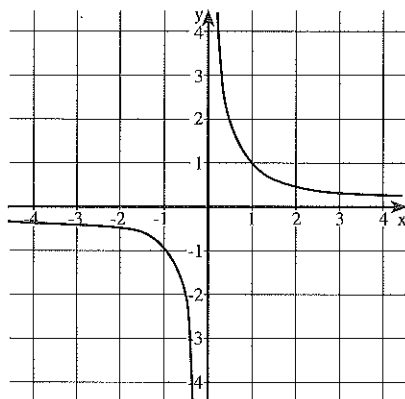
א) $y = \frac{3}{x}$

(3,) (1,) (0.75,)
(-3,) (-1,) (-0.75,)



ג) $y = -\frac{2}{x}$

(4,) (2,) (1,) (0.5,)
(-4,) (-2,) (-1,) (-0.5,)



3.  (א) במקום לרשום $y = \frac{3}{x}$ אפשר לרשום $y = 3 \cdot \frac{1}{x}$.
מהי הנגזרת של פונקציה זו?

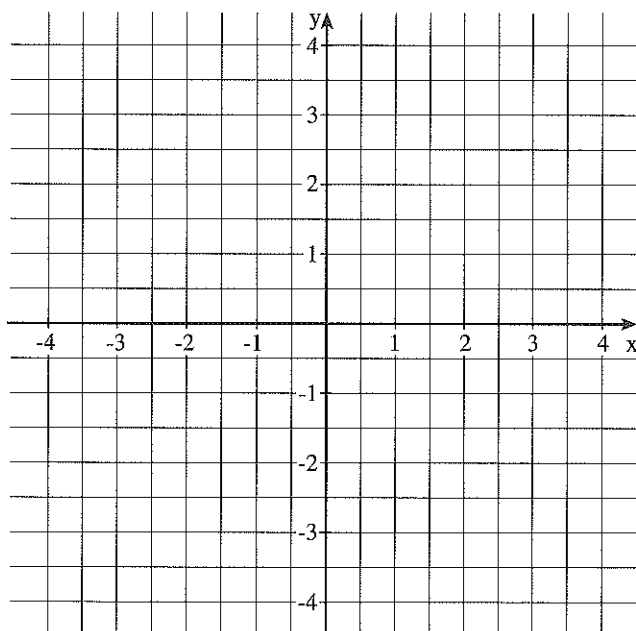
(ב) גזרו: $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{2.5}{x}$, $y = -\frac{3}{x}$

4.  נתונה הפונקציה $y = \frac{4}{x}$.

- (א) רשמו את נגזרת הפונקציה.
(ב) האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
(ג) האם היא עולה? יורדת? נמקו.
(ד) השלימו את הטבלה, סמנו את הנקודות במערכת הצירים, והשלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4
y					לא מוגדרת				

(ה) מהן משוואות האסימפטוטות?



5. גזרו.



הנגזרת $y' = -\frac{3}{x^2} + 3$

דוגמה: הפונקציה $y = \frac{3}{x} + 3x$

(ד) $y = -\frac{3}{x} + 2x$

(א) $y = \frac{4}{x} + 5x$

(ה) $y = \frac{4}{x} - x + 2$

(ב) $y = \frac{7}{x} + 3x^2$

(ו) $y = -\frac{1}{x} + 6x^2 + 6$

(ג) $y = \frac{6}{x} + x$

6. פתרו את המשוואות הבאות:



(ד) $\frac{8}{x^2} - x = 0$

(א) $\frac{36}{x} = x$

(ה) $\frac{8}{x^2} + x = 0$

(ב) $\frac{4}{x^2} - 1 = 0$

(ו) $\frac{2}{x^2} - 4 = 0$

(ג) $\frac{1}{x^2} + 1 = 0$

(דייקו עד לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

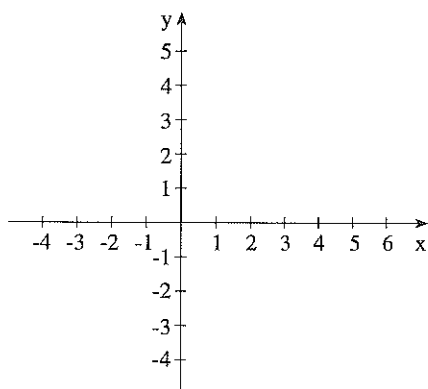
7. נתונה הפונקציה $y = \frac{4}{x} - x$.



(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) - חשבו ערכים בסביבת נקודת אי-ההגדרה, רשמו בטבלה.

x	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5
y			לא מוגדרת		



- תארו את התנהגות הפונקציה בסביבת נקודת אי-ההגדרה.

(ג) מצאו נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש) וסמנו.

- (ד) מצאו נגזרת של הפונקציה, והסבירו מדוע אין נקודות חשודות.
 (ה) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה. (חשבו נקודות נוספות אם יש צורך).
 (ו) מהי משוואת האסימפטוטה?
 (ז) רשמו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

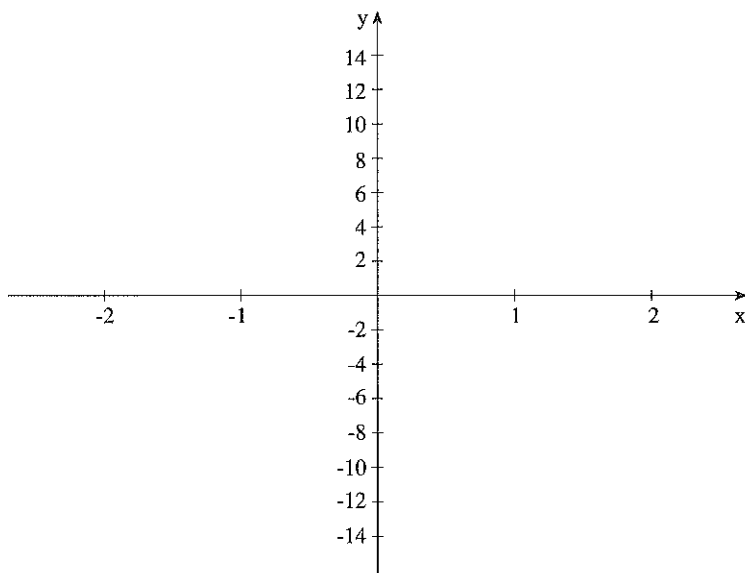
8. נתונה הפונקציה $y = \frac{4}{x} + 4x$.



- (א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 (ב) – חשבו ערכים בסביבת נקודת אי-ההגדרה. רשמו בטבלה.

x	-0.5	-0.01	0	0.01	0.5
y			לא מוגדרת		

- תארו את התנהגות הפונקציה ליד נקודת אי-ההגדרה.
 (ג) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x (אם יש כאלה).
 (ד) – השלימו שיעורי y של הנקודות החשודות של הפונקציה:
 (1,) (-1,). סמנו.
 – קבעו את סוג הנקודות החשודות בעזרת נקודות לידן.



- (ה) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

9. רשמו כסכום וגזרו. 

$$y = \frac{4 + 3x^2}{x} = \frac{4}{x} + 3x \Leftarrow y = \frac{4 + 3x^2}{x} \quad \text{דוגמה:}$$

$$y' = -\frac{4}{x^2} + 3$$

$$y = \frac{4x - 2}{x} \quad (א)$$

$$y = \frac{2 - 3x}{x} \quad (א)$$

$$y = \frac{6x^3 + 2}{x} \quad (ב)$$

$$y = \frac{6 + 2x^2 - x}{x} \quad (ב)$$

10. פתרו את המשוואות. 

$$\frac{9 + x^2}{x} = 0 \quad (א)$$

$$\frac{4x + 2}{x} = 0 \quad (א)$$

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x} = 0 \quad (ב)$$

$$\frac{4 - x^2}{x} = 0 \quad (ב)$$



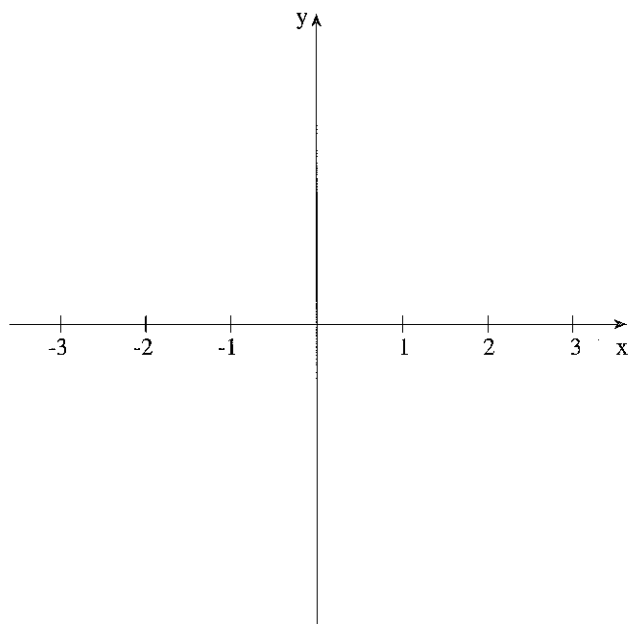
11. חקרו את הפונקציה $y = \frac{2 + 2x^2}{x}$ לפי השלבים הבאים:

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.

(ג) מצאו את נקודות הקיצון.

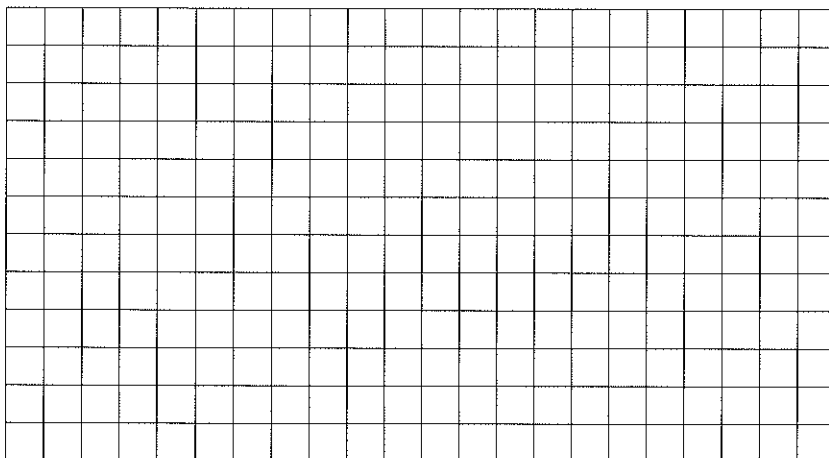
(ד) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.





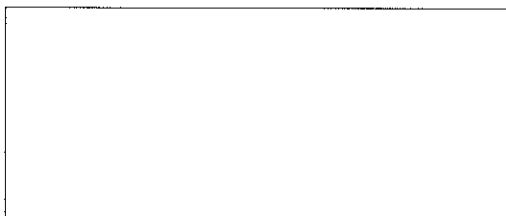
12. בתרגיל זה נחקור היקפים של מלבנים ששטחם 36 יחידות ריבועיות.

א) שרטטו שלושה מלבנים ששטחם 36 יחידות ריבועיות, ורשמו מעל כל מלבן את היקפו (כל משבצת היא יחידה ריבועית אחת).



ב) אורך אחת מצלעות המלבן 2 יחידות. חשבו את הצלע השנייה, ואת היקף המלבן. (רשמו את המידות בשרטוט)

ג) סמנו את אחת הצלעות ב- x . בטאו את אורך הצלע השנייה ואת היקף המלבן k באמצעות x (רשמו בשרטוט).



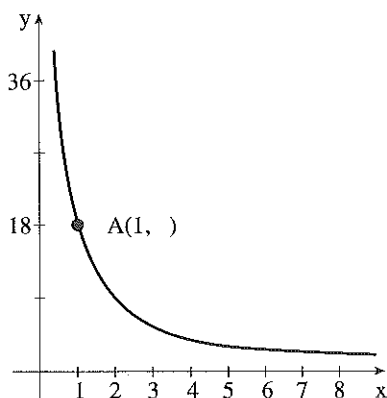
ד) מצאו עבור איזה ערך של x , ההיקף מינימלי. שרטטו את המלבן וחשבו את היקפו.

13. שטח של מלבן הוא 18 סמ"ר.



א) מה אורך הצלע השנייה של המלבן, אם אורך אחת הצלעות 2 ס"מ?
4 ס"מ

ב) x מבטא את אורך אחת הצלעות. בטאו את אורך הצלע השנייה y כפונקציה של x .



ג) הגרף מתאר את הפונקציה שרשמתם בסעיף ב'.

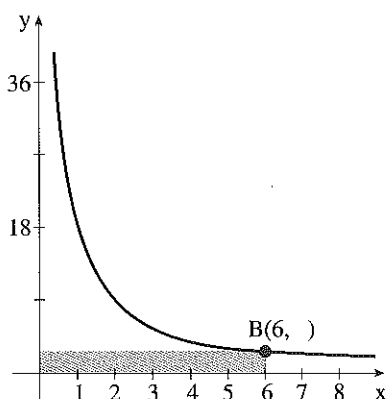
(i) השלימו שיעורי הנקודה $A(1, \quad)$.

(ii) העבירו אנך לציר y מנקודה A . מה מייצג אורך האנך?

(iii) העבירו אנך לציר x מהנקודה A , מה מייצג אורך האנך?

(iv) מהו שטח המלבן שנוצר?

(v) חשבו את היקף המלבן.

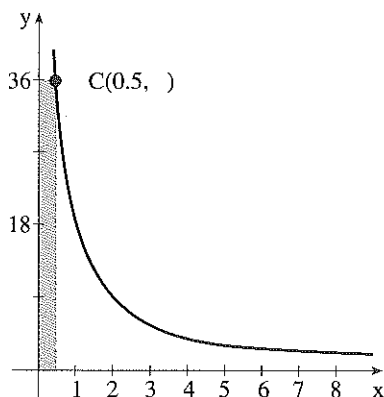


ד) (i) השלימו שיעורי הנקודה $B(6, \quad)$.

(ii) רשמו בשרטוט את אורכי צלעות המלבן הצבוע.

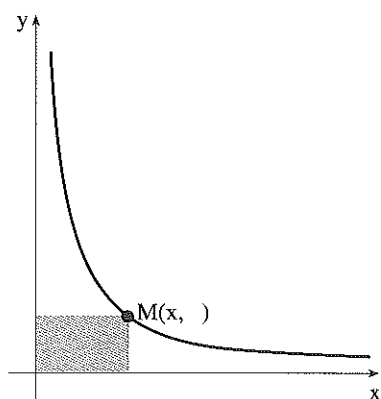
(iii) מה שטחו?

(iv) מה היקפו?



(ה) – מה שטח המלבן הצבוע?

– מה היקף המלבן הצבוע?



(ו) (i) השלימו את שיעורי

הנקודה $M(x, y)$.

(ii) רשמו בשרטוט את אורכי

הצלעות (בעזרת x).

(iii) בטאו את היקף המלבן

כפונקציה של x .

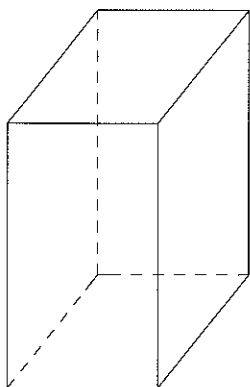
(iv) מצאו את x עבורו ההיקף

מינימלי, איזה מלבן

קיבלתם?

(v) מהו ההיקף המינימלי?

14. נפח תיבה שבסיסה ריבוע הוא 216 סמ"ק,



(א) – חשבו את גובה התיבה אם אורך צלע

הבסיס 2 ס"מ.

– חשבו את שטח הפנים.

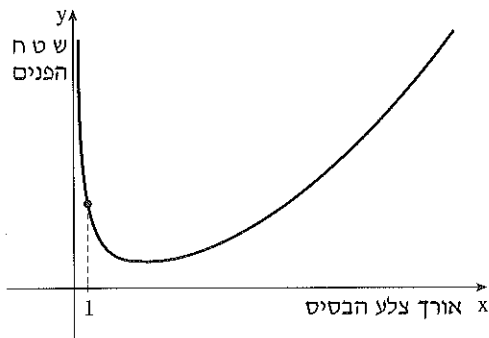
(ב) – חשבו את גובה התיבה אם אורך צלע

הבסיס 3 ס"מ.

(ג) x מייצג את אורך צלע הבסיס.

– בטאו את גובה התיבה בעזרת x .

– בטאו את שטח הפנים כפונקציה של x .



- (ד) משורטט גרף הפונקציה
 שרשמתם בסעיף ג'.
 – מהו גובה התיבה
 ששיעור x שלה
 מסומן בשרטוט?
 – מהו שטח הפנים של
 תיבה זו?
 סמנו על ציר y .

- (ה) – מצאו את x עבורו שטח הפנים מינימלי.
 – סמנו (בקירוב) נקודה מתאימה על גרף הפונקציה.

גרז'ואים

15. חברו בקו כל זוג תבניות תואמות.

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\cdot \frac{4}{x}$$

$$0.4 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\cdot \frac{1}{5x}$$

$$4 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\cdot \frac{5}{x}$$

$$5 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\cdot \frac{1}{4x}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\cdot \frac{0.4}{x}$$

16. כדי שתוכלו לגזור ביתר קלות, רשמו כמכפלה וגזרו.

$$y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{דוגמה:}$$

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2}$$

רשמו כמכפלה וגזרו.

$$y = \frac{0.8}{x} \quad (\text{ה})$$

$$y = \frac{1}{2x} \quad (\text{ג})$$

$$y = \frac{3}{x} \quad (\text{א})$$

$$y = -\frac{2}{3x} \quad (\text{ו})$$

$$y = \frac{3}{4x} \quad (\text{ד})$$

$$y = \frac{2.3}{x} \quad (\text{ב})$$

17. גזרו כל אחת מהפונקציות הבאות.

$$y = -\frac{4}{x} + 2x^2 \quad (\text{ג})$$

$$y = -\frac{5}{x} + 1 \quad (\text{א})$$

$$y = \frac{6}{x} + x \quad (\text{ד})$$

$$y = \frac{1}{2x} + 3x \quad (\text{ב})$$

18. רשמו כסכום וגזרו.

$$y = \frac{4 - 6x^2}{5} \quad (\text{ג})$$

$$y = \frac{7 + 2x}{x} \quad (\text{א})$$

$$y = \frac{4 + 4x + 6x^2}{x} \quad (\text{ד})$$

$$y = \frac{3x^2 - 6}{x} \quad (\text{ב})$$

19. פתרו את המשוואות הבאות.

$$x + \frac{1}{x} = 0 \quad (א)$$

$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad (א)$$

$$\frac{4}{x^2} + 1 = 0 \quad (ד)$$

$$\frac{4}{x^2} - 1 = 0 \quad (ב)$$

20. נתונה הפונקציה $y = \frac{4}{x} + x$.

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) חשבו ערכים בסביבת נקודת אי-ההגדרה, רשמו בטבלה.

x	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5
y			לא מוגדרת		

תארו את התנהגות הפונקציה ליד נקודת אי-ההגדרה.

(ג) השלימו את חקירת הפונקציה.

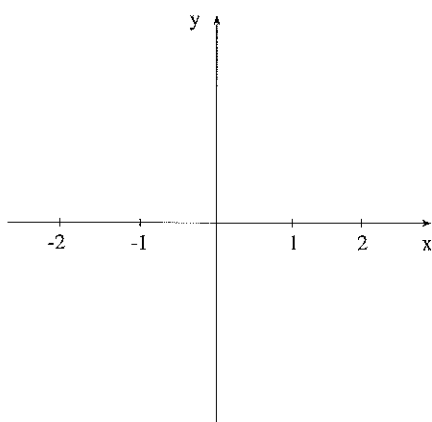
(נקודות חיתוך עם צירים, נקודות קיצון, סקיצה, משוואת האסימפטוטה).

21. נתונה הפונקציה: $y = \frac{1 + 9x^2}{x}$.

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) רשמו כסכום, גזרו, ומצאו נקודות קיצון.

מערכת הצירים נועדה לעזור לכם בקביעת סוג נקודות הקיצון.



22. נתונה הפונקציה: $y = \frac{4 + 2x^3}{x}$.

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) רשמו כסכום, ומצאו את נקודות הקיצון.

23. (א) הסבירו מדוע לפונקציה: $y = \frac{3 - 2x^2}{x}$ אין נקודות קיצון.

(ב) הסבירו מדוע הפונקציה יורדת בתחום $x > 0$ ובתחום $x < 0$.

24. חקרו את הפונקציה: $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x}$ לפי השלבים הבאים:

(א) רשמו את תחום הגדרה של הפונקציה.

(ב) מצאו נקודות חיתוך עם הצירים.

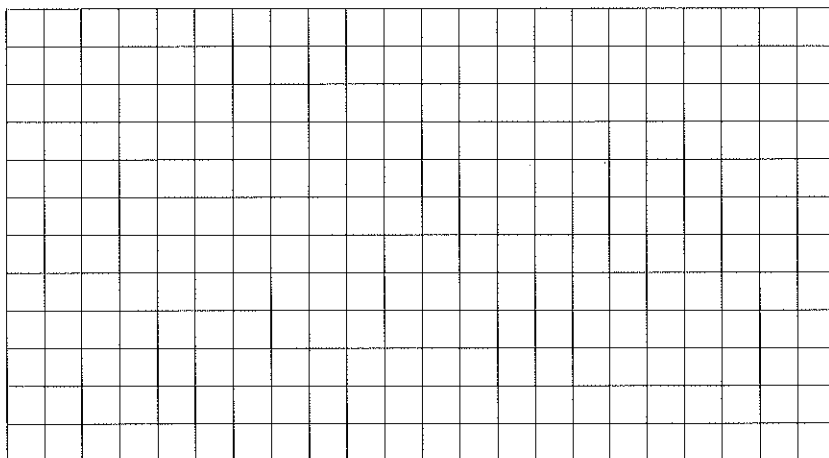
(ג) מצאו נקודות קיצון (דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה).

(ד) שרטטו סקיצה.

(ה) רשמו תחומי עלייה וירידה.

25. חקלאי רוצה להקצות מהשטח שברשותו חלקה מלבנית ששטחה 120 מ"ר. הוא יכול ליצור חלקות בהיקפים שונים.

(א) שרטטו שלוש חלקות כאלה וחשבו את היקפן.
(כל צלע של משבצת מייצגת 10 מ').

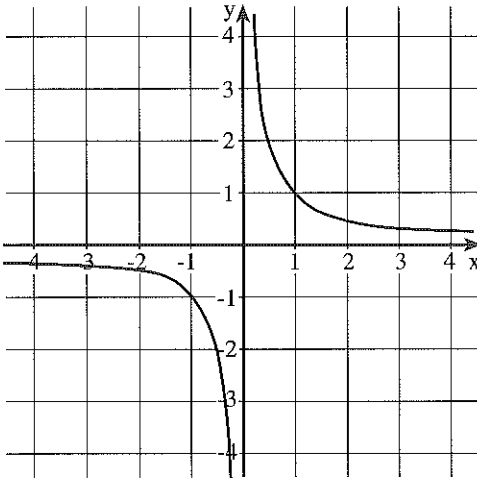


(ב) נסו למצוא ממדי חלקה ששטחה 120 מ"ר אשר היקפה קטן יותר מהיקף שלוש החלקות ששרטטתם.

(ג) x מייצג אורך אחת מצלעות המלבן ששטחו 120 מ"ר. בטאו את היקפו (בעזרת x).

(ד) כדי לחסוך בהוצאות הגדר, מצאו את ממדי החלקה בעלת ההיקף המינימלי.

על משיק לפונקציה



1. משורטט גרף הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

נגזרת הפונקציה היא

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

(א) - חשבו את $f'(1)$.

- שרטטו את המשיק

בנקודה $(1, 1)$.

- רשמו את משוואתו.

(ב) לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$

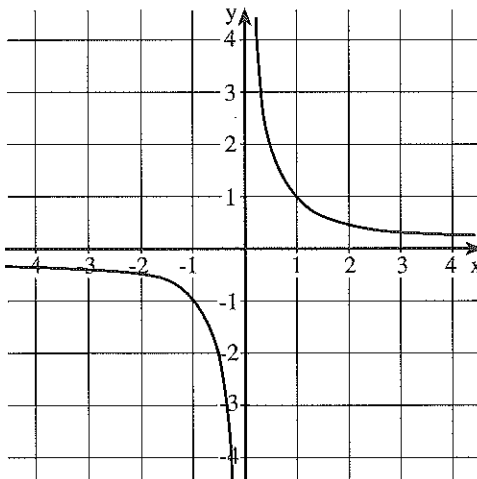
יש משיק נוסף בעל אותו

שיפוע, שרטטו אותו.

- רשמו את שיעורי נקודת ההשקה.

- רשמו את משוואת המשיק.

(ג) מה תוכלו לומר על שני המשיקים.



2. (א) שרטטו משיק לגרף

הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$

בנקודה $(-2, -\frac{1}{2})$.

רשמו, בקירוב, את שיפועו.

(ב) מצאו, בעזרת הפונקציה

הנגזרת, את שיפוע

המשיק בנקודה בה

$$x = -2$$

השוו עם התוצאה

בסעיף א'.



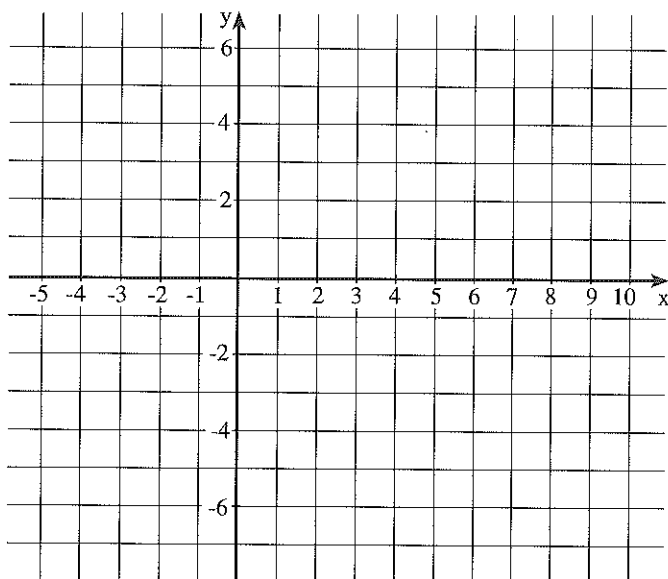
3. לכל סעיף רשמו משוואת ישר, ששיפועו נתון ועובר דרך נקודה נתונה. שרטטו לבדיקה.

(א) השיפוע 2, הנקודה: $(0, 3)$.

(ב) השיפוע -2 , הנקודה: $(1, -2)$.

(ג) השיפוע $-\frac{1}{2}$, הנקודה: $(4, 3)$.

(ד) השיפוע 3, הנקודה: $(2, 2)$.



4. (א) חשבו את שיפוע

המשיק לפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

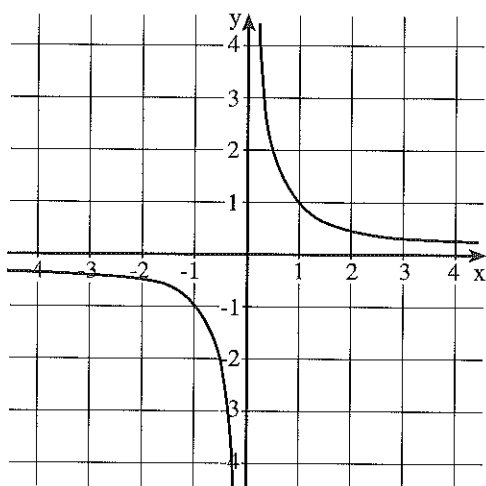
בה $x = 2$.

(ב) רשמו את משוואת

המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה $A(2, \frac{1}{2})$.

– שרטטו את המשיק.

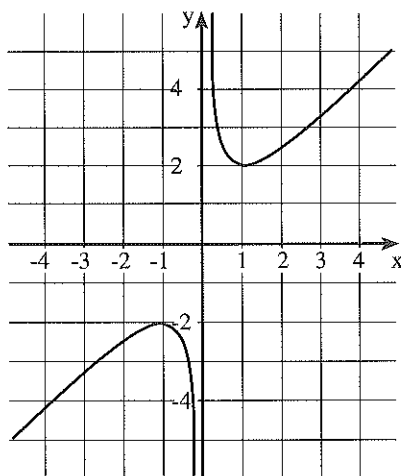


ג) שרטטו, באותה מערכת צירים, את גרף הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x} + 2$.

ד) חשבו את $g'(2)$, רשמו את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה $(2, 2\frac{1}{2})$, ושרטטו את המשיק.

ה) מה תוכלו לומר על שני המשיקים המשורטטים?

5. משורטט גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + x$.

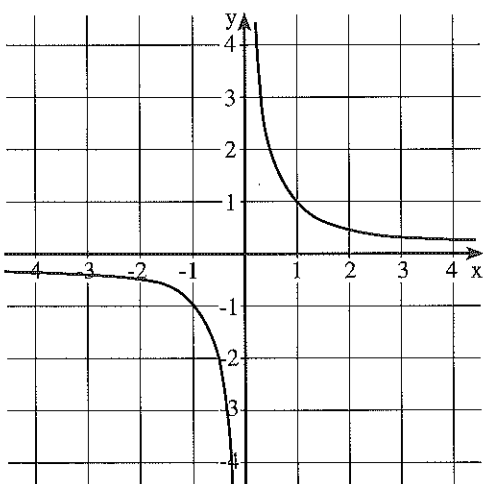


א) השלימו את שיעורי הנקודה $A(2, \quad)$ הנמצאת על גרף הפונקציה.

ב) חשבו את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה A.

ג) רשמו את משוואת המשיק בנקודה, ושרטטו את המשיק.

ד) השלימו את שיעורי הנקודה $B(-1, \quad)$, מצאו את משוואת המשיק בנקודה B ושרטטו את המשיק.



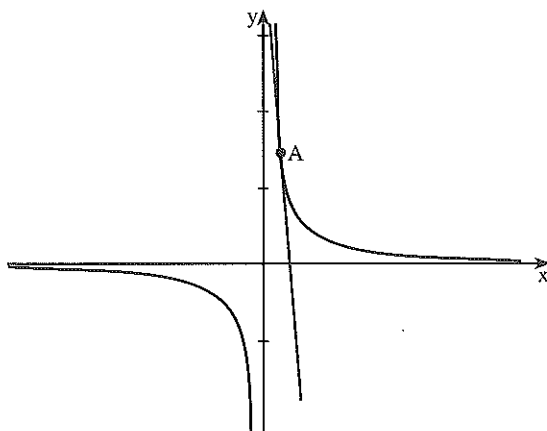
6. נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{x}$.



א) שרטטו שני משיקים לגרף הפונקציה ששיפועם $-\frac{1}{4}$.

ב) רשמו את נקודות ההשקה, על-ידי הצבה בנגזרת ובפונקציה.

ג) משורטטים סקיצה של $f(x) = \frac{1}{x}$, ומשיק בנקודה A ששיפועו -4.



(i) מצאו שיעור x של הנקודה A.

(ii) האם יש עוד משיק ששיפועו -4? אם כן, רשמו את נקודת ההשקה.

7. נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{x}$. עי"ע

א) מצאו את הנקודות, בהן שיפוע הפונקציה הוא -9.

ב) מצאו את הנקודות, בהן שיפוע הפונקציה הוא $-\frac{1}{9}$.

ג) מצאו את הנקודות, בהן שיפוע הפונקציה הוא $-\frac{1}{5}$.

ד) הסבירו, מדוע לא ייתכן משיק ששיפועו 2.

8. מצאו את משוואת המשיק, לכל אחת מהפונקציות הבאות, בנקודה הרשומה.

$$y = \frac{1}{x} - 3 \quad (\alpha) \quad (-1, -4)$$

$$y = \frac{1}{x} + 5 \quad (\beta) \quad \left(\frac{1}{3}, 8\right)$$

$$y = \frac{2}{x} + 3x \quad (\gamma) \quad \left(4, 12\frac{1}{2}\right)$$

$$y = \frac{x+4}{x} \quad (\delta) \quad (4, 2)$$

$$y = \frac{x^2 - 4x - 1}{x} \quad (\epsilon) \quad (1, -4)$$

9. מצאו משוואת משיק לפונקציה: $y = \frac{4}{x} - 4x$ בנקודה בה $x = 1$.

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x}$.

(א) מצאו נקודות בהן שיפוע הפונקציה הוא -18 (יש שתי נקודות).

(ב) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה, לכל אחת מהנקודות שמצאתם בסעיף א'.

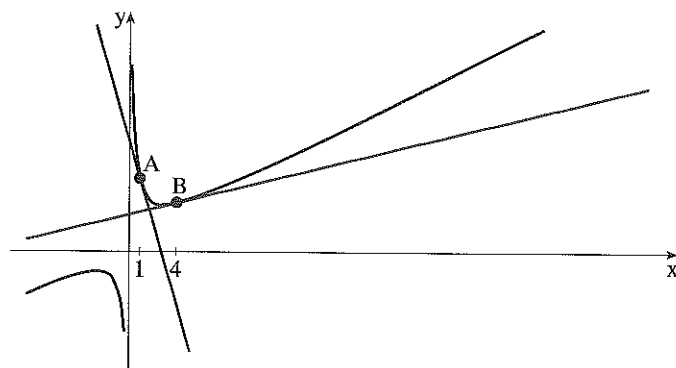
11. נתונה הפונקציה: $y = 2x + \frac{1}{x}$.

(א) מצאו נקודות בהן שיפוע הפונקציה הוא -2 .

(ב) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה, לכל אחת מהנקודות שמצאתם בסעיף א'.

12. נתונה הפונקציה $y = -\frac{3}{x} - 16x^3$ מצאו שיעורי x , של הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת.

13. משורטטים גרף הפונקציה: $y = \frac{1}{2}x + \frac{4}{x} + 1$ ושני משיקים בנקודות A ו-B.



א) מצאו את משוואות המשיקים בנקודות A ו-B.

ב) מצאו את נקודת החיתוך של שני המשיקים.

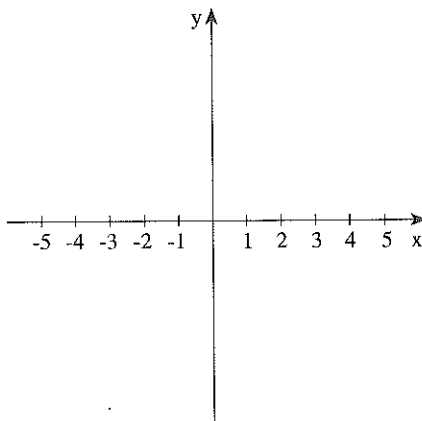
חקירה של פונקציות מנה נוספות (רשות)

1. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2}{x-1}$.

(א) עבור איזה ערך של x הפונקציה לא מוגדרת? סמנו "מחיצה" בישר מקווקו. רשמו את תחום ההגדרה.

(ב) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, סמנו במערכת הצירים.

(ג) נגזרת הפונקציה היא $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.



מצאו נקודות חשודות וסמנו.
השלימו את שיעורי הנקודות
הבאות.
סמנו, וקבעו מאיזה סוג הנקודות
החשודות.

(-1,) (0.5,)
(1.5,) (3,)

(ד) — חשבו שיעורי נקודות בסביבת נקודת אי-ההגדרה, רשמו בטבלה.

x	0.9	0.99	1	1.01	1.1
y			לא מוגדרת		

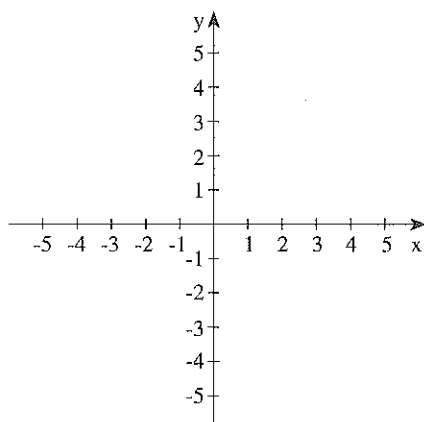
— תארו את התנהגות הפונקציה ליד נקודת אי-ההגדרה.
— מהי משוואת האסימפטוטה?

(ה) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

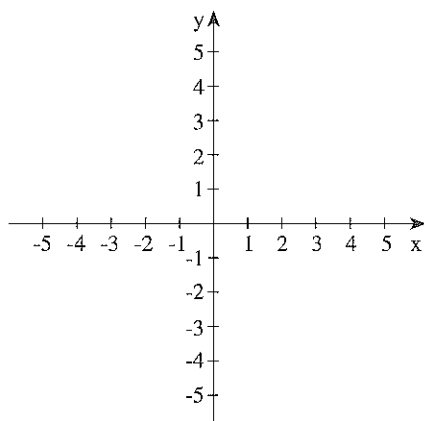


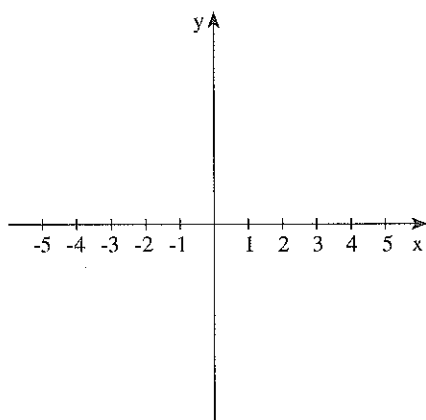
2. שרטטו סקיצה, לכל סעיף, על-פי התכונות הרשומות.

א) $x = -1$ היא אסימפטוטה של גרף הפונקציה (שרטטו ישר מקווקו).
הנקודה $(0, 3)$ היא נקודת **מינימום**. הנקודה $(-2, -1)$ נקודת
מקסימום.



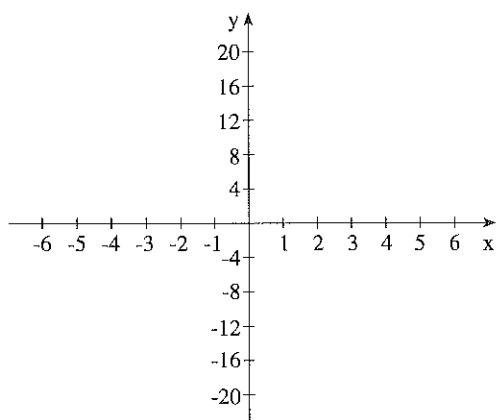
ב) $x = -1$ היא אסימפטוטה של גרף הפונקציה. (שרטטו ישר מקווקו).
הנקודות $(0, 3)$ ו- $(-2, -1)$ הן נקודות **מינימום**.





3. לפונקציה $y = \frac{x^2}{x+1}$

יש אסימפטוטה ב- $x = -1$.
 שרטטו ישר מקווקו. הנקודות
 $(0, 0)$ ו- $(-2, -4)$ הן
 נקודות חשודות, סמנו אותן.
 מצאו נקודות משני צידי כל
 נקודה חשודה, סמנו במערכת
 הצירים, וקבעו מאיזה סוג
 הנקודות החשודות.



4. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$

(א) מהו תחום ההגדרה של
 הפונקציה?
 (סמנו "מחיצה" בישר
 מקווקו).

(ב) נגזרת הפונקציה היא:

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2}$$

מצאו נקודות חשודות וסמנו אותן במערכת הצירים.
 חשבו נקודות משני צידי כל נקודה חשודה, סמנו במערכת הצירים,
 וקבעו מאיזה סוג הנקודות החשודות.
 (ג) בחרו ערכי x קרובים משני הצדדים של נקודת אי-ההגדרה, חשבו את
 ערכי הפונקציה, רשמו בטבלה.

x					
$f(x)$			לא מוגדרת		

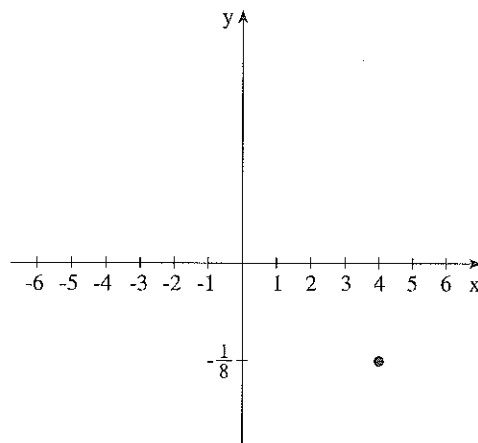
מהי משוואת האסימפטוטה?
 (ד) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

גרפים

5. נתונה הפונקציה $y = \frac{2-x}{x^2}$.

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) מצאו נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x , וסמנו במערכת הצירים.



(ג) הנקודה "החשודה" $(4, -\frac{1}{8})$ מסומנת במערכת הצירים. השלימו את הטבלה, וסמנו, בקירוב, את הנקודות במערכת הצירים.

x	-4	-2	-1	-0.5		0.5	2	4	5
y					לא מוגדרת				

(ד) השלימו את הסקיצה, וקבעו מאיזה סוג הנקודה החשודה.

(ה) רשמו את משוואות האסימפטוטות.

6. א) קבעו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא קווית, ריבועית, או בעלת אסימפטוטות.

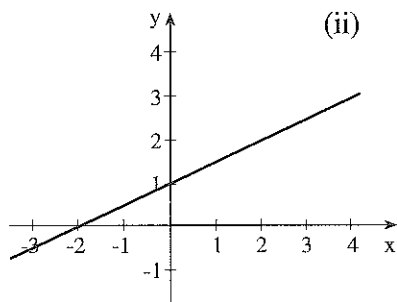
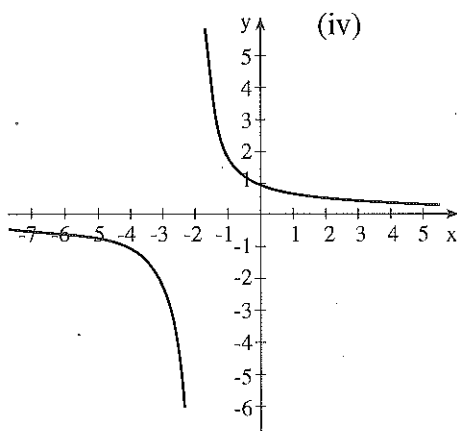
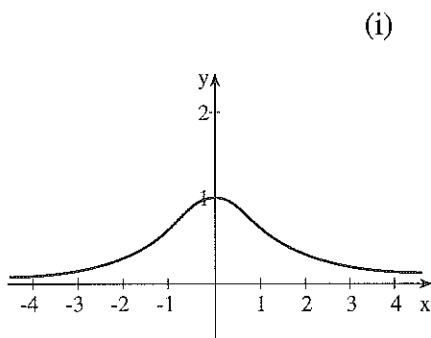
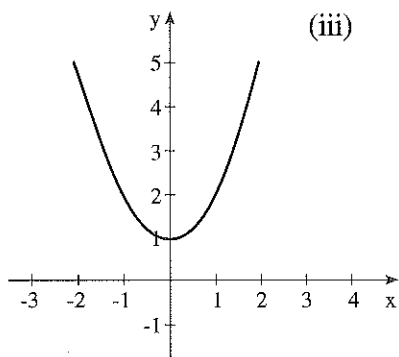
$$h(x) = \frac{x+2}{2}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2}{2}$$

$$m(x) = \frac{2}{x+2}$$

$$g(x) = \frac{2}{x^2 + 2}$$

ב) לכל אחד מהחוקים מתאים אחד מהגרפים. התאימו חוק לגרף.



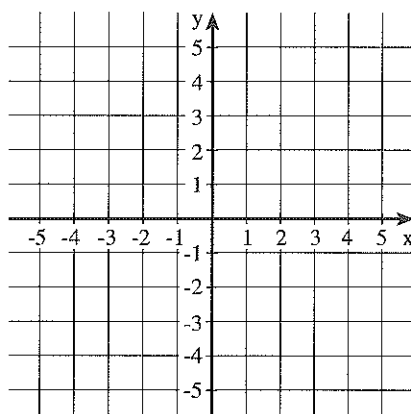
גרף עם חור וצמצום שברים (רשות)

1. נתונה פונקציה $y = \frac{x^2 + 2x}{x}$.

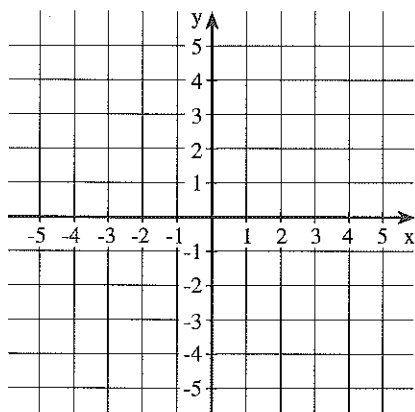


- (א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 (ב) השלימו את שיעורי הנקודות הנמצאות בסביבה של $x = 0$.
 (0.1,), (0.01,), (-0.01,), (-0.1,).
 - תארו מה קורה לערכי הפונקציה, אם מציבים ערכי x קרובים יותר ויותר לאפס.
 (ג) השלימו את הטבלה וסמנו את הנקודות במערכת הצירים.

x	-3	-2	-1	-0.5		0.5	1	2	3
y					לא מוגדרת				



- נסו להשלים סקיצה של גרף הפונקציה. מהי צורת הגרף, לדעתכם?
 (ד) נרשום את חוק הפונקציה אחרת, נוציא x כגורם משותף במונה
 $y = \frac{x(x+2)}{x}$. צמצמו ורשמו את החוק שהתקבל.
 הגרף המתאים לפונקציה שהתקבלה הוא קו ישר.
 הניחו במערכת הצירים ישר מתאים.
 למעשה, גרף הפונקציה המקורית זהה לגרף הפונקציה שהתקבלה בכל נקודה, פרט לנקודת אי-ההגדרה.
 כלומר, גרף הפונקציה הוא "ישר עם חור". מהם לדעתכם "שיעורי החור"? סמנו במערכת הצירים את ה"חור" בעיגול ריק.



2. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$.

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) הוציאו גורם משותף, צמצמו, רשמו את חוק הפונקציה שהתקבלה ושרטטו.

(ג) במה שונה גרף הפונקציה "המצומצמת" מגרף הפונקציה המקורית? הציבו ובדקו.

בפונקציה המקורית

בפונקציה ה"מצומצמת"

(3,)

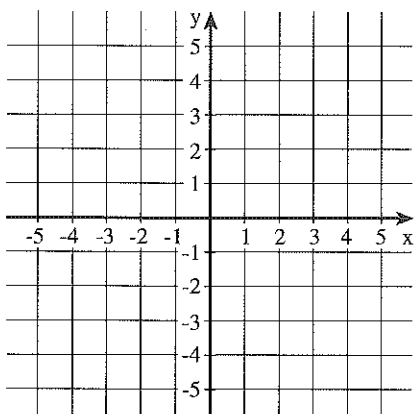
(3,)

(1.1,)

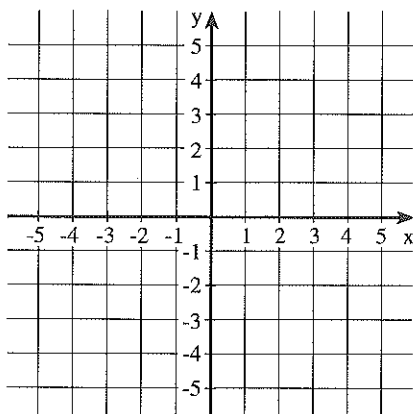
(1.1,)

(1, אין)

(1,)



(ד) שרטטו את גרף הפונקציה המקורית.

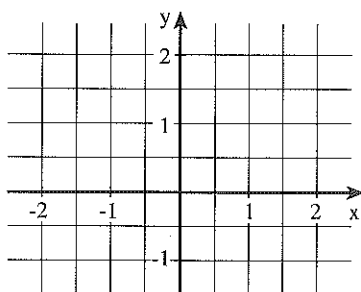


3. נתונה הפונקציה $y = \frac{-2x^2 + x}{x}$ ע"ע

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) הוציאו גורם משותף, צמצמו, רשמו את חוק הפונקציה שהתקבלה, ושרטטו גרף שלה.

(ג) במה שונה גרף הפונקציה שהתקבלה מגרף הפונקציה הנתונה? תכנו את הגרף כך שיתאים לפונקציה הנתונה.



4. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^3 + x^2}{x}$ ע"ע

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) הוציאו גורם משותף וצמצמו.

(ג) מצאו את נגזרת הפונקציה "המצומצמת", מצאו נקודה חשודה וסמנו במערכת הצירים. חשבו ערכי נקודות משני צידי הנקודה החשודה וסמנו. מאיזה סוג הנקודה החשודה?

(ד) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה "המצומצמת".

(ה) מהו ערך הפונקציה "המצומצמת" בנקודת אי-ההגדרה הנ"ל (0,)? סמנו בעיגול ריק ותכנו, כך שיתקבל גרף של הפונקציה המקורית.

גרז'לים

5. (i) רשמו ליד כל פונקציה את תחום ההגדרה שלה וצמצמו.

$$\text{דוגמה: } x \neq 0, \quad y = \frac{5x^2}{2x} = \frac{5x}{2}$$

$$y = \frac{x+5}{(x+5)^2} \quad (\text{ד})$$

$$y = \frac{10x^3}{2x^2} \quad (\text{א})$$

$$y = \frac{x+3}{x+3} \quad (\text{ה})$$

$$y = \frac{-(x+7)}{x+7} \quad (\text{ב})$$

$$y = \frac{x^2(x+2)}{x^2} \quad (\text{ו})$$

$$y = \frac{5x(x-2)}{x-2} \quad (\text{ג})$$

(ii) הגרף המתאים לחמש מהפונקציות בסעיף i הוא ישר "עם חור". ציינו אותו.

6. הוציאו גורם משותף.

$$\text{דוגמה: } x^3 + x^2 = x^2(x+1)$$

$$x + x^3 + x^2 = \quad (\text{ה})$$

$$3x^3 - 6x^2 = \quad (\text{א})$$

$$-x^3 + x^2 + x = \quad (\text{ו})$$

$$3x^2 - 2x = \quad (\text{ב})$$

$$5x^2 - 15x^3 = \quad (\text{ז})$$

$$5 + 5x = \quad (\text{ג})$$

$$7x + 10x^2 = \quad (\text{ח})$$

$$-x^2 + x = \quad (\text{ד})$$

7. רשמו את תחום ההגדרה של כל פונקציה, פשטו וצמצמו (אם אפשר).

$$x \neq 1, \quad y = \frac{3x-3}{2x-2} = \frac{3(x-1)}{2(x-1)} = \frac{3}{2} \quad \text{דוגמה:}$$

$$y = \frac{2x+x^2}{4x+2} \quad (\text{ד})$$

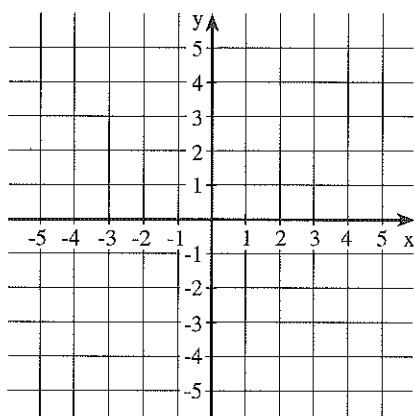
$$y = \frac{5x-5}{2x-2} \quad (\text{א})$$

$$y = \frac{3x^2+6x}{2x+4} \quad (\text{ה})$$

$$y = \frac{11x^2+11x}{x+1} \quad (\text{ב})$$

$$y = \frac{5x^3-10x^2}{3x-6} \quad (\text{ו})$$

$$y = \frac{x^2+3x}{2x+6} \quad (\text{ג})$$



$$y = \frac{3x^2+2x}{x} \quad 8. \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) הוציאו גורם משותף, צמצמו, רשמו את חוק הפונקציה שהתקבלה, ושרטטו גרף שלה.

(ג) במה שונה גרף הפונקציה המצומצמת מגרף הפונקציה המקורית. **תקנו** את הגרף כך שיתאים לפונקציה המקורית.

בפונקציה ה"מצומצמת"

(ד) הציבו: בפונקציה המקורית

(1,)

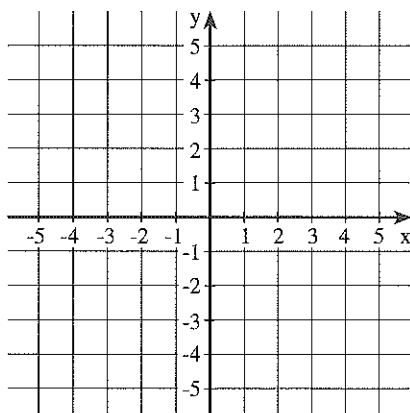
(1,)

9. נתונה הפונקציה $y = \frac{3x^2 - 3x}{x - 1}$

(א) עבור איזה ערך של x הפונקציה לא מוגדרת?

(ב) צמצמו את חוק הפונקציה.

רשמו את ערך הפונקציה "המצומצמת" בנקודת אי-ההגדרה $(1, \quad)$,
ושרטטו את גרף הפונקציה "המצומצמת".



(ג) במה שונה, גרף הפונקציה המצומצמת מגרף הפונקציה המקורית. תקנו את הגרף כך שיתאים לפונקציה המקורית.

10. (א) רשמו את תחום ההגדרה של כל פונקציה.
פשוטו וצמצמו (אם אפשר).

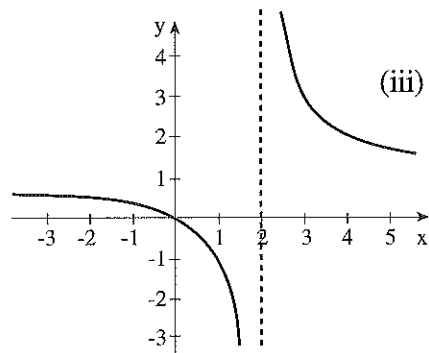
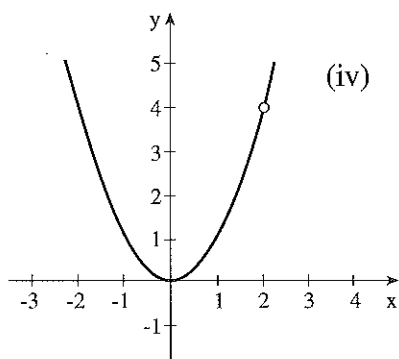
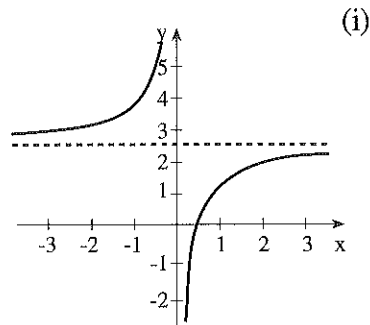
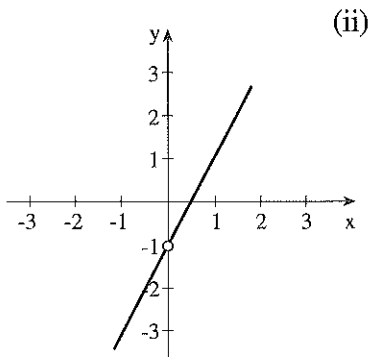
$$h(x) = \frac{2x-1}{x}$$

$$f(x) = \frac{2x^2-x}{x}$$

$$m(x) = \frac{x}{x-2}$$

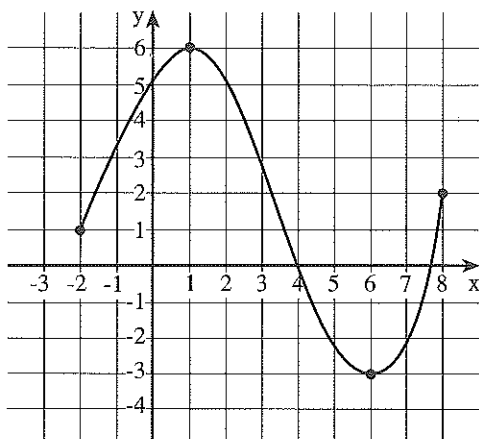
$$g(x) = \frac{x^3-2x^2}{x-2}$$

(ב) התאימו חוק לגרף.



פרק ב: הפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$

פונקציה המוגדרת בקטע סגור



1. משורטט גרף של הפונקציה f המוגדרת בתחום שהוא קטע סגור מ- $x = -2$ עד $x = 8$ ($-2 \leq x \leq 8$).

(א) רשמו תחומים שבהם הפונקציה עולה.

(ב) רשמו תחום שבו הפונקציה יורדת.

עד כה לא עסקנו בתחום שהוא קטע סגור, ולכן לא היו לגרף נקודות קצה.

עסקנו רק בנקודות קיצון, בהן דובר על מעבר מירידה לעלייה $\vee$ או מעלייה לירידה $\wedge$.

בתחום שהוא קטע סגור, נקודות הקצה הן נקודות קיצון, כי הן ה"גבוהות" ביותר או ה"נמוכות" ביותר בסביבתן. למשל, הנקודה $(-2, 1)$ היא נקודת מינימום, כי אין בסביבתה נקודות נמוכות יותר. לכן בגרף המשורטט ארבע נקודות קיצון.

(ג) רשמו את כל נקודות הקיצון הנוספות ומאיזה סוג הן (מינימום או מקסימום).



2. בכל סעיף שרטטו גרף לפי התכונות הרשומות.

(א) הפונקציה g מוגדרת בקטע הסגור $-6 \leq x \leq 4$ (מ- $x = -6$ עד $x = 4$) ולה שתי נקודות מינימום ושתי נקודות מקסימום.

(ב) הפונקציה f מוגדרת בקטע הסגור $-2 \leq x \leq 5$ (מ- $x = -2$ עד $x = 5$) ושתי נקודות הקצה שלה הן נקודות מינימום.

כשיש יותר מנקודת קיצון אחת מאותו סוג אפשר לשאול מי נקודת המינימום "הנמוכה" ביותר, או מי נקודת המקסימום "הגבוהה" ביותר. (כמובן לא תמיד קיימת פונקציה כזו).



3. (א) שרטטו גרף של הפונקציה h לפי התכונות הרשומות.

– h מוגדרת בקטע הסגור $-2 \leq x \leq 7$ (מ- $x = -2$ עד $x = 7$).
– נקודות הקיצון היחידות הן:

$(1, -2)$, $(7, 1)$ נקודות מינימום.

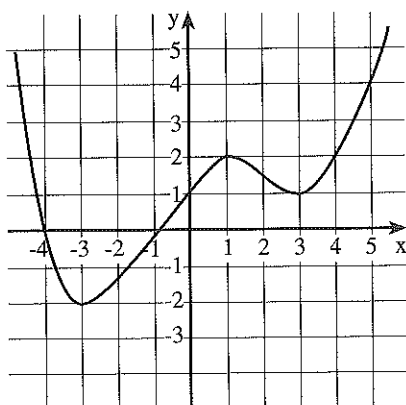
$(-2, 6)$, $(4, 4)$ נקודות מקסימום.

(ב) איזו מנקודות המינימום של הפונקציה h היא ה"נמוכה ביותר"?

נקודת המינימום ה"נמוכה" ביותר נקראת **מינימום מוחלט**.

נקודת המקסימום ה"גבוהה" ביותר נקראת **מקסימום מוחלט**.

ג) רשמו את שיעורי נקודת המקסימום המוחלט של הפונקציה h .

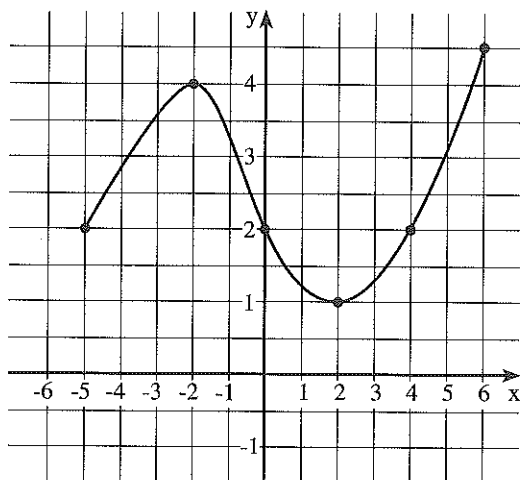


4. משורטט גרף הפונקציה g

המוגדרת **לכל** x .

(א) רשמו את שיעורי כל נקודות הקיצון ואת סוגן.

(ב) רשמו את שיעורי נקודות המינימום המוחלט והמקסימום המוחלט.



5. משורטט גרף של הפונקציה f המוגדרת בקטע הסגור $-5 \leq x \leq 6$.

(א) רשמו את שיעורי נקודות המקסימום המוחלט, ואת שיעורי נקודת המינימום המוחלט.

בגישוי זה נשרטט את גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$.

(ב) נשרטט את הגרף של $\frac{1}{f}$ לפי השלבים הבאים:
(i) קראו מהגרף את שיעורי הנקודות המודגשות, והשלימו את הטבלה כמו בדוגמה.

שימו לב! כל נקודות אלו שייכות ל- x .

$\frac{1}{f}$	f	
$(-5, 0.5)$	$(-5, 2)$	דוגמה:
.	$(-2,)$	
.	.	
.	.	

(ii) סמנו באותה מערכת צירים (בצבע אחר) את הנקודות של $\frac{1}{f}$ שרשמתם בטבלה.
חברו את הנקודות כך שתקבלו קו רציף.



(i) ג רשמו את הנקודה המשותפת ל- f ול- $\frac{1}{f}$.

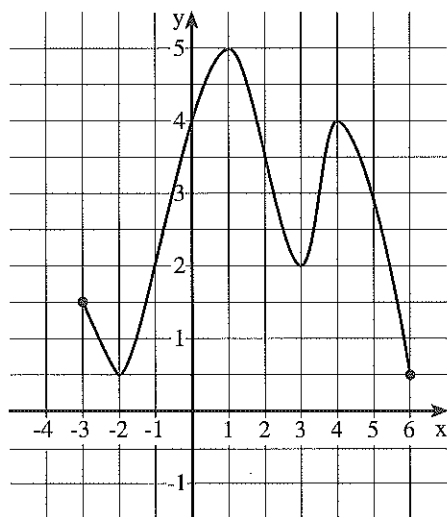
(ii) כל ערכי f חיוביים בתחום בו היא מוגדרת. מה תוכלו לומר על ערכי $\frac{1}{f}$?

(iii) מה קורה ל- $\frac{1}{f}$ כאשר f יורדת?

(iv) רשמו את ארבע נקודות הקיצון של $\frac{1}{f}$ ומאיזה סוג הן, ציינו אם הן מוחלטות.



משורטט גרף הפונקציה f המוגדרת בקטע הסגור $-3 \leq x \leq 6$.



(א) התייחסו לשני הטורים הימניים בטבלה, ורשמו את נקודות הקיצון (כולל קצוות) של f . רשמו את סוגן בטבלה, וקבעו אילו מהן נקודות קיצון מוחלטות.

סוג	$\frac{1}{f}$	f	סוג

(ב) - חשבו ורשמו בטבלה את שיעורי נקודות הקיצון של $\frac{1}{f}$. רשמו בטבלה גם את סוגן.
- סמנו את הנקודות (בצבע אחר) באותה מערכת צירים.

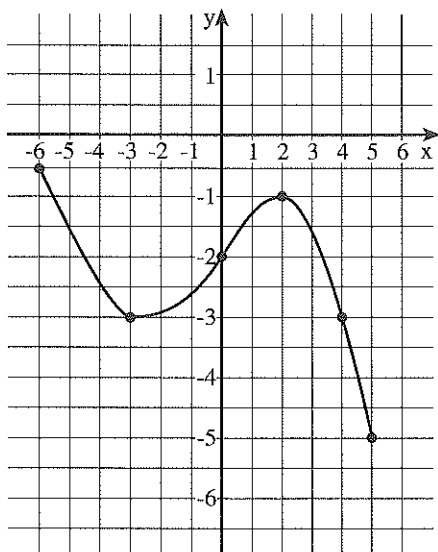
ג) סמנו נקודות נוספות של $\frac{1}{f}$ (היעזרו בנקודות נוספות שעל f) והשלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$.

ד) (i) הדגישו את הנקודות המשותפות לשני הגרפים של הפונקציות, f ו- $\frac{1}{f}$.

(ii) מה המשותף לכל הנקודות האלו?

ה) באילו תחומים f עולה? מה קורה ל- $\frac{1}{f}$ בתחומים אלה?

ו) מה ניתן לומר על f ו- $\frac{1}{f}$ מבחינת חיוביות/שליליות?



משורטט גרף הפונקציה g .

המוגדרת בקטע הסגור

$$-6 \leq x \leq 5.$$

א) – רשמו בטבלה את

נקודות הקיצון (כולל

קצוות) של g .

– רשמו בטבלה מאיזה

סוג כל אחת מנקודות

הקיצון.

רשמו גם אם היא נקודת

מינימום מוחלט או

מקסימום מוחלט.

סוג	$\frac{1}{g}$	g	סוג

(ב) חשבו ורשמו בטבלה את שיעורי נקודות הקיצון של $\frac{1}{g}$, רשמו גם את סוגן.

סמנו את הנקודות (בצבע אחר) באותה מערכת צירים.

(ג) סמנו נקודות נוספות של $\frac{1}{g}$ (היעזרו בנקודות המודגשות שעל g) והשלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{g}$.

(ד) (i) הדגישו את הנקודות המשותפות לפונקציות, g ו- $\frac{1}{g}$.

(ii) רשמו את שיעוריהן.

(iii) מה המשותף לכל הנקודות האלו?

(ה) באילו תחומים g יורדת? מה קורה ל- $\frac{1}{g}$ בתחומים אלה?

(ו) מה ניתן לומר על g ו- $\frac{1}{g}$ מבחינת חיוביות/שליליות?

8. משורטט גרף הפונקציה f המוגדרת בקטע הסגור $-2 \leq x \leq 2$.



(א) הדגישו בגרף נקודות משותפות לגרף

של f ולגרף של $\frac{1}{f}$.

(ב) - רשמו את נקודות הקיצון של f .

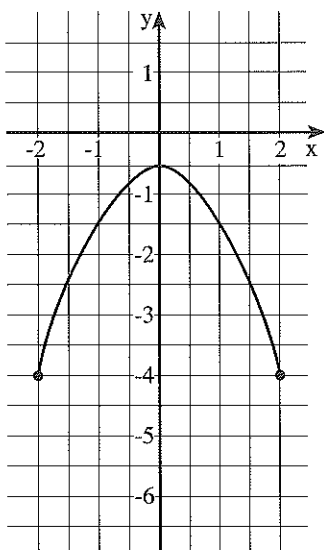
- רשמו את נקודות הקיצון של $\frac{1}{f}$

וסמנו אותן באותה מערכת צירים.

(ג) השלימו את שרטוט גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$.

(ד) מה הם שיעורי נקודת המינימום

המוחלט של $\frac{1}{f}$?

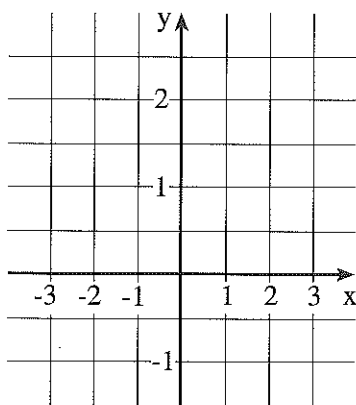


9. פונקציה (רציפה) מוגדרת בקטע סגור שכל ערכיה חיוביים, או כל ערכיה שליליים.

- השלימו סיכום התכונות של $\frac{1}{f}$ בהשוואה לתכונות של f (כפי שראינו עד כה).
- אם עבור ערך מסוים של x יש ל- f נקודת מינימום (שאינה על ציר x) אז עבור אותו ערך של x יש ל- $\frac{1}{f}$ _____
 - אם עבור ערך מסוים של x יש ל- f נקודת מקסימום (שאינה על ציר x) אז עבור אותו ערך של x יש ל- $\frac{1}{f}$ _____
 - תחומי העלייה של f הם תחומי _____ של $\frac{1}{f}$.
 - תחומי הירידה של f הם תחומי _____ של $\frac{1}{f}$.
 - בתחום בו f חיובית, $\frac{1}{f}$ _____
 - בתחום בו f שלילית, $\frac{1}{f}$ _____
 - אם לפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$ יש נקודות משותפות, אז שיעור y שלהן _____

10. (א) שרטטו גרף של פונקציה f המקיימת את התכונות הבאות.

(תוכלו להיעזר במערכת הצירים שלפניכם.)



(i) התחום הוא הקטע מ- $x = -1$

עד $x = 3$.

(ii) כל ערכי הפונקציה חיוביים.

(iii) הפונקציה עולה בתחומים

$-1 < x < 1$, $2 < x < 3$.

(iv) הפונקציה יורדת מ- $x = 1$ עד

$x = 2$.

(v) לפונקציה נקודות קיצון

ב- $x = 1$ וב- $x = 2$.

(ב) רשמו את שיעורי נקודות הקיצון

ואת סוגן. (שימו לב גם לנקודות הקצה.)

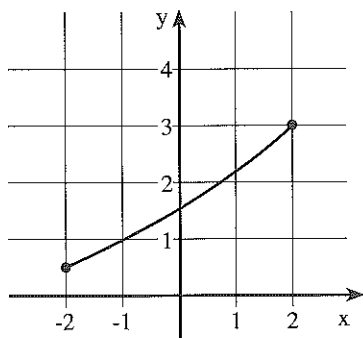
(ג) שרטטו באותה מערכת צירים את הגרף של $\frac{1}{f}$ (לשם כך: חשבו וסמנו

את נקודות הקיצון של $\frac{1}{f}$, הדגישו את הנקודות המשותפות ל- f ול- $\frac{1}{f}$).

(ד) רשמו תחומי עלייה וירידה של $\frac{1}{f}$.



11. משורטט גרף הפונקציה h המוגדרת בקטע הסגור $-2 \leq x \leq 2$
(מ- $x = -2$ עד $x = 2$).



(א) רשמו את שיעורי נקודות הקיצון של h .

(ב) חשבו ורשמו את נקודות הקיצון של $\frac{1}{h}$.

סמנו אותן באותה מערכת צירים.

(ג) רשמו את שיעורי הנקודה

המשותפת של h ושל $\frac{1}{h}$.

(ד) רשמו וסמנו את נקודות החיתוך של h ושל $\frac{1}{h}$ עם ציר y .

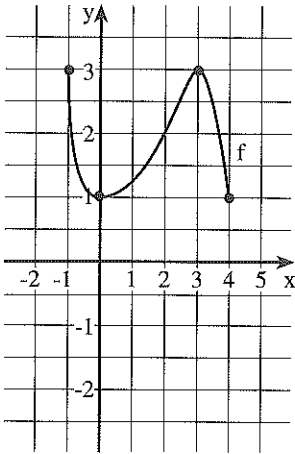
(ה) השלימו את גרף הפונקציה $\frac{1}{h}$.

(ו) רשמו לגבי h ו- $\frac{1}{h}$, אם הן עולות או יורדות בתחום ההגדרה.

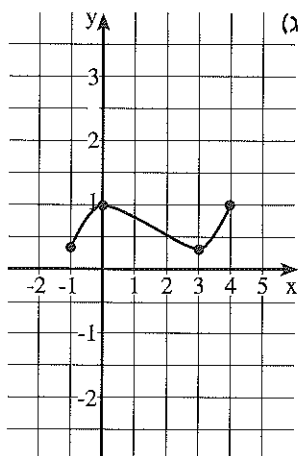
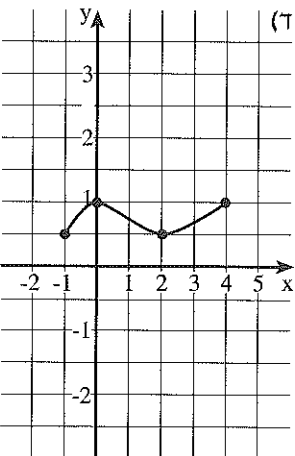
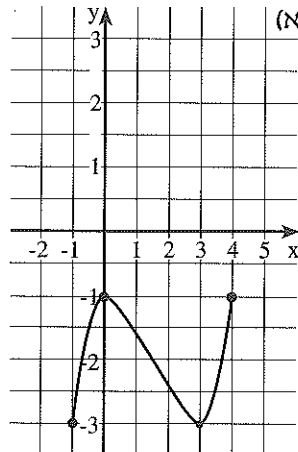
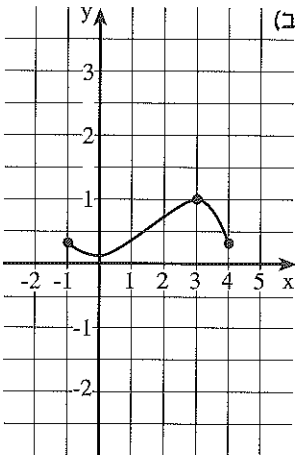
(ז) רשמו לגבי h ו- $\frac{1}{h}$, אם הן חיוביות או שליליות בתחום ההגדרה.



12. הגרף מתאר פונקציה f המוגדרת בקטע הסגור $-1 \leq x \leq 4$.

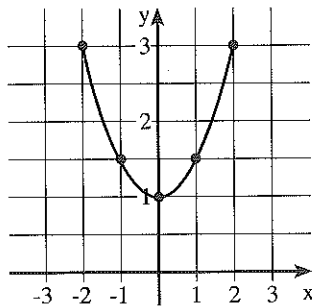


אחד מהגרפים הבאים הוא הגרף של $\frac{1}{f}$, זהו אותו ונמקו.



גרפיקס

13. משורטט גרף הפונקציה f המוגדרת בקטע הסגור $-2 \leq x \leq 2$.



(א) קראו מהגרף ורשמו, בטור של f , את שיעורי הנקודות המודגשות של הפונקציה f .

	$\frac{1}{f}$	f	
דוגמה:	$(-2, \frac{1}{3})$	$(-2, 3)$	מקסימום מוחלט

(ב) רשמו בטור הימני של הטבלה איזו מהנקודות היא נקודת קיצון של f , מאיזה סוג כל נקודת קיצון, ואם היא נקודת מינימום מוחלט או מקסימום מוחלט.

(ג) (i) חשבו ורשמו בטור של $\frac{1}{f}$, נקודות המתאימות לנקודות שרשרתם בטור של f .

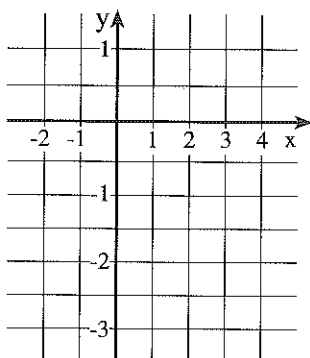
רשמו, בטור השמאלי ביותר, איזו מהנקודות היא נקודת קיצון של $\frac{1}{f}$, מאיזה סוג כל נקודת קיצון, ואם היא נקודת מינימום מוחלט או מקסימום מוחלט.

(ii) סמנו את הנקודות המתאימות ל- $\frac{1}{f}$ באותה מערכת צירים.

(iii) השלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$.

14. א) שרטטו גרף של פונקציה f המקיימת את התכונות הבאות.

(תוכלו להיעזר במערכת הצירים המשורטטת).



- (i) f מוגדרת בקטע הסגור $-2 \leq x \leq 4$.
- (ii) כל ערכי הפונקציה שליליים.
- (iii) כאשר $x = -2$ יש לפונקציה מקסימום מוחלט.
- כאשר $x = 4$ יש לפונקציה מקסימום.
- (iv) הפונקציה יורדת מ- $x = -2$ עד $x = 0$.
- הפונקציה עולה מ- $x = 0$ עד $x = 4$.

ב) רשמו את שיעורי כל אחת מנקודות הקיצון, וקבעו מאיזה סוג כל אחת.

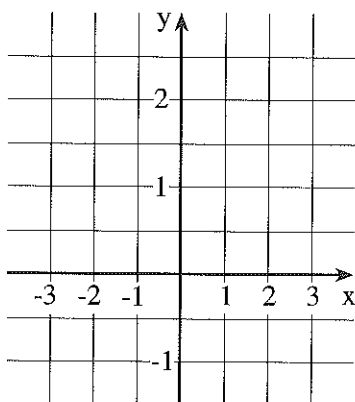
ג) שרטטו באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$ (לשם כך סמנו

תחילה את נקודות הקיצון, והדגישו את הנקודות המשותפות ל- f

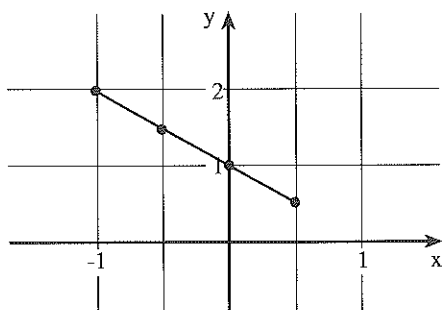
ול- $\frac{1}{f}$).

15. א) שרטטו גרף של פונקציה f המקיימת את התכונות הבאות.

(תוכלו להיעזר במערכת הצירים המשורטטת).



- (i) היא מוגדרת בקטע הסגור $-3 \leq x \leq 2$.
- (ii) יש לה שתי נקודות קיצון בלבד.
- (iii) כל ערכיה חיוביים.
- ב) רשמו את שיעורי כל נקודות הקיצון של f ואת נקודות הקיצון של $\frac{1}{f}$.
- ג) שרטטו באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$.



16. א) משורטטת הפונקציה הקווית g המוגדרת בקטע הסגור $-1 \leq x \leq 0.5$. קראו מהגרף ורשמו את שיעורי הנקודות המודגשות שעל הגרף של g .

ב) חשבו ורשמו גם את שיעורי הנקודות המתאימות של $\frac{1}{g}$,

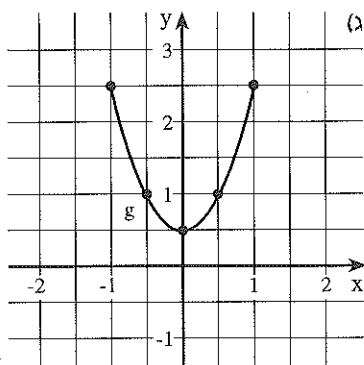
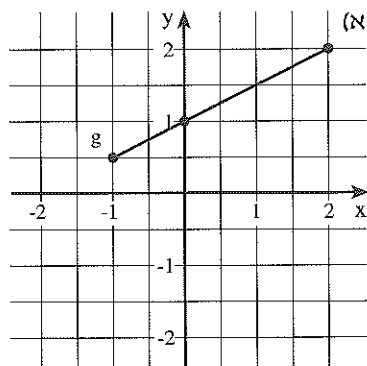
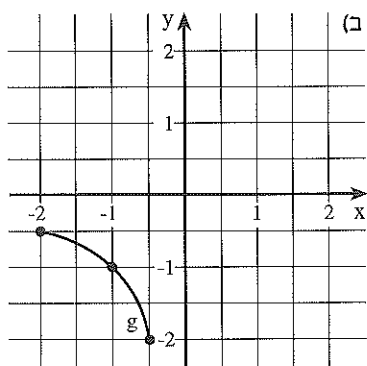
סמנו אותן באותה מערכת צירים.

ג) השלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{g}$.

ד) האם $\frac{1}{g}$ גם היא פונקציה קווית?

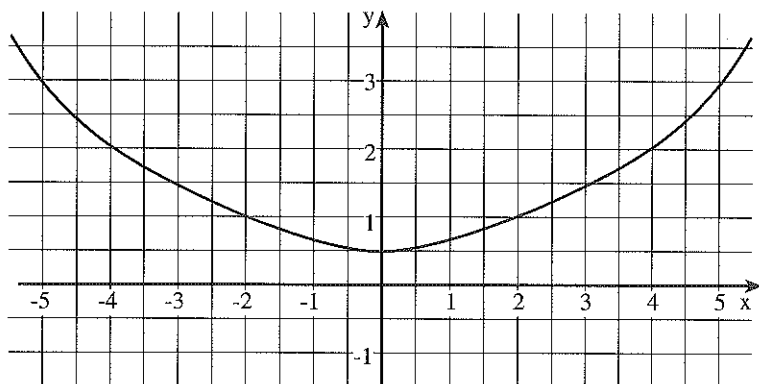
ה) רשמו לגבי g ו- $\frac{1}{g}$, אם הן עולות או יורדות בתחום ההגדרה.

17. משורטט גרף של g . שרטטו, באותה מערכת צירים, סקיצה של $\frac{1}{g}$. (תוכלו להיעזר בנקודות המודגשות).



ומה אם התחום לא סגור?

1. (א) רשמו וסמנו במערכת הצירים, בה משורטט הגרף של הפונקציה f , את נקודת הקיצון של $\frac{1}{f}$.

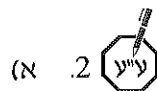


- (ב) הדגישו את הנקודות המשותפות ל- f ול- $\frac{1}{f}$.
- (ג) רשמו וסמנו, באותה מערכת צירים, שתי נקודות נוספות מימין לנקודת הקיצון של $\frac{1}{f}$ (היעזרו בנקודות של f).
- (ד) הנקודות $(4, 6)$, $(6, 4)$, על הגרף של f .
(הנקודות מעבר למערכת הצירים המשורטטת).
רשמו שיעורי נקודות מתאימות של $\frac{1}{f}$.
- (ה) (i) הפונקציה f סימטרית לגבי ציר y .
סמנו משמאל לציר y , נקודות סימטריות לאלו שסימנתם בסעיף ג.
(ii) האם הערכים מתאימים ל- $\frac{1}{f}$?
(iii) נסו להסביר מדוע עבור כל זוג נקודות סימטריות של f גם הנקודות המתאימות של $\frac{1}{f}$ סימטריות.
(ו) השלימו את גרף הפונקציה של $\frac{1}{f}$.

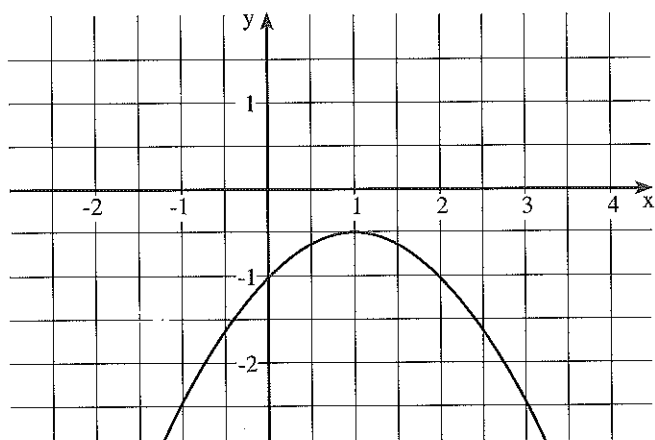
כשהפונקציה f מוגדרת לכל x והיא חיובית, היא מוגדרת עבור ערכי x גדולים מאוד או קטנים מאוד. אם עבור ערכי x אלה מתקבלים ערכי f גדולים מאוד, אז הערכים המתאימים של $\frac{1}{f}$ קטנים מאוד וקרובים ל-0 ולכן ציר x הוא אסימפטוטה.



רשמו וסמנו במערכת הצירים, בה משורטט הגרף של הפונקציה f , את



נקודת הקיצון של $\frac{1}{f}$.



(ב) הדגישו את הנקודות המשותפות לשתי הפונקציות.

(ג) רשמו וסמנו נקודה נוספת מימין ונקודה נוספת משמאל לנקודת הקיצון של $\frac{1}{f}$.

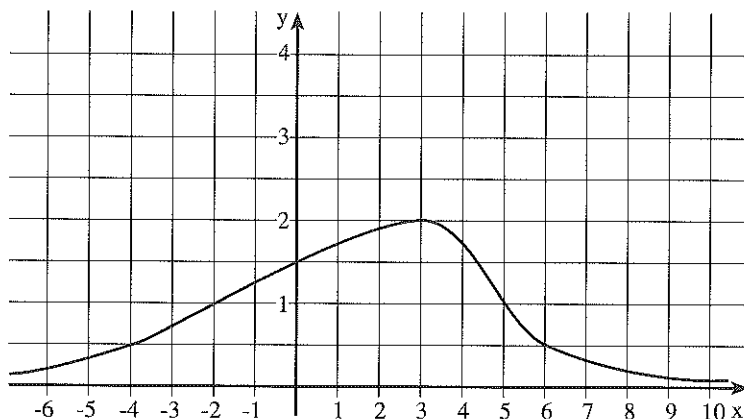
(ד) הנקודות $(4, -5)$ ו $(-2, -5)$ נמצאות על הגרף של f . רשמו שיעורי נקודות מתאימות של $\frac{1}{f}$ וסמנו במערכת הצירים.

(ה) השלימו גרף של $\frac{1}{f}$.

(ו) הסבירו מדוע ציר x הוא אסימפטוטה של $\frac{1}{f}$.

נקודת מה קורה ל- $\frac{1}{f}$ כאשר ציר x הוא אסימפטוטה אנכית של f.

3. משורטט גרף הפונקציה f, כאשר ציר x הוא אסימפטוטה שלה.



א) מה ניתן לומר על הערכים של $\frac{1}{f}$, המתאימים לערכים של f הקרובים לאפס? הסבירו.

ב) רשמו וסמנו, במערכת הצירים בה משורטט הגרף של f, את נקודת הקיצון של $\frac{1}{f}$.

ג) רשמו והדגישו את הנקודות המשותפות לשתי הפונקציות.

ד) בטבלה רשומים שיעורי נקודות הנמצאות על הגרף של f.

רשמו בטבלה את שיעורי הנקודות המתאימות שעל הגרף של $\frac{1}{f}$ וסמנו במערכת הצירים.

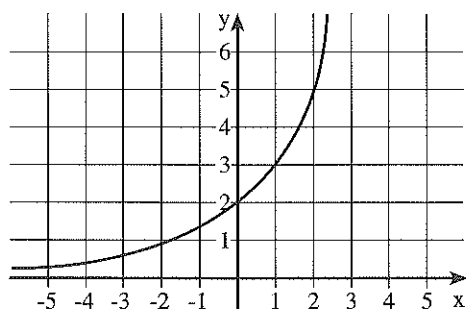
$\frac{1}{f}$	f
	$(-6, \frac{1}{4})$
	$(-3, \frac{3}{4})$
	$(6, \frac{1}{2})$
	$(8, \frac{1}{4})$

ה) השלימו את גרף הפונקציה של $\frac{1}{f}$.

ו) תארו במילים מה קורה לערכי הפונקציה $\frac{1}{f}$ כאשר ערכי x גדולים או קטנים מאוד.

ז) רשמו תחומי עליה וירידה של $\frac{1}{f}$.

4.  ציר x הוא אסימפטוטה של הפונקציה f המשורטטת.



א) הנקודות $(5, 12)$ ו- $(-5, 0.2)$
 על הגרף של f . השלימו
 שיעורי נקודות מתאימות
 של $\frac{1}{f}$.
 סמנו אותן באותה
 מערכת צירים.

ב) רשמו וסמנו את שיעורי נקודת החיתוך של $\frac{1}{f}$ עם ציר y .

ג) הדגישו את הנקודה המשותפת לשתי הפונקציות.

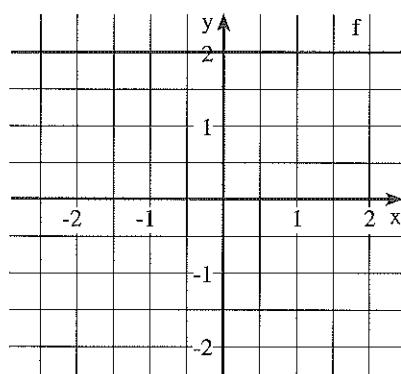
ד) השלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$.

ה) האם ל $\frac{1}{f}$ יש אסימפטוטה? אם כן, רשמו את משוואתה.

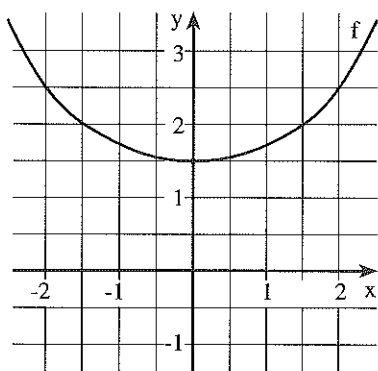


5. שרטטו גרף של $\frac{1}{f}$ באותה מערכת צירים, שבה משורטט הגרף של f .

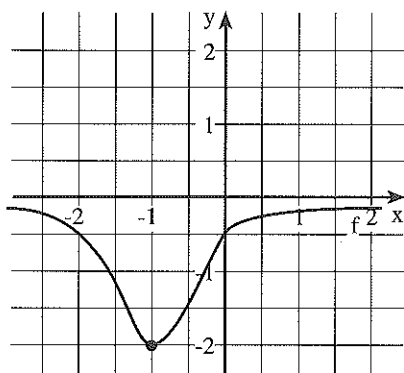
(א)



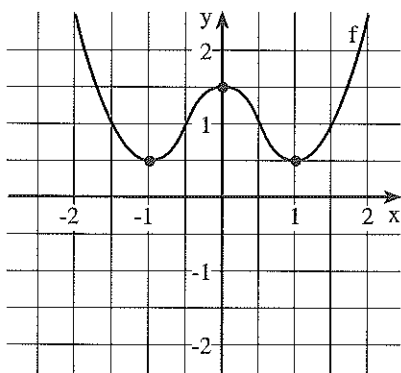
(ב)



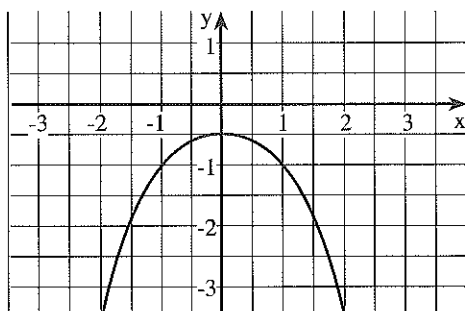
(ג)



(ד)



גרזילים



6. (א) רשמו וסמנו במערכת

הצירים בה משורטט

הגרף של f , את נקודת

הקיצון של $\frac{1}{f}$.

(ב) הדגישו את הנקודות

המשותפות ל- f ול- $\frac{1}{f}$.

(ג) הנקודות $(2, -6)$, $(3, -10)$ על הגרף של f .

רשמו וסמנו, בקירוב, באותה מערכת צירים נקודות מתאימות

לפונקציה $\frac{1}{f}$.

(ד) הפונקציה f סימטרית לגבי ציר y , סמנו נקודות סימטריות (של $\frac{1}{f}$)

לאילו שסימנתם בסעיף ג'. האם הערכים מתאימים ל- $\frac{1}{f}$?

(ה) השלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$.

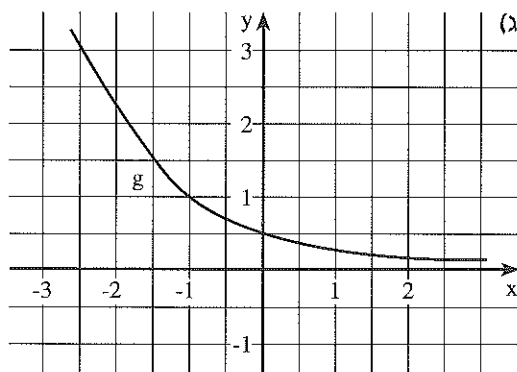
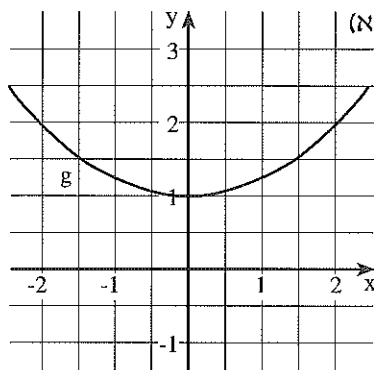
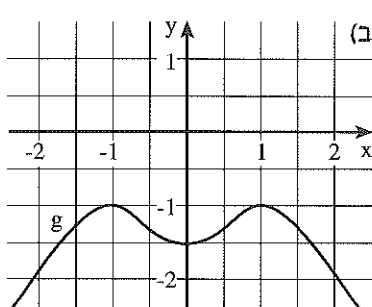
(ו) הנקודה $(-5, -30)$ על הגרף של f .

(i) השלימו את שיעורי הנקודה המתאימה על הגרף של $\frac{1}{f}$.

(ii) האם ל- $\frac{1}{f}$ נקודת חיתוך עם ציר x ? אם כן, רשמו את שיעוריה.

(iii) האם ל- $\frac{1}{f}$ יש אסימפטוטה? אם כן, רשמו את משוואתה.

7. בכל מערכת צירים משורטט גרף של פונקציה g .



לגבי כל פונקציה:

- (א) רשמו אם יש לפונקציה g נקודות קיצון. אם כן, רשמו את סוגן ומי מהן מינימום מוחלט או מקסימום מוחלט.
- (ב) שרטטו סקיצה של $\frac{1}{g}$ באותה מערכת צירים בה משורטט הגרף של g .
- (ג) רשמו לגבי כל פונקציה ששרטטתם $(\frac{1}{g})$, אם יש לה נקודות מינימום או מקסימום מוחלטים, אם כן מאיזה סוג הן.
- (ד) רשמו את משוואת האסימפטוטה, אם יש.

8. (א) שרטטו גרף של פונקציה f לפי התכונות הבאות:

- (i) f מוגדרת לכל x .
- (ii) גרף הפונקציה עובר דרך הנקודות $(-2, 0.5)$, $(2, 0.5)$.
- (iii) ערכי הפונקציה חיוביים.
- (iv) ציר x הוא אסימפטוטה.
- (v) לפונקציה נקודת קיצון יחידה ב- $x = -1$.
- (vi) היא עולה עבור $x < -1$.
- (vii) היא יורדת עבור $x > -1$.

(ב) רשמו תכונות של הפונקציה $\frac{1}{f}$ המתייחסות לתכונות הרשומות בסעיפים (i) עד (vii).

(ג) רשמו וסמנו, באותה מערכת צירים, את הנקודות של $\frac{1}{f}$ המתאימות לאלו שסימנתם בסעיף (א i).
הדגישו את הנקודות המשותפות ל- f ו- $\frac{1}{f}$.
השלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$ על-פי התכונות שרשמתם.

ומה אם הגרף חותך את ציר ה- x ?

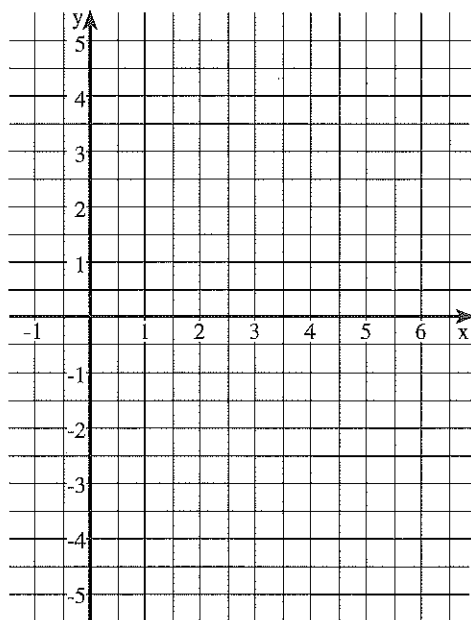
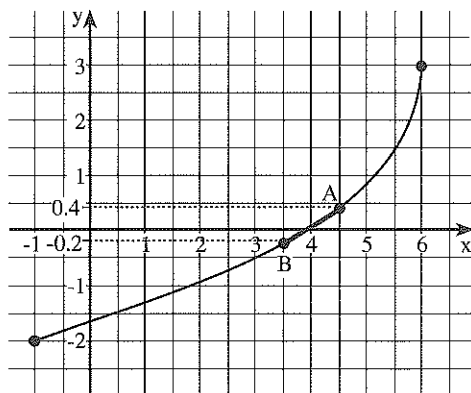
עד כה עסקנו בגרף שכולו מעל ציר x , או כולו מתחת לציר x .
 בסעיף זה נבדוק מה קורה לגרף של $\frac{1}{f}$ כאשר לגרף של f יש נקודות
 חיתוך עם ציר x .
 בסעיף זה נשרטט את $\frac{1}{f}$ במערכת צירים נפרדת.



1.  משורטט (בעמוד משמאל) גרף הפונקציה f המוגדרת בקטע הסגור $-1 \leq x \leq 6$.
- (א) רשמו את נקודות הקצה של f ושל $\frac{1}{f}$. סמנו את נקודות הקצה של $\frac{1}{f}$ במערכת הצירים הריקה בעמוד משמאל.
- (ב) (i) רשמו את שיעורי נקודת החיתוך של f עם ציר x .
 (ii) מה קורה ל- $\frac{1}{f}$ בנקודה המתאימה לנקודה שרשמתם?
- (ג) - רשמו בטבלה שיעורי נקודות של f ושל $\frac{1}{f}$ המתאימות לנקודות
 A ו- B .
- סמנו אותן, בקירוב, במערכת הצירים בעמוד משמאל למטה.

- בטבלה רשומות עוד 3 נקודות בסביבה של נקודת החיתוך עם ציר x .
 השלימו נקודות מתאימות של $\frac{1}{f}$ וסמנו (אם אפשר) במערכת
 הצירים בעמוד משמאל למטה.

$\frac{1}{f}$	f
	:B
	(3.8, -0.1)
	(4.1, 0.1)
	(4.2, 0.2)
	:A



- מה קורה ל- $\frac{1}{f}$ "קצת לפני" (משמאל) נקודת החיתוך של f עם ציר x ?
- מה קורה ל- $\frac{1}{f}$ "קצת אחרי" (מימין) נקודת החיתוך של f עם ציר x ?
- שרטטו אסימפטוטה מתאימה.

(ד) השלימו את הגרף של $\frac{1}{f}$ מימין ומשמאל לאסימפטוטה.

ראינו כי $\frac{1}{f}$ אינה מוגדרת בנקודה הייחודית של f עם ציר x , עבור ערך x זה יש לפונקציה $\frac{1}{f}$ אסימפטוטה מקבילה לציר y .



2. משורטט (בעמוד משמאל) גרף של הפונקציה g המוגדרת בקטע הסגור $-2 \leq x \leq 4$.

(א) (i) רשמו את נקודת החיתוך של g עם ציר x .

(ii) מה קורה ל- $\frac{1}{g}$ בנקודה המתאימה?

(iii) שרטטו במערכת הצירים הריקה בעמוד משמאל, אסימפטוטה מתאימה, המקבילה לציר y . רשמו את משוואתה.

(ב) בטבלה רשומים שיעורי נקודות על הגרף של g . רשמו בטבלה את

הנקודות המתאימות של $\frac{1}{g}$ וסמנו במערכת הצירים בעמוד משמאל למטה.

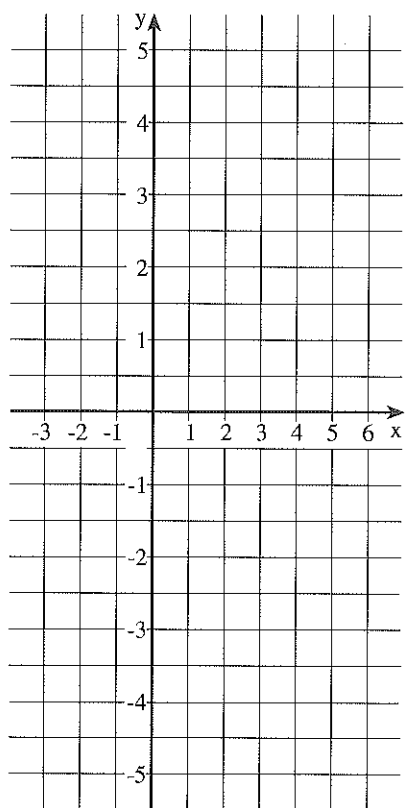
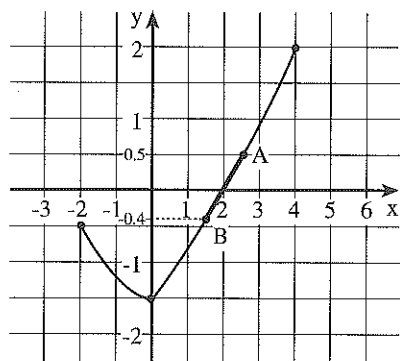
$\frac{1}{g}$	g
	:B
	(1.8, -0.25)
	(1.9, -0.2)
	(2.1, 0.2)
	(2.2, 0.4)
	:A

(ג) רשמו את נקודות הקיצון של g (כולל קצות התחום).

חשבו את נקודות הקיצון המתאימות של $\frac{1}{g}$.

רשמו מאיזה סוג הן, סמנו במערכת הצירים בעמוד משמאל למטה.

(ד) השלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{g}$.





3. משורטט (בעמוד משמאל) גרף של הפונקציה f .

(א) עבור איזה ערך של x , הפונקציה $\frac{1}{f}$ אינה מוגדרת? שרטטו קו מפריד במערכת הצירים הריקה, בעמוד משמאל.

(ב) רשמו וסמנו במערכת הצירים, בעמוד משמאל למטה, נקודות המתאימות לנקודות המודגשות.

בתרגיל זה ניעזר בתכונות הפונקציה כדי לשרטט את הגרף מימין ומשמאל לאסימפטוטה המקבילה לציר y .



(ג) האם $\frac{1}{f}$ עולה או יורדת משמאל לקו המפריד?

האם היא חיובית או שלילית משמאל לקו המפריד?

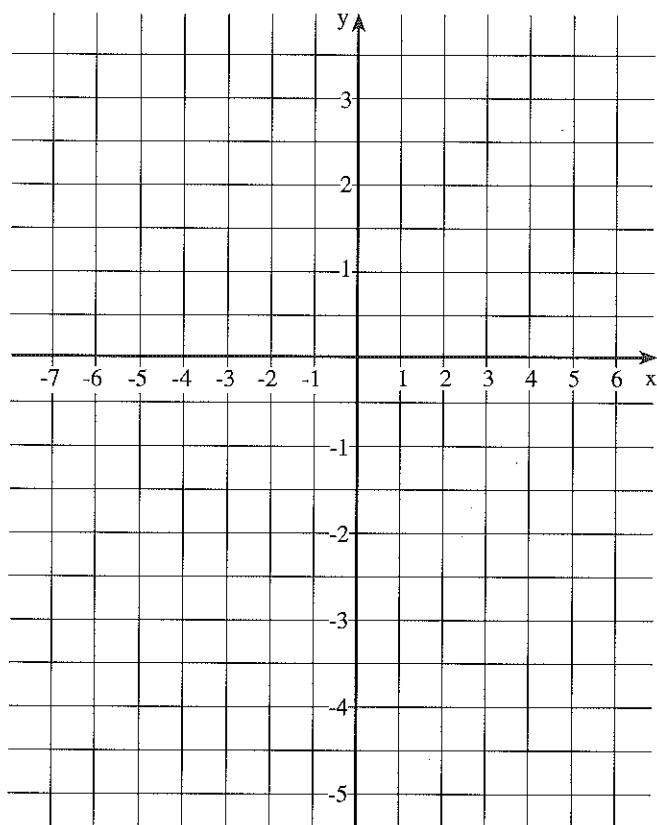
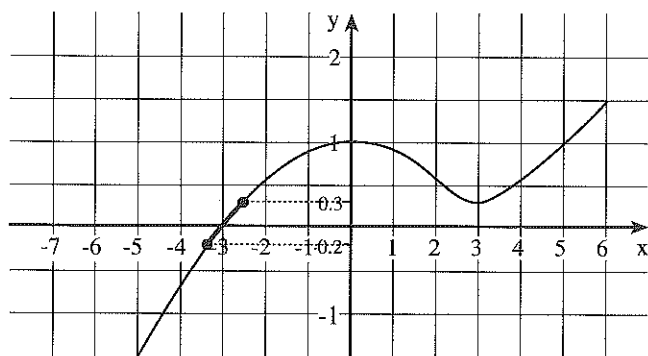
השלימו גרף של $\frac{1}{f}$ משמאל לקו המפריד.

(ד) רשמו את נקודות הקיצון של f .

חשבו, רשמו וסמנו את נקודות הקיצון של $\frac{1}{f}$. רשמו מאיזה סוג הן.

(ה) השלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$ מימין לאסימפטוטה. אפשר להיעזר

בנקודות נוספות. (שימו לב לגרף ליד האסימפטוטה).





4. משורטט (בעמוד משמאל) גרף הפונקציה h .

(א) עבור אילו ערכי x הפונקציה $\frac{1}{h}$ אינה מוגדרת? שרטטו קווים מפרידים במערכת הצירים הריקה (משמאל למטה).

(ב) רשמו וסמנו, במערכת הצירים (בעמוד משמאל למטה) שיעורי נקודות של $\frac{1}{h}$ המתאימות לנקודות המודגשות.

(ג) (i) האם $\frac{1}{h}$ עולה או יורדת משמאל ל- $x = -2$?

(ii) האם $\frac{1}{h}$ חיובית או שלילית משמאל ל- $x = -2$?

(iii) השלימו את שרטוט הגרף משמאל ל- $x = -2$.

(ד) (i) האם $\frac{1}{h}$ עולה או יורדת מימין ל- $x = 3$?

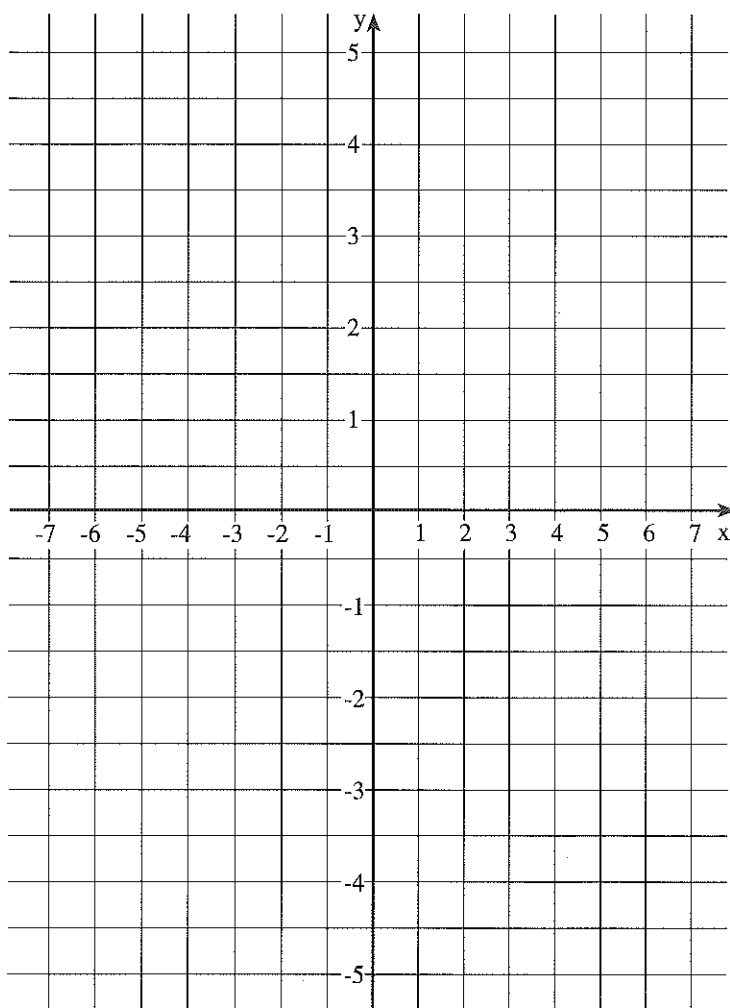
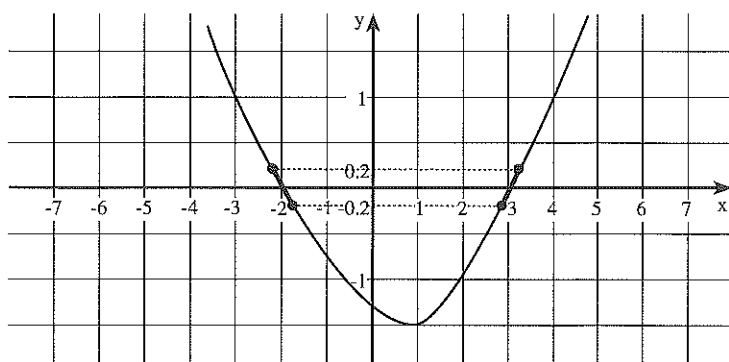
(ii) האם $\frac{1}{h}$ חיובית או שלילית מימין ל- $x = 3$?

(iii) השלימו את שרטוט הגרף מימין ל- $x = 3$.

(ה) רשמו וסמנו את נקודת הקיצון של $\frac{1}{h}$, מאיזה סוג היא?

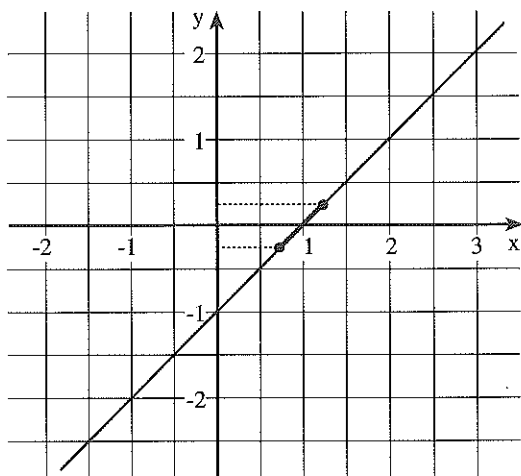
(ו) רשמו וסמנו את שיעורי הנקודות המשותפות של h ושל $\frac{1}{h}$.

(ז) השלימו את שרטוט הגרף בין האסימפטוטות המקבילות לציר y .

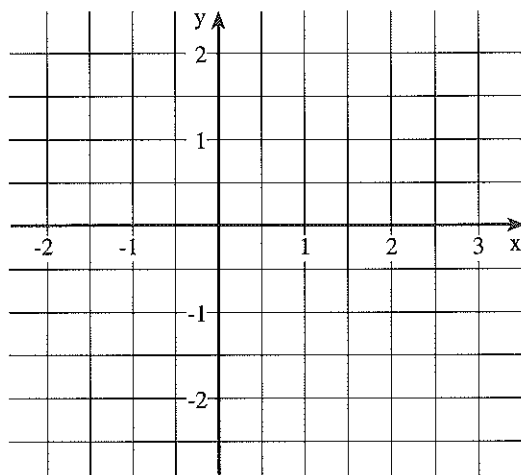




5. משורטט גרף הפונקציה g .



א) עבור איזה ערך של x , $\frac{1}{g}$ אינה מוגדרת?
שרטטו קו מפריד במערכת הצירים הריקה.



ב) (i) רשמו שיעורי נקודות של $\frac{1}{g}$ המתאימות לנקודות המודגשות.

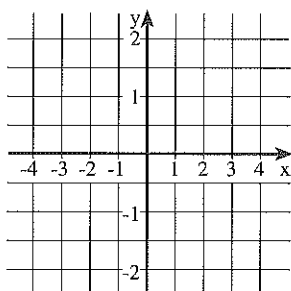
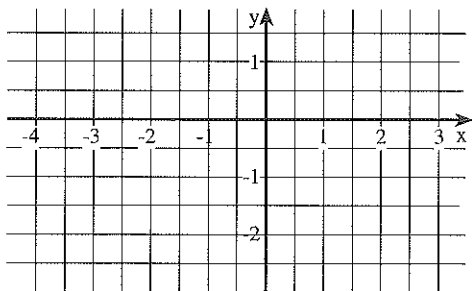
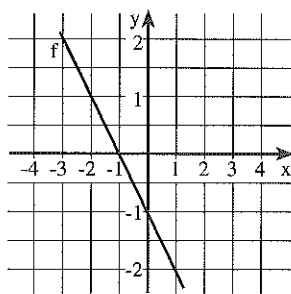
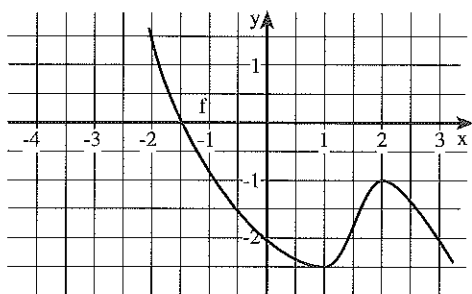
(ii) רשמו וסמנו את הנקודות המשותפות ל- g ו- $\frac{1}{g}$.

ג) השלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{g}$.



6. שרטטו, על פי הגרף של f , את גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$ במערכת הצירים הריקה

שמתחת.



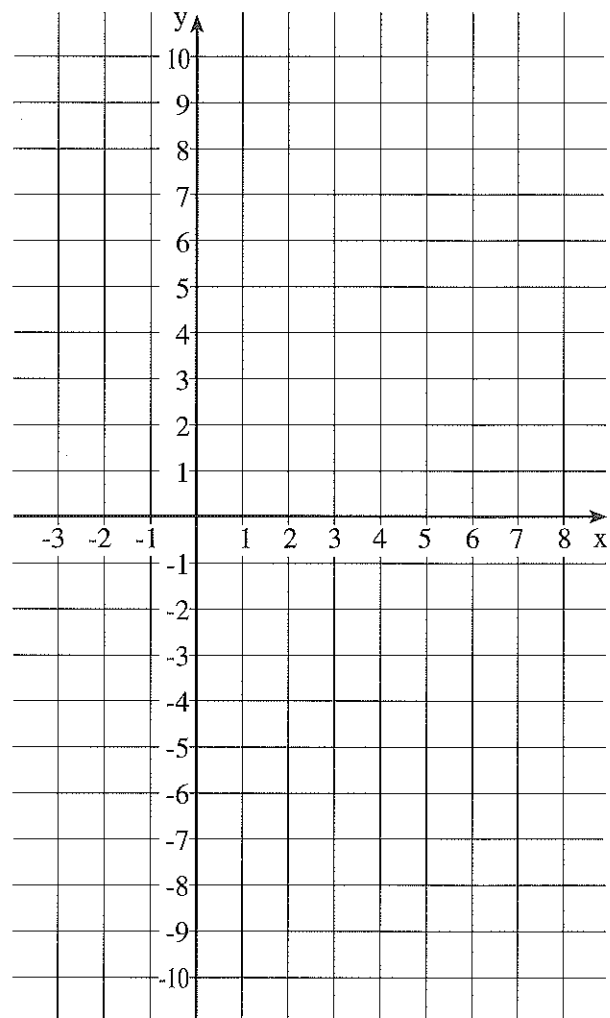
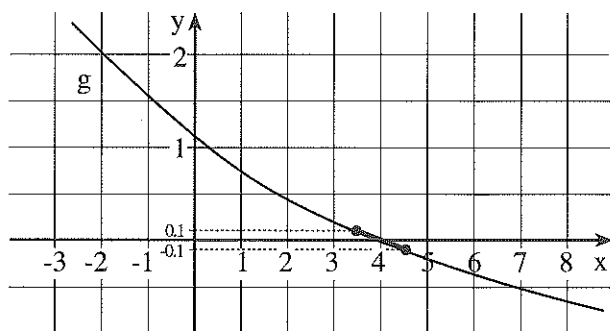
7. משורטט (בעמוד משמאל) גרף של הפונקציה g .

(א) עבור איזה ערך של x הפונקציה $\frac{1}{g}$ אינה מוגדרת?
שרטטו קו מפריד במערכת הצירים הריקה.

(ב) רשמו שיעורי נקודות של $\frac{1}{g}$ המתאימות לנקודות המודגשות (שעל הגרף של g). סמנו אותן, בקירוב, במערכת הצירים בעמוד משמאל למטה.

(ג) האם $\frac{1}{g}$ עולה או יורדת משמאל לקו המפריד?
האם היא חיובית או שלילית משמאל לקו המפריד?
השלימו גרף של $\frac{1}{g}$ משמאל לקו המפריד.
(שימו לב שהקו המפריד הוא אסימפטוטה).

(ד) האם $\frac{1}{g}$ עולה או יורדת מימין לקו המפריד?
האם היא חיובית או שלילית מימין לקו המפריד?
השלימו גרף של $\frac{1}{g}$ מימין לקו המפריד.



8. משורטט (בעמוד משמאל) גרף הפונקציה h .

(א) רשמו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה h עם ציר x .

(ב) עבור אילו ערכים של x הפונקציה $\frac{1}{h}$ אינה מוגדרת?

שרטטו קווים מפרידים במערכת הצירים הריקה.

(ג) (i) רשמו וסמנו את נקודת הקיצון של $\frac{1}{h}$. מאיזה סוג היא?

(ii) השלימו סקיצה של הגרף בין שני הקווים המפרידים.

(ד) (i) חשבו שיעורי נקודות משמאל לאסימפטוטה השמאלית.

(ii) האם $\frac{1}{h}$ עולה או יורדת משמאל לאסימפטוטה השמאלית?

(iii) האם היא חיובית או שלילית בתחום זה?

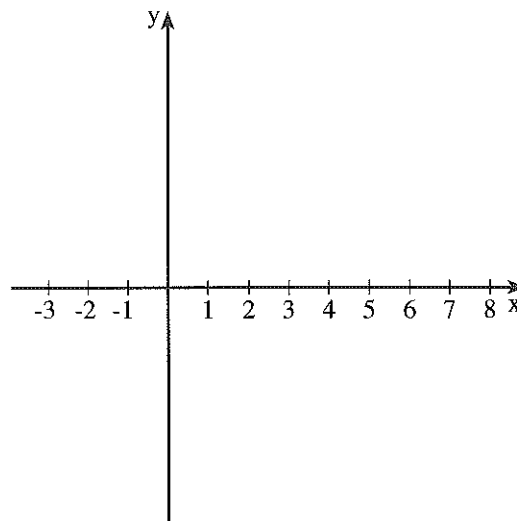
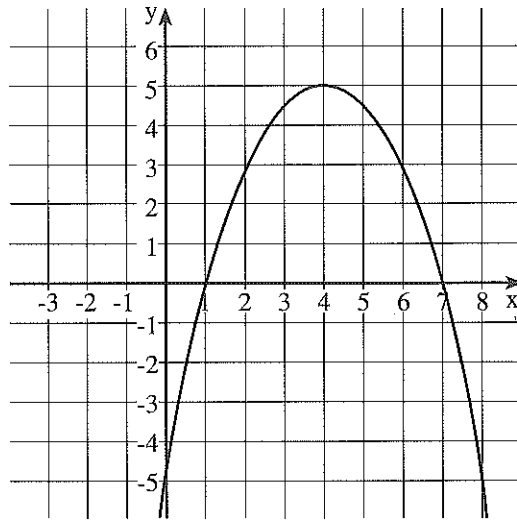
(iv) שרטטו סקיצה של הגרף בתחום זה.

(ה) (i) חשבו שיעורי נקודות מימין לאסימפטוטה הימנית.

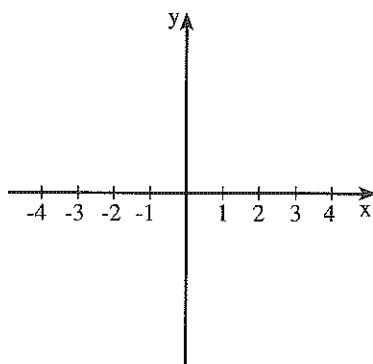
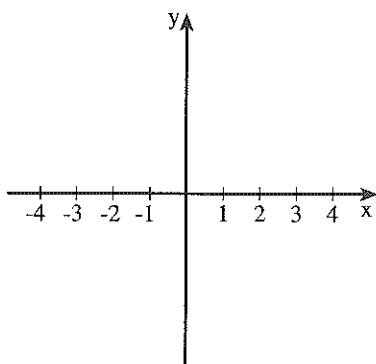
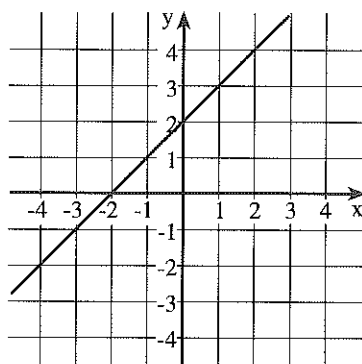
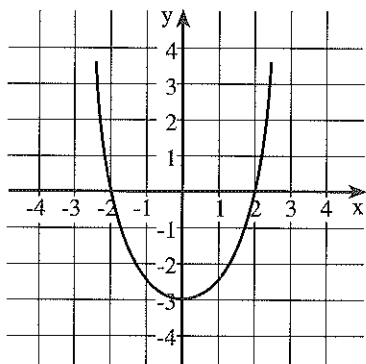
(ii) האם $\frac{1}{h}$ עולה או יורדת מימין לאסימפטוטה הימנית?

(iii) האם היא חיובית או שלילית בתחום זה?

(iv) שרטטו סקיצה של הגרף בתחום זה.



9. על פי הגרף של g , שרטטו סקיצה של $\frac{1}{g}$ במערכת הצירים הריקה.



שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$ כאשר ידוע החוק של f

בפרק זה נשרטט את גרף הפונקציה f כאשר אוק הפונקציה f נתון, ובעזרתו נשרטט את גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$.

1. התאימו חוק לגרף.

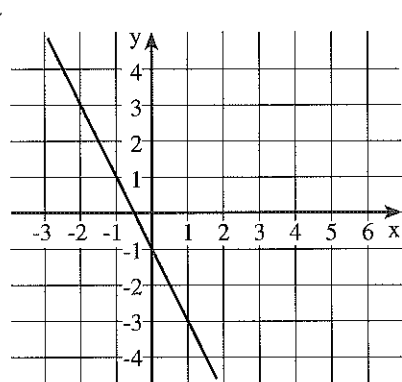
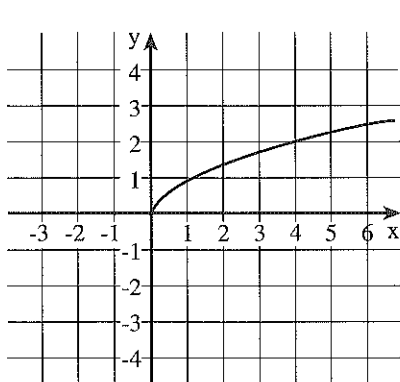
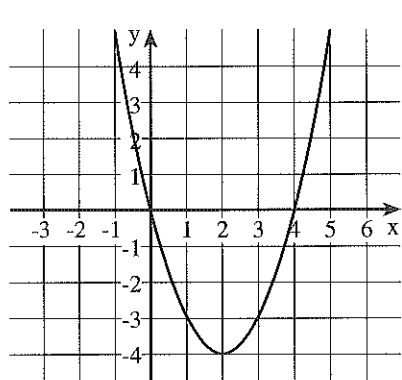
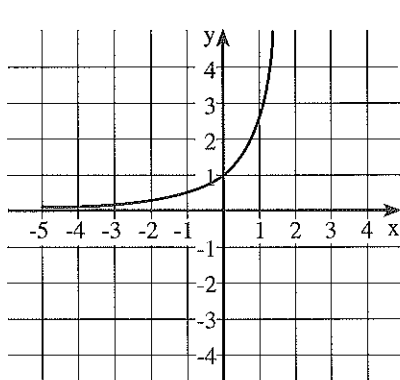


ג. $y = \sqrt{x}$

א. $y = e^x$

ד. $y = x^2 - 4x$

ב. $y = -2x - 1$



פעילות מחשב (תרגילים 7-2) - בעזרת הלומדה ממשיך

2. א) שרטטו את הפונקציה $f(x) = x^2 + 2$
 רשמו את החוק $f(x) = x^2 + 2$ והקישו F2 לשרטוט.
- ב) ואת הפונקציה $\frac{1}{f}$.
 רשמו $1/f(x)$ והקישו F2 לשרטוט.
- ב) סכמו תכונות של הפונקציות.
- (i) רשמו את נקודת הקיצון ומאזיה סוג היא, של f .
- של $\frac{1}{f}$.
- (ii) רשמו בטבלה, עבור כל תחום, אם הפונקציה עולה או יורדת.

התחום	f	$\frac{1}{f}$
$x > 0$		
$x < 0$		

(iii) האם f חיובית או שלילית?

האם $\frac{1}{f}$ חיובית או שלילית?

- ג) שנו סקלות כך שרק הפונקציה $\frac{1}{f}$ תיראה על המסך.
- הלכו על הגרף של $\frac{1}{f}$
- מ- $x = 0$ לכיוון החיובי של ציר x ותארו מה קרה לערכי $\frac{1}{f}$.
- הקישו ס ALT (ביחד) ושנו סקלות. הקישו F10 לביצוע שינויים.
- הקישו F7.

3. (א) שרטטו במחשב את הגרפים של הפונקציות $g(x) = x^2 + 4x + 4$

ושל $\frac{1}{g}$. (במחשב יש לרשום $1/g(x)$.)

(ב) מדוע ל- $\frac{1}{g}$ יש אסימפטוטה אנכית?

(ג) מדוע ל- $\frac{1}{g}$ יש אסימפטוטה אופקית?

(ד) סכמו תכונות של שתי הפונקציות בטבלה.

$\frac{1}{g}$	g	
		נקודת קיצון
		תחום עלייה
		תחום ירידה
		נקודת חיתוך עם ציר y
		נקודת חיתוך עם ציר x
		משוואת אסימפטוטה אנכית
		משוואת אסימפטוטה אופקית

(ה) רשמו את הנקודות המשותפות לשני הגרפים, והסבירו מדוע הן הנקודות המשותפות היחידות.

4. (א) שרטטו במחשב את הגרפים של הפונקציות $h(x) = 2x - 5$ ושל $\frac{1}{h}$. (במחשב יש לרשום $1/h(x)$.)

(ב) רשמו את הנקודות המשותפות לשני הגרפים.

(ג) סכמו תכונות של שתי הפונקציות.

$\frac{1}{h}$	h	
		נקודת חיתוך עם ציר x
		משוואת אסימפטוטה אנכית
		תחום עלייה
		תחום ירידה

5. שרטטו במחשב את הגרפים של $f(x) = x^2 - x - 2$ ושל $\frac{1}{f}$.

(א) רשמו את נקודות החיתוך של f עם ציר x .
מה קורה ל- $\frac{1}{f}$ בנקודות אלו? איך זה מתבטא בגרף? הסבירו.

(ב) רשמו תחומים בהם f חיובית.
מה תוכלו לומר על $\frac{1}{f}$ בתחומים אלה? הסבירו.
רשמו תחום בו f שלילית.
מה תוכלו לומר על $\frac{1}{f}$ בתחום זה? הסבירו.

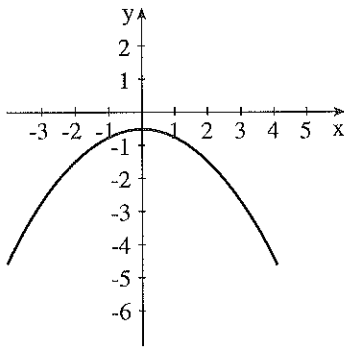
(ג) מה המשותף לנקודת הקיצון של שתי הפונקציות: f , $\frac{1}{f}$? במה הן שונות?

(ד) (i) רשמו את התחום בו f עולה.
האם $\frac{1}{f}$ עולה או יורדת בתחום זה?
(ii) רשמו את התחום בו f יורדת.
האם $\frac{1}{f}$ עולה או יורדת בתחום זה?

(ה) הלכו על אחד הגרפים ורשמו את הנקודות המשותפות לשתי הפונקציות.

הסבירו מדוע רק נקודות בהן $f(x) = 1$ או $f(x) = -1$ יכולות להיות משותפות לשתי הפונקציות.

6. משורטט גרף הפונקציה f .



א) השלימו טבלה של $\frac{1}{f}$.

$\frac{1}{f}$	
	נקודת קיצון
	תחום עלייה
	תחום ירידה
	משוואת אסימפטוטה אופקית

ב) שרטטו באותה מערכת צירים את $\frac{1}{f}$.

ג) נתון גם ש- $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}$, שרטטו במחשב את f ואת $\frac{1}{f}$.

ד) בדקו אם הגרף של $\frac{1}{f}$ המשורטט על המסך דומה לזה ששרטטתם בסעיף ב'.

ה) רשמו שיעור y של נקודות החיתוך של שני הגרפים (אתם יכולים להלך על הגרפים).

7. משורטט (בעמוד משמאל) גרף הפונקציה f .

(א) השלימו טבלה לגבי $\frac{1}{f}$.

$\frac{1}{f}$	
	נקודת קיצון
	תחומי עלייה
	תחומי ירידה
	נקודת חיתוך עם ציר y
	נקודת חיתוך עם ציר x
	משוואות אסימפטוטות אנכיות
	משוואת אסימפטוטה אופקית

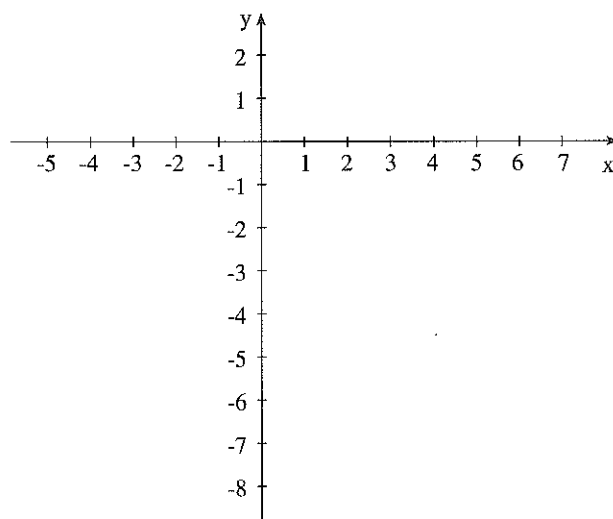
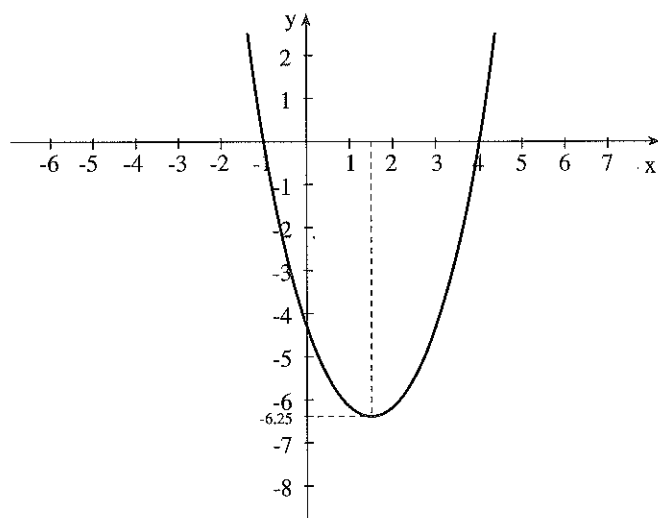
(ב) שרטטו במערכת הצירים הריקה, את גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$ על פי התכונות שרשמתם.

(ג) נתון גם ש- $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

שרטטו במחשב את הגרפים של f ושל $\frac{1}{f}$.

בדקו אם הגרף ששרטטתם בסעיף ב', דומה לזה שמשורטט על המסך.

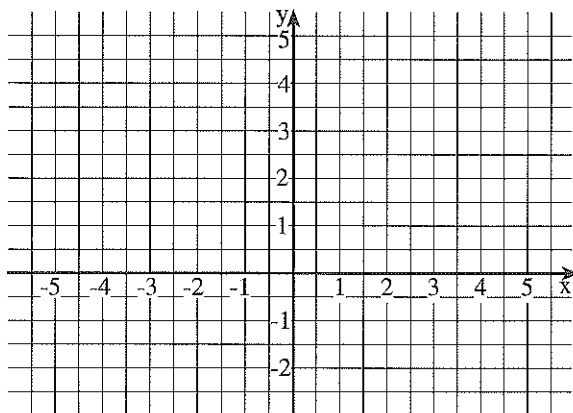
(ד) רשמו את הנקודות המשותפות לשני הגרפים.



הניגזלים בהמשך לא מושג.

8. מה צורת הגרף של הפונקציה $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$? 

א. מצאו את נקודת הקיצון של f . סמנו במערכת הצירים.



ב. השלימו עמודה של f בטבלה, סמנו את הנקודות במערכת הצירים, והשלימו גרף של f .

$\frac{1}{f}$	f
	(-2,)
	(-1,)
	(1,)
	(2,)

ג) רשמו את נקודת הקיצון של $\frac{1}{f}$ וסמנו (בצבע אחר) באותה מערכת צירים.

ד) רשמו בטבלה את הנקודות המתאימות עבור $\frac{1}{f}$, סמנו את הנקודות והשלימו את שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$ (בצבע שבחרתם).

ה) (i) האם ייתכן שלפונקציה $\frac{1}{f}$ יש נקודות חיתוך עם ציר x ? הסבירו.
(ii) האם ל- $\frac{1}{f}$ יש אסימפטוטה? הסבירו.

(iii) רשמו את החוק של $\frac{1}{f}$ וחשבו את ערך הפונקציה לגבי $x = 10$, $x = -10$.

ו) רשמו תחומי עלייה, ירידה של $\frac{1}{f}$.

9.  שרטטו גרף לכל אחת מהפונקציות הרשומות, לפי השלבים הרשומים בסוגריים למטה.

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (i)$$

$$y = -x^2 - x + 6 \quad (ii)$$

$$y = (x - 2)^2 \quad (iii)$$

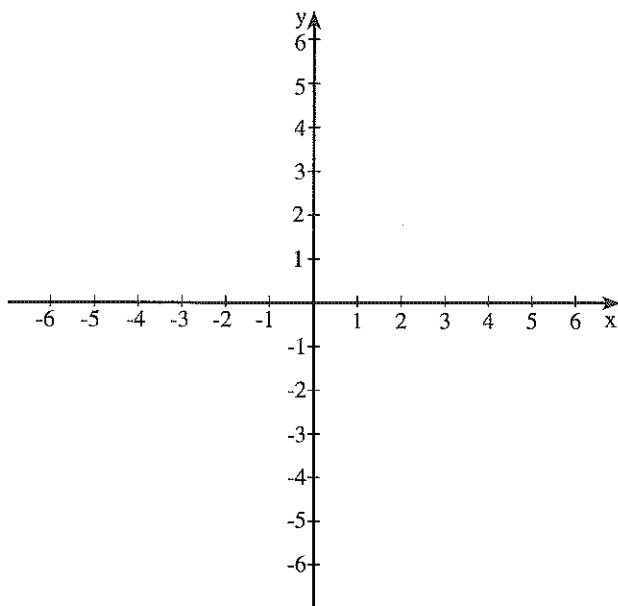
$$y = 2x^2 - 6x + 5 \quad (iv)$$

(חשבו את נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש, ואת קודקוד הפרבולה. אם יש צורך חשבו נקודות נוספות.)

בגרפים הקודמים, כאשר $f = \frac{1}{f}$ היו אסימפטוטות מקבילות לציר y . שרטטנו
 אף $\frac{1}{f}$ במערכת צירים נפרדת. בהמשך שרטטו כרזונכם, במערכת צירים

נפרדת או כזבזב אף באותה מערכת צירים.

10. א) שרטטו את גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 3$.



ב) עבור אילו ערכי x , $\frac{1}{f}$ לא מוגדרת?

שרטטו קווי הפרדה, באותה מערכת צירים או במערכת צירים נפרדת.

ג) (i) רשמו וסמנו את נקודת הקיצון של $\frac{1}{f}$.

(ii) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה בין האסימפטוטות.

ד) (i) האם $\frac{1}{f}$ חיובית או שלילית מימין לאסימפטוטה $x = 3$?

(ii) האם היא עולה או יורדת בתחום הזה?

(iii) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה מימין לאסימפטוטה $x = 3$.

ה) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה משמאל לאסימפטוטה $x = -1$.

ו) (i) רשמו את חוק הפונקציה של $\frac{1}{f}$.

(ii) חשבו את ערכו של $\frac{1}{f}$ עבור $x = -6$, $x = 6$. בדקו
 שהנקודות נמצאות בקירוב על הגרף.

ז) כמה נקודות משותפות לשני הגרפים. רשמו את שיעורי y שלהן.



11. א) שרטטו את גרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 6x + 9$.

ב) עבור איזה ערך של x , $\frac{1}{f}$ לא מוגדרת? (שרטטו קו מפריד).

ג) (i) האם $\frac{1}{f}$ עולה או יורדת מימין לקו המפריד?

(ii) האם היא חיובית או שלילית?

(iii) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה מימין לקו המפריד.

ד) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה משמאל לקו המפריד.

ה) רשמו את משוואות האסימפטוטות של $\frac{1}{f}$.

ו) כמה נקודות משותפות יש לשני הגרפים?
רשמו את שיעורי y שלהן.

ז) (i) רשמו את חוק הפונקציה $\frac{1}{f}$.

(ii) חשבו ערכי $\frac{1}{f}$ עבור $x = -7$ ו- $x = 4$. בדקו שהנקודות נמצאות בקירוב על הגרף.



12. א) שרטטו את הישר $f(x) = 2x + 4$.

ב) עבור אילו ערכים של x , $\frac{1}{f}$ לא מוגדרת? (שרטטו קו מפריד).

ג) (i) סכמו תכונות של $\frac{1}{f}$ משמאל לקו המפריד. (התייחסו לעלייה/ירידה, חיוביות/שליליות).

(ii) שרטטו סקיצה של הגרף משמאל לקו המפריד. (תוכלו להיעזר

בנקודות נוספות שעל הגרפים של f , $\frac{1}{f}$).

ד) שרטטו סקיצה של הגרף מימין לקו המפריד.

ה) רשמו את חוק הפונקציה של $\frac{1}{f}$.

ו) האם $\frac{1}{f}$ קווית? הסבירו.

13. א) שרטטו את גרף הפונקציה $f(x) = x$ (בחרו כיחידה שתי משבצות).

ב) הדגישו, על הגרף ששרטטתם שתי נקודות הנמצאות גם על הגרף של $\frac{1}{f}$.

ג) עבור איזה ערך של x אינה מוגדרת?

ד) (i) רשמו את תכונות הפונקציה $\frac{1}{f}$ משמאל לציר x .
(התייחסו לעלייה/ירידה, חיוביות/שליליות).

(ii) שרטטו סקיצה של הגרף משמאל לציר x , (תוכלו להיעזר בנקודות נוספות).

ה) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$ מימין לציר x .

ו) רשמו את חוק הפונקציה של $\frac{1}{f}$.

14. א) שרטטו את גרף הפונקציה $f(x) = x^2$.

ב) הדגישו, על הגרף ששרטטתם, שתי נקודות הנמצאות גם על הגרף של $\frac{1}{f}$.

ג) עבור איזה ערך של x , $\frac{1}{f}$ לא מוגדרת?

ד) (i) האם יש ערכים שלילים ל- $\frac{1}{f}$? נמקו.

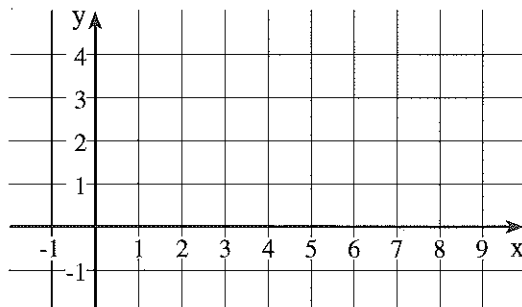
(ii) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$.

ה) רשמו את חוק הפונקציה של $\frac{1}{f}$.



15. א) השלימו שיעורי נקודות שעל גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$, סמנו במערכת הצירים והשלימו את הגרף.

(0,) , (0.04,) , (0.64,) , (1,) , (3,) , (4,)



ב) תארו את הפונקציה f . (התייחסו לתחום הגדרה, עלייה/ירידה, חיתוך עם הצירים, חיוביות/שליליות).

ג) (i) חשבו נקודות מתאימות ל- $\frac{1}{f}$, לאלו הרשומות בסעיף א'.

(ii) סמנו את הנקודות באותה מערכת צירים, והשלימו את שרטוט הגרף.

ד) תארו במילים את תכונות הפונקציה $\frac{1}{f}$ (התייחסו לתחום הגדרה, עלייה/ירידה, חיתוך עם הצירים, חיוביות/שליליות ואסימפטוטה).

ה) (i) רשמו את חוק הפונקציה של $\frac{1}{f}$.

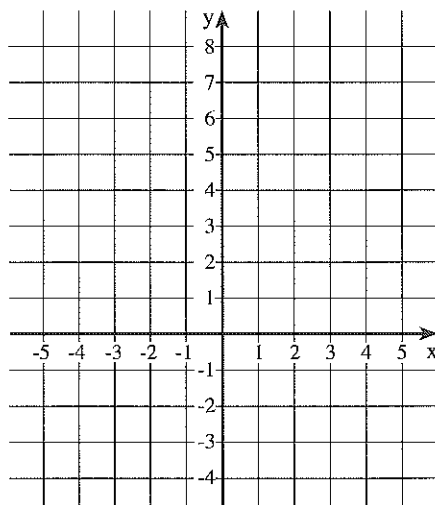
(ii) חשבו ערכי הפונקציה $\frac{1}{f}$ עבור $x = 0.09$, $x = 9$. בדקו אם

הנקודות נמצאות בקירוב על גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$ ששרטטתם.



16. (א) השלימו שיעורי נקודות שעל גרף הפונקציה $f(x) = e^x$, ושרטטו את הגרף.

$(2, \quad)$, $(1, \quad)$, $(0, \quad)$, $(-2, \quad)$, $(-5, \quad)$



(ב) תארו את תכונות הפונקציה f (התייחסו לעלייה/ירידה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים ואסימפטוטה).

(ג) (i) רשמו תכונות של $\frac{1}{f}$ על סמך התכונות של f (התייחסו לעלייה/ירידה, חיוביות/שליליות, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים ואסימפטוטה).

(ii) שרטטו את הגרף של $\frac{1}{f}$ לפי התכונות שרשמתם.

(ד) (i) רשמו את חוק הפונקציה של $\frac{1}{f}$.

(ii) חשבו את ערכי הפונקציה עבור: $x = -2$, $x = 0$, $x = 5$.

בדקו אם הנקודות נמצאות בקירוב על גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$ ששרטטתם.

17. (א) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה f המקיימת את התכונות הבאות:



- חותכת את ציר y ב- $y = -4$.
- חותכת את ציר x ב- $x = 2$.
- עולה עד $x = 2$ ($x < 2$).
- יורדת מ- $x = 2$ ($x > 2$).
- לפונקציה נקודת קיצון ב- $x = 2$.

(ב) רשמו תכונות של $\frac{1}{f}$, התייחסו לנושאים הבאים:

- נקודת חיתוך עם ציר y .
- מה קורה כאשר $x = 2$?
- האם הפונקציה עולה/יורדת כאשר $x < 2$?
- האם הפונקציה עולה/יורדת כאשר $x > 2$?

(ג) שרטטו סקיצה של הפונקציה $\frac{1}{f}$ על פי התכונות שרשמתם.

18. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ (לשם כך שרטטו תחילה את



$f(x) = x^2 + 1$, והיעזרו בגרף זה לשרטוט הגרף של g).

19. שרטטו את גרף הפונקציה $h(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$ (לשם כך שרטטו תחילה



את $f(x) = x^2 - 4x + 4$, והיעזרו בגרף זה לשרטוט הגרף של h).

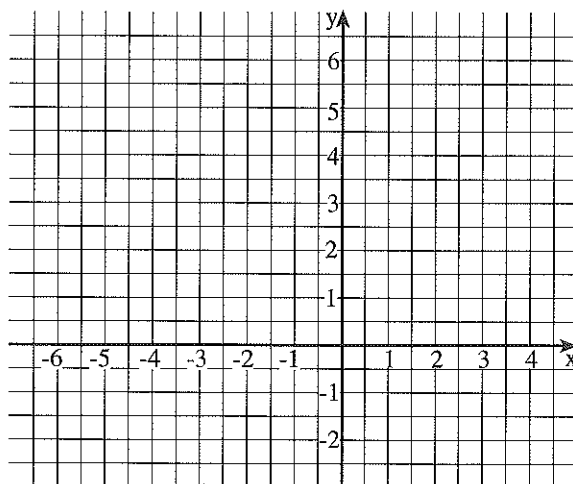
20. שרטטו את גרף הפונקציה $m(x) = \frac{1}{3x - 6}$ (לשם כך שרטטו תחילה את



הישר $f(x) = 3x - 6$, והיעזרו בגרף זה לשרטוט הגרף של m).

21. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

א) שרטטו את גרף הפונקציה (מצאו תחילה: נקודת קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים, ונקודות נוספות).



ב) רשמו תכונות של $\frac{1}{f}$ (התייחסו לנקודת קיצון, עלייה/ירידה, חיוביות/שליליות).

ג) שרטטו בצבע שונה (או במערכת צירים נפרדת) את הגרף של $\frac{1}{f}$.
(אפשר להיעזר בנקודות).

ד) (i) רשמו את החוק של $\frac{1}{f}$.

(ii) חשבו את ערכי הפונקציה עבור $x = 4$ ו- $x = -6$. בדקו שהנקודות נמצאות בקירוב על הגרף.

ה) מה קורה לערכי $\frac{1}{f}$, עבור ערכי x גדולים מאוד?

22. (א) שרטטו את גרף הפונקציה $f(x) = -x^2$.

(ב) סמנו, על הגרף ששרטטתם, שתי נקודות הנמצאות גם על הגרף של $\frac{1}{f}$.

(ג) עבור איזה ערך של x , $\frac{1}{f}$ לא מוגדרת? (סמנו קו מפריד).

(ד) האם יש ערכים חיוביים ל- $\frac{1}{f}$? נמקו.

סמנו נקודות נוספות והשלימו סקיצה של גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$.

(ה) רשמו את חוק הפונקציה של $\frac{1}{f}$.

23. (א) רשמו נקודת קיצון ונקודות נוספות של גרף הפונקציה $g(x) = -x^2 - 2$, ושרטטו את הגרף.

(ב) היעזרו בגרף של g ורשמו לגבי $\frac{1}{g}$:

(i) נקודת הקיצון.

(ii) תחומי עלייה, ירידה.

(iii) תחומי חיוביות, שליליות.

(ג) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $\frac{1}{g}$.

24. (א) חשבו את שיעורי נקודת הקיצון, נקודות החיתוך עם הצירים, ונקודות נוספות של הפונקציה $h(x) = x^2 - x$. שרטטו את גרף הפונקציה.

(ב) רשמו שיעורי x , עבורם $\frac{1}{h}$ אינה מוגדרת. (שרטטו או הדגישו קווים מפרידים).

(ג) שרטטו את הגרף של $\frac{1}{h}$ לפי השלבים הבאים:

(i) רשמו וסמנו את נקודת הקיצון ונקודות נוספות בין הקווים המפרידים. השלימו סקיצה של הגרף בתחום זה.

(ii) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $\frac{1}{h}$ משמאל לקו המפריד

השמאלי (בדקו תחילה את תכונות $\frac{1}{h}$ בתחום זה).

(iii) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $\frac{1}{h}$ גם בתחום מימין לקו

המפריד הימני.

(ד) רשמו את משוואות כל האסימפטוטות של $\frac{1}{h}$.

(ה) רשמו את חוק הפונקציה של $\frac{1}{h}$.

25. (א) שרטטו את גרף הפונקציה $f(x) = x^3$.

(ב) סמנו, על הגרף ששרטטתם, שתי נקודות הנמצאות על הגרף של f וגם

על הגרף של $\frac{1}{f}$.

(ג) עבור איזה ערך של x $\frac{1}{f}$ אינה מוגדרת?

(ד) סמנו נקודות מתאימות ל- $\frac{1}{f}$ מימין ומשמאל לציר y .

סמנו נקודות מתאימות ל- $\frac{1}{f}$ עבור ערכי x גדולים מאוד וקטנים מאוד.

(ה) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$.

(ו) רשמו את חוק הפונקציה של $\frac{1}{f}$.

(ז) שרטטו (בצבע אחר) שקוף של הגרף של $\frac{1}{f}$ על ציר x . רשמו את החוק.

26. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ (שרטטו תחילה את

הפונקציה $f(x) = x^2 - 3x - 4$, והיעזרו בגרף של f כדי לשרטט את הגרף של g).

27. $(-2, 4)$ היא נקודת מקסימום של פונקציה ריבועית f .

רשמו את שיעורי נקודת הקיצון של $\frac{1}{f}$, ואת סוגה.

28. א) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = x^2 - 12x$.
רשמו גם את סוגה.

ב) רשמו שיעורי נקודת הקיצון של $\frac{1}{g}$, ואת סוגה.

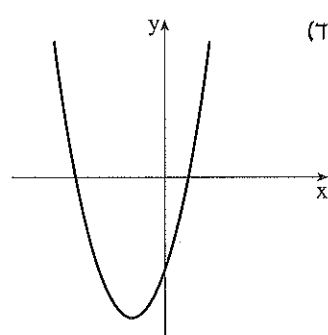
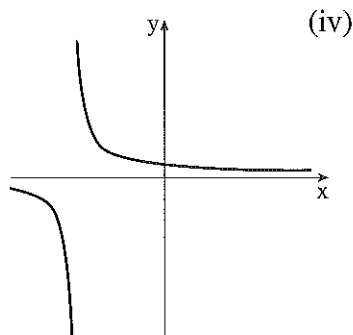
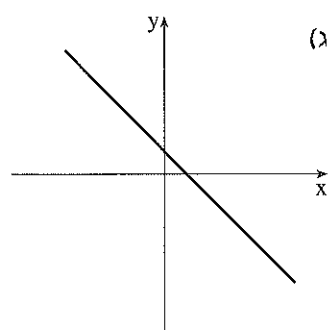
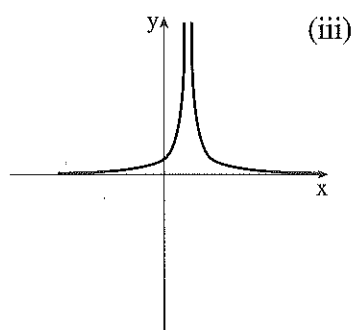
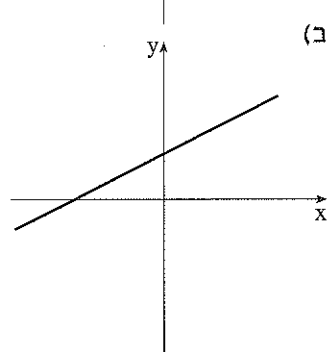
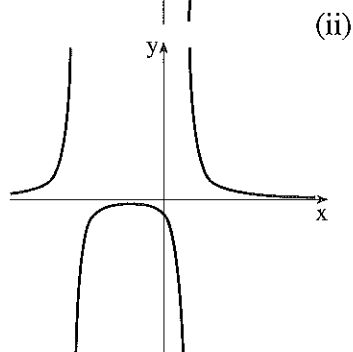
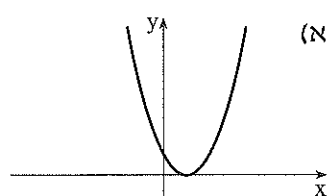
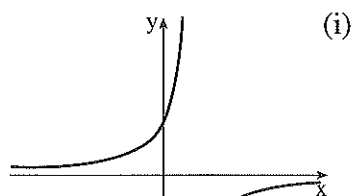
29. שרטטו את גרף הפונקציה $h(x) = \frac{1}{3 - 3x}$ (שרטטו תחילה את הישר

, $f(x) = 3 - 3x$, והיעזרו בו לשרטוט הפונקציה h).

30. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x) = \frac{1}{2 + 2x}$ (שרטטו תחילה את הישר

, $f(x) = 2 + 2x$, והיעזרו בו לשרטוט הפונקציה g).

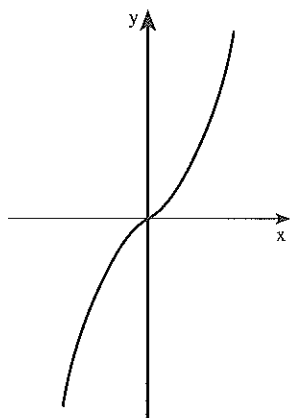
31. התאימו $\frac{1}{f}$ (טור שמאלי) ל- f (טור ימני).



פרק ג: עוד משפחה של פונקציות

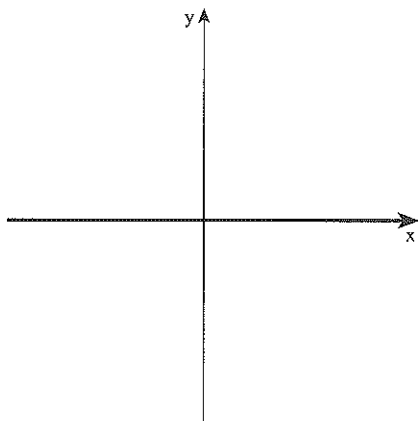
התאמה והתאמה הפוכה

1.  בדף שקוף ב' תמצאו גרף זהה לזה המשורטט (ללא סימון x ו- y על הצירים).



א) הניחו אותו על הגרף המשורטט, כך שהציר המודגש יהיה ציר x , והציר הלא מודגש ציר y .
(כלומר, החליפו את הצירים זה בזה, שמרו על הכיוונים.)

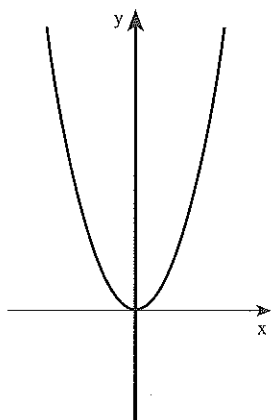
ב) הזיזו את הגרף שהתקבל, למערכת החדשה.



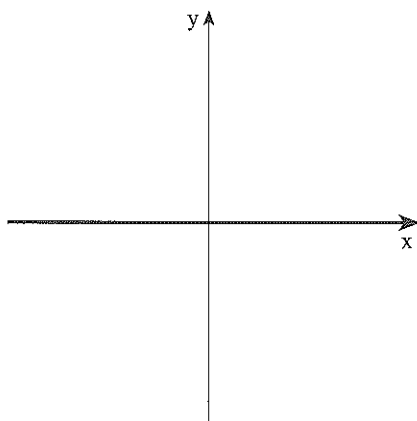
קיבלתם גרף של "התאמה הפוכה" או לא התואמת בגרף אמורה.



2. (א) הניחו את הגרף המתאים מדף שקוף ב', כך שהציר המודגש יהיה ציר x , והציר הלא מודגש ציר y . (כלומר, החליפו את הצירים זה בזה, שמרו על הכיוונים).



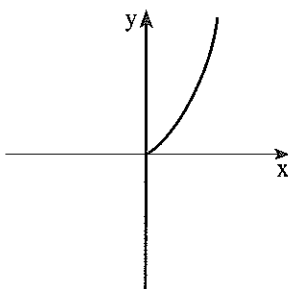
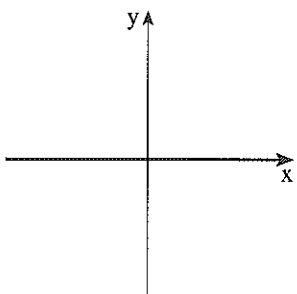
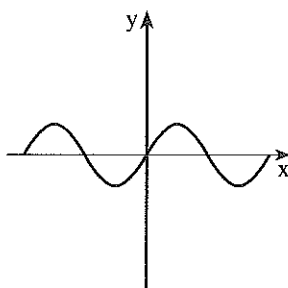
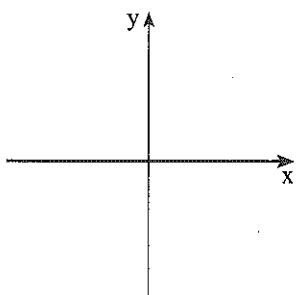
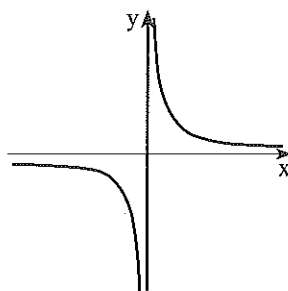
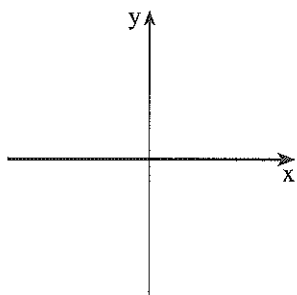
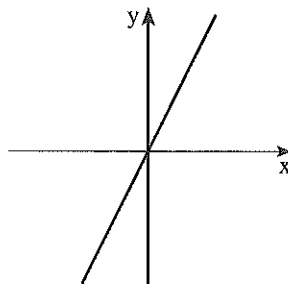
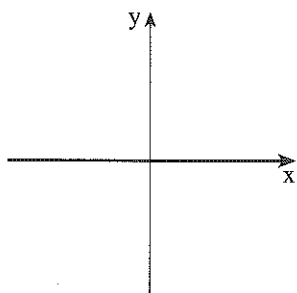
(ב) הזיזו את הגרף שהתקבל, למערכת החדשה.



הגרף המקורי והגרף שהתקבל, על ידי "החלפת הצירים זה בזה", הם גרפים של **התאמות הפוכות** זו לזו.



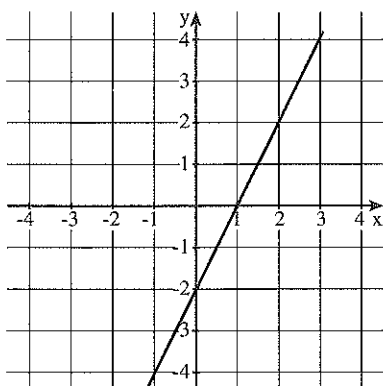
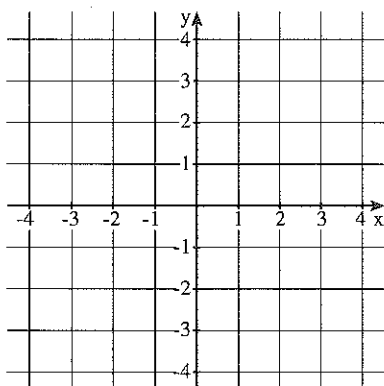
3. - גזרו מדף שקוף ב' את הגרף המתאים.
- צרו, לכל פונקציה, התאמה הפוכה (על ידי "החלפת הצירים").
- הזיזו את הגרף שהתקבל למערכת הצירים הסמוכה.



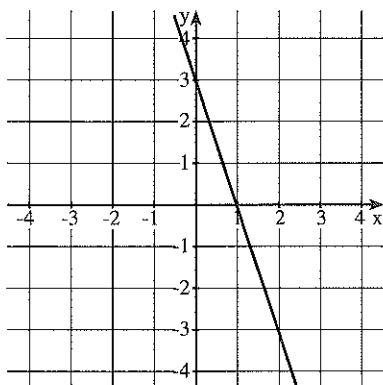
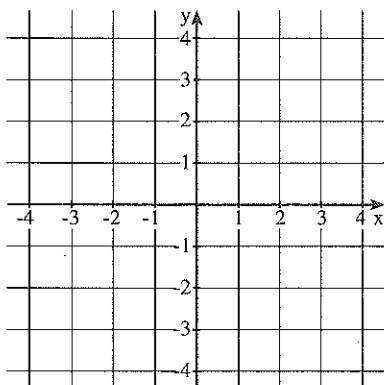


4. (א) לגבי כל סעיף:

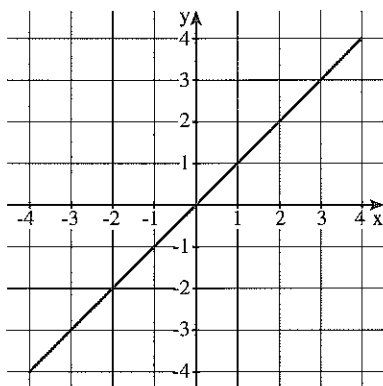
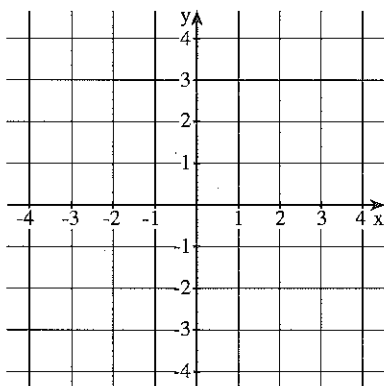
- רשמו את משוואת הישר המשורטט.
- גזרו מדף שקוף ג' את הגרף המתאים, וצרו התאמה הפוכה.
- רשמו את משוואת הישר החדש שהתקבל.



(i)



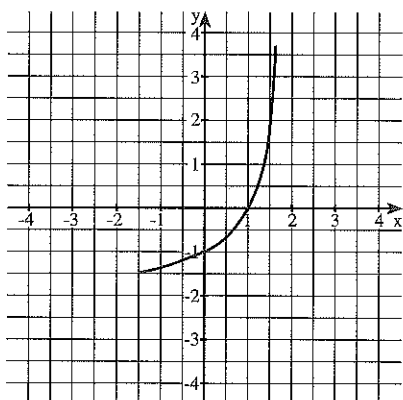
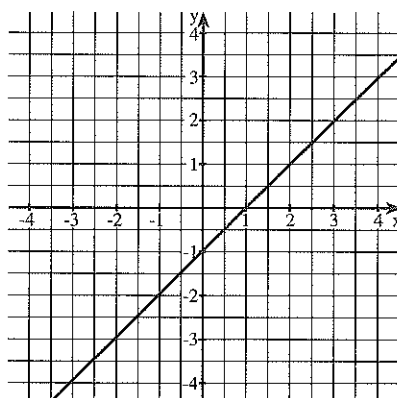
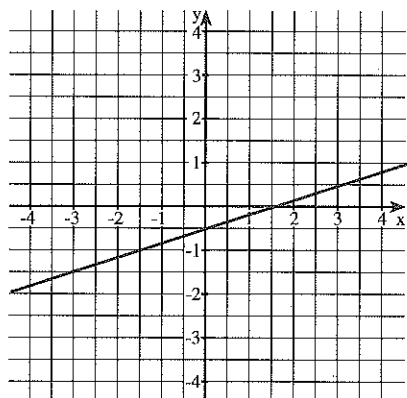
(ii)



(iii)

- (ב) מהו הקשר בין השיפועים של כל זוג ישרים?
(ג) מהו הקשר בין נקודות החיתוך עם הצירים של כל זוג ישרים.

5. נסו לשרטט לכל גרף, את גרף ההתאמה ההפוכה באותה מערכת צירים.
(הצעה: העתיקו את הגרף על דף שקוף והיעזרו בו.)

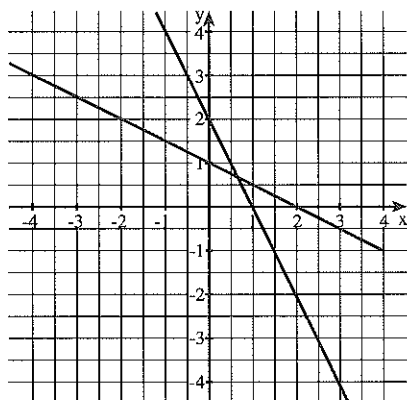


6. בכל מערכת צירים משורטטים גרפים של שתי התאמות הפוכות.

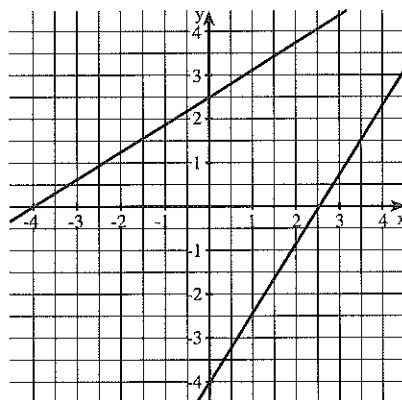
א) נסו לשרטט, בכל מערכת צירים, ישר שישמש קו קיפול. כלומר, ישר ששתי ההתאמות (הנתונה וההפוכה לה) סימטריות לגביו.

ב) מהי משוואת הישר שהוא ציר הסימטריה?

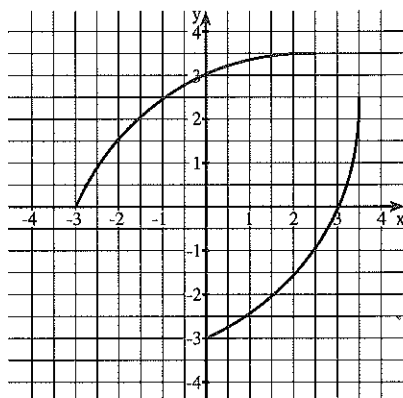
(ii)



(i)



(iii)

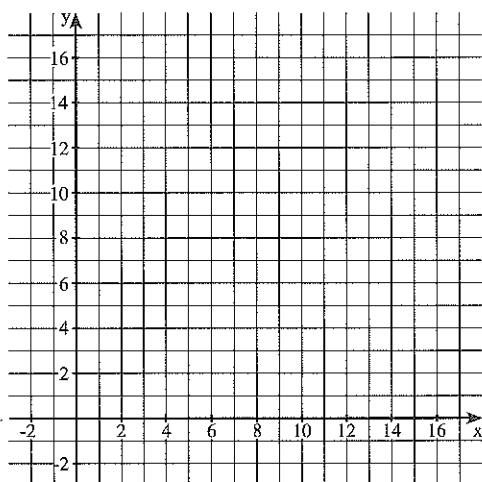




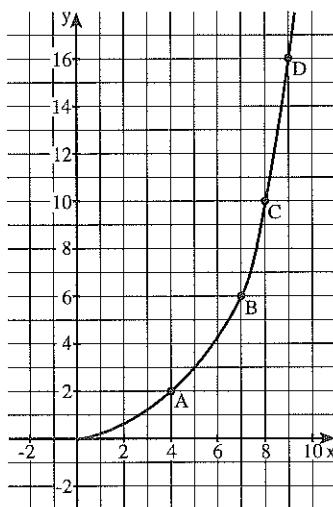
7. (א) הניחו את הגרף הזה למשורטט מדף שקוף ג', כך שתקבל התאמה הפוכה.

(ב) הזיזו את הגרף השקוף למערכת הסמוכה.

II



I



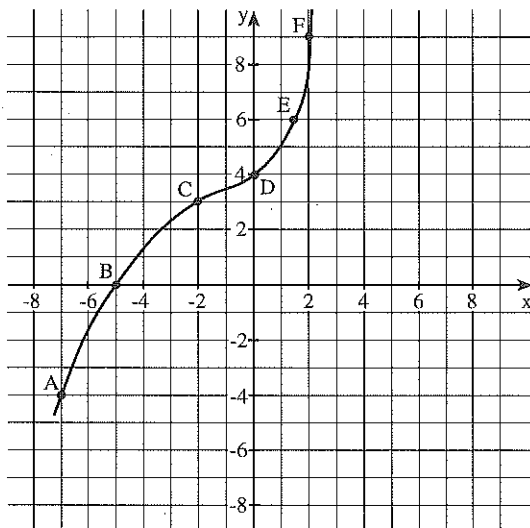
(ג) קראו מתוך הגרפים, את שיעורי הנקודות המסומנות והשלימו בטבלה.

II	I	הנקודה
		A
		B
		C
		D

(ד) מהו הקשר בין שיעורי הנקודה הנתונה וזו שהתקבלה בהתאמה ההפוכה?

ראיתם כי בהתאמות הפוכות הצירים מוחלפים.
לכן, שיעורי הנקודות מוחלפים ומתקבלים שני
גרפים סימטריים לגבי הישר $y = x$.

8. (א) השלימו את הטבלה.



נקודות על הגרף המשורטט	נקודות על ההתאמה ההפוכה
דוגמה: $A(-7, -4)$	$(-4, -7)$
$B(,)$	
$C(,)$	
$D(,)$	
$E(,)$	
$F(,)$	

(ב) סמנו את הנקודות של ההתאמה ההפוכה במערכת הצירים, והשלימו את גרף ההתאמה ההפוכה.

(ג) שרטטו גרף של הישר $y = x$. האם שני הגרפים (של ההתאמה הנתונה וההפוכה לה) סימטריים, לגבי הישר הזה?

9. נתונה הפונקציה $y = -3x + 4$.

(א) השלימו שיעורי נקודות על הגרף של $y = -3x + 4$.

$(-1,)$, $(0,)$, $(1,)$, $(3,)$

(ב) השלימו שיעורי נקודות על גרף ההתאמה ההפוכה.

$(,)$, $(,)$, $(,)$, $(, 3)$

10. נתונה הפונקציה $y = 3x$.

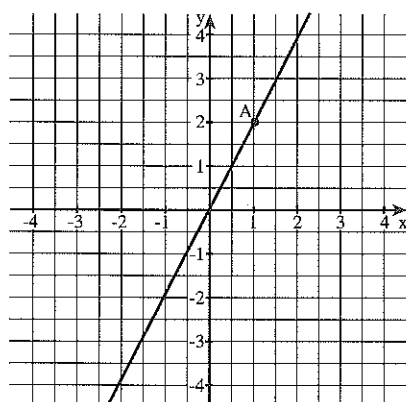
(א) נסו לשער את חוק ההתאמה ההפוכה.

(ב) הציבו במשוואה $y = 3x$, והשלימו את הנקודות.

(-1,) , (0,) , (2,)

(ג) החליפו שיעורי נקודות, הציבו ובדקו במשוואה שרשמתם בסעיף א'.

11. הגרף המשוורטט הוא גרף הפונקציה $y = 2x$.



(א) מי מהחוקים הבאים מתאים להתאמה ההפוכה של $y = 2x$.

$$y = -\frac{1}{2}x \quad (i)$$

$$y = \frac{1}{2}x \quad (ii)$$

$$y = -2x \quad (iii)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad (iv)$$

(ב) שרטטו במערכת הצירים את ההתאמה ההפוכה, שבחרתם בסעיף א' ובדקו אם היא אכן ההתאמה ההפוכה.

(ג) רשמו את שיעורי הנקודה A.

רשמו שיעורים של נקודה מתאימה על גרף ההתאמה ההפוכה, ובדקו אם היא, אכן, על הגרף ששרטטתם.

פונקציית השורש



1. א) גזרו מדף שקוף גי

את גרף הפונקציה

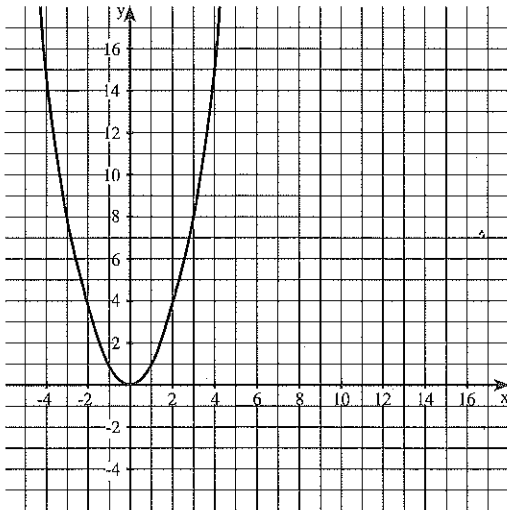
$$f(x) = x^2$$

ב) צרו התאמה הפוכה.

ג) הניחו את הגרף

שהתקבל במערכת

הצירים למטה.



ד) רשמו (בקירוב) על פי

גרף ההתאמה

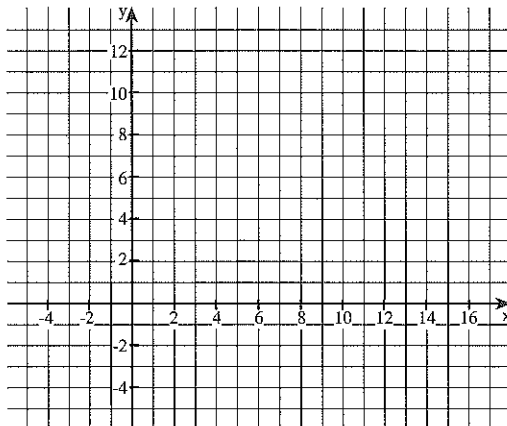
שהתקבל:

— שתי נקודות

ששיעור x שלהן 4.

— שתי נקודות

ששיעור x שלהן 6.



נניח $y \geq 0$. במקרה זה ההתאמה ההפוכה היא פונקציה.
בשלב ראשון נניח

(ה) השלימו את שיעורי הנקודות.

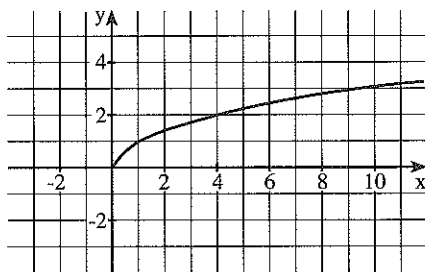
פונקציה מקורית	פונקציה הפוכה (g)
$f(x) = x^2$	
(0,)	(, 0)
(1,)	(, 1)
(2,)	(, 2)
(3,)	(, 3)

(ו) – נסו למצוא שיעורי y של נקודות נוספות על g .

$$(25, \quad) \quad (100, \quad) \quad (144, \quad)$$

– תארו במילים את הקשר בין שיעור x לשיעור y של נקודה על הגרף של g .

הגרף המשורטט הוא של הפונקציה $g(x) = \sqrt{x}$.
(קראו: שורש של x .)



(א) קראו מהגרף, בקירוב, והשלימו.

$$\sqrt{10} = \underline{\hspace{1cm}} \quad \sqrt{6} = \underline{\hspace{1cm}} \quad \sqrt{3} = \underline{\hspace{1cm}}$$

קשה לדיוק בקביעת ערך השורש על פי הגרף.
לדיוק גדול יותר ניתן להיעזר במחשבון.

3.  היעזרו במחשבון וקשבו.

דוגמה: כדי לחשב את $\sqrt{121}$ היעזרו בסדרת ההקשות:

121	$\sqrt{\quad}$
	11

א) $\sqrt{256}$ ב) $\sqrt{1024}$ ג) $\sqrt{5}$

ד) $\sqrt{0.05}$ ה) $\sqrt{0}$ ו) $\sqrt{2.25}$

4.  א) נסו לחשב $\sqrt{-9}$.

הסבירו בעזרת הגרף את מה שהתקבל על המחשבון.

ב) אילו מהביטויים הבאים חסרי משמעות?

א) $\sqrt{-81}$ ב) $-\sqrt{100}$ ג) $\sqrt{-4}$

א) אילו מספרים ניתן להציב בפונקציה $g(x) = \sqrt{x}$?

5.  היעזרו במחשבון למציאת השורשים. חשבו בכל שורה מימין לשמאל.

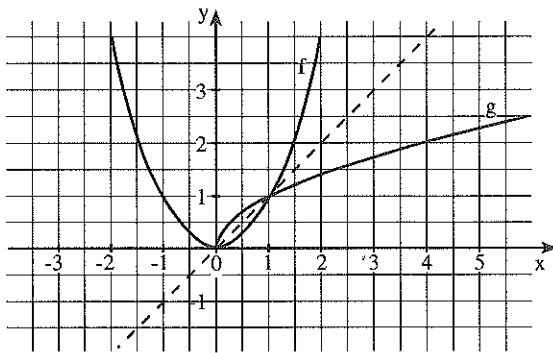
$\sqrt{0.6} =$, $\sqrt{0.5} =$, $\sqrt{0.4} =$, $\sqrt{0.25} =$, $\sqrt{0.16} =$

$\sqrt{1} =$, $\sqrt{0.99} =$, $\sqrt{0.9} =$, $\sqrt{0.8} =$, $\sqrt{0.7} =$

$\sqrt{3} =$, $\sqrt{2} =$, $\sqrt{1.1} =$, $\sqrt{1.01} =$



6. משורטטים הגרפים של $f(x) = x^2$, של $g(x) = \sqrt{x}$ ושל הישר $y = x$.



(א) באיזה תחום גרף

הפונקציה g

מעל גרף

הפונקציה f ?

(ב) היעזרו בחישובים

שבשאלה 5

והסבירו, מדוע

בתחום שרשמתם

בסעיף א', הגרף של g מעל הישר $y = x$.

(ג) הסבירו מדוע בתחום שרשמתם בסעיף א', הגרף של f מתחת לישר $y = x$.

גרז'לים

7. אילו מהביטויים הבאים חסרי משמעות?

$$\sqrt{-5}^3, \quad \sqrt{0}, \quad \sqrt{-3^2}, \quad \sqrt{(-3)^2}, \quad \sqrt{-9}$$

$$-\sqrt{0}, \quad -\sqrt{-4^2}, \quad -\sqrt{(-4)^2}, \quad -\sqrt{-16}, \quad -\sqrt{16}$$

8. חשבו (אם אפשר).

$$\sqrt{2+3} = \quad (א) \quad 2 \cdot \sqrt{2} = \quad (ד) \quad \sqrt{2} + 2 = \quad (א)$$

$$3 - 4\sqrt{2} = \quad (ח) \quad 2 - \sqrt{2} = \quad (ה) \quad \sqrt{25+64} = \quad (ב)$$

$$-\sqrt{4 \cdot 5 - 15} = \quad (ט) \quad 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 7 = \quad (ו) \quad \sqrt{3-4} = \quad (ג)$$

9. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{x}$.

חשבו (אם אפשר).

$$g(10) = \quad (\text{ד})$$

$$g(9) = \quad (\text{א})$$

$$g(-4) = \quad (\text{ה})$$

$$g(0) = \quad (\text{ב})$$

$$g(125) = \quad (\text{ו})$$

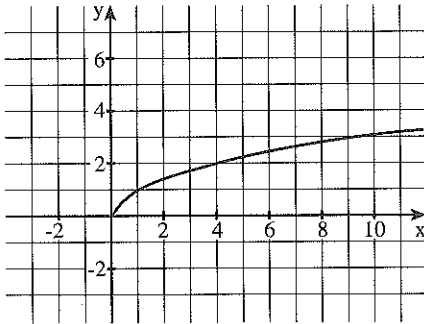
$$g(0.25) = \quad (\text{ג})$$

עוד על שורשים



1. (א) הניחו את הגרף המתאים
מדף שקוף ג', כך שיתלכד עם
הגרף המשורטט.

(ב) הזיזו ב- 2 יחידות למעלה
במקביל לציר y .
מהו חוק הפונקציה
שהתקבלה?

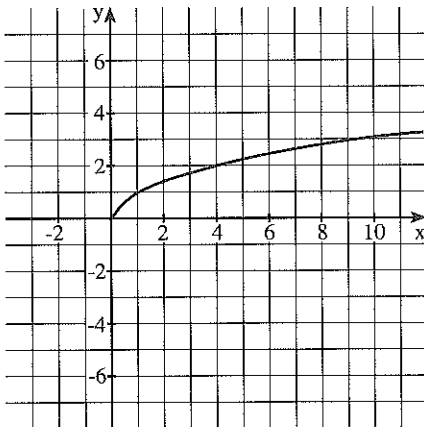


(ג) קראו מהגרף שהתקבל שיעורי נקודה אחת, ובדקו על-ידי הצבה בחוק
שרשמתם.



2. (א) הניחו את הגרף המתאים
מדף שקוף ג', כך שיתלכד עם
הגרף המשורטט.

(ב) הזיזו ב- 3 יחידות למטה
במקביל לציר y .
מהו חוק הפונקציה
שהתקבלה?



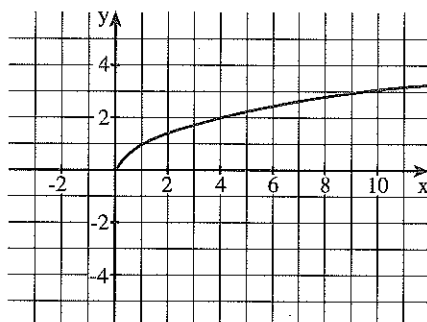
(ג) קראו מהגרף שהתקבל
שיעורי נקודה אחת, ובדקו
על-ידי הצבה בחוק שרשמתם.

(ד) רשמו נקודה על הגרף שהתקבל, ששיעור y שלה הוא הקטן ביותר.

(ה) רשמו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה שהתקבלה עם ציר
 x , ובדקו על ידי הצבה בחוק שרשמתם.



3. (א) הניחו את הגרף המתאים
מדף שקוף ג', כך שיתלכד
עם הגרף המשורטט.



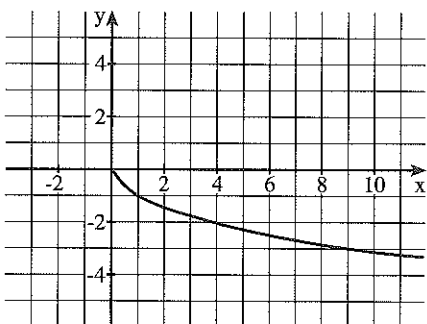
(ב) שקפו את הגרף בציר x.
מהו חוק הפונקציה
שהתקבלה?

(ג) קראו מהגרף שהתקבל שיעורי נקודה אחת, ובדקו על-ידי הצבה בחוק
שרשמתם.

(ד) עבור אילו ערכים של x הפונקציה שהתקבלה מוגדרת?



4. משורטט גרף הפונקציה $y = -\sqrt{x}$.



(א) הניחו את הגרף המתאים
מדף שקוף ג', כך שיתלכד
עם הגרף המשורטט.

(ב) הזיזו את הגרף שהתקבל
ביחידה אחת למעלה
במקביל לציר y.
מהו חוק הפונקציה
שהתקבלה?

(ג) קראו מהגרף שהתקבל שיעורי נקודה אחת, ובדקו על-ידי הצבה בחוק
שרשמתם.

(ד) רשמו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה שהתקבלה עם
הצירים. בדקו על-ידי הצבה בחוק.

(ה) עבור אילו ערכים של x הפונקציה שהתקבלה מוגדרת?



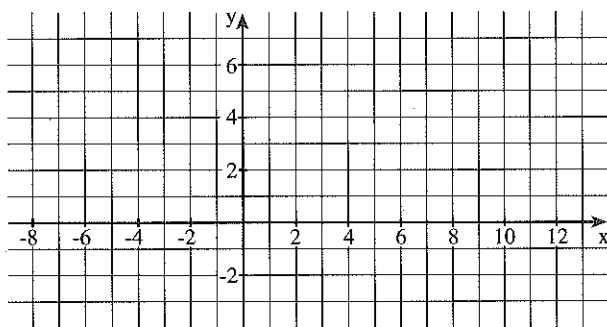
5. נתונה הפונקציה $y = \sqrt{x+3}$

(א) היעזרו במחשבון ובסדרת ההקשות על מנת להשלים את הטבלה.

$\downarrow x$		+	3	=	$\sqrt{\quad}$

x	-1	2	5	6	10	12
y						

(ב) סמנו את הנקודות במערכת הצירים.



(ג) הציבו $x = -3$, מה קיבלתם?

הציבו $x = -4$, מה קיבלתם?

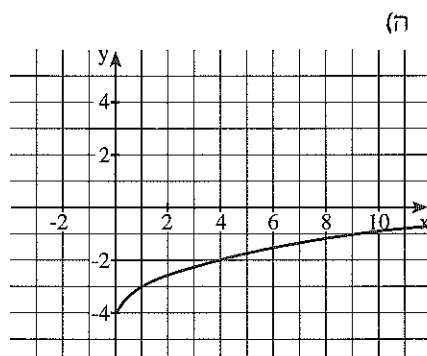
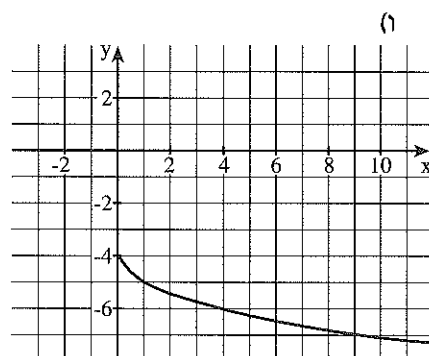
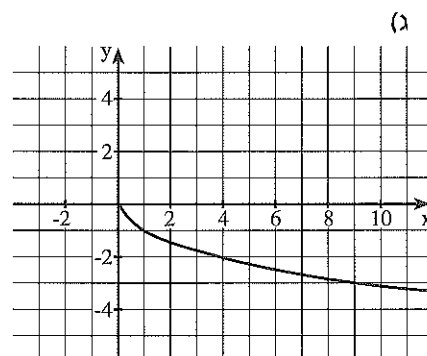
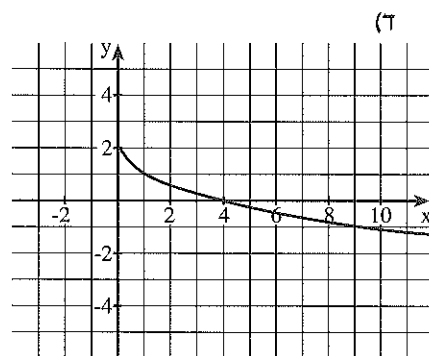
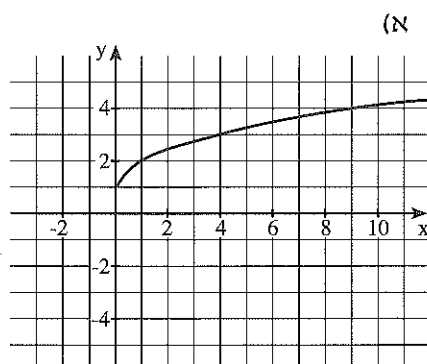
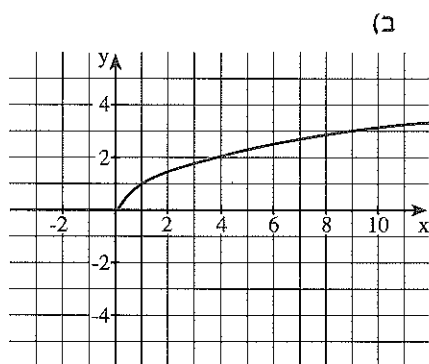
השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ד) עבור אילו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

(ה) הפונקציה שהתקבלה היא הזזה של $y = \sqrt{x}$. תארו מהי ההזזה.

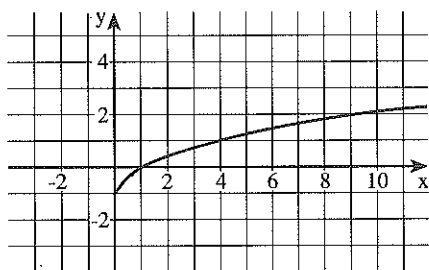
(תוכלו להיעזר בגרף שקוף ג').

6. כל הגרפים הבאים הם הזזות ושיקופים של גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$ (או גרף הפונקציה עצמה). רשמו לכל גרף את חוק הפונקציה. בדקו על ידי הצבת שיעורים של שתי נקודות בחוק שרשמתם.



7. הגרף מתאר את הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

א) השלימו מהגרף שיעור y של הנקודות הבאות:



(0,) (1,)

(4,) (6,)

בדקו על ידי הצבה בחוק הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

ב) השלימו על פי הגרף את שיעור x של הנקודה $(, 2)$ ובדקו על ידי הצבה בחוק הפונקציה.

ג) הפונקציה ששרטטתם היא הזזה של הפונקציה $y = \sqrt{x}$. מהי ההזזה?

8. א) (i) הזיזו את גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$ במקביל לציר y , כך שנקודת החיתוך עם ציר y תהיה $(0, 2)$.

(ii) רשמו את חוק הפונקציה שהתקבלה.

(iii) האם הגרף חותך את ציר x ? אם כן, באיזו נקודה?

ב) (i) הזיזו את גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$ במקביל לציר y , כך שנקודת החיתוך עם ציר y תהיה $(0, -4)$.

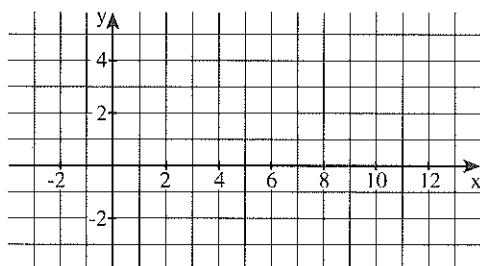
(ii) רשמו את חוק הפונקציה שהתקבלה.

(iii) האם הגרף חותך את ציר x ? אם כן, באיזו נקודה?

ג) (i) הזיזו את גרף הפונקציה $y = -\sqrt{x}$ במקביל לציר y , כך שנקודת החיתוך עם ציר y תהיה $(0, -6)$.

(ii) רשמו את חוק הפונקציה שהתקבלה.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{x-2}$.



(א) הציבו, השלימו וסמנו.

(2,) (3,)

(6,) (11,)

(ב) אם אפשר, מצאו את

שיעור y , וסמנו את

הנקודות במערכת הצירים.

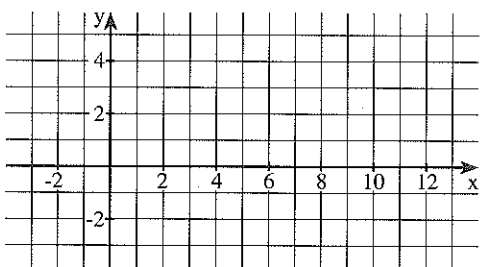
(0,) (2.25,) (5,) (9,)

השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ג) הפונקציה שהתקבלה היא הזזה של $y = \sqrt{x}$, מהי ההזזה?

(ד) עבור אילו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

10. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{x+1}$.



(א) מצאו את שיעורי נקודת

החיתוך של גרף

הפונקציה עם ציר x ,

וסמנו במערכת הצירים.

(ב) מצאו את שיעורי נקודת

החיתוך של גרף

הפונקציה עם ציר y וסמנו.

(ג) אם אפשר, מצאו את שיעור y , וסמנו במערכת הצירים.

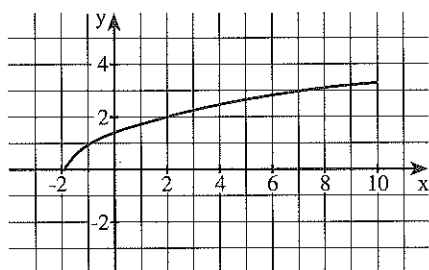
(-2,) (2,) (3,) (5,) (8,)

(ד) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ה) הגרף הוא הזזה של $y = \sqrt{x}$, מהי ההזזה?

(ו) עבור אילו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

11. א) איזה חוק מתאים לגרף המשורטט? נמקו.



(i) $y = \sqrt{x-2}$

(ii) $y = \sqrt{x} - 2$

(iii) $y = \sqrt{x+2}$

ב) רשמו את החוק המתאים: $y =$
 והשלימו $(-2,)$ $(2,)$.
 בדקו אם הנקודות אכן על גרף הפונקציה.

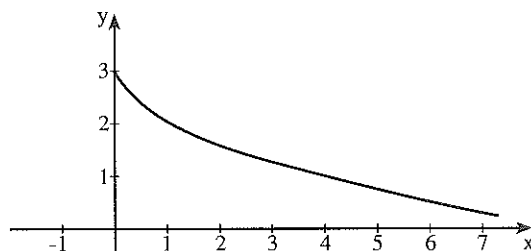
12. משורטט גרף הפונקציה $y = -\sqrt{x} + 3$

א) הציבו והשלימו.

$(4,)$ $(5,)$

$(7,)$ $(8.5,)$

האם ציר x הוא אסימפטוטה?



ב) הציבו והשלימו: $(9,)$ $(10,)$ $(16,)$

בדקו את תשובתכם לסעיף א).

13. התאימו חוק לגרף.

$$y = -\sqrt{x} - 3 \quad (\text{ד})$$

$$y = \sqrt{x+3} \quad (\text{ה})$$

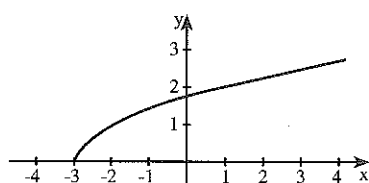
$$y = \sqrt{x-3} \quad (\text{ו})$$

$$y = \sqrt{x} + 3 \quad (\text{א})$$

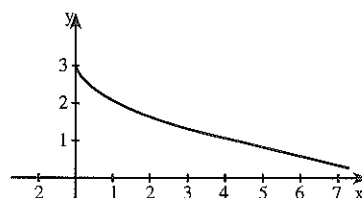
$$y = -\sqrt{x} + 3 \quad (\text{ב})$$

$$y = \sqrt{x} - 3 \quad (\text{ג})$$

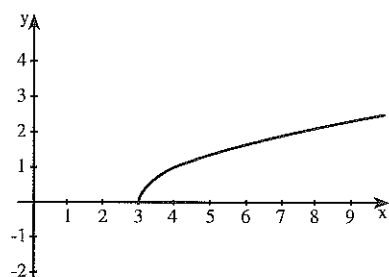
(ii)



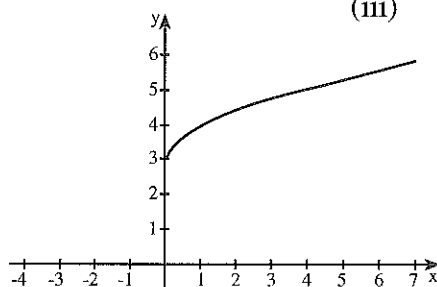
(i)



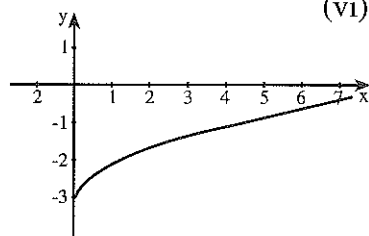
(iv)



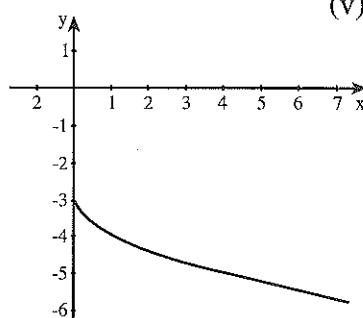
(iii)



(vi)

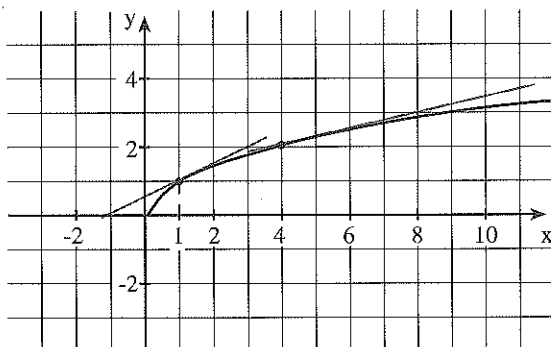


(v)



על שורשים ונגזרת

1. משורטט גרף הפונקציה



$f(x) = \sqrt{x}$ ושני משיקים לגרף הפונקציה.

א) קראו שיפועים של שני המשיקים והשלימו:

$$f'(4) = \underline{\hspace{2cm}} \quad f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

ב) הוסיפו < או > $f'(8) \square f'(10)$

$f'(80) \square f'(100)$

ג) תארו את קצב השינוי של שיפועי המשיקים, ככל ש- x גדל.

ד) נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

הסבירו בעזרת הנגזרת:

מדוע הפונקציה עולה עבור כל ערך של x בתחום הגדרתה?

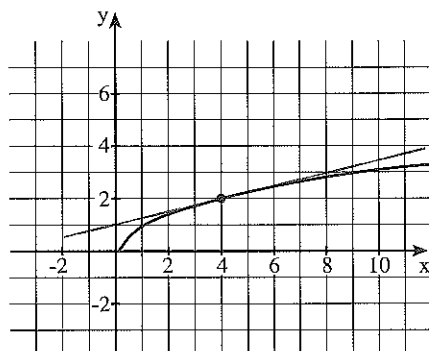
מדוע לפונקציה אין נקודות קיצון כאשר $x > 0$?

2. משורטט גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$, ומשיק לפונקציה בנקודה בה $x = 4$.

א) מהו שיפוע המשיק בנקודה בה $x = 4$?

ב) הניחו את הגרף המתאים (עם המשיק) מדף שקוף ד', באופן שהגרף יתלכד עם הגרף המשורטט. הזיזו כך שיתקבל הגרף של $g(x) = \sqrt{x} + 2$.

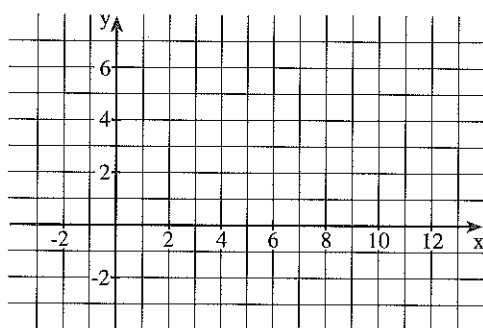
ג) מהו שיפוע המשיק של הפונקציה g בנקודה בה $x = 4$?



ד) מה תוכלו לומר על המשיקים של שתי הפונקציות בנקודה בה $x = 4$?

ה) מצאו את נגזרת הפונקציה g . נסו להסביר בעזרת הנגזרת את תשובותיכם לסעיפים ג', ד'.

ו) במה דומות ובמה שונות הפונקציות $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = \sqrt{x} + 2$.



3. נתונה הפונקציה

$$g(x) = 2\sqrt{x}$$

א) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר y , וסמנו במערכת הצירים.

ב) עבור אילו ערכים של x הפונקציה מוגדרת?

ג) השלימו את הטבלה, סמנו את הנקודות, ושרטטו סקיצה של הגרף.

x	0.25	1	2	3	4	9
$g(x)$						

ד) הניחו את הגרף מדף שקוף ג', כך שיתאר את הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$. במה דומות ובמה שונות שתי הפונקציות?

ה) לאיזו פונקציה f או g יש שיפוע גדול יותר בנקודה בה $x = 4$?

ו) מצאו נגזרת של הפונקציה $g(x) = 2\sqrt{x}$ והסבירו בעזרת הנגזרת מדוע הפונקציה עולה עבור כל ערך של x .

ז) חשבו $f'(4)$, $g'(4)$ והסבירו תשובתכם לסעיף ה'.

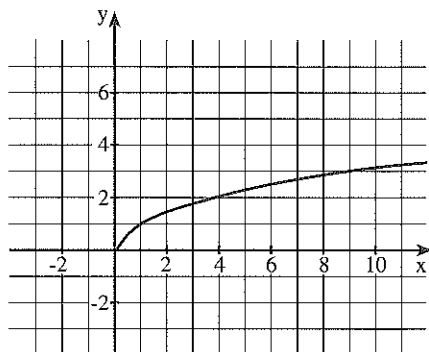


4. במערכת הצירים משורטט גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$.

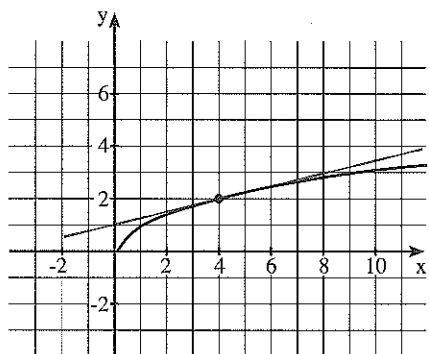
(א) שרטטו באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

(ב) מצאו את נגזרת הפונקציה $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ (כדאי לרשום $g'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$).

וחשבו את שיפוע הפונקציה g בנקודה $(9, 1.5)$.



5. משורטט גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ ומשיק לפונקציה בנקודה בה $x = 4$.



(א) קראו ורשמו את משוואת המשיק.

(ב) (i) חשבו, בעזרת הנגזרת, את שיפוע הפונקציה בנקודה $(4, 2)$.

(ii) מצאו את משוואת המשיק בנקודה $(4, 2)$, ובדקו את תשובתכם

לסעיף א'.



6. א) התאימו חוק לגרף.

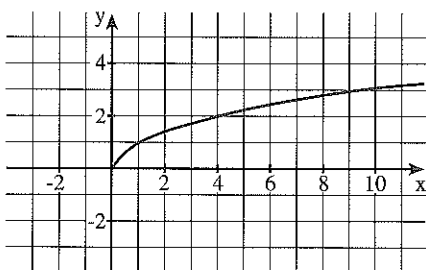
$$h(x) = \sqrt{x} + 2$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

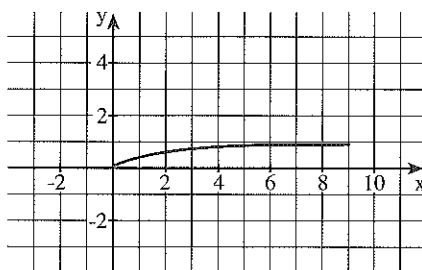
$$k(x) = 3\sqrt{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$$

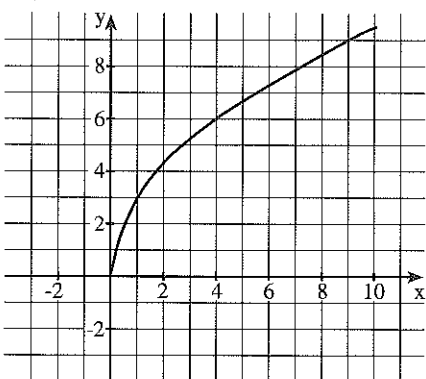
(ii)



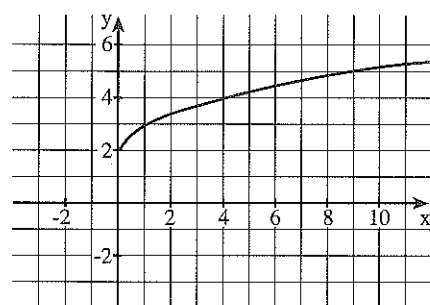
(i)



(iv)

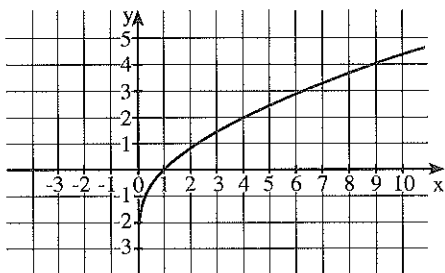


(iii)



ב) לכל אחת מהפונקציות, מצאו את שיפוע הפונקציה בנקודה בה $x = 4$.

ג) שרטטו משיק לכל אחד מהגרפים בנקודה בה $x = 4$.

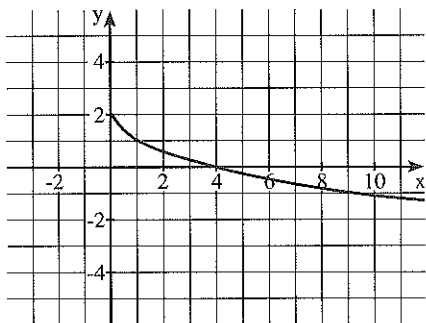


7. משורטט גרף הפונקציה
 $y = 2\sqrt{x} - 2$

(i) האם הפונקציה עולה
 או יורדת בנקודה בה
 $x = 9$?

(ii) שרטטו, בקירוב, את המשיק בנקודה בה $x = 9$.

(ב) חשבו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 9$ ובדקו
 שהמשיק ששרטטתם מתאים לשיפוע שחשבתם.



8. משורטט גרף הפונקציה
 $y = -\sqrt{x} + 2$

(i) האם הפונקציה עולה
 או יורדת בנקודה בה
 $x = 9$?

(ii) שרטטו בקירוב, את
 המשיק בנקודה בה $x = 9$.

(ב) חשבו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה בה $x = 9$ ובדקו
 שהמשיק ששרטטתם מתאים לשיפוע שחשבתם.

9. (א) גזרו את הפונקציות הבאות:

(iii) $y = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$

(i) $y = \sqrt{x} - 2x$

(iv) $y = \frac{\sqrt{x}}{3}$

(ii) $y = 4\sqrt{x} - x^2$

(ב) לגבי כל אחת מהפונקציות בדקו אם היא עולה או יורדת בנקודה בה
 $x = 1$.



10. פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0 \quad \text{דוגמה:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 2 / \cdot \sqrt{x}$$

$$1 = 2\sqrt{x} / \text{נעלה בריבוע}$$

$$1 = 4x / :4$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{(ד)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \quad \text{(א)}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 = 0 \quad \text{(ה)}$$

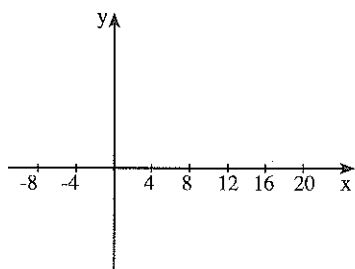
$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{(ב)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - 2x = 0 \quad \text{(ו) } \triangle$$

$$4\sqrt{x} - x = 0 \quad \text{(ג)}$$

↑
(נעגלו לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

11. נתונה הפונקציה $y = 4\sqrt{x} - x$.



(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ב) מצאו נקודות חיתוך עם הצירים וסמנו.

(ג) מצאו נקודת קיצון בעזרת הנגזרת ורשמו את סוגה.

(ד) רשמו נקודת קיצון נוספת (נקודת קצה), ואת סוגה.

(ה) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ו) האם יש לפונקציה נקודות מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט? אם כן, רשמו אותן ואת סוגן.



12. חקרו את הפונקציה $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ לפי השלבים הבאים:

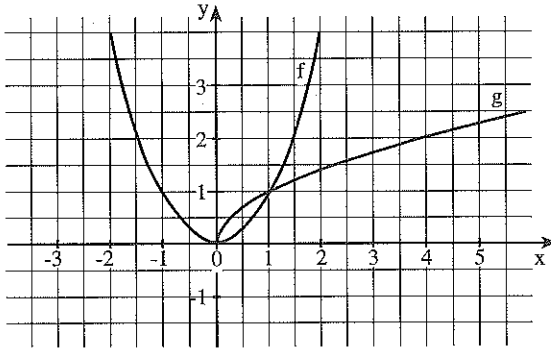
- (א) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) חשבו נקודת חיתוך עם ציר y וסמנו.
- (ג) חראו שגרף הפונקציה עובר דרך הנקודה $(4, 0)$ (סמנו נקודה זאת).
- (ד) מצאו וסמנו נקודות קיצון (כולל נקודת קצה), ורשמו את סוגן.
- (ה) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.
- (ו) האם יש לפונקציה נקודות מינימום מוחלט ומקסימום מוחלט? אם כן, רשמו אותן ואת סוגן.



13. מצאו תחומי עלייה וירידה לפונקציה $y = x^2 - 4\sqrt{x}$ (מצאו תחילה את נקודות הקיצון).

גרפיקים

14. משורטטות הפונקציות



$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

(א) למי מהפונקציות יש שיפוע גדול יותר בנקודה בה $x = 2$, הסבירו.

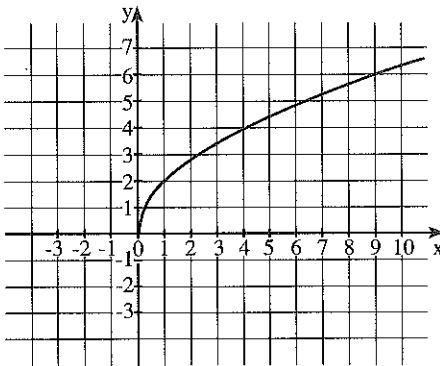
(ב) חשבו $f'(2)$, $g'(2)$ ובדקו תשובתכם לסעיף א'.

(ג) למי מהפונקציות יש שיפוע גדול יותר בנקודה בה $x = \frac{1}{4}$. הסבירו!

(ד) חשבו $f'(\frac{1}{4})$, $g'(\frac{1}{4})$ ובדקו תשובתכם לסעיף ג'.

15. משורטט גרף הפונקציה

$$f(x) = 2\sqrt{x}$$



(א) מצאו את שיפוע הפונקציה בנקודה $(4, 4)$.

(ב) מצאו את משוואת המשיק ושרטטו את המשיק.

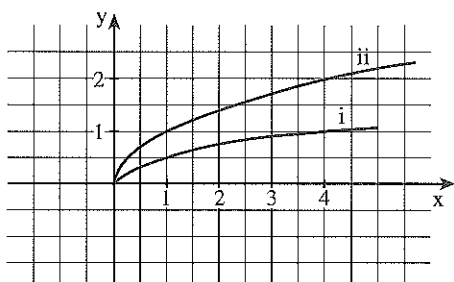
16. גזרו:

$$y = 4 - 3x + 2\sqrt{x} \quad \text{(ב)}$$

$$y = x^2 - 4\sqrt{x} - 1 \quad \text{(א)}$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2} + x \quad \text{(ג)}$$

17. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $y = 3\sqrt{x} - 6$ בנקודה בה $x = 9$.



18. משורטטות הפונקציות

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

א) התאימו חוק לגרף.

- ב) – מצאו את משוואות המשיקים של שתי הפונקציות בנקודה בה $x = 4$ (שרטטו, בקירוב, את המשיקים).
 – האם שני המשיקים נחתכים? אם כן, מצאו את שיעורי נקודת החיתוך.

19. האם הפונקציה $y = 2x^2 - 6\sqrt{x}$ עולה או יורדת בנקודה בה $x = 4$?

20. מצאו את נקודת הקיצון לפונקציה $y = 2x - 2\sqrt{x}$ (שימו לב גם לנקודת הקצה).

21. חקרו את הפונקציה $y = x^2 - 4\sqrt{x} + 1$ לפי השלבים הבאים:

- א) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב) מצאו את נקודות הקיצון.
 ג) השלימו את שיעורי הנקודה $(3, \quad)$.
 ד) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
 ה) כמה נקודות חיתוך לגרף הפונקציה עם ציר x?
 ו) רשמו תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

פרק ד: פונקציה מורכבת

מהי פונקציה מורכבת?

בסעיף זה נלמד להכיר את המושג "פונקציה מורכבת". ניתן ללמוד נושא זה תוך פעילות במחשב בעזרת התוכנה Excel או גליון אלקטרוני אחר. אם אינכם יכולים להשתמש ב Excel ללימוד סעיף זה, עברו לעמוד 181.

פונקציה מורכבת – בעזרת Excel

1.  קראו את כל הדוגמאות, ובעזרתן השיבו על שאלה 2.

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 & \text{דוגמה ג':} \\ y = [f(x)]^3 \end{cases}$$

ביטוי מפורש של y בעזרת x :

$$y = (3x^2 - 4)^3$$

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 & \text{דוגמה ד':} \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$$

ביטוי מפורש של y בעזרת x :

$$y = e^{3x^2 - 4}$$

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 & \text{דוגמה א':} \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$$

ביטוי מפורש של y בעזרת x :

$$y = \frac{1}{3x^2 - 4}$$

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 & \text{דוגמה ב':} \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$$

ביטוי מפורש של y בעזרת x :

$$y = \sqrt{3x^2 - 4}$$



2. (i) לגבי כל אחת מהפונקציות בטאו את y בעזרת x .

$$\begin{cases} f(x) = 5x^3 - 2 \\ y = [f(x)]^2 \end{cases} \quad (\text{ד}) \qquad \begin{cases} f(x) = 5x - 2 \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$\begin{cases} f(x) = 6x - 2 \\ y = \frac{1}{[f(x)]^2} \end{cases} \quad (\text{ה}) \qquad \begin{cases} f(x) = 5x - 2 \\ y = \sqrt[3]{f(x)} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} f(x) = 4 - 2x^2 \\ y = e^{f(x)} \end{cases} \quad (\text{ו}) \qquad \begin{cases} f(x) = x - 5 \\ y = [f(x)]^6 \end{cases} \quad (\text{ג})$$

(ii) – האם הפונקציה f שבסעיף א' מוגדרת עבור כל x ?

– האם הפונקציה $\frac{1}{f}$ שבסעיף א' מוגדרת עבור כל x ? הסבירו.



3. פתחו את התוכנה (Excel) או גיליון אלקטרוני אחר. אם סדר הטורים מימין לשמאל, הקישו על מקש הנמצא במסך בקצה הימני, בשורה שמעל ל"גיליון".

(א) נחשב ערכי $y = \frac{1}{f(x)}$ עבור הפונקציה $f(x) = x^2 + 3x$.

שמו לב: בפסגות זאת, בלוק מהגרזאיות, הדף מחולק לשניים: מצד ימין הגרזאיות ומצד שמאל הוראות לביצוע.

רשמו בטור A ערכים עבור x מהמספר 4- ועד המספר 8.

הביאו את הסמן לתא הראשון בטור A, הקישו (התא יסומן), רשמו 4- ואחר כך Enter.

רשמו בתא השני בטור A (מודגש כעת) הקישו Enter. $= a1 + 1$

הביאו את הסמן לקצה הימני התחתון של התא. יסומן +, לחצו, גררו למטה עד התא ה-13 ושחררו.

רשמו בטור B את ערכי f עבור הערכים שרשמתם בטור A.

רשמו בתא הראשון בטור B הקישו Enter. $= a1^2 + 3 * a1$
הביאו את הסמן לקצה הימני התחתון של התא הראשון בטור B, יסומן +, לחצו וגררו עד התא ה-13.

רשמו בטור C ערכים של $\frac{1}{f}$ עבור ערכים הרשומים בטור B.

רשמו בתא הראשון בטור C הקישו Enter. $= 1/b1$, גררו עד התא ה-13.

חשבו באופן ישיר את הערכים של

רשמו בתא הראשון בטור D הקישו Enter. $= 1 / (a1^2 + 3 * a1)$
וגררו עד התא ה-13.

$\frac{1}{f}$ עבור הערכים הרשומים בטור A.

ב) האם קיבלתם בטור D אותם ערכים כמו בטור C? הסבירו.

(ג) (i) בטאו את $\frac{1}{f}$ במפורש בעזרת x : $y =$

(ii) עבור אילו ערכי x הפונקציה הזו לא מוגדרת?

(iii) בדקו מה רשום בתאים המתאימים, בטורים C ו-D על מסך המחשב.

4. (א) נחשב את ערכי $y = [f(x)]^2$ עבור הפונקציה $f(x) = 2x - 4$.



מחקו את הרשום בטורים B, C ו-D. | הביאו את הסמן לתא הראשון בטור B, השחירו את הטורים C, B ו-D, והקישו על Delete.

ערכי ההצבה שרשמתם בטור A ישארו גם לתרגיל זה.

(i) רשמו בתא הראשון בטור B הוראה מתאימה ל- $f(x)$ בעזרת a1, וחשבו את הערכים עד התא ה-13.

(ii) רשמו בתא הראשון בטור C הוראה מתאימה לחישוב $[f(x)]^2$ בעזרת הערכים בטור B (רשמו את c1 בעזרת b1). חשבו את הערכים עד התא ה-13.

(iii) רשמו בתא הראשון בטור D הוראה מתאימה לחישוב $[f(x)]^2$ בעזרת הערכים בטור A (רשמו את d1 בעזרת a1). חשבו את הערכים עד התא ה-13.

(ב) השוו בין הערכים שקיבלתם בטור C ובטור D.

(ג) בטאו את $y = [f(x)]^2$ במפורש בעזרת x : $y =$



5. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + 5$. רשמו במפורש (בעזרת x) את הפונקציות הבאות.

$$y = [f(x)]^4 \quad (\text{ד}) \qquad y = \frac{1}{f(x)} \quad (\text{א})$$

$$y = \sqrt{f(x)} \quad (\text{ה}) \qquad y = \frac{1}{f(x)} + 5 \quad (\text{ב})$$

$$y = e^{f(x)} \quad (\text{ו}) \qquad y = \frac{1}{2 \cdot f(x)} \quad (\text{ג})$$

פונקציות מהצורה: $y = \frac{1}{f(x)}$, $y = e^{f(x)}$, $y = \sqrt{f(x)}$, $y = [f(x)]^n$ (n טבעי) וכו' נקראות פונקציות מורכבות. לפונקציה שנתונה באמצעות ביטוי, שבו מופיעה פונקציה אחרת, קוראים **פונקציה מורכבת**.



בפרק הקודם ראינו שאפשר לחקור פונקציות מהצורה $y = \frac{1}{f(x)}$

ללא הנגזרת, על סמך חקירת f .

כדי לחקור פונקציות מורכבות מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$, $y = e^{f(x)}$, יש לפעמים צורך להשתמש בנגזרת שלהן.

כדי לגזור פונקציה מורכבת, צריך לבצע פעולה הפוכה לזו שעשינו בתרגילים הקודמים, כלומר, להציג אותה בעזרת שתי פונקציות המרכיבות אותה.



6. רשמו שתי פונקציות המרכיבות כל אחת מהפונקציות המורכבות הבאות (ראו דוגמה).

$$y = e^{2x+5}$$

דוגמה: הפונקציה המורכבת:

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 5 \\ y = e^{f(x)} \end{cases} \quad \text{שתי פונקציות המרכיבות אותה:}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad (\text{ה})$$

$$y = \sqrt{2x + 1} \quad (\text{א})$$

$$y = \sqrt{x^3 - 2x} \quad (\text{ו})$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 5x} \quad (\text{ב})$$

$$y = \frac{1}{3e^x} \quad (\text{ז})$$

$$y = e^{x^2 + 2x} \quad (\text{ג})$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{ח})$$

$$y = (x^2 + 3x)^4 \quad (\text{ד})$$

7. נתונה הפונקציה $y = e^{x^2 - 5x}$.



א) השלימו רישום של שתי פונקציות המרכיבות אותה:

$$f(x) =$$

$$y =$$



ב) נחשב את ערכי הפונקציה בעזרת מחשב.

רשמו בטור A ערכים מ-1 עד 6
בדילוגים של 0.5.

רשמו בטור B ערכי f.

רשמו בטור C את ערכי הפונקציה
הנתונה, בעזרת הערכים שרשומים
בטור B.

רשמו בטור D חוק, כך שניתן יהיה
לחשב את ערכי הפונקציה הנתונה,
בעזרת הערכים בטור A.

בתא הראשון רשמו -1, בתא השני
רשמו $= a1 + 0.5$. הקישו Enter
וגררו למטה עד התא ה- 15.

רשמו בתא הראשון בטור B

גררו למטה עד התא ה- 15.
 $= a1^2 - 5 * a1$

הביאו את הסמן ל- C1.

הקישו על fx , בתפריט שהתקבל
בחרו **במתמטיקה וטריגונומטריה**
(מימין), בחרו ב- EXP והקישו על
אישור. רשמו B1 בחלון והקישו על
אישור.

מתקבל ב C1: $= Exp(B1)$.
(בגרסה ישנה של Excel מקישים על
"שלב הבא" במקום אישור).
גררו עד התא ה- 15.

עברו ל- D1, הקישו על fx

בחרו **במתמטיקה וטריגונומטריה**,
בחרו Exp, הקישו אישור, רשמו

בחלון, והקישו $a1^2 - 5 * a1$
אישור. מתקבל ב- D1:
 $= EXP(a1^2 - 5*a1)$
גררו עד התא ה- 15.

ג) השוו בין הערכים שקיבלתם בטור C ובטור D.



8. נתונה הפונקציה $y = (2x - 4)^4$. נחשב את ערכי הפונקציה בעזרת מחשב.

- מחקו את הרשום בטורים B, C, D.

(א) רשמו במחשב הוראה מתאימה, בטור B בעזרת a1, לקבלת הפונקציה הנתונה.

חשבו ערכים עד התא ה-15.

(ב) (i) רשמו את הפונקציה $y = (2x - 4)^4$ בעזרת שתי פונקציות המרכיבות אותה.

$$f(x) =$$

$$y =$$

(ii) חשבו, בעזרת מחשב, את ערכי f. לשם כך, רשמו בתא הראשון שבטור C הוראה מתאימה לקבלת f. חשבו ערכים עד התא ה-15.

(iii) רשמו בתא הראשון בטור D הוראה מתאימה לקבלת הפונקציה הנתונה, בעזרת הערכים בטור C.

(ג) בדקו שקיבלתם אותם ערכים בטורים B ו-D.



9. נתונה הפונקציה $y = \sqrt{2x - 2}$

- מחקו את הרשום בטורים B, C ו-D.

(א) חשבו, בעזרת מחשב, את ערכי הפונקציה.

כדי לקבל $\sqrt{\quad}$, הקישו fx, בחרו **במתמטיקה וטריגונומטריה**,

בחרו **SQRT**, **הקישו אישור**, ורשמו בחלון **$2 * a1 - 2$** **והקישו אישור**. בתא B1 מתקבל $= \text{SQRT}(2 * a1 - 2)$.

(ב) (i) רשמו את הפונקציה $y = \sqrt{2x - 2}$ בעזרת שתי פונקציות.

$$f(x) =$$

$$y =$$

(ii) חשבו, בעזרת מחשב, את ערכי f בטור C.

(iii) רשמו בתא הראשון בטור D הוראה מתאימה לקבלת הפונקציה הנתונה, בעזרת הערכים בטור C.

(ג) בדקו שקבלתם אותם ערכים בטורים B ו-D.

(ד) (i) מה קורה לערכי הפונקציה עבור ערכים שליליים של

$$f(x) = 2x - 2$$

(ii) מה תחום ההגדרה של הפונקציה $y = \sqrt{2x - 2}$?

אם לאיתם ספיק זה בעזרת הילוכה Excel, עברו לעמוד 184.

פונקציה מורכבת – ללא מחשב

1.  קראו את כל הדוגמאות, ובעזרתן השיבו על שאלה 2.

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 & \text{דוגמה ג':} \\ y = [f(x)]^3 \end{cases}$$

ביטוי מפורש של y בעזרת x :

$$y = (3x^2 - 4)^3$$

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 & \text{דוגמה ד':} \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$$

ביטוי מפורש של y בעזרת x :

$$y = e^{3x^2 - 4}$$

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 & \text{דוגמה א':} \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$$

ביטוי מפורש של y בעזרת x :

$$y = \frac{1}{3x^2 - 4}$$

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 & \text{דוגמה ב':} \\ y = \sqrt[3]{f(x)} \end{cases}$$

ביטוי מפורש של y בעזרת x :

$$y = \sqrt{3x^2 - 4}$$

2.  (i) לגבי כל אחת מהפונקציות בטאנו את y בעזרת x .

$$\begin{cases} f(x) = 5x^3 - 2 & \text{(ד)} \\ y = [f(x)]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 5x - 2 & \text{(א)} \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 6x - 2 & \text{(ה)} \\ y = \frac{1}{[f(x)]^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 5x - 2 & \text{(ב)} \\ y = \sqrt[3]{f(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 4 - 2x^2 & \text{(ו)} \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = x - 5 & \text{(ג)} \\ y = [f(x)]^6 \end{cases}$$

(ii) – האם הפונקציה f שבסעיף אי מוגדרת עבור כל x ?

– האם הפונקציה $\frac{1}{f}$ שבסעיף אי מוגדרת עבור כל x ? הסבירו.

3.  נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$.

(א) השלימו שורה שנייה בטבלה.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
f								
$\frac{1}{f}$								

(ב) השלימו שורה שלישית בטבלה - היעזרו בערכים שרשמתם בשורה השנייה.

(ג) (i) בטאו במפורש את y בעזרת x .

(ii) הציבו $x = 3$ בביטוי שקיבלתם, חשבו והשוו עם הרשום בטבלה.

4.  נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + 5$.

רשמו במפורש (בעזרת x) את הפונקציות הבאות:

(א) $y = \frac{1}{f(x)}$ (ד) $y = [f(x)]^2$

(ב) $y = \frac{1}{f(x)} + 5$ (ה) $y = \sqrt{f(x)}$

(ג) $y = \frac{1}{2 \cdot f(x)}$ (ו) $y = e^{f(x)}$

פונקציות מהצורה: $y = \frac{1}{f(x)}$, $y = e^{f(x)}$, $y = \sqrt[n]{f(x)}$ וכי נקראות פונקציות מורכבות.
 לפונקציה שנתונה באמצעות ביטוי, שבו מופיעה פונקציה אחרת, קוראים **פונקציה מורכבת**.



בפרק הקודם ראינו שאפשר לחקור פונקציות מהצורה $y = \frac{1}{f(x)}$

ללא הנגזרת, על סמך חקירת f .

כדי לחקור פונקציות מורכבות מהצורה $y = \sqrt[n]{f(x)}$, $y = e^{f(x)}$, יש לפעמים צורך להשתמש בנגזרת שלהן.

כדי לגזור פונקציה מורכבת צריך לבצע פעולה הפוכה לזו שעשינו בתרגילים הקודמים, כלומר, להציג אותה בעזרת שתי פונקציות המרכיבות אותה.

רשמו שתי פונקציות המרכיבות כל אחת מהפונקציות המורכבות הבאות (ראו דוגמה). 5



דוגמה: הפונקציה המורכבת: $y = e^{2x+5}$

שתי פונקציות המרכיבות אותה: $\begin{cases} f(x) = 2x + 5 \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

(ה) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

(א) $y = \sqrt{2x + 1}$

(ו) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$

(ב) $y = \frac{1}{x^2 - 5x}$

(ז) $y = \frac{1}{3e^x}$

(ג) $y = e^{x^2 + 2x}$

(ח) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(ד) $y = (x^2 + 3x)^4$

6. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x^2 - 2$.

רשמו במפורש (בעזרת x) את הפונקציות הבאות.

(ד) $y = e^{f(x)}$

(א) $y = \sqrt{f(x)}$

(ה) $y = 3 \cdot e^{f(x)}$

(ב) $y = \sqrt{f(x)} + 3$

(ו) $y = e^{3 \cdot f(x)}$

(ג) $y = \frac{1}{f(x)}$

7. רשמו שתי פונקציות המרכיבות כל אחת מהפונקציות הבאות.

(ד) $y = e^{-x}$

(א) $y = \frac{1}{4 - 2x^2}$

(ה) $y = (1 - 4x)^2$

(ב) $y = \sqrt{4 - 2x}$

(ו) $y = (6 - x)^4$

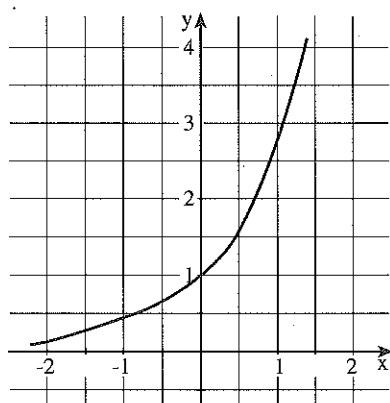
(ג) $y = e^{x^2 + 2x}$

נגזרת של פונקציה מורכבת

בפרק הקודם הכרתם פונקציות מורכבות מהצורה:

$$e^{f(x)} \quad \sqrt[n]{f(x)} \quad 1/f(x) \quad [f(x)]^n \quad (n \text{ טבעי}) \quad \text{וכו'}$$

בפרק זה נלמד למצוא נגזרת של פונקציות כאלה, ונראה כיצד להשתמש בנגזרת לחקירת פונקציות מורכבות, למציאת משוואת משיק ולפתרון בעיות קיצון.



1. משורטט גרף הפונקציה $f(x) = e^x$.



(א) השלימו:

$$f(1) =$$

$$f(0) =$$

$$f(-1) =$$

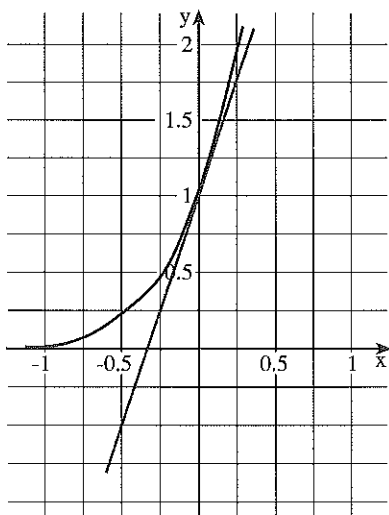
הפונקציה הנגזרת של f



היא: $f'(x) = e^x$.

(ב) (i) השלימו: $f'(0) =$

(ii) שרטטו את המשיק בנקודה בה $x = 0$ ורשמו את משוואתו.



2. משורטט גרף הפונקציה $g(x) = e^{3x}$ ומשיק בנקודה $(0, 1)$.



(א) מהו שיפוע המשיק בנקודה בה $x = 0$?

(ב) נגזרת הפונקציה g היא:

$$g'(x) = 3e^{3x}$$

חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודה $(0, 1)$, והשוו עם מה שקיבלתם בסעיף א'.

3. נתונה הפונקציה $y = (x^2 + 3)^2$.

(א) רשמו שתי פונקציות המרכיבות אותה.

$$f(x) =$$

$$y =$$

(ב) נגזרת הפונקציה היא: $y' = \underbrace{2(x^2 + 3)} \cdot \underline{2x}$

היעזרו בסימון הסוגריים () והסבירו כיצד בוצעה הגזירה.
בדקו אם גם בתרגיל 2 סעיף ב', בוצעה הגזירה באותו אופן.

- (ג) (i) לבדיקה: פתחו סוגריים בפונקציה $y = (x^2 + 3)^2$ וגזרו.
(ii) פשטו גם את הנגזרת הרשומה בסעיף ב', והשוו למה שרשמתם ב-(i).

כדי לקבל נגזרת של פונקציה המורכבת משתי פונקציות, יש לגזור את שתי הפונקציות ולכפול את נגזרותיהן.

דוגמה: נגזרו את הפונקציה המורכבת $y = (3x - 4x^2)^7$

עד כה פרקנו את הפונקציה לשתי פונקציות:

$$f(x) = 3x - 4x^2$$

$$y = [f(x)]^7$$



במקום לפרק לשתי פונקציות נמסגר את f

$$y = \left(\boxed{3x - 4x^2} \right)^7$$

$$y' = 7 \cdot \left(\boxed{3x - 4x^2} \right)^6 \cdot (3 - 8x)$$

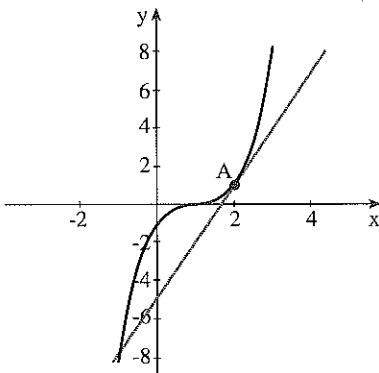
4. נתונה הפונקציה $y = (5x - 2)^6$ (א) 

הסבירו מדוע $y' = 30(5x - 2)^5$!

(ב) מסגרו את $f(x)$ בכל פונקציה מהצורה $y = (f(x))^n$ וגזרו.

(i) $y = (4 - 2x)^3$ (iii) $y = (1 + x)^5$

(ii) $y = (3 + 2x^2)^3$ (iv) $y = (2x - x^2)^2$



5. משורטט גרף הפונקציה $f(x) = (x - 1)^3$, ומשיק בנקודה $A(2, 1)$. 

- (א) (i) גזרו את הפונקציה f , וחשבו את שיפוע המשיק בנקודה A .
(ii) בדקו שתשובתכם אכן מתאימה לשיפוע המשיק המשורטט.

(ב) רשמו את משוואת המשיק.

6. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $y = (2 - x^2)^3$ בנקודה בה $x = -2$. 

בגרזאים 7-10 נסמך בפונקציות מורכבות מהצורה $y = e^{f(x)}$.

7. כדי לגזור מסגרו את $f(x)$ בכל פונקציה מורכבת מהצורה $e^{f(x)}$ באופן הבא: $e^{f(x)}$ וגזרו.

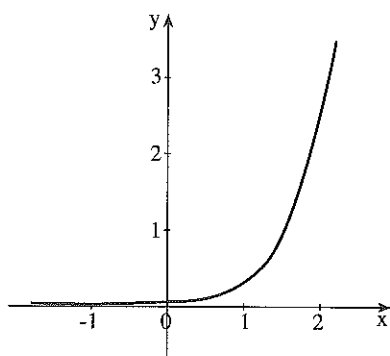
דוגמה: $y = e^{x^2+3x}$. הנגזרת: $y' = e^{x^2+3x} \cdot (2x+3)$.

(א) $y = e^{5x}$ (ב) $y = 3e^{0.5x}$

(ב) $y = e^{-2x+5}$ (ג) $y = e^x + e^{-x}$

(ג) $y = e^{-x^2}$ (ד) $y = 2e^{3x} - 4e^{-3x}$

8. משורטט גרף הפונקציה: $y = e^{2x-3}$.



(א) השלימו את שיעור y של כל אחת מהנקודות:

$A(0.5, \quad)$ $B(2, \quad)$

הנמצאות על גרף הפונקציה.

(ב) גזרו ומצאו את שיפועי

המשיקים בנקודות A ו- B .

(ג) באיזו מהנקודות השיפוע גדול יותר?

(ד) בדקו על פי השרטוט אם

תשובותיכם הגיוניות.

9. נתונה פונקציה: $y = -2e^{x^2-1}$.

(א) השלימו שיעור y של הנקודה: $A(1, \quad)$, הנמצאת על גרף הפונקציה.

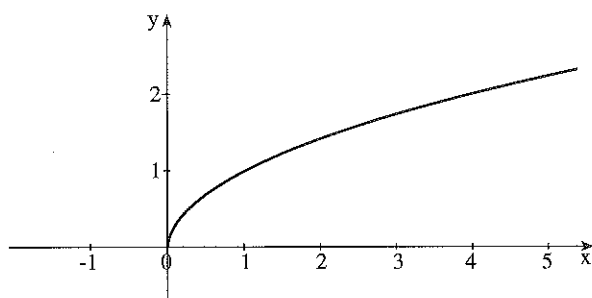
(ב) חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודה A .

(ג) מצאו את משוואת המשיק בנקודה A .

10. נתונה פונקציה: $y = e^{2x} - 4x$.

מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה, בנקודה בה $x = 0$.

בגז'לים 11-15 נעסוק בפונקציות מורכבות מהצורה $y = \sqrt[n]{f(x)}$.



11. משורטט גרף



הפונקציה:

$$h(x) = \sqrt{x}$$

הנגזרת של h היא:

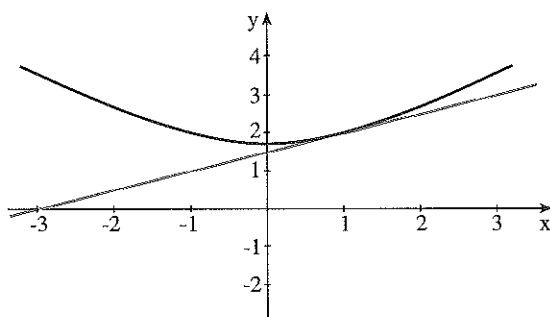


$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(א) השלימו: $h(4) =$ $h'(4) =$

(ב) שרטטו את המשיק בנקודה בה $x = 4$, ומצאו את משוואתו.

12. משורטט גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ ומשיק בנקודה $(1, 2)$.



(א) נסו למצוא נגזרת של הפונקציה g לפי הכלל שרשמנו לגבי גזירה של פונקציה מורכבת, $g'(x) =$

(ב) השלימו $g'(1) =$

האם המספר שקיבלתם מתאים לשיפוע המשיק המשורטט בנקודה $(1, 2)$?



13. מסגרו את $f(x)$ בכל פונקציה מורכבת מהצורה $y = \sqrt[n]{f(x)}$ (ראו דוגמה) וגזרו.

דוגמה: $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

הנגזרת: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x}} \cdot (2x+3) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$

(ג) $y = \sqrt{2x+3}$

(א) $y = \sqrt{3x-5}$

(ד) $y = \sqrt{x^2-x}$

(ב) $y = \sqrt{7x-x^2}$



14. (א) מצאו את נגזרת הפונקציה: $g(x) = \sqrt{x^3-4}$

(ב) חשבו את $g'(2)$

(ג) מצאו את משוואת המשיק בנקודה $(2, 2)$.



15. מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{x-8}$ בנקודה בה $x = 9$ (לשם כך מצאו את שיפוע המשיק ושיעור y של הנקודה).

בפרק ב' חקרנו את $\frac{1}{f}$ בעזרת הפונקציה f ללא גזירה, אך לפעמים יש

צורך להיעזר בנגזרת של $\frac{1}{f}$.



בפרק זה ראינו, שפונקציה מהצורה $\frac{1}{f}$ היא פונקציה מורכבת. על כן

ניתן למצוא את נגזרתה כפי שמצאנו נגזרת לפונקציה מורכבת.

16. כל אחת מהפונקציות הבאות היא מהצורה $y = \frac{1}{f(x)}$. מסגרו את $f(x)$ בכל פונקציה (כמו בדוגמה) וגזרו.

דוגמה: $y = \frac{2}{x^2 + x}$, $y' = -\frac{2 \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x)^2}$

(א) $y = \frac{1}{2x - 5}$ (ז) $y = \frac{1}{3x + 4}$

(ב) $y = \frac{3}{x^2 + 1}$ (ח) $y = \frac{5}{x^2}$

(ג) $y = \frac{2}{3x}$ (ט) $y = -\frac{2}{x^3}$

17. נתונה הפונקציה: $y = \frac{1}{x^2 - 3x}$

(א) השלימו שיעור y של הנקודה $A(1, \quad)$

(ב) מצאו את שיפוע הפונקציה בנקודה A .

(ג) מצאו את משוואת המשיק בנקודה A .

גרזילים

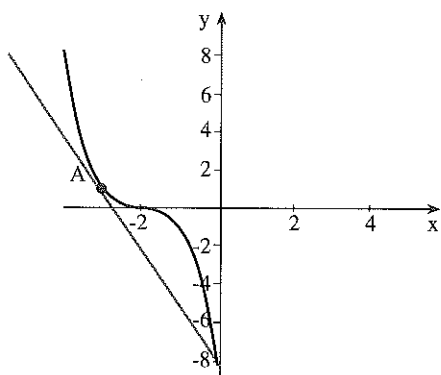
18. גזרו את הפונקציות הבאות.

(א) $y = e^{4x^2 - 2x}$ (ה) $y = \frac{3}{4 - x^2}$

(ב) $y = 2e^{-2x} + 3e^{4x}$ (ו) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{3 + 2x}$

(ג) $y = \sqrt{4 - x} + x^3 - 5$ (ז) $y = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + 3x$

(ד) $y = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{4 - x^2}$ (ח) $y = \frac{4 - x}{2} + \frac{\sqrt{9 - x}}{3}$



19. משורטט גרף הפונקציה

$$y = -(x+2)^3$$

ומשיק בנקודה $A(-3, 1)$.

(א) גזרו את הפונקציה

וחשבו את שיפוע

המשיק בנקודה A .

(ב) בדקו שתשובתכם אכן

מתאימה לשיפוע המשיק

המשורטט.

20. בכל סעיף נתונה פונקציה ושיעור x של נקודה על גרף הפונקציה. מצאו את

משוואת המשיק לגרף הפונקציה באותה נקודה.

(א) $x = 0$, $y = e^{-2x} - e^{2x}$

(ב) $x = -3$, $y = \sqrt{x^2 + 7}$

(ג) $x = 1$, $y = \frac{1}{8 - 4x^2}$

(ד) $x = 5$, $y = (6 - x)^4$

חקירה של פונקציות מורכבות

1. א. אילו מבין הפונקציות הרשומות מוגדרות לכל x ?

$$p(x) = \frac{2x^2}{(3-x)(4+x)}$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$n(x) = \frac{2}{x^2 + 3}$$

$$g(x) = (3 + 2x)^4$$

$$l(x) = e^{5-2x}$$

$$h(x) = \sqrt{4-x}$$

$$q(x) = \sqrt{x^4 + 2}$$

$$m(x) = \frac{3}{x-6}$$

ב. אילו מבין הפונקציות הנייל מוגדרות לכל המספרים, פרט לערך אחד.

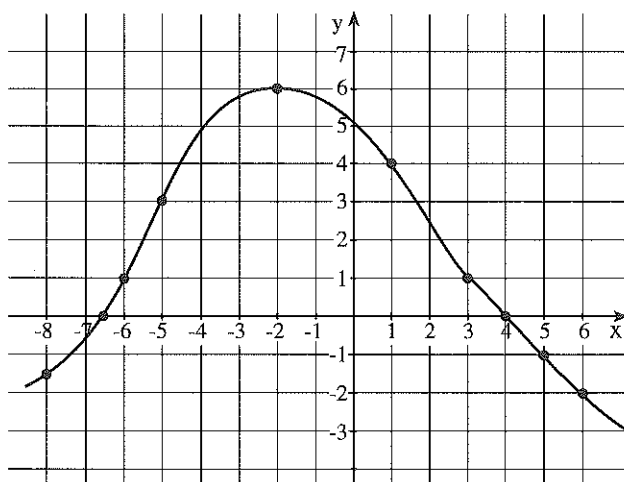
ג. אילו מבין הפונקציות הנייל מוגדרות לכל המספרים, פרט לשני ערכים.

ד. רשמו את הפונקציות שנותרו (שלא רשמתם בסעיפים קודמים).
רשמו לגבי כל פונקציה לפחות שלושה מספרים שעבורם הפונקציה לא מוגדרת.

במהלך עצמא נוסק בפונקציות מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$, שזוכן אינן מוגדרות
לכל x . ברשימת יש גם חקירה של פונקציות מורכבות אחרות.

2.  משורטט גרף של הפונקציה f .

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$



(א) עבור כל אחת מהנקודות המסומנות קראו את הערך של f . אם אפשר, חשבו את ערכי g , וסמנו באותה מערכת צירים.

(ב) רשמו נקודות משותפות לפונקציות f ו- g .

(ג) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה g .

(ד) בתחום שבין $x = 3$ ל- $x = 4$, האם הגרף של g מעל הגרף של f או מתחתיו? אם יש צורך תקנו את הגרף.

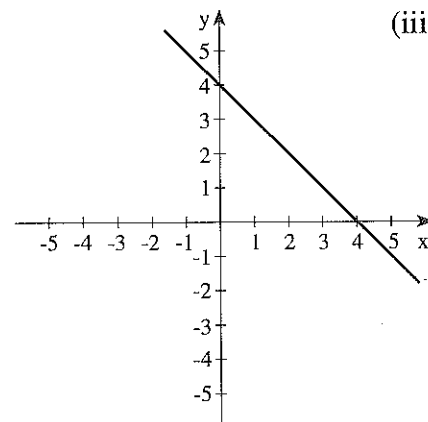
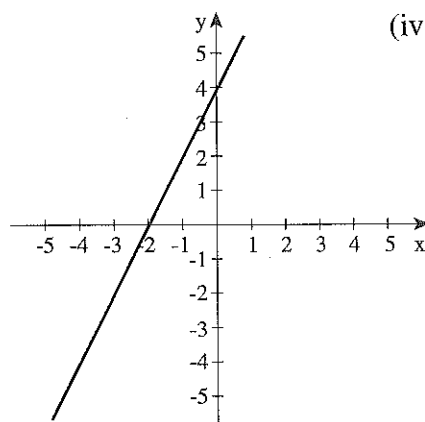
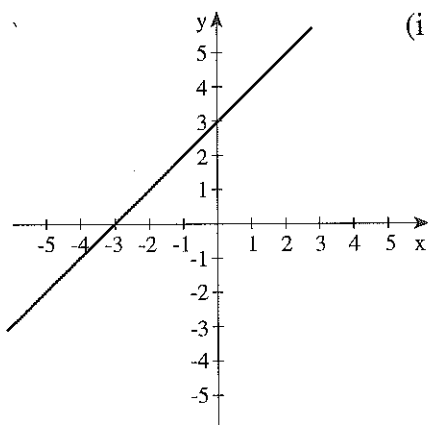
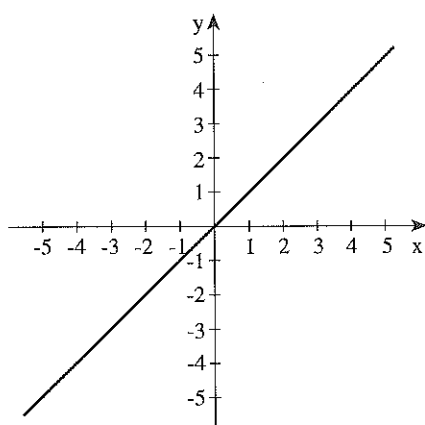
(ה) צבעו על ציר x את התחום המשותף לשתי הפונקציות f ו- g .

כדי לדעת את תחום ההגדרה של $g(x) = \sqrt{f(x)}$, עלינו למצוא את התחום שבו f חיובית או אפס.



3. (א) משורטטות פונקציות קוויות.

- הדגישו את חלק הגרף, שבו הפונקציה חיובית או אפס.
- רשמו את התחום המתאים.



(ב) נתונות ארבע פונקציות מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$ כאשר f מתארת את אחד מהישרים המשורטטים בסעיף א'.

– התאימו לכל פונקציה מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$ את הישר f מסעיף א'.

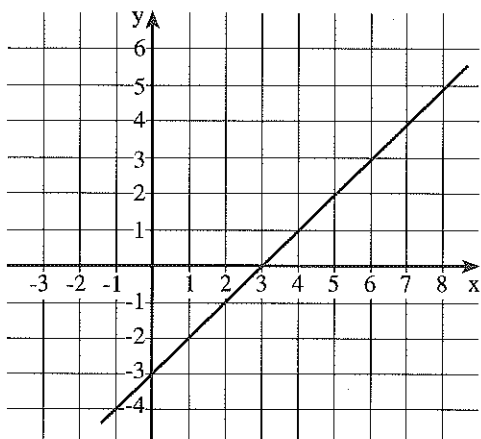
$$h(x) = \sqrt{2x + 4}$$

$$g(x) = \sqrt{4 - x}$$

$$n(x) = \sqrt{x + 3}$$

$$m(x) = \sqrt{x}$$

– רשמו את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.



נתונה הפונקציה

$$g(x) = \sqrt{x-3}$$

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
(תוכלו להיעזר בגרף של הפונקציה הקווית המשורטטת.)

(ב) מצאו את נגזרת הפונקציה g , והסבירו מדוע הנגזרת לא מתאפסת.

(ג) לפונקציה g יש נקודת קיצון אחת. רשמו את שיעוריה, וסמנו באותה מערכת צירים.

(ד) השלימו וסמנו באותה מערכת צירים נקודות נוספות שעל גרף הפונקציה g . $(3.5, \quad)$, $(4, \quad)$, $(7, \quad)$, $(8, \quad)$.

(ה) השלימו שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
(אפשר לחשב נקודות נוספות.)



5. חקרו את הפונקציה $y = \sqrt{3x-9}$ לפי השלבים הבאים:

(א) מצאו את תחום ההגדרה.

(ב) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.

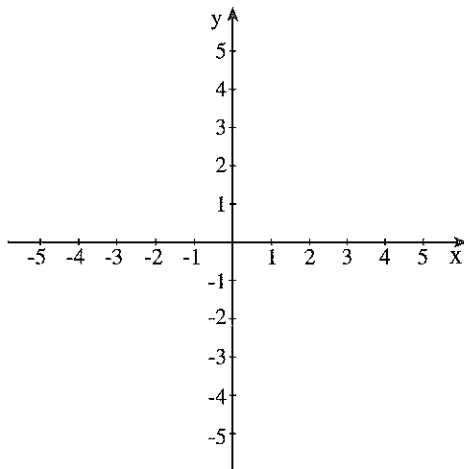
(ג) מצאו את נקודות הקיצון.

(ד) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה (חשבו וסמנו נקודות נוספות).

(ה) שרטטו באותה מערכת צירים גם את הישר $f(x) = 3x - 9$.

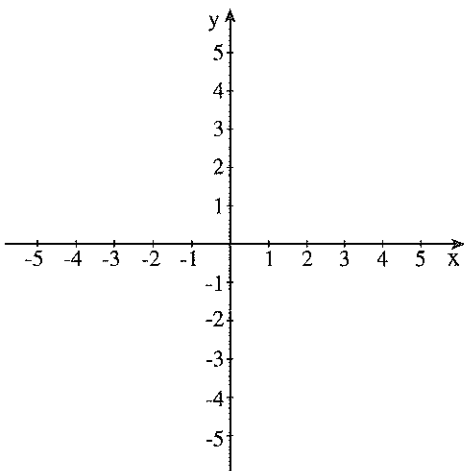
בגרפים הבאים נסווק בפונקציות מורכבות, מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$. כאשר f היא פונקציה ריבועית.

6. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.



(א) שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x) = x^2 - 4$, (מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים ואת נקודת המינימום).

(ב) רשמו את התחומים בהם f חיובית או אפס.

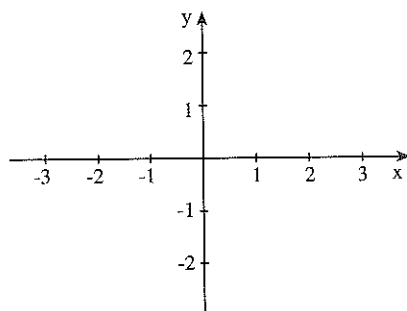


(ג) היעזרו בסעיף ב' ורשמו את תחום ההגדרה של g .

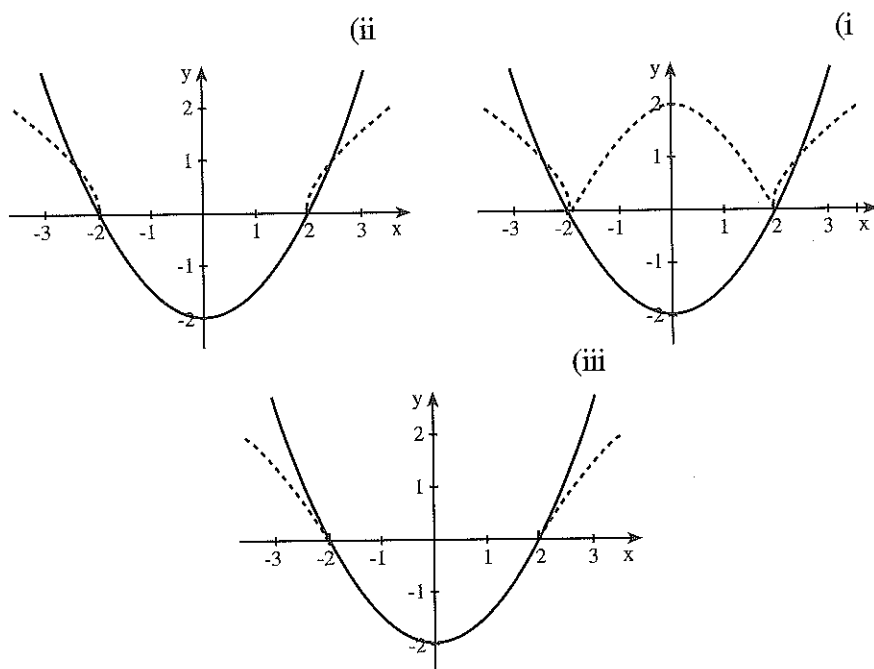
(ד) המשיכו לחקור את הפונקציה g ושרטטו סקיצה במערכת הצירים שלפניכם.

7. נתונה הפונקציה $h(x) = \sqrt{0.5x^2 - 2}$. 

(א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
(לשם כך שרטטו סקיצה של $f(x) = 0.5x^2 - 2$)



(ב) בכל מערכת צירים משורטטים גרפים של הפונקציה $f(x) = 0.5x^2 - 2$ ופונקציה נוספת (גרף מקווקו).
מי מהגרפים (המקווקווים) מתאימים לפונקציה הנתונה? הסבירו.



(ג) (i) הציבו:

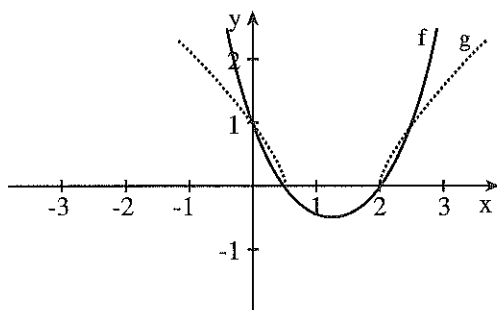
$$f(1) = \quad f(2) = \quad f(2.3) = \quad f(3) =$$

$$h(1) = \quad h(2) = \quad h(2.3) = \quad h(3) =$$

(ii) בדקו תשובתכם לסעיף ב'.



משורטטים גרפים של הפונקציות:



$$f(x) = x^2 - 2.5x + 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2.5x + 1}$$

(א) היעזרו בשרטוט, ורשמו את שיעורי הנקודות

המשותפות. (הציבו בחוקים של הפונקציות ובדקו תשובותיכם).

(ג) (i) תארו מתי הגרף של g מעל הגרף של f ($g(x) > f(x)$)

– התייחסו לערכי הפונקציות.

(ii) תארו מתי הגרף של g מתחת לגרף של f – התייחסו לערכי הפונקציות.

בתרגילים האחרונים חקרתם פונקציה מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$ כאשר f פונקציה ריבועית. השתמשו בגרף הפונקציה הריבועית כדי לשרטט את גרף הפונקציה $y = \sqrt{f(x)}$. ניתן לחקור פונקציית כאלה גם בעזרת נגזרת.



$$f(x) = \sqrt{(4-x)^2 + x^2}$$

(א) הסבירו מדוע הפונקציה מוגדרת לכל x .

(ב) מצאו את הנגזרת, השוו לאפס ומצאו את נקודות הקיצון. רשמו גם את סוג נקודות הקיצון.

(ג) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

בגרזונים הבאים גזקו כוונות, ובסציה הזו של פונקציה ייבוא
מאליה, או בסציה נצריג.

10. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{4x - x^2}$.



(א) שרטטו סקיצה של הפרבולה $f(x) = 4x - x^2$ (מספיק למצוא נקודות חיתוך של הפרבולה עם ציר x , לקבוע מאיזה סוג נקודת הקיצון, ואז לשרטט).

(ב) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה g ?

(ג) מצאו את נקודות החיתוך של g עם הצירים.

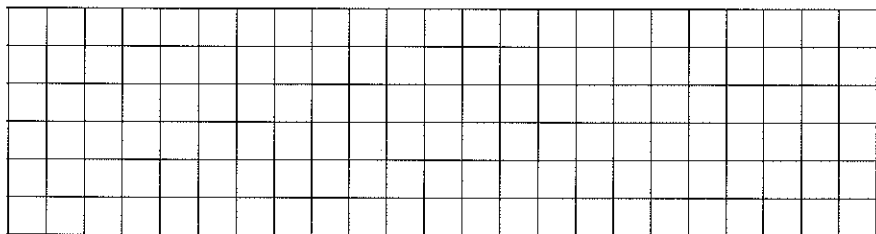
(ד) מצאו את נקודות הקיצון של g (כולל נקודות קצה).

(ה) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה g .

11. (א) (i) שרטטו 3 משולשים ישרי-זווית, כך שסכום הניצבים בכל משולש שווה ל-4.



(ii) רשמו את אורכי הניצבים, וחשבו בכל משולש את היתר (היעזרו במשפט פיתגורס).



(iii) נסו לשרטט משולש ישר זווית נוסף (גם בו סכום הניצבים שווה ל-4), שהיתר שלו קצר יותר מהיתר של המשולשים ששרטטתם בסעיף (i).

(ב) (i) סמנו את אחד הניצבים ב- x , ורשמו את אורך היתר כפונקציה של x .

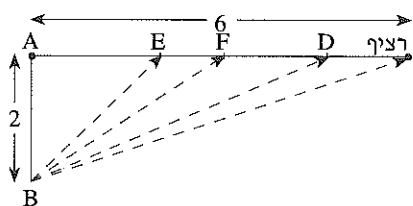
אם לא טעיתם קיבלתם את החוק הרשום בשאלה 9, בדקו.

(ii) הדגישו בשרטוט, שקיבלתם בשאלה 9, את חלק הגרף המתאים לבעיה.

(ג) (i) עבור איזה ערך של x אורך היתר הוא הקצר ביותר?

(ii) רשמו את אורכי שלושת הצלעות.

(iii) רשמו איזה סוג של משולש קיבלתם.



12.  דייג היה בסירתו. במרחק של

2 ק"מ מהחוף הוא שמע ברדיו

שזכה בלוטו. כמובן, שרצה

להגיע לרציף מהר ככל האפשר.

הרציף נמצא במרחק 6 ק"מ

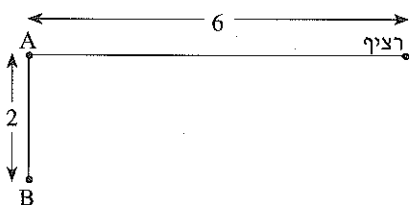
מזרחה מהנקודה על החוף

הקרובה ביותר לסירה.

הדייג החליט לחתור בקו ישר לנקודה כלשהי על החוף, וללכת עד הרציף.

הוא חותר במהירות 3 קמ"ש והולך במהירות 4 קמ"ש.

הדייג יכול לבחור מסלולים שונים (ראו ציור).



(א) רשמו את המרחקים

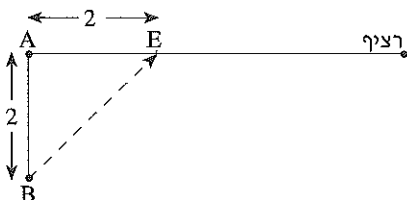
(במים וביבשה) שיעבור

הדייג, אם יבחר להגיע

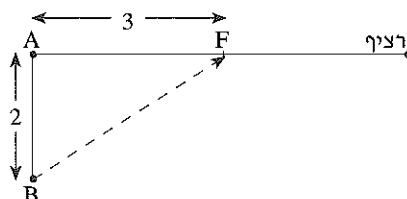
דרך הנקודה A.

חשבו את הזמן שיקח לדייג

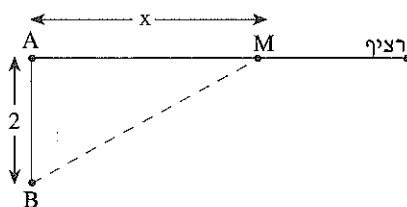
להגיע לרציף במקרה זה.



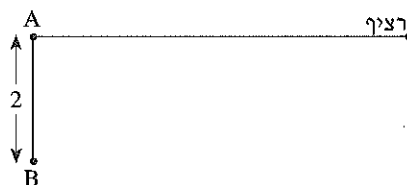
- (ב) חשבו את המרחקים (במים וביבשה) שיעבור הדייג, אם יבחר להגיע דרך הנקודה E. חשבו את הזמן במקרה זה.



- (ג) חשבו את הזמן, שיקח לדייג להגיע לרציף, אם יבחר להגיע דרך הנקודה F.



- (ד) נסמן ב- x את המרחק מהנקודה A (ראו ציור). בטאו את BM בעזרת x , ורשמו פונקציה (בעזרת x) שתבטא את הזמן, שיקח לדייג להגיע לרציף, אם יבחר להגיע דרך הנקודה M.



- (ה) מצאו את x עבורו מתקבל הזמן הקצר ביותר. (דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

סמנו בקירוב את הנקודה המתאימה בציור.

- (ו) האם המסלול הקצר ביותר מבחינת הזמן, הוא גם המסלול הקצר ביותר מבחינת האורך? הסבירו.



13. בשאלה זו שני חלקים.

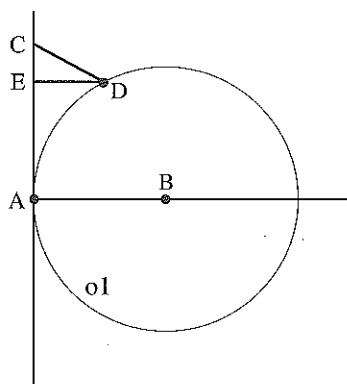
בחלק הראשון בעיה לחקירה באמצעות התוכנה "הנדסה בתנועה", הקשורה למעגל.

בחלק שני בעיה דומה, המתייחסת לפרבולה. נחקור אותה בעזרת אנליזה.

חלק ראשון: D נקודות הנעה על המעגל (ראה שרטוט).

נחקור את השתנות אורך הקטע DC כפונקציה של אורך

הקטע DE.



שרטטו קטע AB באורך 3 יחידות.

הביאו את הסמן למסך והקישו.
תסומן נקודה A.

← ישר מ-A באורך 3.

שרטטו מעגל שרדיוסו AB ומרכזו B.

מעגל שמרכזו B ורדיוסו AB.

שרטטו אנך מ-AB בנקודה A.

אנך מישר AB בנקודה A.

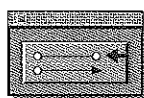
שנו את האנך לישר, הזיזו את החץ האדום.

סמנו נקודה D על המעגל ושרטטו אנך מנקודה D אל AC.

הביאו את הסמן למעגל והקישו, תסומן נקודה D.

אנך מנקודה D אל ישר AC.

חזרו לשרטוט קטעים.



חברו את DC.



מדדו את DC.

הביאו את מד האורך
למסך ורשמו DC.



מדדו את DE.

הביאו את מד האורך
למסך ורשמו DE.



שרטטו גרף המתאר את השתנות DC כאשר DE משתנה.

הביאו את מערכת הצירים למסך.
רשמו מה מייצג כל ציר.

הביאו את המסגרת
למסך והקישו.



הביאו את הסמן לחץ הקטן שבקצה מד-האורך
ED, לחצו, הזיזו עד לחץ המופיע ליד הציר
האופקי ושחררו. (ED ירשם ליד הציר).
חזרו לגבי מד-האורך DC והציר האנכי.

הקישו פעמיים על אחד הצירים.
יופיע מסך:

יחידות על הצירים
ציר אופקי מ 0 עד 8
ציר אנכי מ 0 עד 8

שנו יחידות על הצירים.

שרטטו את הגרף: גררו את D.

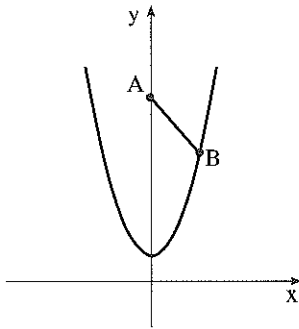
הזיזו את D, הגרף ישורטט.



עבור איזה ערך של DE אורך DC מינימלי?

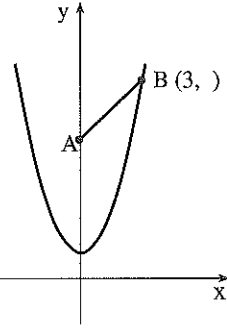
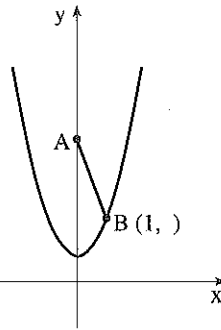
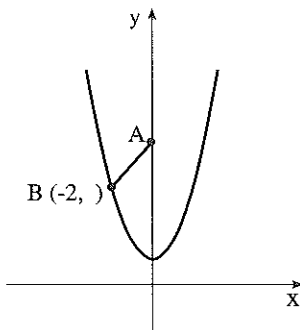
נסו להסביר את צורת הגרף שהתקבל.

חלק שני:

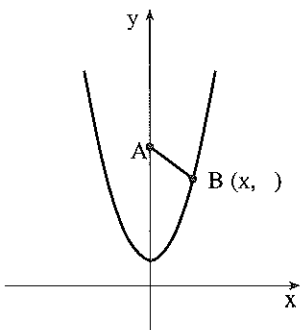


א) לפניכם הגרף של הפונקציה $f(x) = x^2 + 2$. שיעורי A: (0, 8).

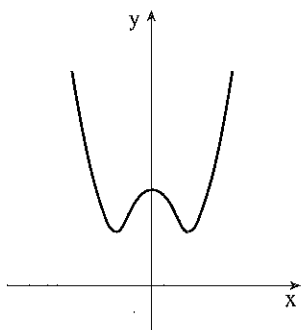
(i) השלימו את שיעורי B, וחשבו את אורך AB בכל שרטוט.



(ii) בטאו את אורך AB בעזרת השיעור הראשון של הנקודה B.

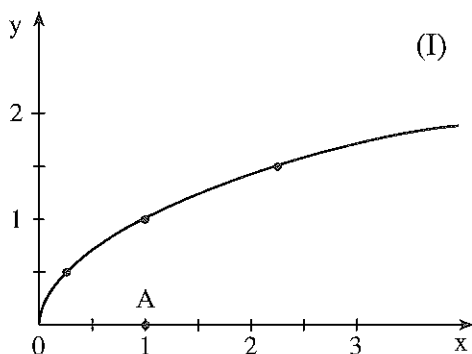


(iii) חשבו עבור איזה ערך של x המרחק AB מינימלי.



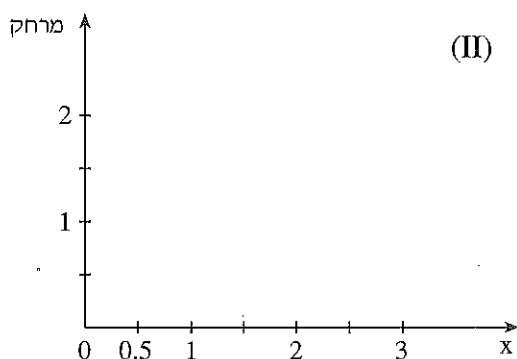
ב) הגרף המשוורטט הוא גרף הפונקציה g , המתאר את אורך AB כפונקציה של x . רשמו על הצירים את הערכים המתאימים, שמצאתם בסעיף א' (iii).

14. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$.



א) חשבו את המרחק של כל אחת מהנקודות, המסומנות על הגרף בסעיף (I), מהנקודה $A(1, 0)$.

סמנו את הנקודות המתאימות לכל אחד מהמרחקים שקיבלתם במערכת הצירים הריקה (II) שלפניכם.



האם לדעתכם יש לפונקציית המרחק מנקודה A ערך מקסימלי או מינימלי? אם כן, היכן בקירוב נמצאת הנקודה המתאימה על הגרף של f ?

- (ב) (i) רשמו פונקציה המתארת מרחק של נקודה כללית $(x, \sqrt{x})$ על הגרף של f מהנקודה $A(1, 0)$.
- (ii) מהי הנקודה הנמצאת במרחק הקטן ביותר מ- A ?
- (iii) סמנו את הנקודה שקיבלתם במערכת הצירים ii (שבסעיף א') והשלימו את שרטוט הגרף.

גרפיקס

15. חקרו את הפונקציה $y = (3 + x)^4$ לפי השלבים הבאים:

- (א) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.
- (ב) מצאו את נקודות הקיצון.
- (ג) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- (ד) רשמו תחומי עלייה וירידה.

16. חקרו את הפונקציה $y = (2x - 1)^3$ לפי השלבים הבאים:

- (א) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.
- (ב) מצאו את נקודות הקיצון.
- (ג) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- (ד) רשמו תחום בו הפונקציה שלילית ($f(x) < 0$).

17. (i) חקרו את הפונקציה $y = e^{-x^2} + 2x$ לפי השלבים הרשומים בשאלה 15.

- (ii) הסבירו מדוע גרף הפונקציה אינו חותך את ציר x .

18. חקרו את הפונקציה $y = e^{x+1}$ לפי השלבים הרשומים בשאלה 15.

19. לגבי כל אחת מהפונקציות הקוויות הבאות רשמו את התחום שבו הפונקציה חיובית או אפס. (אפשר להיעזר בשרטוט הישר המתאים).

$$y = 2x + 8 \quad (\text{א}) \qquad y = x \quad (\text{ב})$$

$$y = -2x + 5 \quad (\text{ג}) \qquad y = -x + 12 \quad (\text{ד})$$

20. לגבי כל אחת מהפונקציות הריבועיות הבאות רשמו את התחום שבו הפונקציה חיובית או אפס. כדאי להיעזר בסקיצה של הפרבולה המתאימה.

$$y = -x^2 + 6x \quad (\text{א}) \qquad y = x^2 - 9 \quad (\text{ב})$$

$$y = x^2 - 4x - 5 \quad (\text{ג}) \qquad y = 2x^2 + 6x \quad (\text{ד})$$

$$y = -x^2 + 3x + 4 \quad (\text{ה}) \qquad y = x^2 + 1 \quad (\text{ו})$$

21. חקרו את הפונקציות מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$ שלפניכם, לפי השלבים הבאים:

(i) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה (התחום בו f חיובית או אפס).

(ii) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.

(iii) מצאו את נקודות הקיצון (כולל נקודות קצה).

(iv) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

(v) רשמו תחומי עלייה וירידה.

$$g(x) = \sqrt{4x - 12} \quad (\text{א})$$

$$m(x) = \sqrt{8x - x^2} \quad (\text{ב})$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 4} \quad (\text{ג})$$

22. (א) שרטטו את גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ (מצאו תחילה: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון).

(ב) שרטטו באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה $-g(x)$.

(ג) מהו תחום ההגדרה של $-g(x)$?

23. רשומים החוקים של פונקציות מהצורה $y = \sqrt{f(x)}$ ומשורטטים הגרפים של f .

(א) התאימו גרף של f לחוק של $y = \sqrt{f(x)}$.

$$m(x) = -\sqrt{x^2 - 4x}$$

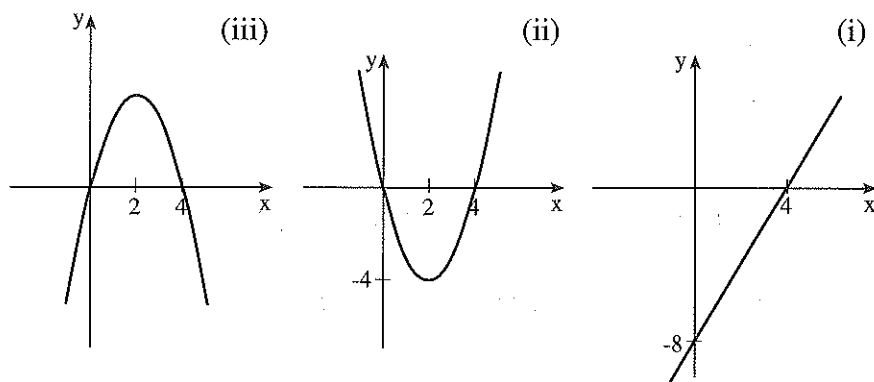
$$g(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$$

$$v(x) = -\sqrt{2x - 8}$$

$$h(x) = \sqrt{4x - x^2}$$

$$k(x) = -\sqrt{4x - x^2}$$

$$n(x) = \sqrt{2x - 8}$$

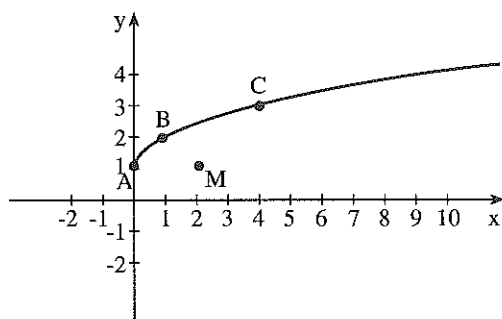


(ב) רשמו את תחום ההגדרה של כל פונקציה.

24. נתונים מלבנים, שהיקף כל אחד מהם הוא 20 ס"מ.

- (א) אחת מצלעות המלבן שווה ל- 7 ס"מ, חשבו את אורך אלכסון המלבן.
- (ב) שרטטו שני מלבנים שונים מזה שבסעיף א', וחשבו את אורך האלכסון בכל מלבן.
- (ג) נסו למצוא מלבן עם אורך אלכסון גדול יותר מאלכסון המלבנים שבסעיפים א' ו-ב'.
- (ד) סמנו את אחת הצלעות ב- x .
- (i) רשמו פונקציה המתאימה ל- x את אורך האלכסון.
- (ii) מצאו את x עבורו אורך האלכסון יהיה מינימלי.

25. משורטט גרף הפונקציה $y = \sqrt{x} + 1$, ומסומנת הנקודה $M(2, 1)$.



- (א) חשבו את מרחק כל אחת מהנקודות A, B, C מהנקודה M.
- (ב) רשמו פונקציה, המתארת מרחק נקודה על גרף הפונקציה מהנקודה M.
- (ג) מצאו את הנקודה הנמצאת במרחק הקטן ביותר מהנקודה M.

אינטגרל של פונקציה מורכבת

אם לא אמצאם עדיין אינטגרלים, בואו על סעיף זה. סעיף זה מופיע גם בחוברת אינטגרלים.

1.  גזרו את הפונקציות.

$$\begin{array}{ll} y = e^{-2x+1} & (א) \\ y = e^{2x+3} & (א) \\ y = e^{-x} & (ד) \\ y = e^{3x} & (ב) \end{array}$$

כל אחת מהפונקציות שבתרגיל זה היא פונקציה מורכבת מהצורה $y = e^{f(x)}$, כאשר f פונקציה קווית, ולכן f' קבוע, כלומר מספר. לפונקציה מורכבת כזו נוכל למצוא את האינטגרל.



$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c \quad (א) \quad 2. \quad \text{$$

$$(\frac{e^{2x}}{2} + c)' = \quad \text{גזרו ובדקו:}$$

$$\int 3e^{4x-1} dx = \frac{3e^{4x-1}}{4} + c \quad (ב)$$

$$(\frac{3 \cdot e^{4x-1}}{4})' = \quad \text{גזרו ובדקו:}$$

$$\int e^{-x+2} dx \quad \text{מצאו:} \quad (ג)$$

גזרו את התוצאה שקיבלתם ובדקו.



3. חשבו את האינטגרלים.

$$\int 2e^{2x+3} dx \quad (\text{ד})$$

$$\int e^{4x} dx \quad (\text{א})$$

$$\int -4e^{-x+2} dx \quad (\text{ה})$$

$$\int e^{3+2x} dx \quad (\text{ב})$$

$$\int (2e^{-2x+1} + 2x) dx \quad (\text{ו})$$

$$\int 3e^{-x+1} dx \quad (\text{ג})$$



4. גזרו את הפונקציות.

$$y = (3 - x)^5 \quad (\text{ג})$$

$$y = (2x + 3)^4 \quad (\text{א})$$

$$y = (2 - 3x)^2 \quad (\text{ד})$$

$$y = (5x - 1)^3 \quad (\text{ב})$$

כל אחת מהפונקציות שבתרגיל 4 היא פונקציה מורכבת מהצורה $y = [f(x)]^n$, כאשר f פונקציה קווית, ולכן f' קבוע, (כלומר מספר).



$$\int (2x + 4)^3 dx = \frac{(2x + 4)^4}{4 \cdot 2} + c \quad (\text{א}) \quad 5.$$

גזרו ובדקו.

הסבירו את החילוק ב-2.

$$\int (0.5x + 1)^3 dx \quad (\text{ג}) \quad \text{חשבו:}$$

$$\int (5 - 2x)^4 dx \quad (\text{ב}) \quad \text{חשבו:}$$

גזרו ובדקו.

גזרו ובדקו.

חשבו את האינטגרלים:



$$\int (x-1)^4 dx \quad (ה) \qquad \int (3-x)^3 dx \quad (א)$$

$$\int (-2x+3)^2 dx \quad (ו) \qquad \int (4x+1)^4 dx \quad (ב)$$

$$\int (7-3x)^5 dx \quad (ז) \qquad \int (x+4)^5 dx \quad (ג)$$

$$\int (3-0.5x)^4 dx \quad (ח) \qquad \int (0.1x-2)^3 dx \quad (ד)$$

תזכורת: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ לכן: $\int \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{x} + c$

גזרו את הפונקציות הבאות.



$$y = \frac{1}{-x+1} \quad (א) \qquad y = \frac{1}{2x+4} \quad (א)$$

$$y = \frac{1}{0.5x-2} \quad (ב) \qquad y = \frac{1}{x+1} \quad (ב)$$

כל אחת מהפונקציות שבתרגיל זה היא פונקציה מורכבת מהצורה

$$y = \frac{1}{f(x)}, \text{ כאשר } f \text{ פונקציה קווית, ולכן } f' \text{ קבוע (כלומר מספר).}$$



$$\int -\frac{1}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{2(2x+1)} + c \quad (א) \quad 8. \quad \text{גזרו ובדקו.}$$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} + c \quad (ב) \quad \text{גזרו ובדקו.}$$



9. חשבו את האינטגרלים.

$$\int \frac{-2}{(3x+1)^2} dx \quad (\text{ד})$$

$$\int -\frac{1}{(3x-2)^2} dx \quad (\text{א})$$

$$\int \frac{1}{2(2x-1)^2} dx \quad (\text{ה})$$

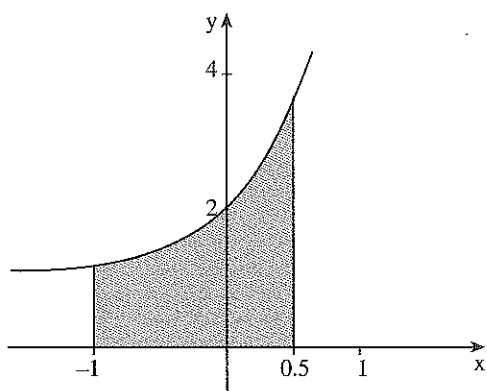
$$\int \frac{1}{(x-4)^2} dx \quad (\text{ב})$$

$$\int \frac{-1}{(2x)^2} dx \quad (\text{ו})$$

$$\int \frac{1}{(0.5x-3)^2} dx \quad (\text{ג})$$



10. בשרטוט מתואר גרף הפונקציה $f(x) = e^{2x} + 1$. חשבו את השטח הצבוע.

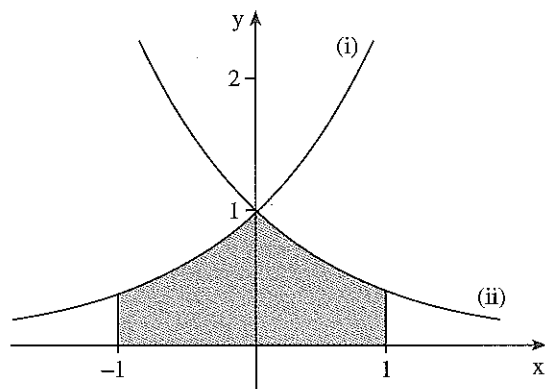


11. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = e^x$$

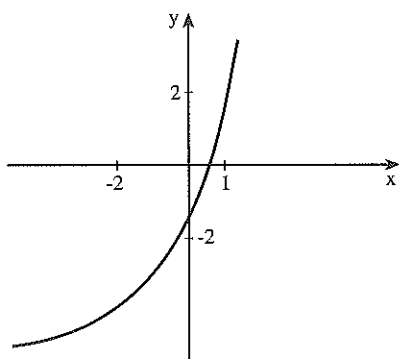
$$g(x) = e^{-x}$$

(א) התאימו לכל פונקציה את הגרף.



(ב) חשבו את השטח הצבוע.

גרפיקים



12. בשרטוט מתואר גרף

הפונקציה

$$f(x) = e^{2x} - e$$

(א) מצאו את נקודת

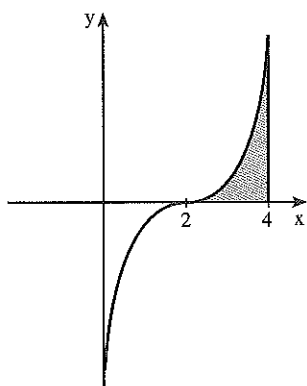
החיתוך של גרף

הפונקציה עם ציר x .

(ב) צבעו וחשבו את השטח

הכלוא בין גרף

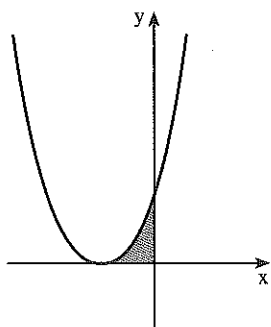
הפונקציה, ציר x וציר y .



13. בשרטוט מתואר גרף הפונקציה

$$f(x) = (0.5x - 1)^3$$

חשבו את השטח הצבוע.



14. בשרטוט מתואר גרף הפונקציה

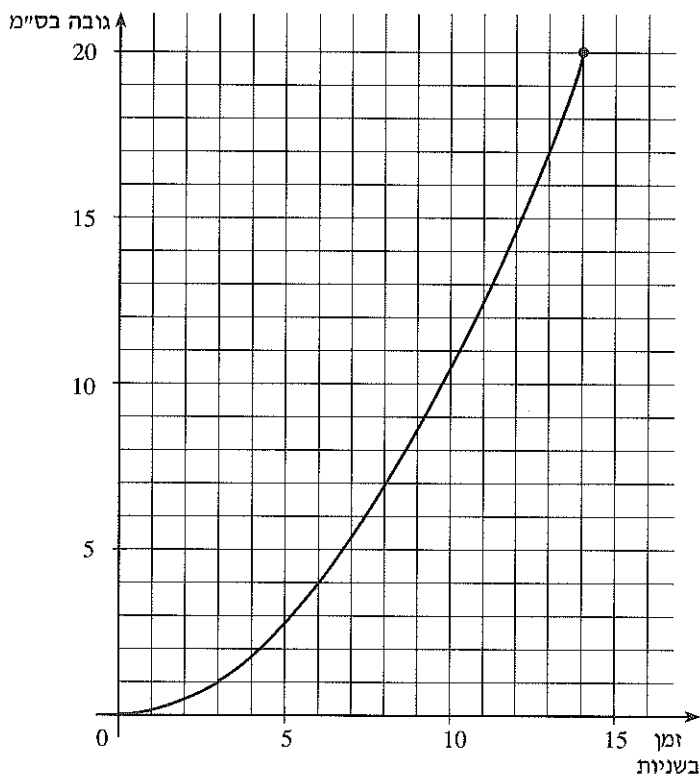
$$f(x) = (x + 1)^4$$

חשבו את השטח הצבוע.

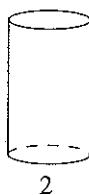
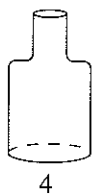
פרק ה: הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

קצב שינוי של פונקציה (מ- f ל- f')

1.  הגרף המשורטט מתאר השתנות של גובה מים בכלי. (המים מוזרמים לכלי בקצב אחיד עד שהכלי מלא.)



- (א) מה גובה המים אחרי 3 שניות? אחרי 6 שניות? אחרי 13 שניות?
 (ב) איזה מהכלים מתאים לגרף המשורטט?



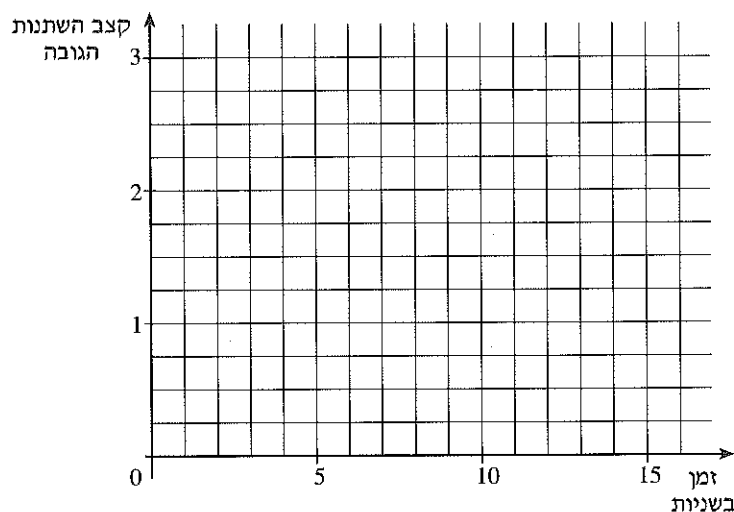
- (ג) (i) מה גובה הכלי?
 (ii) אחרי כמה שניות יגיעו המים לחצי מגובה הכלי?
 (iii) האם המים יגיעו למחצית מגובה הכלי אחרי מחצית זמן המילוי?
 הסבירו.

- (ד) (i) בכמה עלה (בקירוב) גובה המים במשך השניה השלישית? במשך השניה השביעית? במשך השניה האחת עשרה?
 (ii) תארו במילים את קצב השתנות גובה המים בכלי.

- (ה) הניחו משיק לגרף בראשית הצירים, "טיילו" אותו לאורך גרף הפונקציה משמאל לימין והשלימו את הטבלה.

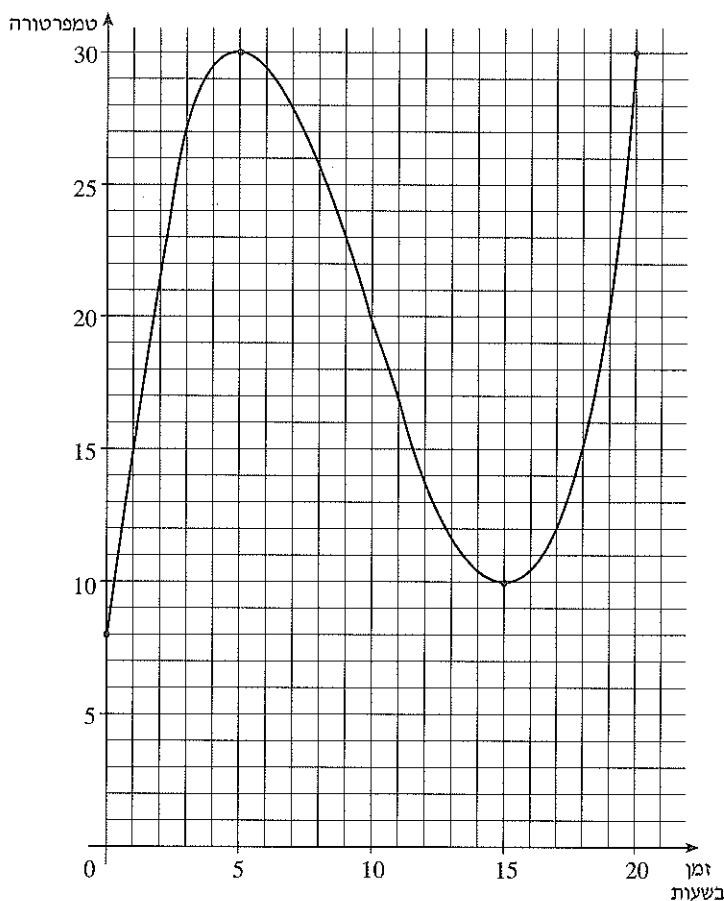
זמן מתחילת המדידה	2	3	5	7	10	12	13
קצב השתנות הגובה							

- (ו) שרטטו סקיצה של גרף המתאר את קצב השתנות גובה המים בכלי.





2. הגרף המפורט מתאר השתנות של טמפרטורה במשך 20 שעות.

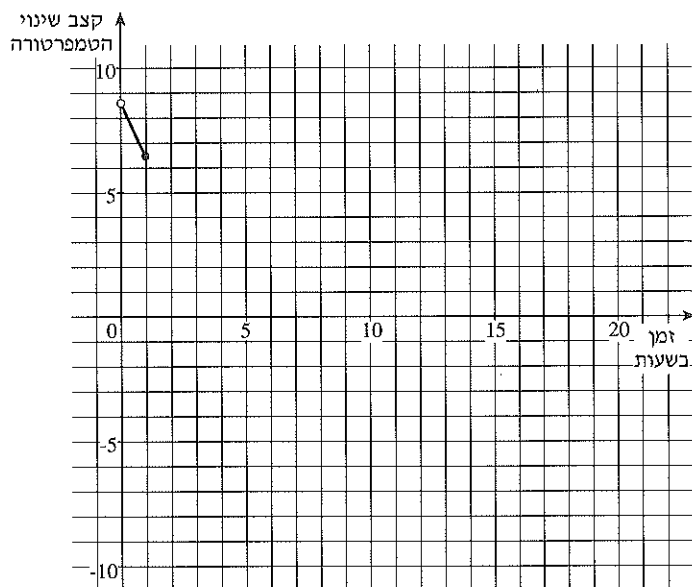


- (א) אחרי כמה שעות, מתחילת המדידה, היתה הטמפרטורה 15 מעלות? (רשמו את כל התשובות המתאימות).
- (ב) אחרי כמה שעות, מתחילת המדידה, היתה הטמפרטורה הגבוהה ביותר?
- (ג) (i) באיזה זמן, היתה הטמפרטורה הנמוכה ביותר? (שימו לב! זו נקודת קצה). רשמו גם את הטמפרטורה הנמוכה ביותר.
- (ii) יש גם נקודת מינימום אחרת. רשמו את שיעוריה.
- (ד) נתאר במילים את השתנות הטמפרטורה:
- ב- 5 שעות הראשונות למדידה, הטמפרטורה עולה.
- ... המשיכו את תאור ההשתנות.

ה) הניחו משיק בנקודת ההתחלה, "טיילנו" איתנו לאורך גרף הפונקציה משמאל לימין והשלימו את הטבלה.

זמן בשעות	1	3	4	5	7	10	13	15	18
קצב שינוי הטמפרטורה									

ו) (i) שרטטו גרף המתאר את קצב השינוי.



(ii) איך מתבטאת עליית הטמפרטורה בגרף הקצב?

(iii) איך מתבטאת ירידת הטמפרטורה בגרף הקצב?

(iv) איך מתבטא מעבר מעליה לירידה, בגרף הקצב?

(v) איך מתבטא מעבר מיירידה לעליה, בגרף הקצב?

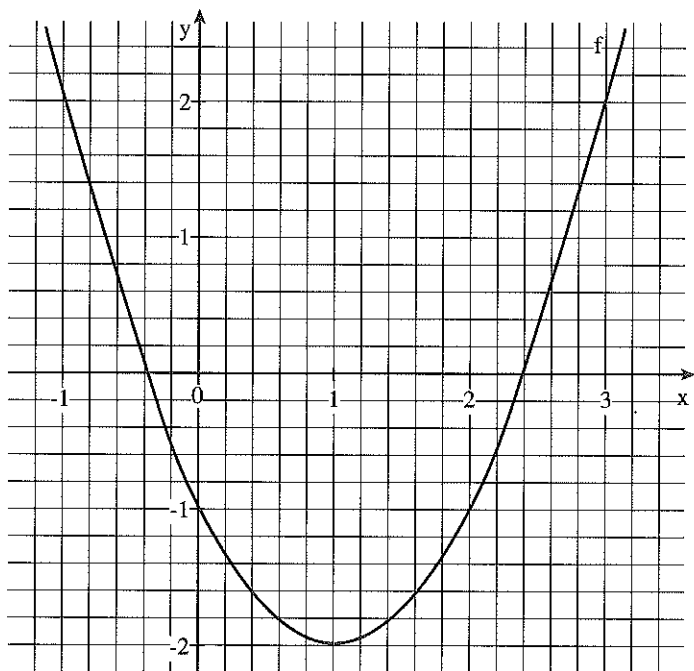
ניתן אפילו גרף 20 בש"א' 234.



3. (א) נתאר את השתנות הגרף המפורט:

עד $x = 1$ הפונקציה יורדת.

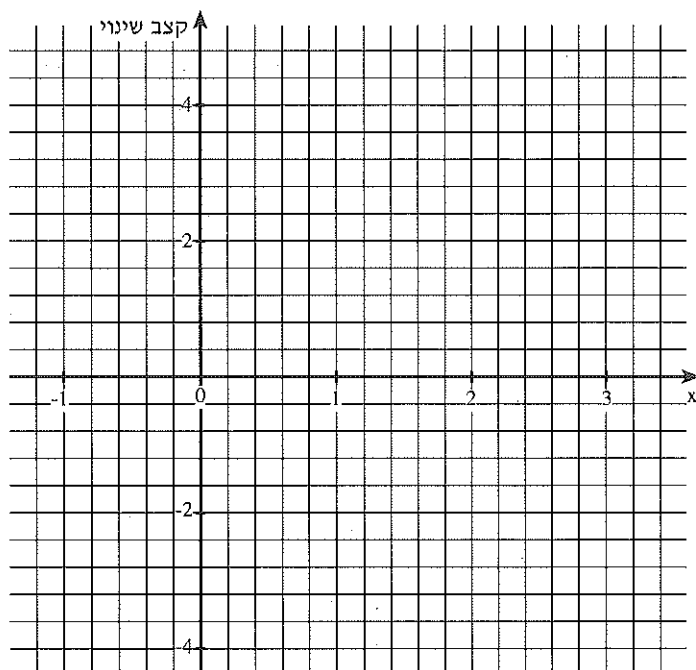
... המשיכו את תאור ההשתנות.



(ב) הניחו משיק, "טיילו" איתו לאורך גרף הפונקציה משמאל לימין והשלימו את הטבלה.

x	-1	0	0.5	1	1.5	2	3
קצב השינוי							

(ג) שרטטו במערכת הצירים (בעמוד משמאל) גרף המתאר את קצב השינוי של הפונקציה המתוארת בסעיף א'.



- ד) הגרף המשוורטט בסעיף א' מתאר את הפונקציה: $f(x) = x^2 - 2x - 1$.
- (i) רשמו את נגזרת הפונקציה.
- (ii) האם הגרף שקיבלתם בסעיף ג' מתאים, בקירוב, לגרף הנגזרת שרשמתם?

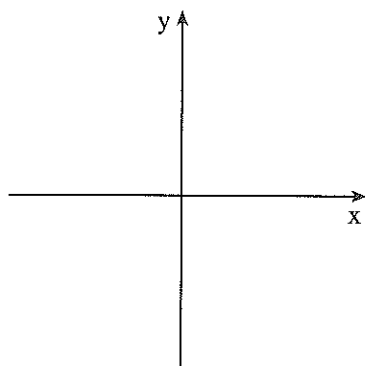
הגרף של קצב השינוי של f הוא גרף הנגזרת f' . בהמשך הסעיף נלמד לעבור מגרף של f לגרף של f' לפי התכונות של f . כדי להגיע מגרף הפונקציה אל גרף הנגזרת, נוח לאפיין את הפונקציה בעזרת "עליה, ירידה ונקודות קיצון" ואת הנגזרת בעזרת "חיוביות, שליליות ונקודות אפס".



גרפים 4, 5 הם גרפי הכנה לפרטור גרף של f' על פי גבולות של f .

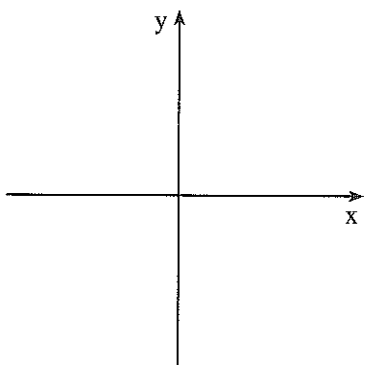


4. א) שרטטו פונקציה שאם "נעים" על הגרף שלה משמאל לימין, בתחילה היא חיובית עד שהיא מתאפסת, אחר כך שלילית עד שהיא מתאפסת שוב, ואחר כך היא חיובית.

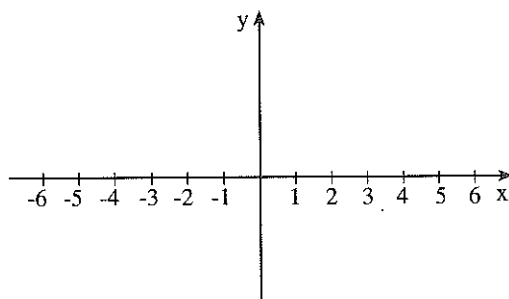


ב) שרטטו פונקציה, שאם "נעים" על הגרף שלה משמאל לימין היא:

חיובית $\rightarrow$ מתאפסת $\rightarrow$ חיובית $\rightarrow$ מתאפסת $\rightarrow$ חיובית



5. שרטטו במערכת הצירים (בעמוד הבא) פונקציה המקיימת:
 הפונקציה חיובית עבור ערכי x קטנים מ-3.
 הפונקציה מתאפסת עבור $x = -3$.
 הפונקציה שוב חיובית עבור ערכי x בין $x = -3$ ל- $x = 2$.
 הפונקציה מתאפסת עבור $x = 2$.
 הפונקציה שלילית עבור ערכי x הגדולים מ-2.



את המסך סדוף זה יש לברר בעזרת מחשב (גרפיקס 11-16).
אם אינכם נעזרים במחשב, עברו לעמוד 230.

העבודה במחשב בעזרת הלומדה מחשבים

6. (א) (i) שרטטו בעזרת מחשב, רשמו את הפונקציה והקישו F2
לשרטוט.

$$f(x) = 0.5(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x)$$

בתחום $-5 \leq x \leq 5$
הקישו ס ALT (ביחד) ושנו סקלות.
הקישו F10 לביצוע שינויים. $-10 \leq y \leq 10$

(ii) השלימו למטה את שורת החיצים של תכונות f (עליה, ירידה ונקודות קיצון).

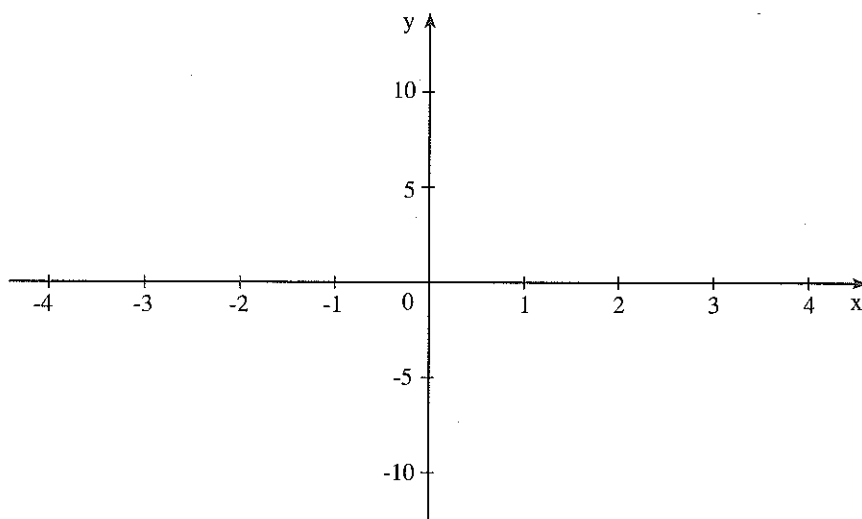
(ב) הלכו עם משיק על גרף הפונקציה משמאל לימין.
הקישו F7 ואחר כך מ. הביאו את הסמן לקצה השמאלי של הגרף.
הקטינו הצעד ל-0.01 (הקישו על מינוס)
הקישו פ ליד נקודות הקיצון.

השלימו את שורת החיצים עבור תכונות של f': שיפועי המשיקים (חיוביות שליליות ונקודות אפס).

מינימום ב יורדת עד
תכונות f: $x = -1.56 \rightarrow x = -1.56 \rightarrow ___ \rightarrow ___ \rightarrow ___ \rightarrow ___ \rightarrow ___$

מתאפסת ב שלילית עד
תכונות f': $x = -1.56 \rightarrow x = -1.56 \rightarrow ___ \rightarrow ___ \rightarrow ___ \rightarrow ___ \rightarrow ___$

ג) שרטטו במערכת הצירים הריקה סקיצה של f' .
 סמנו תחילה במערכת הצירים את הנקודות בהן f' מתאפסת.



ד) השלימו נגזרת של הפונקציה: $f(x) = 0.5(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x)$

$$f'(x) = 0.5 (4x^3 - \dots$$

ה) שרטטו את גרף הפונקציה f' . | בטלו את ההילוך: הקישו ESC
 רשמו בחלון הפונקציות (בשורה שניה)
 את החוק שקיבלתם בסעיף ד' והקישו
 F2 לשרטוט.

ו) חלכו שוב על גרף הפונקציה f עם המשיק $(F7)$, ובדקו את הקשר בין
 נקודות האפס של הנגזרת לשיפוע המשיק הנע.

שימואל: בכל אחד מהגרפים (7-11) הקישו $f(x)$, $f'(x)$

7. (א) (i) שרטטו בעזרת מחשב, רשמו את החוק והקישו F2 לשרטוט.	את גרף הפונקציה:
(יש לרשום את סימן הכפל.)	$f(x)=0.1 \cdot (0.5x-3)^3 \cdot (x+2)^2 + 5$
הקישו ס ALT לשינוי סקלות.	בתחום $-5 \leq x \leq 10$
הקישו F10 לביצוע שינויים.	$-20 \leq y \leq 20$

(ii) השלימו למטה את שורת החיצים של תכונות f.

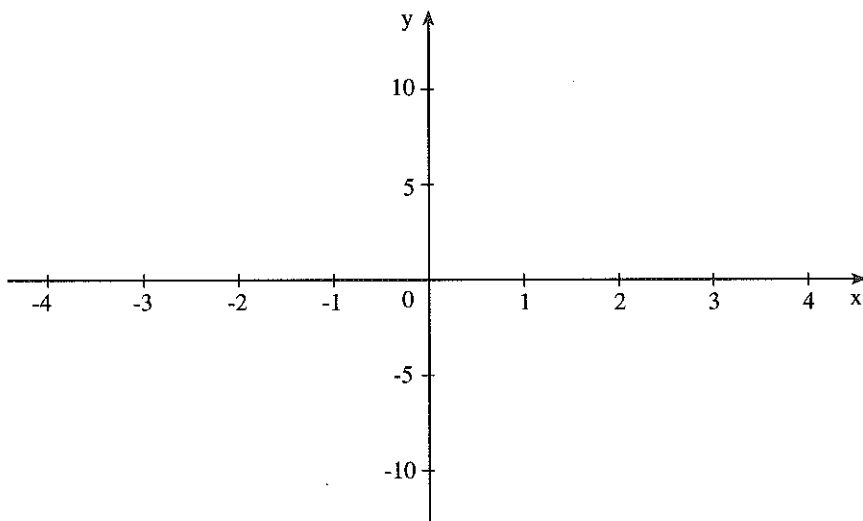
הקישו F7 ואחר כך M.	(ב) הלכו עם המשיק על גרף
הקישו M ליד נקודות הקיצון.	הפונקציה (משמאל לימין).

השלימו את שורת החיצים של תכונות f'.

f תכונות: מקסימום ב עולה עד
 $x = -2 \rightarrow x = -2 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _$

f' תכונות: מתאפסת ב חיובית עד
 $x = -2 \rightarrow x = -2 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _$

ג) שרטטו במערכת הצירים הריקה סקיצה של גרף נגזרת הפונקציה (שיפועי המשיקים) סמנו תחילה את הנקודות בהן הנגזרת מתאפסת.



באומדן מתמטי X ניתן לקבל את גרף הפונקציה של ידי הקשר $f'(x)$ אל
 יישום חוק הפונקציה בהמשך נשמע באפשרות זו.

ד) שרטטו את גרף הפונקציה f' . | הקישו ESC לביטול ההילוך.
 רשמו בחלון הפונקציות (בשורה שניה)
 $f'(x)$ והקישו F2 לשרטוט.

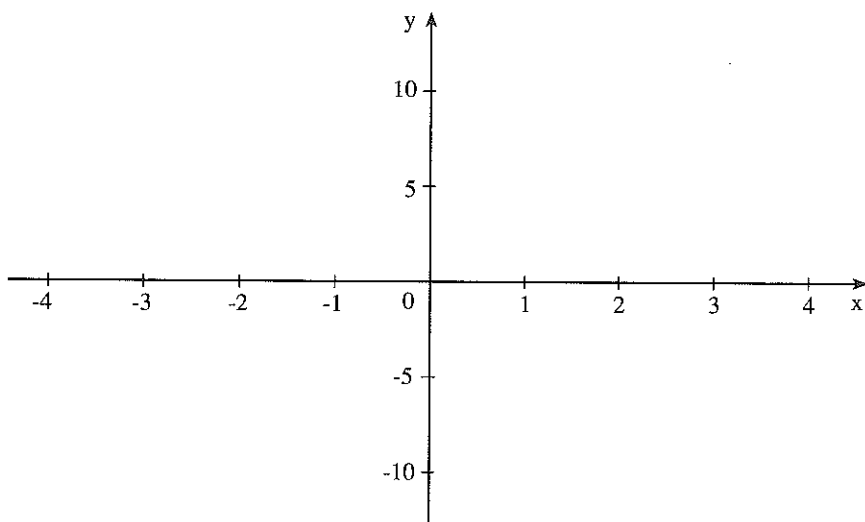
ה) קבלתם על המסך את גרף הנגזרת f' בנוסף לפונקציה f . השוו לגרף
 הנגזרת ששרטטתם בסעיף ג'.

8. א) (i) שרטטו בעזרת מחשב את גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
 בתחום $-4 \leq x \leq 4$.

(ii) התייחסו לתכונות של f (עליה, ירידה ונקודות קיצון) והשלימו את
 שורת החיצים עבור f' (אפשר להיעזר בהילוך עם משיק)

מתאפסת ב חיובית עד
 f' : $x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \dots$

ב) שרטטו סקיצה של גרף הנגזרת.

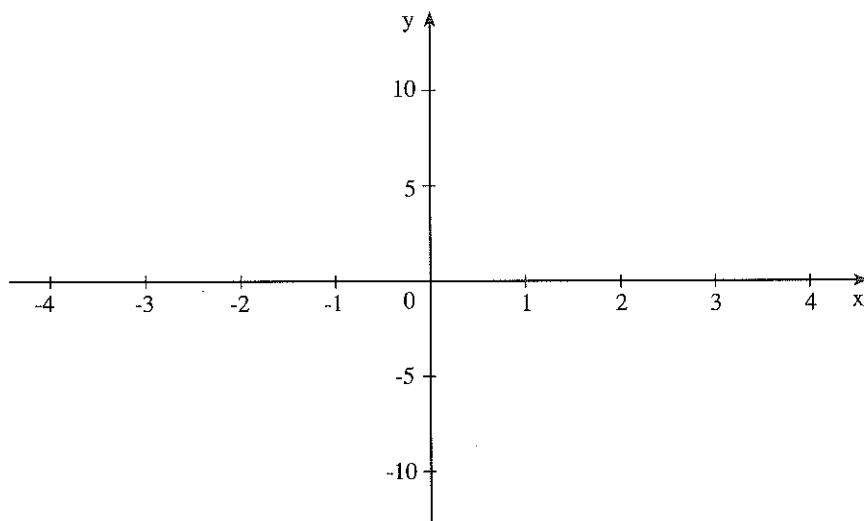


ג) (i) בטלו את ההילוך (הקישו ESC) ושרטטו בעזרת המחשב את גרף הפונקציה f' (יש לרשום $f'(x)$).

(ii) קבלתם את גרף הנגזרת בנוסף לגרף הפונקציה f . השוו עם גרף הנגזרת ששרטטתם בסעיף ב'.

9. א) שרטטו בעזרת מחשב את גרף הפונקציה: $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ בתחום $-4 \leq x \leq 4$.

ב) (i) רשמו את שיפוע המשיק בנקודה בה $x = 1$.
 סמנו נקודה מתאימה במערכת הצירים הריקה.



(ii) השלימו גרף של הפונקציה הנגזרת (אפשר להעזר בהילוך עם משיק על גרף הפונקציה משמאל לימין).

ג) – שרטטו בעזרת המחשב את גרף הפונקציה f' (יש לרשום במחשב $f'(x)$).

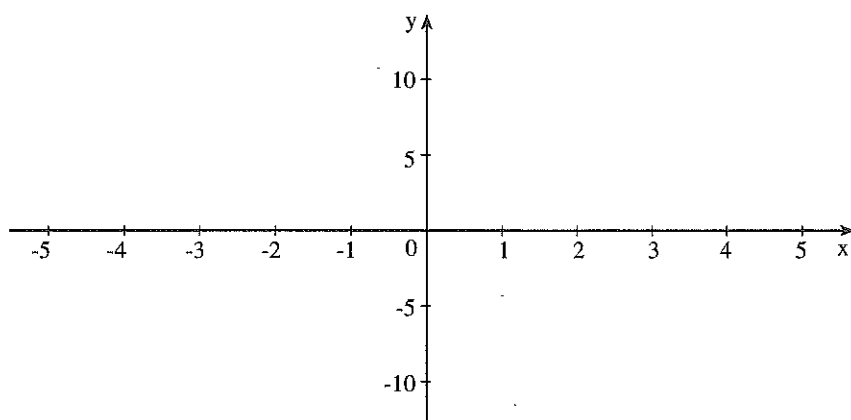
– קבלתם סקיצה של גרף הפונקציה הנגזרת בנוסף לגרף הפונקציה f . השוו עם גרף הנגזרת ששרטטתם בסעיף ב'.

10. א) שרטטו בעזרת מחשב, את גרף הפונקציה $f(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot e^x$,

בתחום: $-5 \leq x \leq 5$

$-10 \leq y \leq 10$

ב) שרטטו במערכת הצירים הריקה סקיצה של גרף הפונקציה הנגזרת.
(סמנו תחילה נקודות בהן הנגזרת מתאפסת. אפשר להיעזר ברישום שורת חיצים לפונקציה הנגזרת).



ג) שרטטו בעזרת מחשב את f' (רשמו $f'(x)$). קבלתם את גרף הפונקציה הנגזרת בנוסף לגרף הפונקציה. השוו עם גרף הפונקציה הנגזרת ששרטטתם בסעיף ב'.

11. א) שרטטו בעזרת מחשב, את גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$,

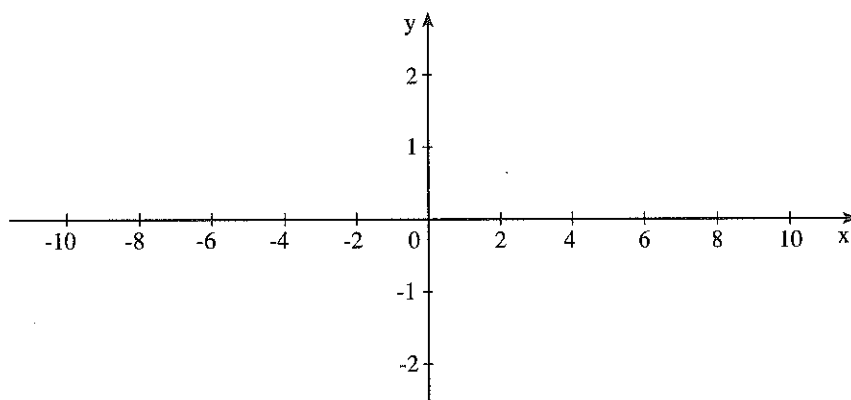
בתחום: $-10 \leq x \leq 10$

$-2 \leq y \leq 2$

ב) מייצג זווית הנמדדת ברדיאנים. רדיאן היא יחידת מידה של זווית השונה מהמעלה.

(ב) האם לדעתכם הפונקציה הנגזרת מחזורית? נמקו.

(ג) שרטטו במערכת הצירים הריקה סקיצה של גרף הנגזרת (תוכלו להעזר בהילוך עם משיק ו/או בשורת חיצים).



(ד) שרטטו בעזרת מחשב את f' (רשמו $f'(x)$). קבלתם את גרף הנגזרת בנוסף לגרף הפונקציה. השוו עם גרף הנגזרת ששרטטתם בסעיף ג'.

(ה) (i) סמנו איזה מהפונקציות הבאות יכולה להיות הפונקציה הנגזרת:

$$y' = -\cos x \quad y' = \sin(-x) \quad y' = \cos x \quad y' = -\sin x$$

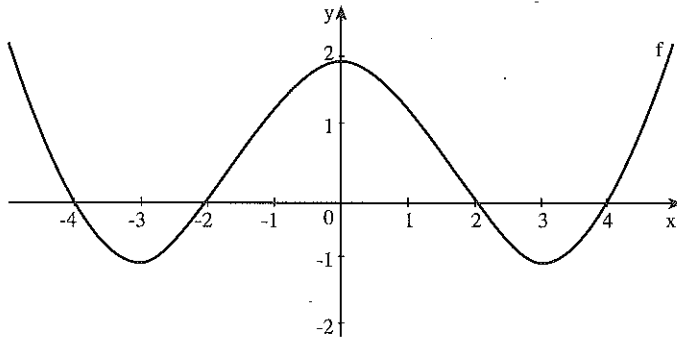
(ii) מחקו את f' ושרטטו בעזרת מחשב את הפונקציה שסימנתם, והשוו עם הגרף ששרטטתם בסעיף ג'. רשמו $y =$, רק את חוק הפונקציה (לא y').

סוף הפעילות בעזרת המחשב.

עברו לתרגילים בעמוד 234.

התרגילים הבאים (12-19) מיועדים לתלמידים שלא עשו את פעילות המחשב.

12. משורטט גרף הפונקציה f .



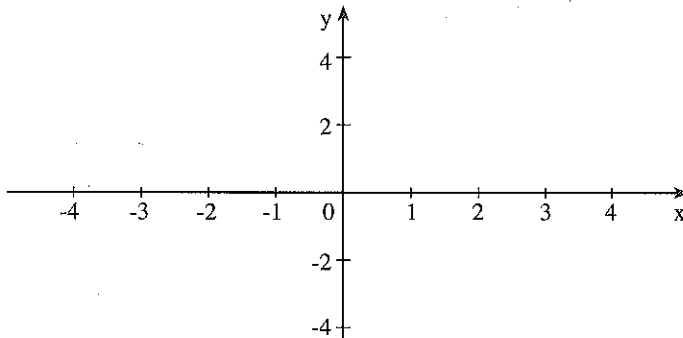
(א) השלימו את שורת החיצים של תכונות f .
(עליה, ירידה ונקודות קיצון של f .)

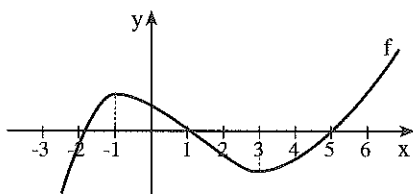
(ב) השלימו את שורת החיצים של תכונות f' (חיוביות, שליליות ונקודות חיתוך של f' עם ציר x).

תכונות f : מנימום ב יורדת עד
 $x = -3 \rightarrow x = -3 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _$

תכונות f' : מתאפסת ב שלילית עד
 $x = -3 \rightarrow x = -3 \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _ \rightarrow _$

(ג) שרטטו סקיצה של f' .

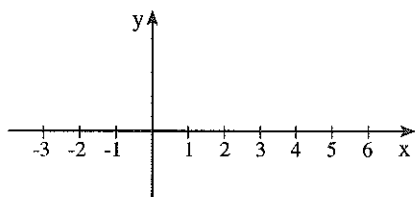




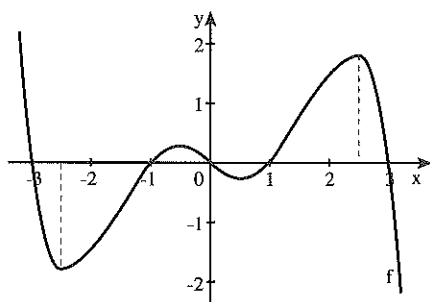
13. א) משורטט גרף הפונקציה f . השלימו את שתי שורות החיצים של תכונות f ו- f' (עליה, ירידה וקיצון של f , חיוביות, שליליות ונקודות חיתוך עם ציר של f').

מקסימום ב עולה עד
תכונות של f : $x = -1 \rightarrow x = -1 \rightarrow$

מתאפסת ב חיובית עד
תכונות של f' : $x = -1 \rightarrow x = -1 \rightarrow$

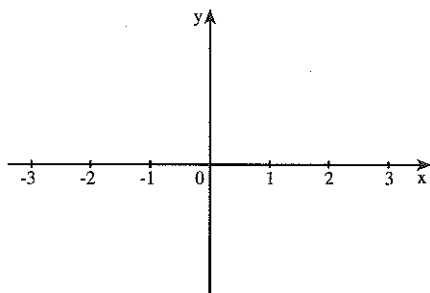


ב) שרטטו סקיצה של f' .

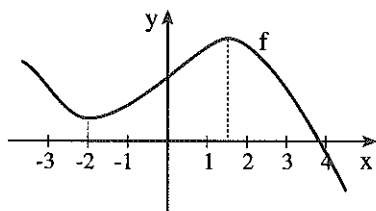


14. משורטט גרף של הפונקציה f . א) התיחסו לתכונות של הפונקציה f (עליה, ירידה ונקודות קצון) והשלימו את שורת החיצים של תכונות f' .

מתאפסת ב שלילית עד
תכונות של f' : $x = -2.5 \rightarrow x = -2.5 \rightarrow \dots$



ב) שרטטו סקיצה של f' .



15. הגרף מתאר את הפונקציה f .

(א) רשמו שיעורי x של

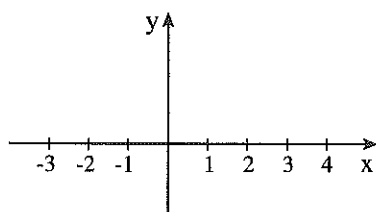
נקודות הקיצון של f .

(ii) בעזרת סעיף (i), רשמו

את נקודות החיתוך

של הגרף של f' עם ציר x .

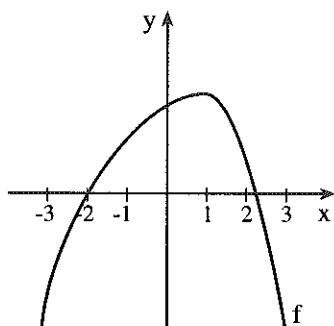
סמנו את הנקודות במערכת הצירים הריקה, המיועדת לגרף של f' .



(ב) השלימו שרטוט סקיצה של f'

(כדאי לרשום קודם

שורת חיצים עבור תכונות f' .)



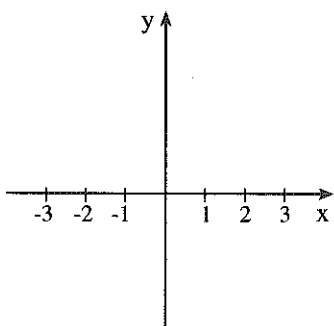
16. הגרף מתאר את הפונקציה f .

(א) רשמו את נקודת החיתוך

של הגרף של f' עם ציר x .

סמנו את הנקודה במערכת

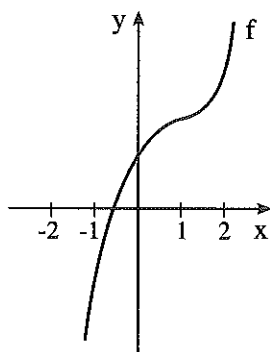
הצירים הריקה, המיועדת לגרף של f' .



(ב) השלימו שרטוט סקיצה של f'

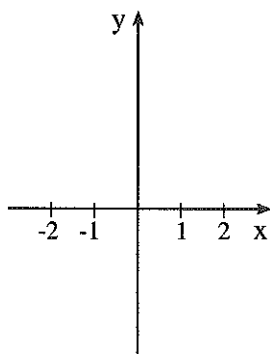
(כדאי לרשום קודם

שורת חיצים של תכונות f' .)

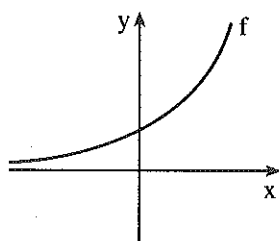


17. הגרף מתאר את הפונקציה f .

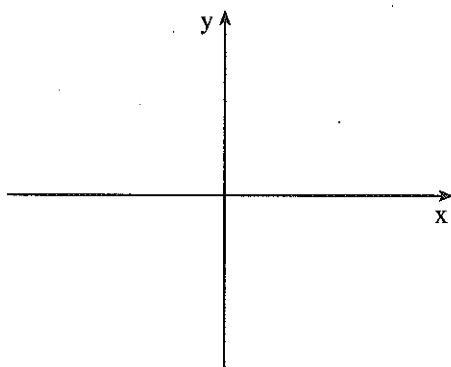
- (א) מה ערך הנגזרת בנקודה
בה $x = 1$. סמנו נקודה
מתאימה במערכת הצירים
הריקה (של f').



- (ב) השלימו שרטוט סקיצה של f' .
כדאי לרשום קודם
שורת חיצים של תכונות f' .



18. (א) מה סימן השיפוע
לאורך גרף הפונקציה
 f המשורטטת?



- (ב) הפונקציה הנגזרת (f')
עולה בכל התחום.
הסבירו.

(ג) שרטטו סקיצה של f' .



19. לפונקציה f יש שתי נקודות קיצון בלבד: נקודת מינימום $(-4, 1)$ ונקודת מקסימום $(2, 8)$.

(א) שרטטו סקיצה של f .

(ב) רשמו שורת חיצים עבור f' , ושרטטו סקיצה מתאימה.

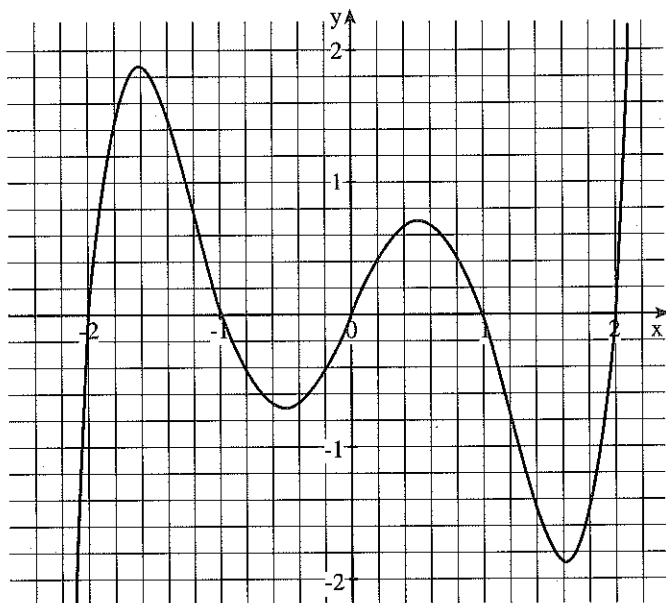
גרפיקים

20. (א) השלימו והמשיכו תאור השתנות הגרף המשוורטט: (עליה, ירידה ונקודות קיצון).

עד $x = -1.6$ הפונקציה _____

עבור $x = -1.6$ יש לפונקציה _____

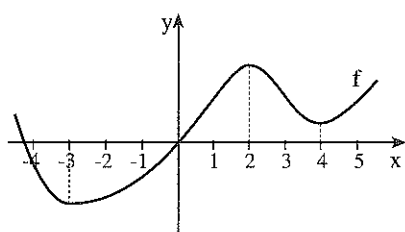
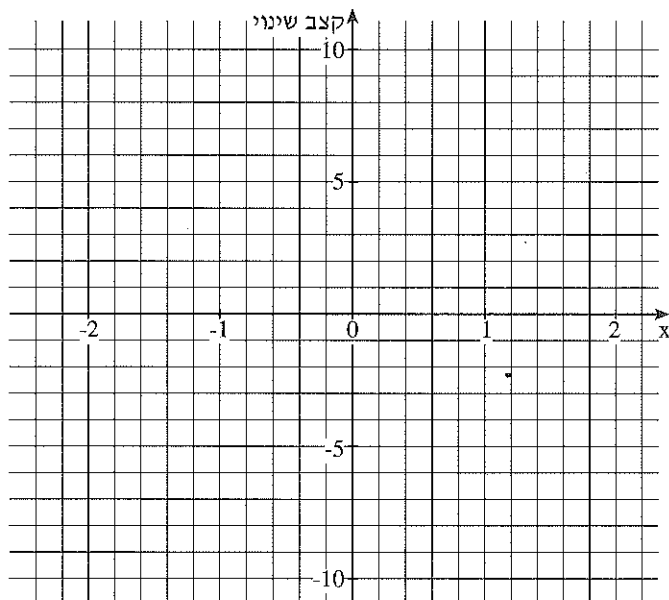
...המשיכו את תאור ההשתנות.



(ב) הניחו משיק ו"טיילון" איתו לאורך גרף הפונקציה, משמאל לימין והשלימו את הטבלה.

x	-2		-1		0		1		2
קצב שינוי		0		0		0		0	

(ג) שרטטו גרף המתאר את קצב השינוי.



21. משורטט גרף הפונקציה f .

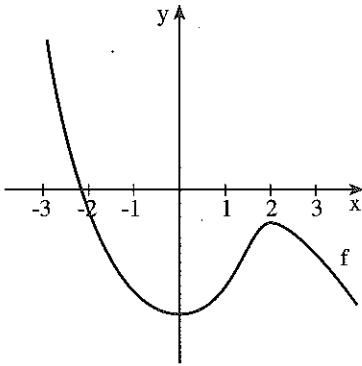
(א) השלימו את שורות החצים עבור תכונות f ו- f' .

f : יורדת עד $x = -3 \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$

f' : שלילית עד $x = -3 \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$

(ב) שרטטו סקיצה של f' .

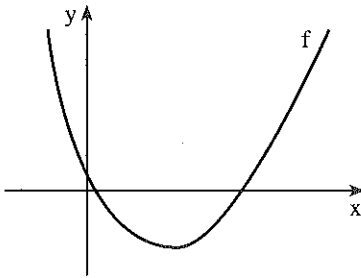
22. הגרף מתאר את הפונקציה f .
 (א) השלימו תאור של הפונקציה
 הנגזרת (בשורת החיצים עבור
 תכונות f').



מתאפסת ב שלילית עד f' :
 $x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow ____ \rightarrow ____ \rightarrow ____$

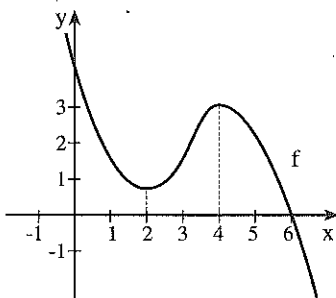
(ב) שרטטו סקיצה של f' .

23. משרטט גרף הפונקציה f .
 (א) השלימו תאור השתנות סימן השיפוע
 משמאל לימין של f .

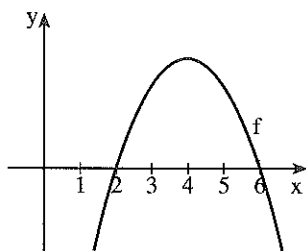


f' : שלילית $\rightarrow$ $\rightarrow$

(ב) היעזרו בשורת החיצים שרשמתם בסעיף א' ושרטטו סקיצה של f' .



24. בשרטוט מתואר גרף של הפונקציה f .
 (א) רשמו נקודות חיתוך של f' (הנגזרת
 של f) עם ציר x .
 (כדאי לרשום שורת חיצים ל- f').
 (ב) באלו תחומים f' חיובית
 ובאלו תחומים היא שלילית? נמקו.



25. בשרטוט מתואר גרף של הפונקציה f .

(א) רשמו את נקודת החיתוך של f' עם ציר x .

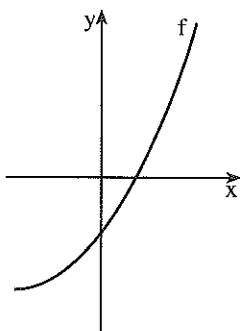
(ב) באיזה תחום f' חיובית ובאיזה תחום היא שלילית? (היעזרו בשורת חיצים).

(ג) שרטטו סקיצה המתארת את f' .

26. לפונקציה f יש שתי נקודות קיצון בלבד: נקודת מקסימום $(2, 3)$ ונקודת מינימום $(-1, -2)$.

(א) שרטטו סקיצה של f .

(ב) עבור אילו ערכי x $f'(x) = 0$? נמקו.
עבור אילו ערכי x $f'(x) > 0$? נמקו.
עבור אילו ערכי x $f'(x) < 0$? נמקו.
(כדאי לרשום שורת חיצים עבור f')



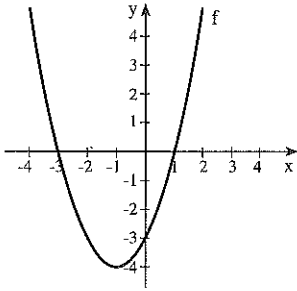
27. בשרטוט מתואר גרף הפונקציה f .

(א) מה סימן השיפוע לאורך גרף הפונקציה?

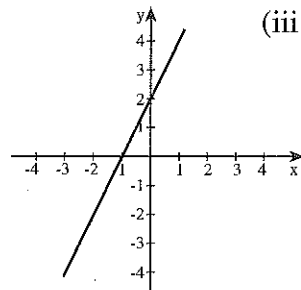
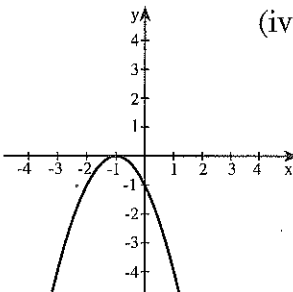
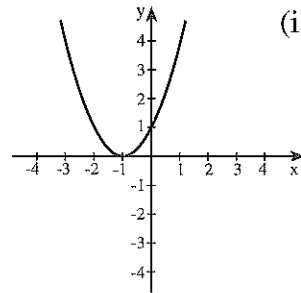
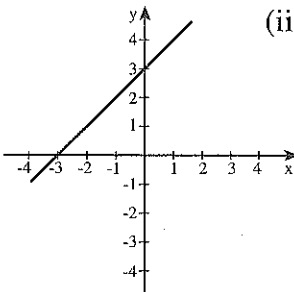
(ב) הפונקציה הנגזרת (f') עולה בכל התחום, הסבירו.

(ג) שרטטו סקיצה של f' .

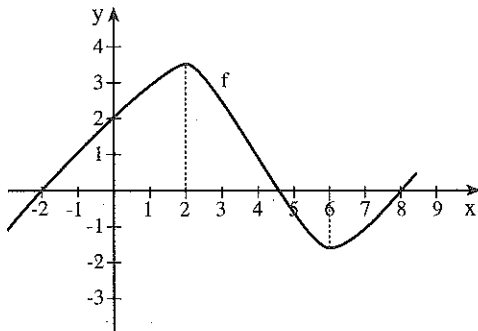
28. משורטט גרף הפונקציה f .



איזה מהגרפים הבאים יכול לתאר את גרף פונקציה הנגזרת (f') . נמקו.



מגרף הנגזרת f' לגרף הפונקציה f

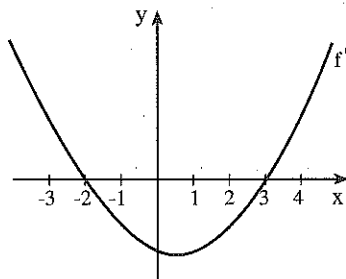


1. משורטט גרף הפונקציה f .
השלימו את שתי שורות
החיצים של תכונות f ו- f' .

f : עולה עד $x = 2 \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$

f' : חיובית עד $x = 2 \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$

בפרק זה נצא מגרף הנגזרת f' , ונשרטט גרף אפשרי מתאים של הפונקציה f . נעזר בתכונות: חיוביות, שליליות ונקודות אפס של f' , לאפיון תכונות של f המתייחסות לעליה, ירידה ונקודות קיצון.



- 2 מתואר הגרף של הפונקציה f'
(גרף הנגזרת של f)
(א) רשמו שעורי x של
הנקודות בהן $f'(x) = 0$.

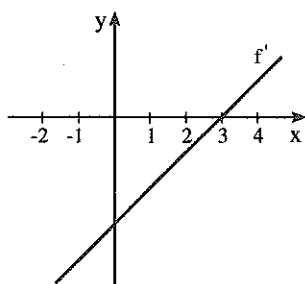


(ב) השלימו את שורות התכונות עבור f' ו- f .

f' : חיובית עד $x = -2 \rightarrow$ מתאפסת ב $x = -2 \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$

f : עולה עד $x = -2 \rightarrow$ חשודה ב $x = -2 \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$

ג) האם לפונקציה נקודות קיצון?
אם כן, רשמו שעור x שלהן ואת סוג הקיצון (מינימום או מקסימום).



3. בשרטוט מתואר הגרף של f' .

א) עבור $x = 3$ יש לפונקציה f נקודת

קיצון, מאיזה סוג היא? הסבירו.

(כדאי לרשום שורות חיצים עבור

תכונות f' ו- f .)

ב) ידוע כי $(2, 1)$ על גרף הפונקציה f .

שרטטו גרף שיכול להתאים

לתכונות של f .

4. הפונקציה f מקיימת את התכונות הבאות:

– עבור $x < -2$ $f'(x) > 0$

– עבור $x = -2$ $f'(x) = 0$

– עבור $x > -2$ $f'(x) < 0$

כדי להשיב על השאלות בהמשך, כדאי לרשום שורת חיצים של f' ושל f .

א) האם לפונקציה f יש נקודת קיצון?

אם כן, רשמו את סוגה (מקסימום או מינימום).

ב) ידוע כי: $f(-2) = -3$, האם ל- f נקודות חיתוך עם ציר x ? נמקו.

(כדאי לשרטט סקיצה של f .)

5. הפונקציה f מקיימת את התכונות הבאות:

– עבור $x < -2$ $f'(x) > 0$

– $f'(-2) = 0$

– עבור $-2 < x < 4$ $f'(x) < 0$ (בין -2 ל- 4).

– $f'(4) = 0$

– עבור $x > 4$ $f'(x) > 0$

שרטטו סקיצה שיכולה לתאר את הגרף של f .

(כדאי לרשום שורות חיצים של תכונות f' ו- f .)



6. בשרטוט מתואר הגרף של f' (גרף הנגזרת של f).

א) עבור אלו ערכי x יש לפונקציה f

נקודות קיצון? רשמו את סוגן

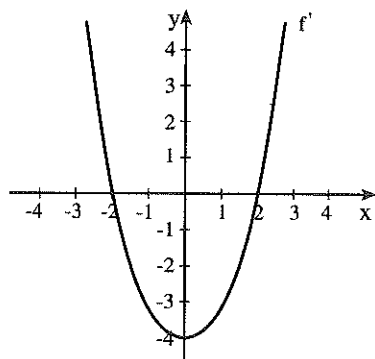
(מקסימום או מינימום).

הסבירו.

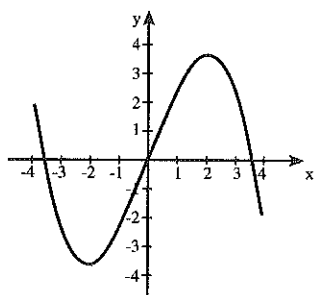
כדאי לרשום שורות חיצים עבור

תכונות של f' ו- f .

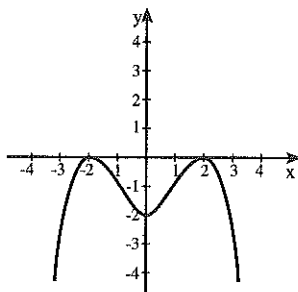
ב) סמנו את הגרפים שיכולים לתאר את f .



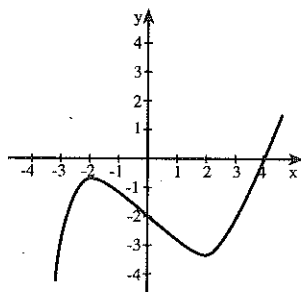
(ii)



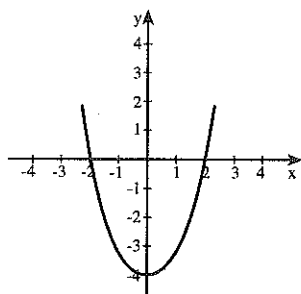
(i)



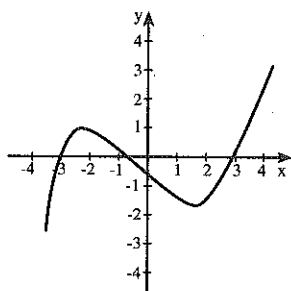
(iv)



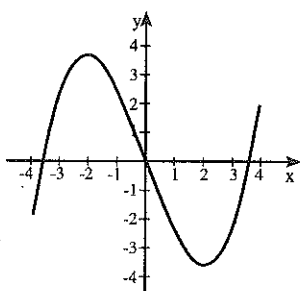
(iii)



(vi)



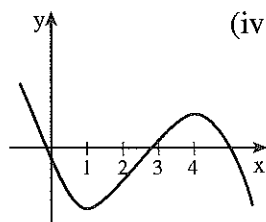
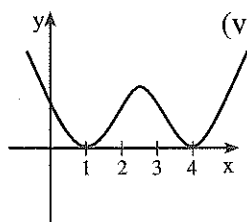
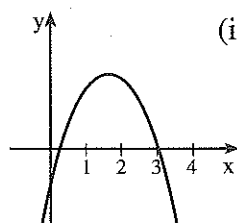
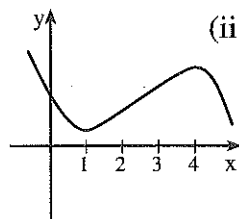
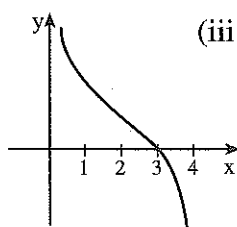
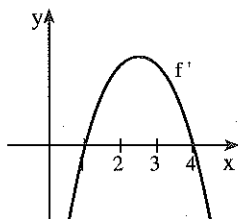
(v)



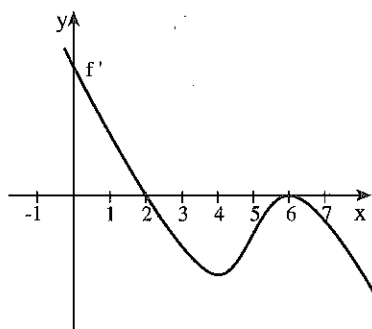


7. משורטט הגרף של f' .

אילו מהגרפים הבאים יכולים לתאר את
הגרף של f ?



8. משורטט גרף הפונקציה f' .



(א) רשמו שעורי x של הנקודות
החשודות.

– לגבי כל נקודה בדקו אם
היא נקודת קיצון של f .
אם כן, רשמו את סוגה
והסבירו.

(כדאי לרשום שורות חיצים
של תכונות f' ו- f .)

(ב) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה f .
(ג) רשמו את התחום בו הפונקציה יורדת.

9. נתונה פונקציה f המקיימת:

$$f(2) = 3, \quad f(1) = 2, \quad f(0) = 1, \quad f(-2) = -1, \quad f(-3) = 0$$

$f'(1) = 0, \quad f'(-2) = 0$ ואלו הנקודות היחידות שבהן הנגזרת מתאפסת.

א) כמה נקודות קיצון יש לפונקציה f ?

ב) קבעו את סוגן (מקסימום או מינימום).
(כדאי לשרטט את גרף הפונקציה f).

10. א) שרטטו גרף של פונקציה, בתחום $-5 \leq x \leq 5$, המקיימת את התכונות:

$$f(0) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(5) = 0$$

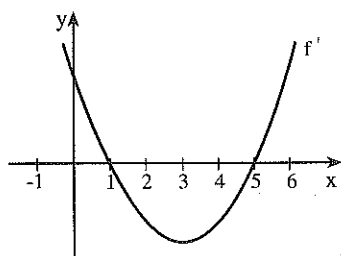
$$f'(x) > 0 \quad \text{עבור} \quad 0 < x < 2$$

$$f'(2) = 0$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{עבור} \quad 2 < x < 5$$

הגרף סימטרי לגבי ציר y .

ב) כמה נקודות קיצון יש לפונקציה? רשמו שעור x של כל אחת מנקודות הקיצון. קבעו לגבי כל אחת אם היא נקודת מקסימום או מינימום.



11. בשרטוט מתואר הגרף של f' (גרף

הנגזרת של f).

א) עבור אלו ערכי x $f'(x) = 0$?

ב) השלימו שורות חיצים של תכונות f ו- f' .

f' : חיובית עד

$x = 1 \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$

f : עולה עד

$x = 1 \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}} \rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$

ג) הנקודה $(-2, 3)$ על גרף f . שרטטו סקיצה שיכולה לתאר את f .

12. הפונקציה f מקיימת את התכונות הבאות:

$$f'(x) < 0 \text{ עבור } x < 3.$$

$$f'(x) = 0 \text{ עבור } x = 3.$$

$$f'(x) > 0 \text{ עבור } x > 3.$$

א) האם לפונקציה f יש נקודת קיצון?

אם כן, האם היא נקודת מקסימום או מינימום?

(כדאי לרשום שורות חיצים של תכונות f ו- f').

ב) נתון גם: $f(3) = -4$ ולפונקציה f אין נקודת חיתוך עם ציר x .

שרטטו סקיצה המתארת גרף אפשרי של הפונקציה.

13. נתונה פונקציה f המקיימת:

$$f(4) = 6, \quad f(3) = 2, \quad f(0) = 3$$

$$f'(3) = 0 \quad \text{וזאת הנקודה היחידה שבה הנגזרת מתאפסת.}$$

(א) האם $f'(0)$ חיובי או שלילי? נמקו.

האם $f'(4)$ חיובי או שלילי? נמקו.

(כדאי לשרטט סקיצה של f').

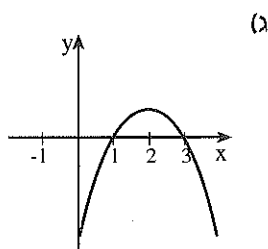
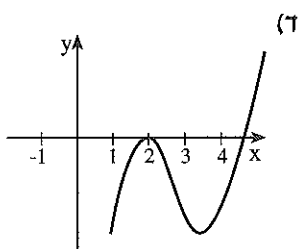
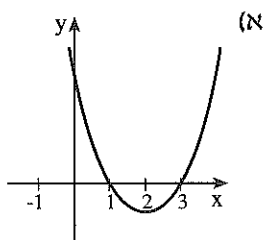
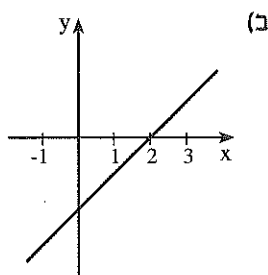
(ב) באיזה תחום $f'(x) > 0$?

(ג) שרטטו סקיצה המתארת גרף אפשרי של f . (כדאי לרשום שורות חיצים של תכונות f' ו- f).

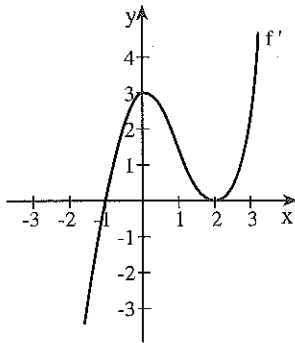
14. נתונה הפונקציה: $f'(2) = 0$ וזהו x היחיד שעבורו הנגזרת מתאפסת.

$$f'(3) < 0, \quad f'(1) > 0$$

אילו מבין הגרפים הבאים יכולים לתאר את הפונקציה f ?



15. בשרטוט מתואר הגרף של f' .

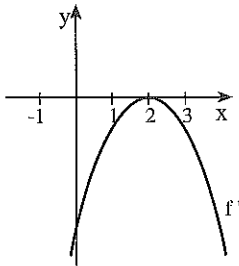


(א) כמה נקודות קיצון יש לפונקציה f ?
קבעו לגבי כל נקודה אם היא נקודת
מקסימום או מינימום. הסבירו.

(ב) שרטטו סקיצה שיכולה לתאר את
תכונות f .

(ג) רשמו את תחומי העליה והירידה של f .

16. משורטט גרף של f' .



(א) רשמו שיעור x של הנקודה המקיימת

$$f'(x) = 0$$

האם הנקודה היא נקודת קיצון? נמקו.

(העזרו בשורות חיצים של תכונות f'

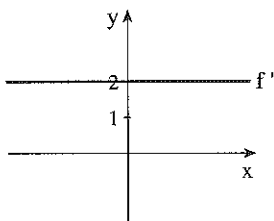
ו- f .)

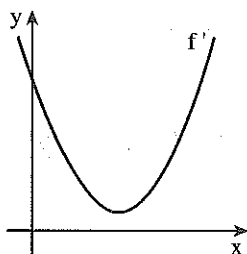
(ב) שרטטו סקיצה שיכולה לתאר את

תכונות f .

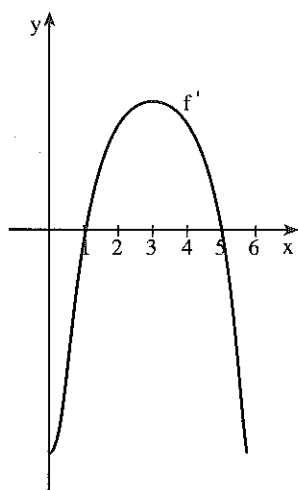
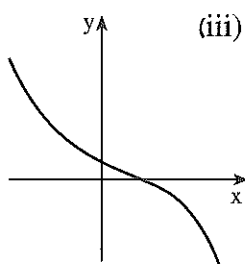
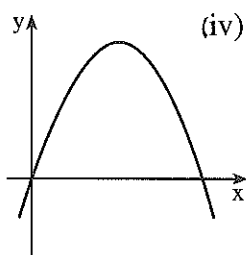
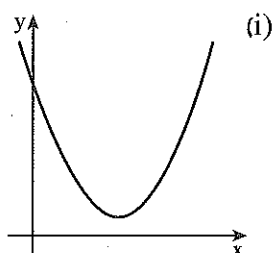
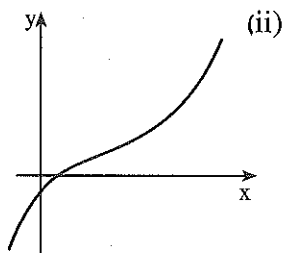
17. משורטט גרף הפונקציה של f' . שרטטו

סקיצה המתארת את תכונות f .





18. בשרטוט מתואר הגרף של f' .
- (א) האם ל- f יש נקודות קיצון? נמקו.
- (ב) אילו מבין הגרפים הבאים יכולים לתאר את תכונות f ?



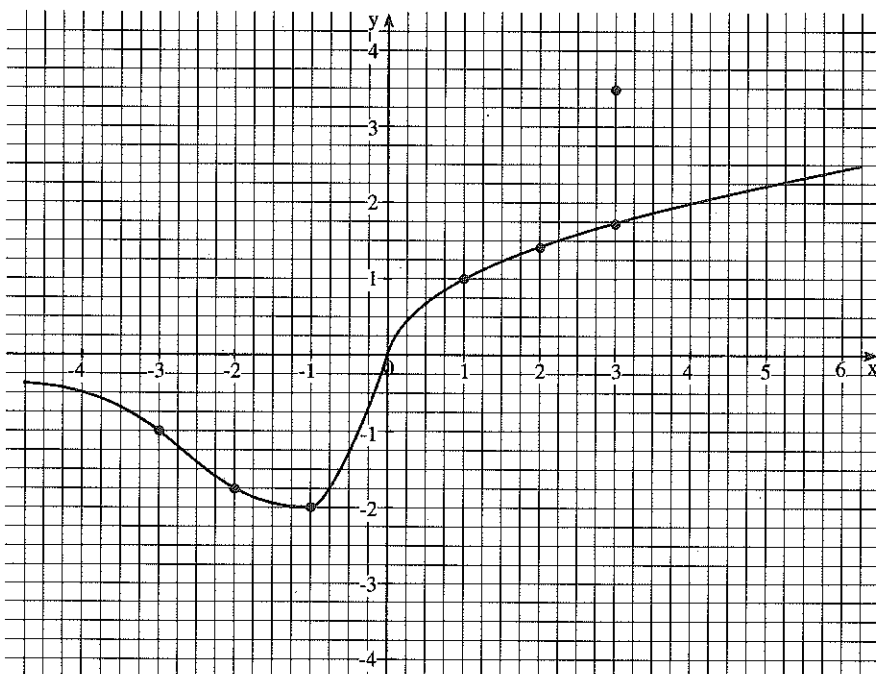
19. בשרטוט מתואר הגרף של f' בתחום $x \geq 0$.
- הגרף של f' סימטרי לגבי ציר y .
- (א) העתיקו והשלימו שרטוט הגרף בתחום $x < 0$.
- (ב) כמה נקודות קיצון יש לפונקציה f ? רשמו את שיעורי x של כל אחת מהנקודות, וקבעו עבור כל אחת אם היא נקודת מקסימום או מינימום.
- (כדאי לרשום שורות חיצים של f' ו- f .)

פרק ו: מכפלה של פונקציות

גרפים של מכפלה של פונקציות

בסעיף זה נראה איך משתנות תכונות של פונקציה נתונה כאשר כופלים פונקציה בפונקציה קבועה, או בפונקציה $f(x) = x$ או בפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$. בדיקת השרטוטים בסעיף זה נעשית באמצעות מחשבון גרפי, או באמצעות תוכנה המאפשרת שרטוט גרפים של פונקציות (למשל, מתמטיX).

1. בשאלה זו נבדוק מה יקרה לגרף הפונקציה אם נכפול את חוק הפונקציה ב-2. (א) על הגרף המשוורטט של הפונקציה f מסומנות נקודות. (i) סמנו נקודות להן שיעור x זהה, והן נמצאות על גרף הפונקציה $2 \cdot f$. נקודה אחת מסומנת כדוגמה.



(ii) השלימו שרטוט של גרף הפונקציה $2 \cdot f$.

(iii) שרטטו, באותה מערכת צירים, את גרף הפונקציה $\frac{1}{2} \cdot f$

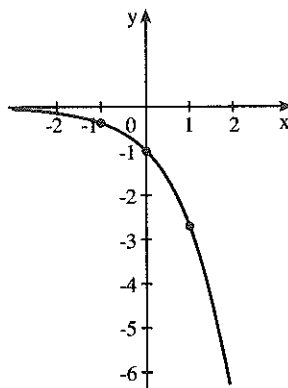
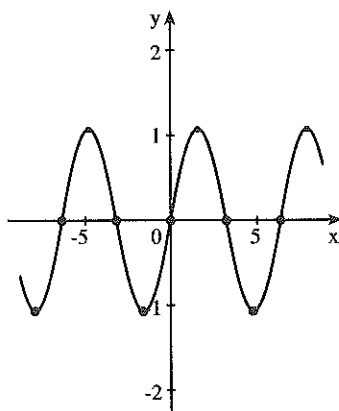
(iv) איזו נקודה נשארה במקומה בשני המקרים (ii), (iii)?

(ב) בכל סעיף משורטט גרף הפונקציה f .

שרטטו את גרף הפונקציה: $g(x) = 2 \cdot f(x)$. היעזרו בנקודות המודגשות על גרף של f .

(i) הגרף המשורטט: $f(x) = -e^x$ (ii) הגרף המשורטט: $f(x) = \sin x$

שרטטו: $g(x) = 2(-e^x)$ שרטטו: $g(x) = 2\sin x$



אפשר למדוד זוויות ביחידות שאינן מעלות, הנקראות רדיאנים. גרף זה משורטט ברדיאנים.

(ג) לבדיקה, שרטטו את הגרפים של כל זוג פונקציות במחשב או במחשבון גרפי. במעבר מסעיף לסעיף, מחקו את הפונקציות ששרטטתם בסעיף הקודם.

(ד) אילו תכונות נשמרות ואילו תכונות משתנות כאשר עוברים מ f ל- $2 \cdot f$? התייחסו לעליה/ירידה, לנקודות קיצון, לקצב שינוי, לנקודות חיתוך עם הצירים, לחיוביות/שליליות, למחזוריות ולסימטריה לגבי ציר y .

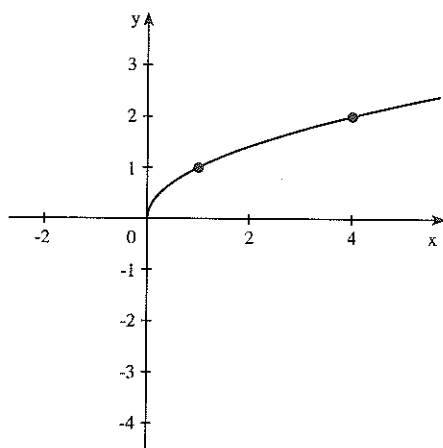


2. בשאלה זו נבדוק מה יקרה לגרף הפונקציה אם נכפול את חוק הפונקציה במספר שלילי.

א) בכל סעיף משורטט גרף הפונקציה f . שרטטו את גרף הפונקציה: $g(x) = -f(x)$. היעזרו בנקודות המודגשות על הגרף של f .

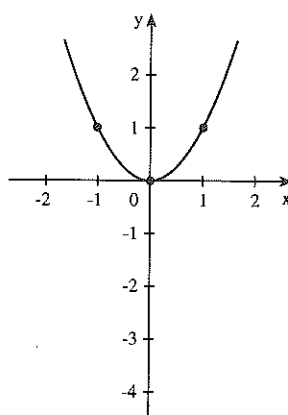
(ii) הגרף המשורטט: $f(x) = \sqrt{x}$

שרטטו: $g(x) = -\sqrt{x}$



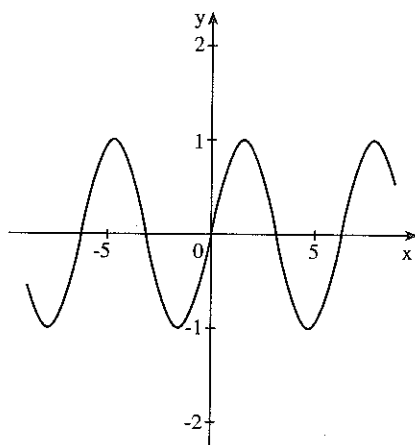
(i) הגרף המשורטט: $f(x) = x^2$

שרטטו: $g(x) = -x^2$



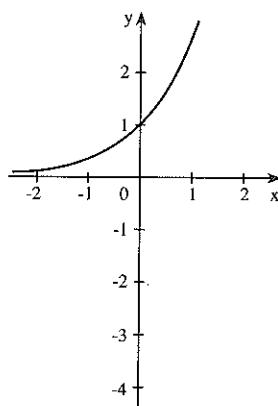
(iv) הגרף המשורטט: $f(x) = \sin x$

שרטטו: $g(x) = -\sin x$



(iii) הגרף המשורטט: $f(x) = e^x$

שרטטו: $g(x) = -e^x$



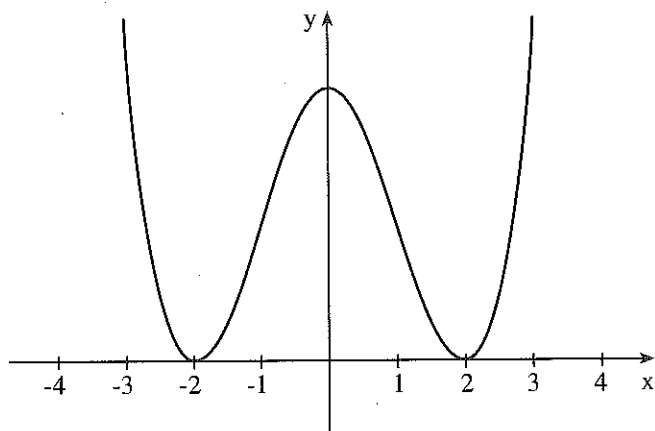
(ב) לבדיקה שרטטו את הגרפים של כל זוג פונקציות f ו- g במחשב או במחשבון גרפי. במעבר מסעיף לסעיף מחקו את הפונקציות ששרטטתם בסעיף הקודם.

(ג) אילו תכונות נשמרות ואילו תכונות משתנות כשכופלים את הפונקציה ב-1? התייחסו לקצב שינוי, לעליה/ירידה, לנקודות חיתוך עם הצירים, לחיוביות/שליליות, למחזוריות ולסימטריה לגבי ציר y .

(ד) הוסיפו בכל מערכת גרף נוסף, המתאים ל- $h(x) = -2 \cdot f(x)$. בדקו במחשב או במחשבון גרפי.

3.  בשאלה זו נבדוק מה יקרה לגרף הפונקציה אם נכפול את חוק הפונקציה ב- x , כלומר: $g(x) = x \cdot f(x)$. מפני שהחקירה מסובכת יותר, נבדוק בשלבים מה קורה לתכונות שונות.

(א) נבדוק תחילה מה קורה לנקודות החיתוך עם הצירים. משורטט גרף הפונקציה f . סמנו את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה המשורטטת וסמנו בצבע אחר את נקודות החיתוך עם הצירים של $g(x) = x \cdot f(x)$.



(ב) בסעיף זה נבדוק את סימן הפונקציה $g(x) = x \cdot f(x)$, לגבי הפונקציה f המשורטטת בסעיף א'.

(i) האם הגרף של $g(x) = x \cdot f(x)$ מימין לציר y ($x > 0$) יהיה מעל ציר x או מתחתיו?

(ii) האם הגרף של $g(x) = x \cdot f(x)$ משמאל לציר y ($x < 0$) יהיה מעל ציר x או מתחתיו?

(iii) חוק הפונקציה המשורטטת בסעיף א' הוא:

$$f(x) = 0.2 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 2)^2$$

שרטטו באמצעות מחשב, או מחשבון גרפי, את הפונקציה f ואת

הפונקציה g : $g(x) = x \cdot 0.2 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 2)^2$.

האם הגרף של g מתאים לתשובותיכם?

ג) נבדוק מה קורה לזוגיות (סימטריה לגבי ציר y) ואי-זוגיות (סימטריה לגבי הראשית).

(i) מה תוכלו לומר על הזוגיות או האי-זוגיות של f ו g מסעיפים קודמים?

(ii) שרטטו את $f(x) = \cos x$ בעזרת מחשב או מחשבון גרפי.

בחרו תחום ושרטטו גם את $g(x) = x \cdot \cos x$.

מה תוכלו לומר על הזוגיות או האי-זוגיות של f ושל g ?

(iii) הפונקציה $f(x) = x^2$ היא זוגית.

השלימו: הפונקציה $g(x) = x \cdot x^2$ היא _____

(iv) שרטטו $f(x) = \sin x$ בעזרת מחשב או מחשבון גרפי.

שרטטו גם את $g(x) = x \cdot \sin x$.

מה תוכלו לומר על הזוגיות או האי-זוגיות של f ושל g ?

(v) הפונקציה $f(x) = x^3$ היא אי-זוגית.

השלימו: הפונקציה $g(x) = x \cdot x^3$ היא _____

(vi) העזרו בסעיפים (i)-(v), והסבירו מה קורה לזוגיות ולאי-זוגיות

כשכופלים את הפונקציה ב- x .

ד) נבדוק מה קורה לנקודות הקיצון.

שרטטו בעזרת מחשב או מחשבון גרפי את זוג הפונקציות הבאות.

בדקו אם ניתן לומר משהו על נקודות הקיצון של $g(x) = x \cdot f(x)$, על

סמך נקודות הקיצון של f .

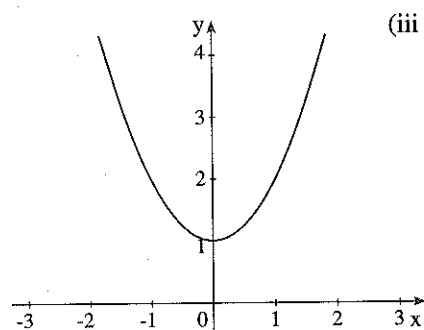
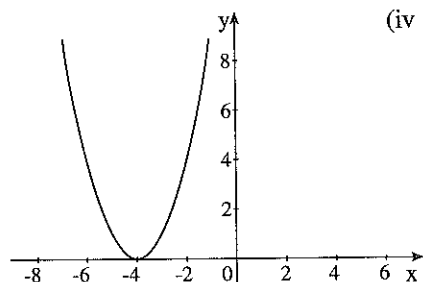
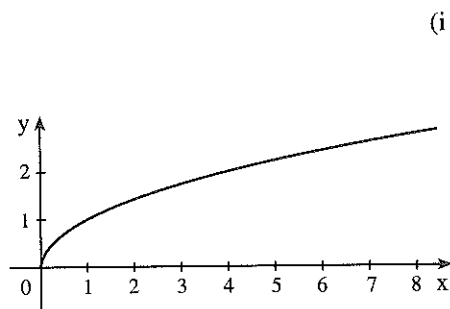
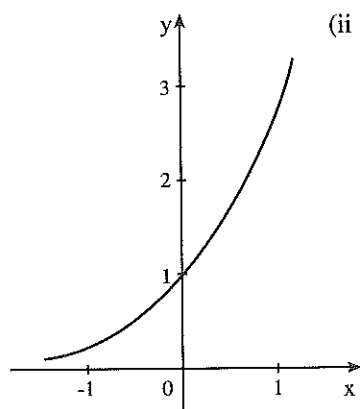
$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3) \quad (i)$$

$$g(x) = x(x + 1)(x - 1)(x - 3) \quad (ii)$$

ה) סכמו את הממצאים לגבי הקשר בין גרף של פונקציה f לגרף של פונקציה $g(x) = x \cdot f(x)$.



4. בכל מערכת משורטט גרף של f .
א) נסו לשרטט גרף של $g(x) = x \cdot f(x)$.



ב) שרטטו בעזרת מחשב או מחשבון גרפי גרפים של f ושל $g(x) = x \cdot f(x)$, על פי החוקים הנתונים. השוו לגרפים ששרטטתם בסעיף א'.

$$f(x) = x^2 + 1 \quad (\text{ii})$$

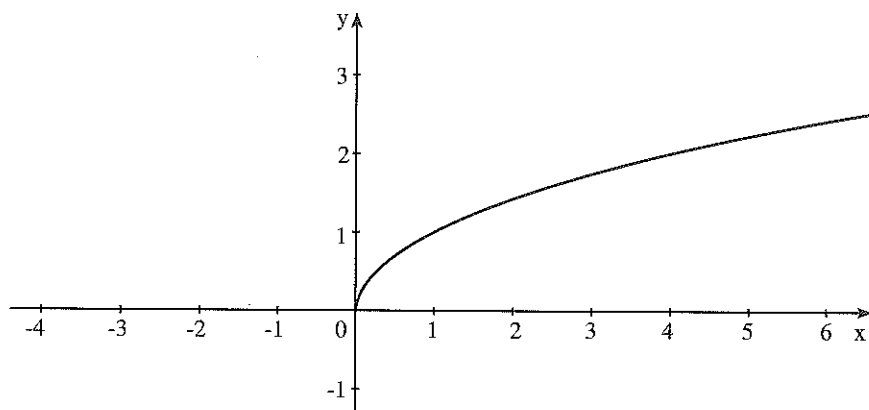
$$f(x) = \sqrt{x} \quad (\text{i})$$

$$f(x) = (x + 4)^2 \quad (\text{iv})$$

$$f(x) = e^x \quad (\text{iii})$$



5. (א) נסו לתאר איך נראה הגרף של המכפלה $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ (הגרף של $f(x) = \sqrt{x}$ משורטט).



(ב) שרטטו בעזרת מחשב או מחשבון גרפי, גרף של הפונקציה $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$, והסבירו מה שמתקבל.

בסעיף זה ראינו שניתן לשרטט על פי הגרף של f את גרף של מכפלת f בפונקציה קבועה. כמו כן ניתן לקבוע מספר תכונות של פונקציה שהיא מכפלה של פונקציה בפונקציה אחרת, אבל קשה למצוא את כל התכונות הדרושות לשרטוט הגרף. ראינו שקשה להסיק מנקודות הקיצון של f לגבי נקודות הקיצון של $g(x) = x \cdot f(x)$. כמו כן קשה לזהות תכונות של עליה וירידה. אך תכונות אילו ניתן לזהות בעזרת נגזרת.



נגזרת של מכפלת פונקציות תעזור לנו גם לחקור מכפלות רבות אחרות שלא עסקנו בהן כלל בסעיף זה.

גרפאים 6-8 הם גרפאי הכנה.

6. פשטו ככל האפשר.

$$2x^5 + x^5 = \quad (\text{ד})$$

$$x^2 \cdot x^3 = \quad (\text{א})$$

$$2x^2 + x^2 + x^3 = \quad (\text{ה})$$

$$2 \cdot x^4 \cdot x^5 = \quad (\text{ב})$$

$$x(x^2 + 2) + x^2 = \quad (\text{ו})$$

$$3x^3 \cdot x^2 = \quad (\text{ג})$$

7. פשטו ככל שאפשר.

$$x^2 \cdot x + x \cdot x^2 = \quad (\text{ד})$$

$$2x^5 + 6x^5 = \quad (\text{א})$$

$$x^2 \cdot x + x^2 \cdot x^2 = \quad (\text{ה})$$

$$x^3 + x^2 = \quad (\text{ב})$$

$$x^3 \cdot x^2 + x^3 \cdot x^3 = \quad (\text{ו})$$

$$x^2 + x^3 + 2x^5 = \quad (\text{ג})$$

8. פתחו סוגריים ופשטו.

$$2x (x^3 + 1) + 3x^2 (x^2 + 4) \quad (\text{א})$$

$$3x^2 (2x^4 - 1) + 8x^3 (x^3 + 2) \quad (\text{ב})$$

$$(2x + 4) (2x^3 + 1) + 6x^2 (x^2 + 4x) \quad (\text{ג})$$

$$(2x + 1) (3x^2 - 1) + 6x (x^2 + x) \quad (\text{ד})$$

$$(2x + 1) (x^2 + 3x) = \quad (\text{ה})$$

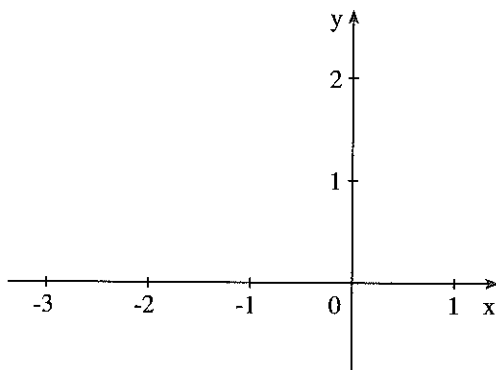
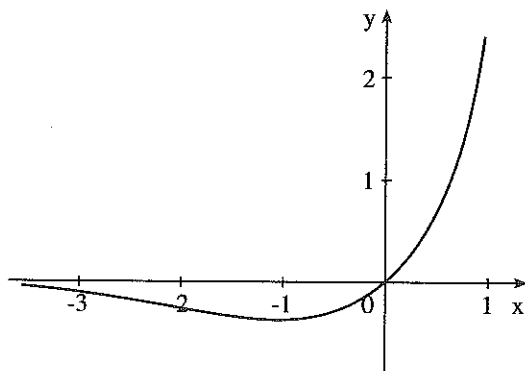
$$(x^2 + 2x) (2x^3 + x^2) = \quad (\text{ו})$$

נגזרת של מכפלת פונקציות

1. נתונה הפונקציה $f(x) = x \cdot e^x$



(א) משורטט גרף הפונקציה f . שרטטו במערכת הצירים הריקה סקיצה של גרף הנגזרת.



(ב) נבדוק אם הנגזרת היא מכפלת הנגזרות של x ושל e^x .

(i) רשמו את מכפלת הנגזרות.

(ii) הסבירו מדוע לא יתכן כי הנגזרת היא מכפלת הנגזרות?

(ד) שרטטו בעזרת מחשב, או מחשבון גרפי, את כל אחת מהפונקציות הבאות. בדקו לגבי כל אחת, אם היא יכולה להיות הנגזרת של f .

(i) האם יתכן שהנגזרת היא e^x ?

(ii) האם יתכן שהנגזרת היא $x \cdot e^x$?

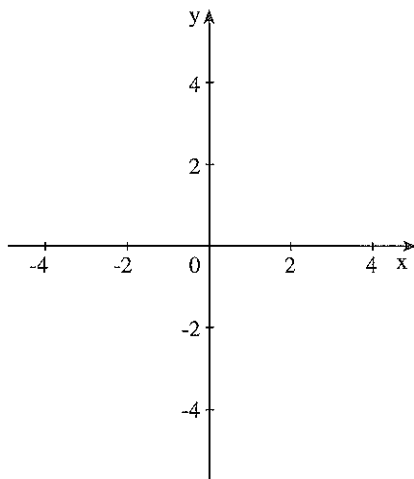
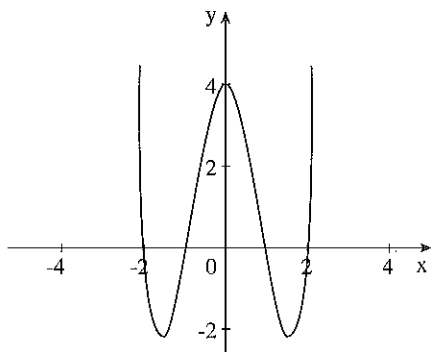
(iii) האם יתכן שהנגזרת היא $e^x + x \cdot e^x$?

(iv) האם יתכן שהנגזרת היא $(x+1)e^x$?

2. משורטט גרף הפונקציה $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$.



שרטטו במערכת הצירים הריקה סקיצה של גרף הנגזרת. סמנו תחילה את הנקודות בהן שיפוע הפונקציה אפס. (ניתן להעזר גם בשורת חיצים).



(ב) שרטטו בעזרת מחשב, או מחשבון גרפי, את כל אחת מהפונקציות הבאות. בדקו איזה מהפונקציות הבאות יכולה להיות הנגזרת של f .
(i) האם יתכן שהנגזרת היא $2x \cdot 2x$?

(ii) האם יתכן שהנגזרת היא $2x(x^2 - 1)$?

(iii) האם יתכן שהנגזרת היא $2x \cdot (x^2 - 1) + 2x \cdot (x^2 - 4)$?

(ג) פתחו סוגריים ורשמו מחדש את החוק של f .

$$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1) =$$

$$f'(x) =$$

גזרו את הפונקציה:

(ד) פתחו סוגריים ופשטו את חוק הנגזרת, שבחרתם בסעיף ב'.
האם זה אכן החוק של f' שקיבלתם בסעיף ג'?

נגזרת של מכפלת פונקציות:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

או במילים:

הנגזרת של הפונקציה הראשונה כפול הפונקציה השנייה + הנגזרת של הפונקציה השנייה כפול הפונקציה הראשונה.



3. נבדוק את הנוסחה לנגזרת של מכפלה של פונקציות בדוגמה פשוטה:

$$f(x) = x^2 \cdot x^3$$

(א) גזרו, על פי הנוסחה הרשומה לעיל ופשטו: $f'(x) =$

$$f(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5 \quad (ב)$$

גזרו: $f'(x) =$

(ג) השוו את תוצאותיכם בסעיפים א' ו ב'.



4. גזרו את הפונקציה מתרגיל 1 ($f(x) = x \cdot e^x$) על פי הנוסחה, ובדקו את תשובתכם לסעיף ד' של תרגיל 1.

בשאלות 2,3 גזרנו פונקציות המוצגות כמכפלה של שתי פונקציות בשני אופנים: בעזרת נגזרת של מכפלה, או על-ידי ביצוע הכפל וגזירה. בפונקציה כמו $y = x^2 \cdot e^x$ לא ניתן לבצע את הכפל וניתן לגזור רק בעזרת הנוסחה.



בתרגילים הבאים הדגישו את שתי הפונקציות שהן גורמי המכפלה, ואחר כך גזרו.

$$y = x^2 \cdot e^x \quad \text{דוגמה:}$$

נדגיש את הפונקציות שהן גורמי המכפלה. $y = \boxed{x^2} \cdot \boxed{e^x}$ ונגזור

$$y' = 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2$$

$$y = \boxed{(x^2 + 3)} \cdot \boxed{(x^3 - 1)} \quad \text{דוגמה נוספת:}$$

$$y' = 2x \cdot (x^3 - 1) + 3x^2 (x^2 + 3)$$



5. גזרו בעזרת נוסחת הנגזרת של מכפלה ופשטו (כדאי למסגר את הפונקציות שהן הגורמים של המכפלה). לצורך בדיקה פתחו סוגריים, פשטו וגזרו.

$$y = (2x^3 - 1)(x^2 + 5) \quad (ג) \quad y = (x^2 - 1)(x^3 + 4) \quad (א)$$

$$y = (x^2 - x)(x^3 - 4) \quad (ד) \quad y = x^3(2x^4 - 2) \quad (ב)$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ע"ע}$$

6. (i) גזרו בעזרת נוסחת הנגזרת של מכפלה (כדאי למסגר את הפונקציות שהן הגורמים של המכפלה).

$$y = (\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1) \quad (a) \quad y = x \cdot \sqrt{x} \quad (א)$$

$$y = (\sqrt{x} - x) \cdot (\sqrt{x} - x) \quad (b) \quad y = \sqrt{x} \cdot (x^2 + x) \quad (ב)$$

(ii) פשטו את הפונקציה בסעיף ג' וגזרו. פשטו גם את הנגזרת ובדקו שהתוצאות שלכם זהות.

7. גזרו (כדאי למסגר את הפונקציות שהן הגורמים של המכפלה). ע"ע

$$y = (e^x + 4) \cdot 2x \quad (a) \quad y = 2x \cdot e^x \quad (א)$$

$$y = e^x \cdot (3 - 2x) \quad (b) \quad y = \sqrt{x} \cdot e^x \quad (ב)$$

$$y = (1 - 2x^2) \cdot e^x \quad (c) \quad y = x^3 \cdot e^x \quad (ג)$$

$$y = (e^x + 2) \cdot \sqrt{x} \quad (d) \quad y = e^x \cdot (x^2 - 4) \quad (ד)$$

8. נתונה הפונקציה $f(x) = 3 \cdot x^6$ ע"ע

(א) השלימו את נגזרת הפונקציה: $f'(x) = 3 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

(ב) גזרו לפי נוסחת המכפלה.

אם לא טעיתם, קבלתם אלה גוזאח בשני הסעיפים. גזירה על-פי נוסחת המכפלה, במקרה זה נכונה אך מסורבל ולא כדאית.

9. (א) סמנו באילו מהפונקציות הבאות הברחי להשתמש בנוסחת הנגזרת של מכפלת פונקציות, וגזרו את הפונקציות שסימנתם. ע"ע

$$y = e^x \cdot (1 - x) \quad (iv) \quad y = 3 \cdot x^4 \quad (i)$$

$$y = 4x^2 \cdot 5x^3 \quad (v) \quad y = 2x \cdot e^x \quad (ii)$$

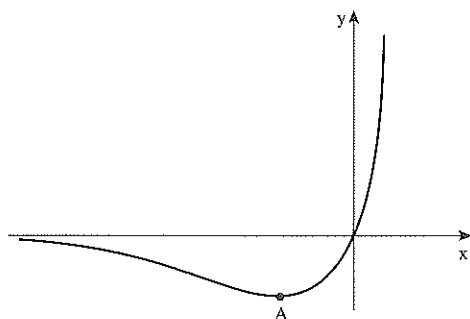
$$y = (3x - 4) \cdot (x^2 + 1) \quad (vi) \quad y = x^2 \cdot (1 - x) \quad (iii)$$

(ב) פשטו ואחר כך גזרו את הפונקציות שלא גזרתם בסעיף א'.

חקירה של מכפלת פונקציות

חקירה של מכפלה עם פונקציה מעריכית

1.  משורטט גרף הפונקציה $y = 3x \cdot e^x$. הנקודה A היא נקודת מינימום.



(א) מה ערך הנגזרת בנקודה A?

(ב) נחשב את שיעורי הנקודה A, לפי השלבים הבאים:

(i) גזרו את הפונקציה.

(ii) הראו כי הנגזרת שקיבלתם שווה ל: $y' = 3e^x \cdot (1 + x)$.

(iii) חשבו שיעור x של הנקודה A וסמנו על ציר ה-x.

(iv) חשבו שיעור y של הנקודה A וסמנו על ציר ה-y.

(ג) נסו לקבוע על פי הנגזרת האם לפונקציה יש נקודות קיצון פרט ל A? נמקו.

כדי לחשב נקודות קיצון נצטרך לעיתים להוציא גורם משותף בפונקציה הנגזרת (כפי שראיתם בתרגיל 1 בסעיף ב (ii) לעיל). בתרגיל 2 נתרגל הוצאת גורם משותף ופתרון משוואות.



2. הוציאו גורם משותף ופתרו:



דוגמה: $2e^x + 2xe^x = 0$

$$2e^x(1 + x) = 0$$

$$1 + x = 0 \text{ או } 2e^x = 0$$

$$e^x \text{ תמיד חיובי, } x = -1$$

$$2x - 2xe^x = 0 \quad (\text{ד})$$

$$3e^x + 3xe^x = 0 \quad (\text{א})$$

$$e^x - xe^x = 0 \quad (\text{ה})$$

$$2xe^x + x^2e^x = 0 \quad (\text{ב})$$

$$e^x(1 + x^2) - 2xe^x = 0 \quad (\text{ו})$$

$$e^x(2 + 4x) - 4e^x = 0 \quad (\text{ג})$$

3. גזרו, פשטו ומצאו עבור אילו ערכים של x הנגזרת שווה לאפס.



$$y = e^x \cdot (x - 4) \quad (\text{ד})$$

$$y = 2x \cdot e^x \quad (\text{א})$$

$$y = e^x \cdot (x^2 - 3) \quad (\text{ה})$$

$$y = 3x^2 \cdot e^x \quad (\text{ב})$$

$$y = x^2 \cdot e^{3x} \quad (\text{ו})$$

$$y = (1 - x) \cdot e^x \quad (\text{ג})$$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 8)$



(א) מצאו עבור אלו ערכים של x הנגזרת שווה לאפס?

(ב) אם לא טעיתם, מצאתם בסעיף א', שאחד מערכי x המתאימים הוא -4 .

כדי למצוא את שיעור y של הנקודה היעזרו בסדרת ההקשות על המחשבון.

-4	e^x	$\times$	(	-4	x^2	-	8	)	=	
----	-------	----------	---	----	-------	---	---	---	---	--

(ג) מצאו את שיעור y של הנקודה החשודה השניה.

5.  (א) מצאו נקודה חשודה (הנקודה שהנגזרת בה שווה לאפס) של הפונקציה:
 $f(x) = e^x \cdot (x - 2)$. סמנו במערכת צירים.

(ב) קבעו אם זו נקודת קיצון, בעזרת חישוב שיעורי נקודות נוספות וסימון.
 אם כן רשמו מאיזה סוג היא (מינימום או מקסימום).

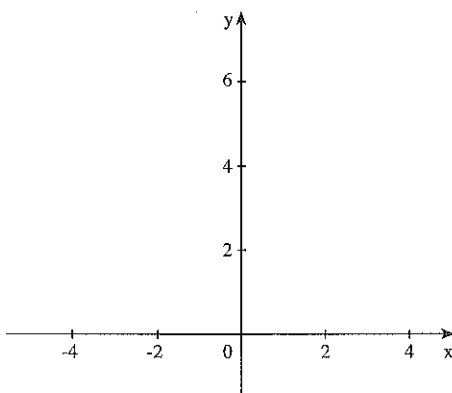
שימואל: בגרף f כולל גם פונקציה מוכנה

6.  מצאו נקודות קיצון של הפונקציה $f(x) = (x + 3) e^{-x}$ וקבעו את סוגן.
 (היעזרו בסימון נקודות במערכת צירים.)

7.  (א) מצאו נקודות קיצון לפונקציה $f(x) = (4x^2 + 3) e^x$ וקבעו את סוגן.
 (ב) חשבו $f'(-1)$. האם הפונקציה עולה או יורדת בנקודה בה $x = -1$?
 האם התוצאה מתאימה למה שקבלתם בסייף א' (תוכלו לשרטט לבדיקה).

8.  נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 1) e^{2x}$.
 (א) בדקו אם הפונקציה עולה או יורדת בכל אחת מהנקודות ששיעור x שלהן
 נתון. (i) $x = -1$ (ii) $x = 4$
 (ב) האם לדעתכם יש לפונקציה נקודת קיצון? הסבירו.

9.  שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $y = 3x^2 \cdot e^x$ לפי הסעיפים הבאים:
 (סמנו כל נקודה שתמצאו במערכת הצירים.)

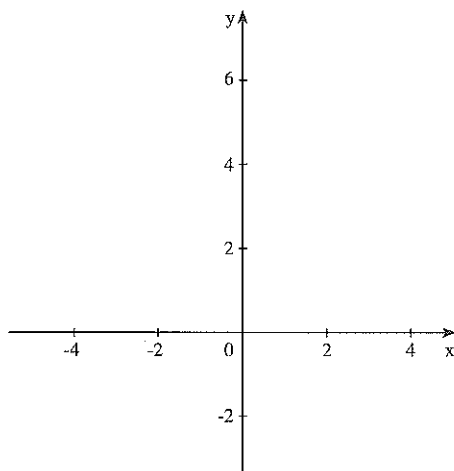


- (א) מצאו את נקודות הקיצון,
 רשמו גם את סוגן.
 (ב) האם לפונקציה נקודות
 חיתוך עם ציר x , בנוסף
 ל- $(0, 0)$? הסבירו.
 (ג) השלימו שיעורי נקודות
 שעל גרף הפונקציה:
 $(-6, \quad), (-10, \quad), (-15, \quad)$
 האם לפונקציה יש
 אסימפטוטה? אם כן רשמו
 את משוואתה.
 (ד) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.



10. חקרו את הפונקציה $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3)$ לפי השלבים הבאים:

- (א) מצאו שיעורי נקודות חיתוך עם הצירים, וסמנו אותן במערכת הצירים.
 (ב) מצאו נקודות קיצון ורשמו את סוגן. סמנו במערכת הצירים.
 (ג) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.



גרף ילויס

11. פתרו את המשוואות הבאות (הוציאו גורם משותף).

$$\begin{array}{ll} 2e^x x - 4e^x x^2 = 0 & \text{(א)} \quad 8e^x - 4x^2 e^x = 0 \\ 3xe^x + (3x^2 - 6)e^x = 0 & \text{(ב)} \quad e^x(x - 2) + e^x = 0 \end{array}$$

12. (א) חקרו את הפונקציה $y = x^3 \cdot e^x$ לפי השלבים הבאים:

(סמנו כל נקודה שחשבתם במערכת צירים.)

- (i) מצאו את נקודת החיתוך עם ציר y .
 (ii) מצאו את נקודות הקיצון (רשמו את סוגן).
 (iii) השלימו שיעורי נקודות שעל גרף הפונקציה.
 $(-20, \quad)$, $(-8, \quad)$, $(-7, \quad)$

האם לפונקציה יש אסימפטוטה? אם כן, רשמו את משוואתה.

(iv) השלימו סקיצה של גרף הפונקציה.

(v) רשמו את תחומי העליה והירידה.

(ב) מהן נקודות הקיצון של הפונקציה $y = -x^3 \cdot e^x$ ומאיזה סוג הן?

13. חקרו את הפונקציה $y = (2 - 4x) \cdot e^x$ לפי השלבים הבאים:

(סמנו כל נקודה שאתם מוצאים במערכת צירים).

(א) חשבו נקודות חיתוך עם הצירים.

(ב) חשבו את נקודות הקיצון.

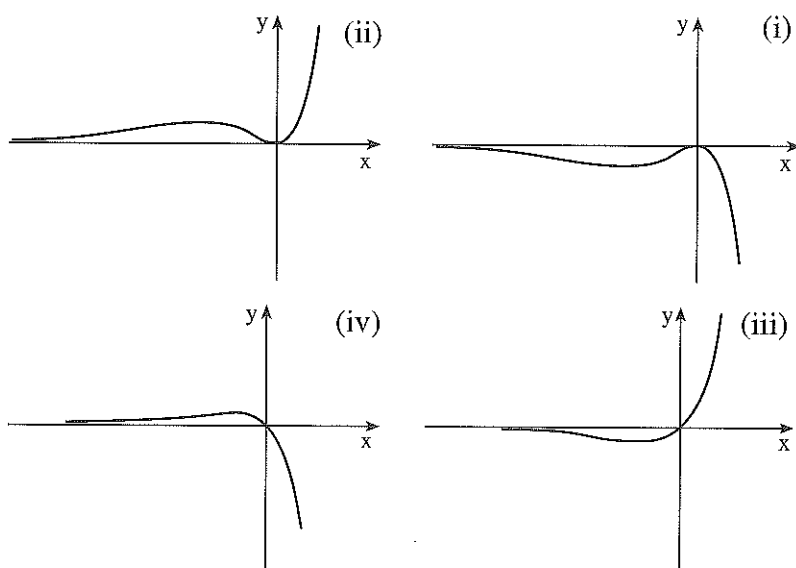
(ג) השלימו שיעורי נקודות שעל גרף הפונקציה: $(-4, \quad)$, $(-6, \quad)$, $(-10, \quad)$

האם לפונקציה יש אסימפטוטה? אם כן, רשמו את משוואתה.

(ד) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

14. התאימו חוק לגרף.

(א) $y = e^x \cdot x$ (ב) $y = -e^x \cdot x$ (ג) $y = e^x \cdot x^2$ (ד) $y = -e^x \cdot x^2$



15. חקרו את הפונקציה $f(x) = e^x \cdot x^4$ לפי השלבים הבאים:

(א) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.

(ב) מצאו את נקודות הקיצון.

(ג) האם לפונקציה יש אסימפטוטה? אם כן, רשמו את משוואתה.

(ד) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

(ה) רשמו את תחומי העליה וירידה.

16. חקרו את הפונקציה $g(x) = (x^2 - 2x) \cdot e^x$ לפי שלבי החקירה הרשומים

בשאלה 15.

חקירה של מכפלה עם פונקצית שורש

בסעיף זה נחקיר פונקציות שהן מכפלה של $\sqrt{x}$ בפונקציות אחרות.
 אדם כך יש צורך לפתור משוואות דוגמה: $\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$. גילום ההגדרה
 במשוואות אלו הוא $x > 0$ וצריך לבדוק אם הפתרונות מתאימים לגילום ההגדרה
 של המשוואה.

1. בכל תרגיל: 

- (i) פתור, מצאו את x . (כדאי להכפיל תחילה ב- $\sqrt{x}$).
 (ii) הציבו את שיעור x שקבלתם ובדקו את תשובתכם (שימו לב, תחום
 ההגדרה הוא $x > 0$).

$$\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0/2\sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + 1 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -0.5$$

- הציבו במשוואה הנתונה את שיעור x שקבלנו והסבירו מה קרה.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (x - 4) + 2\sqrt{x} = 0 \quad (א) \quad \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$2x \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 5) = 0 \quad (ד) \quad 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad (ב)$$

2. משורטט גרף הפונקציה 

$$y = 2\sqrt{x} \cdot (x - 4)$$

שימו לב: תחום ההגדרה של

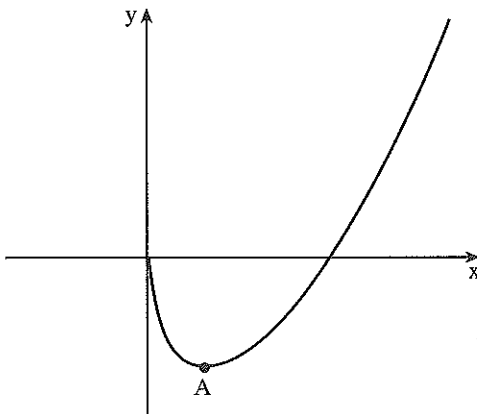
הפונקציה $x \geq 0$.

(א) חשבו את נקודות החיתוך

עם הצירים. הדגישו את

הנקודות במערכת הצירים.

(ב) חשבו את שיעורי הנקודה A.





3. חקרו את הפונקציה $y = \sqrt{x} \cdot e^x$ לפי השלבים הבאים:

- (סמנו כל נקודה שתחשבו במערכת צירים).
 (א) רשמו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 (ב) מצאו את נקודת החיתוך עם ציר x .
 (ג) מצאו x עבורו הפונקציה הנגזרת מתאפסת, והסבירו מדוע אין לפונקציה נקודת קיצון עבור ה- x שמצאתם.
 (ד) לפונקציה יש נקודת קיצון אחת, רשמו את שיעוריה ואת סוגה.
 (ה) השלימו שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה (חשבו וסמנו נקודות נוספות, אם יש צורך).

גרפיקים

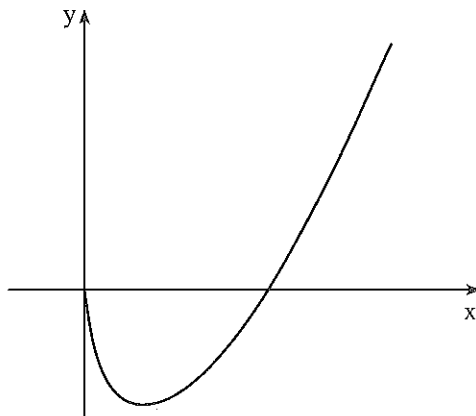
4. (א) מצאו נקודות חיתוך עם ציר x של כל אחת מהפונקציות הבאות.

$$y = 2\sqrt{x} \cdot (x - 3) \quad (\text{iv}) \qquad y = 2\sqrt{x} \cdot (x + 3) \quad (\text{i})$$

$$y = 2\sqrt{x} \cdot (x^3 - 27) \quad (\text{v}) \qquad y = 2\sqrt{x} (x^2 - 9) \quad (\text{ii})$$

$$y = 2\sqrt{x} \cdot (e^x - 5) \quad (\text{vi}) \qquad y = 2\sqrt{x} \cdot e^x \quad (\text{iii})$$

(ב) רשמו את החוקים שיכולים להתאים לגרף הבא:



- (ג) ידוע כי שיעור y של נקודת המינימום הוא -4 .
 התאימו לגרף המשוורטט את החוק (מהרשימה למעלה).

5. פתרו את המשוואות הבאות. לבדיקה, הציבו במשוואה.

$$3e^x \sqrt{x} - \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = 0 \quad (\text{ג}) \qquad e^x \cdot \sqrt{x} - e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad (\text{א})$$

$$\sqrt{x} \cdot (2x - 1) - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad (\text{ד}) \qquad \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = 0 \quad (\text{ב})$$

6. חקרו את הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} (3x - 6)$ לפי השלבים הבאים:

- (א) מצאו את תחום ההגדרה.
- (ב) מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.
- (ג) מצאו את נקודות הקיצון.
- (ד) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- (ה) רשמו תחומי עליה וירידה של הפונקציה.

7. חקרו את הפונקציה $f(x) = \sqrt{x} \cdot (3x - x^2)$, לפי שלבי החקירה הרשומים בתרגיל 6.

8. הראו שלפונקציה $f(x) = 2\sqrt{x} (x^2 + 2x)$ יש נקודת קיצון רק בנקודת הקצה.

פונקציות מכפלה נוספות

1.  נחקור את הפונקציה $y = \frac{e^x}{x}$.

- (א) עבור איזה ערך של x הפונקציה לא מוגדרת?
 (ב) הסבירו מדוע לפונקציה אין נקודות חיתוך עם הצירים.

(ג) – גזרו, כמכפלה: $y = e^x \cdot \frac{1}{x}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{🔔}$$

– הוציאו גורם משותף והראו כי הנגזרת שקיבלתם שווה ל:

$$y' = \frac{1}{x} \cdot e^x \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

(ד) מצאו את נקודת הקיצון וקבעו מאיזה סוג היא (מקסימום או מינימום) בעזרת חישוב נקודות נוספות.

(ה) השלימו שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה (משני צידי ציר ה- y).

(ו) רשמו את משוואות האסימפטוטות.

(ז)  שרטטו את גרף הפונקציה $y = \frac{e^x}{x}$ בעזרת מחשב או מחשבון גרפי, ובדקו את תשובותיכם לסעיפים הקודמים.

2.  גזרו את הפונקציות. (לצורך זה רשמו כמכפלה.)

$$y = \frac{e^x + x^2}{x} \quad (\text{ד})$$

$$y = \frac{2e^x}{x} \quad (\text{א})$$

$$y = \frac{2e^x + x^3}{x} \quad (\text{ה})$$

$$y = \frac{e^x}{2x} + x \quad (\text{ב})$$

$$y = (e^x + 1) \left(\frac{1}{x} + 1\right) \quad (\text{ו})$$

$$y = \frac{e^x + 1}{x} \quad (\text{ג})$$



3. חקרו את הפונקציה $y = e^x \cdot (\frac{1}{x} + 2)$ לפי השלבים הבאים:

- (א) רשמו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- (ב) מצאו את נקודת החיתוך עם ציר ה- x .
- (ג) מצאו את נקודות הקיצון.
- (ד) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

גרף ילויס

4. פתרו את המשוואות הבאות:

$$\frac{2}{x} \cdot e^x - \frac{2}{x^2} \cdot e^x = 0 \quad (א) \quad -\frac{e^x}{3x^2} + \frac{e^x}{x} = 0 \quad (ג)$$

$$e^x \cdot (\frac{1}{x} + 3) + e^x \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 0 \quad (ב) \quad e^x \cdot (1 - \frac{1}{x^2}) + 3e^x = 0 \quad (ד)$$

5. חקרו את הפונקציה $f(x) = \frac{4e^x}{x}$ לפי השלבים הבאים:

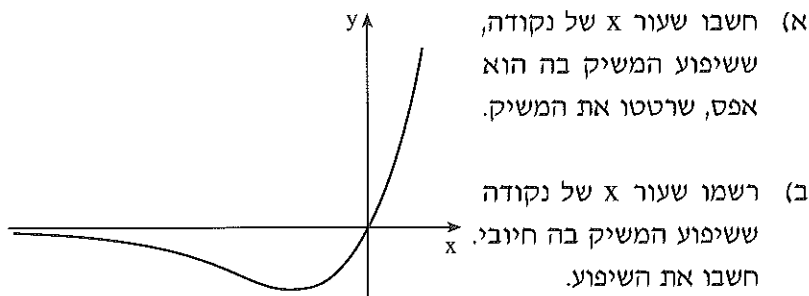
- (א) מצאו את תחום ההגדרה.
- (ב) מצאו את נקודות החיתוך עם צירים.
- (ג) מצאו את נקודות הקיצון (אם יש).
- (ד) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
- (ה) רשמו את תחומי העליה והירידה.

6. חקרו את הפונקציה $f(x) = e^x \cdot (\frac{1}{x} - 1)$ לפי שלבי החקירה הרשומים בתרגיל 5.

משוואת משיק

בואו להסמיכים כדאי לבדוק בעזרת מחשב או מחשבון גרפי.

1. משורטט גרף הפונקציה $f(x) = 3x \cdot e^x$.



(ג) חשבו את שיפוע המשיק בנקודה בה $x = -3$. בדקו את תשובתכם בעזרת גרף הפונקציה.

(ד) חשבו את $f'(3) =$

2. נתונה הפונקציה $f(x) = e^x \cdot (2x - 3)$

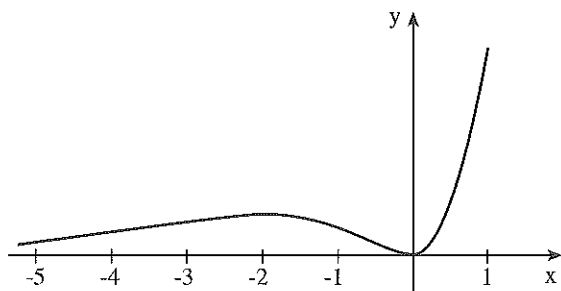


(א) חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודה $(2,)$, והשלימו את שיעורי הנקודה.

(ב) חשבו את שיפוע הפונקציה בנקודה $(-1,)$, והשלימו את שיעורי הנקודה.

(ג) — האם לדעתכם יש לפונקציה נקודת קיצון? הסבירו.
אם כן, מצאו אותה וקבעו מאיזה סוג היא.
— רשמו שיעור x של נקודה נוספת ששיפוע הפונקציה בה שלילי.

3. משורטט גרף הפונקציה $f(x) = x^2 \cdot e^x$ 



(א) רשמו את סימן השיפוע בנקודות ששיעור x שלהן נתון.

(i) $x = -\frac{1}{2}$ (ii) $x = 0$ (iii) $x = 1$

(ב) שרטטו את המשיק, בנקודה בה $x = 1$, וחשבו את שיפוע הפונקציה בנקודה בה $x = 1$.

(ג) לפי החישוב בסעיף הקודם אפשר לרשום את משוואת המשיק בנקודה בה $x = 1$, בצורה $y = 8.15x + \square$. מצאו את שיעור y של הנקודה, ואת המספר החסר במשבצת ובדקו אם הישר ששרטטתם בסעיף ב' מתאים למשוואת הישר שמצאתם.

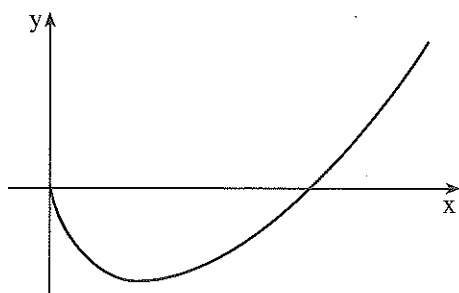
(ד) שרטטו את גרף הפונקציה בעזרת מחשב או מחשבון גרפי. שרטטו את המשיק שקבלתם בסעיף ג' ובדקו על ידי הילוך על גרף הפונקציה אם הוא אכן משיק. (עברו מגרף לגרף בעזרת החיצים וודאו ששעור y לא משתנה).

4. (א) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^3 \cdot e^x$ בנקודה בה $x = -1$. 

(ב) בדקו בעזרת מחשב או מחשבון גרפי. שרטטו את הפונקציה והלכו עם המשיק עד $x = -1$.

(ג) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה f בנקודה בה $x = -3$. בדקו בעזרת מחשב או מחשבון גרפי.

נמצא משוואת המשיק למעקף של $\sqrt{x}$ ופונקציה אגרת



5. משורטט גרף הפונקציה:
 $y = \sqrt{x} \cdot (0.5x - 2)$



- (ב) א – מהו שיפוע המשיק
 בנקודה בה $x = 1$
 שרטטו בקירוב את
 המשיק.
 – מצאו את משוואת
 המשיק.

(ג) בחרו נקודה על גרף הפונקציה שהשיפוע בה הוא חיובי (בחרו שעור x ,
 הציבו ומצאו את שיעור ה- y).
 מצאו את משוואת המשיק בנקודה שבחרתם.
 שרטטו ובדקו (בערך) שתשובתכם הגיונית, או בדקו בעזרת מחשב או
 מחשבון גרפי.

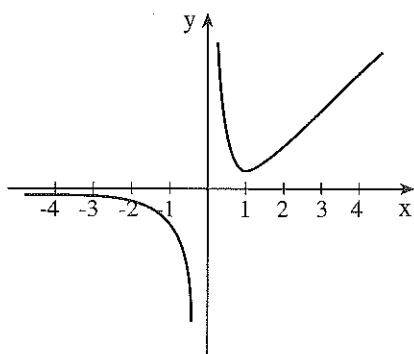
גרזילים

6. (א) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x}$ בנקודות בהן שעור

x שלהן נתון.

(i) $x = 2$

(ii) $x = 1$



- (ב) משורטטת סקיצה של גרף
 הפונקציה.
 שרטטו את המשיקים בנקודות
 האלה ובדקו אם תשובתכם
 לסעיף א' הגיונית.

7. (א) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $y = \sqrt{x} \cdot x^2$ בנקודה בה $x = 2$.
 (ב) בדקו בעזרת מחשב או מחשבון גרפי.

8. (א) מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $y = \sqrt{x} \cdot (x^2 - 4)$ בנקודה בה $x = 4$.
 (ב) בדקו בעזרת מחשב או מחשבון גרפי.

9. לכל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את משוואת המשיק בנקודה ששעור x שלה רשום.

(א) $y = \sqrt{x} \cdot (x^2 - x)$, $x = 2$

(ב) $y = 2\sqrt{x} \cdot (3x^3 - x + 2)$, $x = 1$

10. מצאו משוואת משיק לפונקציה $y = (x + 7) \cdot e^{2x}$ בנקודה בה $x = -1$.

11. מצאו משוואת משיק לפונקציה $y = \sqrt{4 - x^2} \cdot (2x + 4)$ בנקודה בה $x = -1$.

12. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \cdot (\sqrt{x} - 2)$ וישר $y = 4x + 1$.
 שרטטו בעזרת מחשב את שתי הפונקציות.

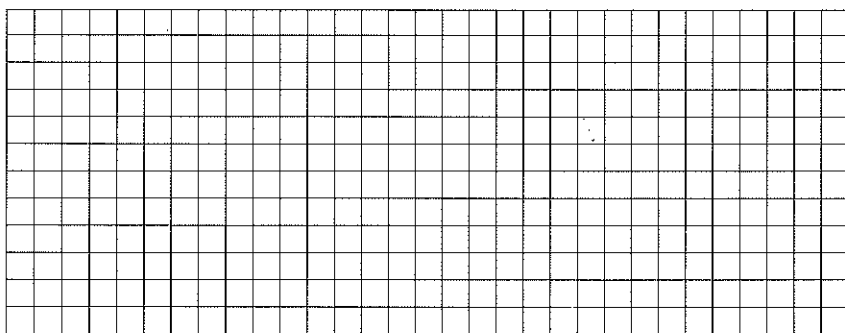
בכמה נקודות על גרף הפונקציה, ניתן להעביר משיק מקביל לישר הזה?
 שרטטו במחשב ישרים כך שישיקו לפונקציה (רשמו משוואות מתאימות).
 מהן נקודות ההשקה? (בדקו בעזרת הילוך).
 בדקו על ידי גזירה והצבת שעורי x של הנקודות.

פרק ז: מבחר בעיות קיצון

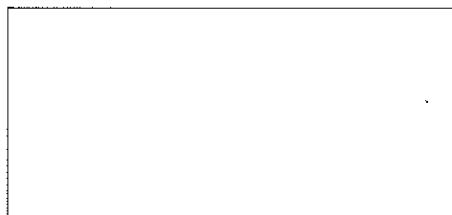
עסקנו בבעיות קיצון בפרקים קודמים, כאשר הן שולבו בנושא הנלמד.
כאן נעסוק בבעיות קיצון נוספות מסוגים שונים.

1. מחוט שאורכו 36 יחידות אפשר ליצור מלבנים שונים.

(א) שרטטו 3 מלבנים כאלה וחשבו את שטחם. (כל משבצת היא יחידה ריבועית).



5 יחידות



(ב) אחת מצלעות המלבן 5 יחידות. חשבו את הצלע השנייה ואת שטח המלבן.

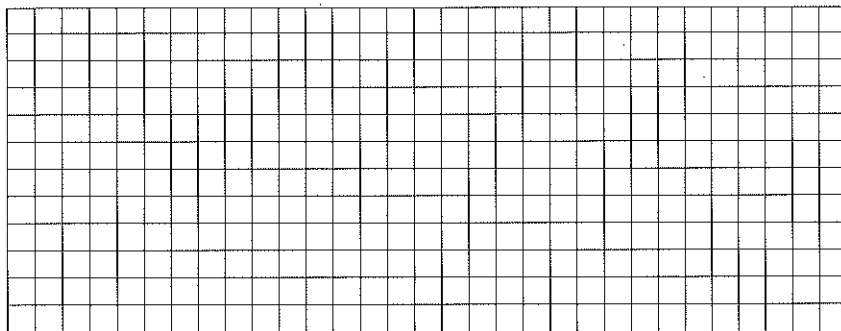
בבעיה זו עסקנו במסלולים שטחים והיקפים, אך לא כבעיית קיצון. כמו כן עסקנו בבעיה דומה במבוא לאנליזה. כאן נחקור שוב את השטח של כל מלבן ונבדוק מתי מתקבל השטח המקסימלי והמינימלי.



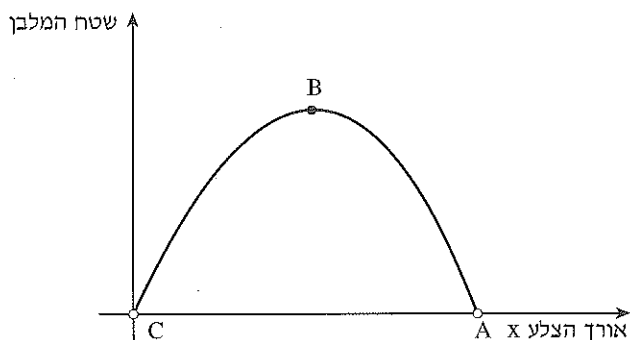


- (ג) סמנו את אחת הצלעות ב- x .
 בטאו את אורך הצלע השנייה ואת שטח המלבן s באמצעות x .

- (ד) מצאו עבור איזה ערך של x השטח מקסימלי. איזה מלבן קיבלתם? שרטטו את המלבן וחשבו את שטחו.



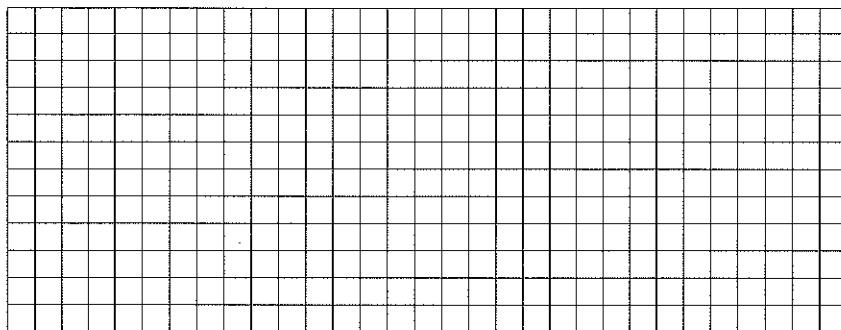
- (ה) לפניכם גרף הפונקציה s . רשמו את שיעורי הנקודות A ו-B, והסבירו מדוע סמנו אותן בגרף בעיגול ריק.



- (ו) - מה לדעתכם יהיה המלבן בעל שטח המקסימלי, אם אורך החוט יהיה 48 יחידות?
 - איך לדעתכם יראה הגרף המתאר את שטחי המלבנים כפונקציה של הצלע, כאשר אורך החוט 48 יחידות?
 - במה דומה ובמה שונה הגרף מזה המשרטט בסעיף ה'?

בשאלה הקודמת חקרתם שטחים של מלבנים שהיקפם קבוע
ובשאלה הבאה נחקור היקפים של מלבנים ששטחם קבוע.
בבעיה זאת עסקנו בנושאים קודמים: במסלולים שטחים והיקפים
ובאנליזה.

2. (א) שרטטו שלושה מלבנים ששטחם 36 יחידות ריבועיות (כל משבצת היא
יחידה ריבועית) ורשמו מעל כל מלבן את היקפו.



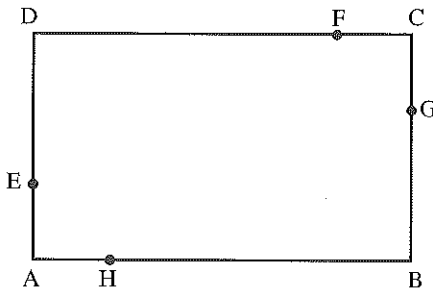
(ב) אחת מצלעות המלבן 2 יחידות. חשבו את הצלע השניה ואת היקף
המלבן (רשמו את המידות בשרטוט).

(ג) סמנו את אחת הצלעות ב- x . בטאו את אורך הצלע השניה ואת היקף
המלבן p באמצעות x (רשמו בשרטוט).



(ד) חקרו את הפונקציה p לפי: תחום הבעיה, נקודת קיצון (מאיזה סוג),
סקיצה. (כדאי להיעזר בנקודות המתאימות לחישובים בסעיף א').
(ה) שרטטו מלבן המתאים לנקודת הקיצון. איזה מלבן קיבלתם? רשמו
את אורכי צלעותיו, וחשבו את היקפו.

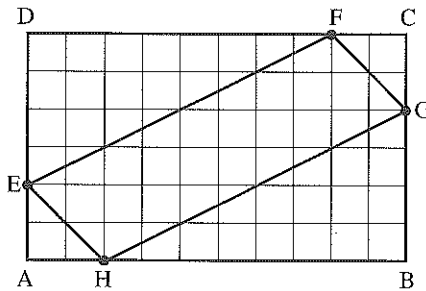
- ו) מהו ההיקף המינימלי של מלבן ששטחו 36 יחידות ריבועיות?
 ז) מה תוכלו לומר על מלבן שהיקפו מקסימלי? הסבירו.



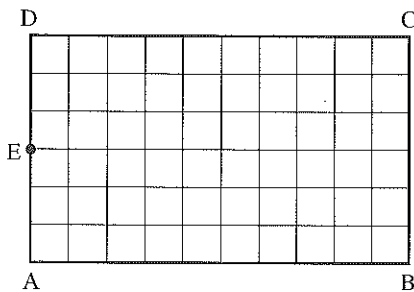
3. ABCD מלבן, $AB = 10$ יח', $AD = 6$ יח'
 ($AE = AH = CF = CG$)

א) חברו את קודקודי המרובע EFGH. התקבלה מקבילית, הסבירו!

בשאלה זו נחקור את שטחי המקביליות האלה.

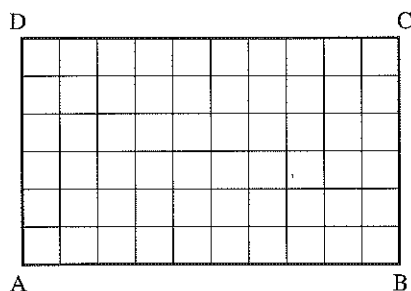


ב) חשבו את שטח המקבילית EFGH אם:
 $AE = AH = CF = CG = 2$ יח'

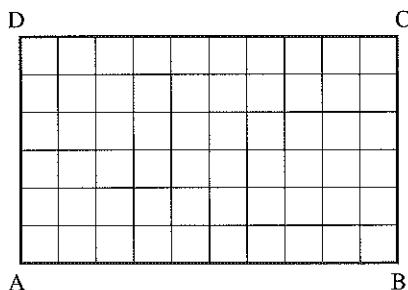


ג) $AE = 3$ יח' – סמנו:
 F על DC כך ש- $CF = 3$ יח'
 G על CB כך ש- $CG = 3$ יח'
 H על AB כך ש- $AH = 3$ יח'
 – חשבו את שטח המקבילית EFGH.

ד) סמנו, שרטטו את המקבילית EFGH וחשבו את שטחה אם
 6 יח' $AE = AF = CG = CH$.



ה) שרטטו מקבילית כזו, ששטחה גדול יותר מהשטחים של המקביליות
 המשורטטות בסעיפים הקודמים.



בהמשך השאלה נחפש מקביליות הגסומה במלבן הנמון בעזרת השטח הגדול ביותר
 והקטן ביותר.

ו) בסעיף זה תוכלו לחקור את הבעיה באמצעות התוכנה "הנדסה בתנועה".



בנו מלבן שצלעותיו 10 יחידות ו-6 יחידות בעזרת ההוראות בהמשך.

שרטטו קטע AB באורך 10.



הביאו את הסמן לקצה
השמאלי התחתון של המסך
והקישו. תסומן נקודה A.

ישר מ-A באורך
10.



אנך מישר AB
בנקודה B
באורך 6.



שרטטו אנך מ-AB בנקודה B שאורכו
6 יחידות. (יסומן ב- BC).

שרטטו אנך מ-AB בנקודה A שאורכו
6 יחידות. (יסומן ב- AD).

חברו את C עם D.
קבלתם מלבן.

ישר מ-C ל-D.



הביאו את הסמן לקטע AD
והקישו.



סמנו נקודה E על AD.

ישר מ-C ל-D
באורך AE.



שרטטו קטע CF השווה ל-AE.

ישר מ-C ל-B באורך AE.
ישר מ-A ל-B באורך AE.

שרטטו קטע CG השווה ל-AE.
שרטטו קטע AH השווה ל-AE.

חברו קטעים ליצירת מקבילית EFGH.
צבעו את צלעות המקבילית בצבע אחר.

צבע

כעת נבדוק איך משתנה שטח המקבילית, כאשר משנים את גודל AE.

הביאו את המסגרת למסך
ורשמו AE.



מדדו את AE.
שימו לב: AE בין 0 ל- 6 יחידות.

הביאו את המסגרת למסך
ורשמו EFGH.



מדדו את שטח המקבילית EFGH.

.....



הזיזו את E על AD ובדקו את
תשובותיכם לסעיפים ב'-ד'.

הזיזו כך ש-AE=2 ובדקו אם חישבתם נכון את שטח המקבילית בסעיף ב'.

הזיזו כך ש-AE=3 ובדקו.

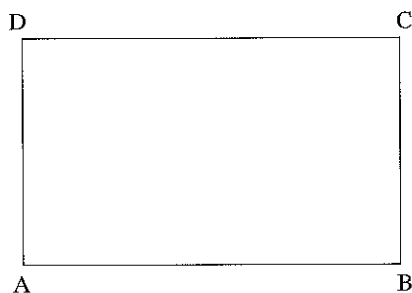
הזיזו כך ש-AE=6 ובדקו.

- מצאו נקודות E, כך שהשטח יהיה אפס. מה אורך AE במקרה זה? (שימו לב לפעמים המחשב לא מדייק).

- חפשו נקודה E, שעבורה השטח יהיה גדול יותר מכל המקרים שחשבתם קודם.

בסעיף ז' נחקור את הבעיה בעזרת אנליזה. בסעיף ח' נמשיך לחקור את הבעיה בעזרת "הנדסה בתנועה". (אל תמחקו את השרטוטים מהמסך).

ז) סמנו x $AE = AH = CF = CG = x$ במלבן ABCD.



שרטטו את המקבילית ובטאו את שטח המקבילית s כפונקציה של x . (תזכורת: $AB = 10$ יח' $CB = 6$ יח')

חשבו עבור איזה ערך של x שטח המקבילית מקסימלי?

ח) נסו לתאר במילים את הגרף שיתקבל אם נשרטט גרף המתאר את שטח המקבילית כפונקציה של x .
שרטטו גרף בעזרת מחשב (לפי ההוראות בעמוד הבא) ובדקו את תאור הגרף שרשמתם.

הביאו את מערכת הצירים למסך.



הביאו את המסגרת למסך והקישו.

הביאו את הסמן לחץ הקטן שבקצה מד-האורך, הזיזו עד לחץ המופיע ליד הציר האופקי ושחררו. (ירשם ליד הציר.)
חזרו לגבי מד-השטח והציר האנכי.

רשמו מה מייצג כל ציר.

שנו יחידות על הצירים.

הקישו פעמיים על אחד הצירים.
יופיע מסך:

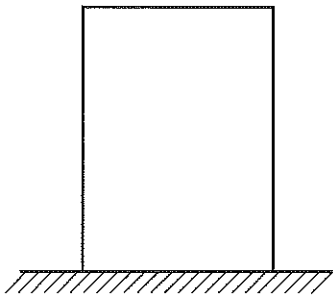
יחידות על הצירים
ציר אופקי מ 0 עד 8
ציר אנכי מ 0 עד 40

שרטטו את הגרף בתחום שבין 0 ל-6.



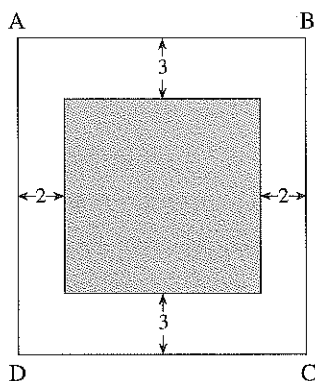
הזיזו את E מ A עד B. הגרף ישורטט.

ט) מהו השטח המקסימלי האפשרי כש- E נעה מ- A עד D? מהו ערכו של AE במקרה זה?
השוו עם התוצאה שקבלתם בסעיף ז'.



4. בית ספר "אורנים" קבל בתרומה גדר באורך של 30 מ'.
המנהלת החליטה לגדר בעזרת כל הגדר, חלקה מלבנית עבור גן-ירק שצד אחד שלה צמוד לבנין.
היא מעוניינת שהשטח יהיה מקסימלי.
מצאו את מימדי החלקה, עבורם השטח יהיה מקסימלי.
חשבו את השטח המקסימלי.

5. מנהלת בית ספר "ברושים" רוצה לגדר חלקה מלבנית ששטחה 16 מ"ר. היא מעוניינת שהיקף החלקה יהיה מינימלי (בגלל שעלות הגדר גבוהה). חשבו את מימדי החלקה, עבורם ההיקף יהיה מינימלי, וחשבו את ההיקף המינימלי.

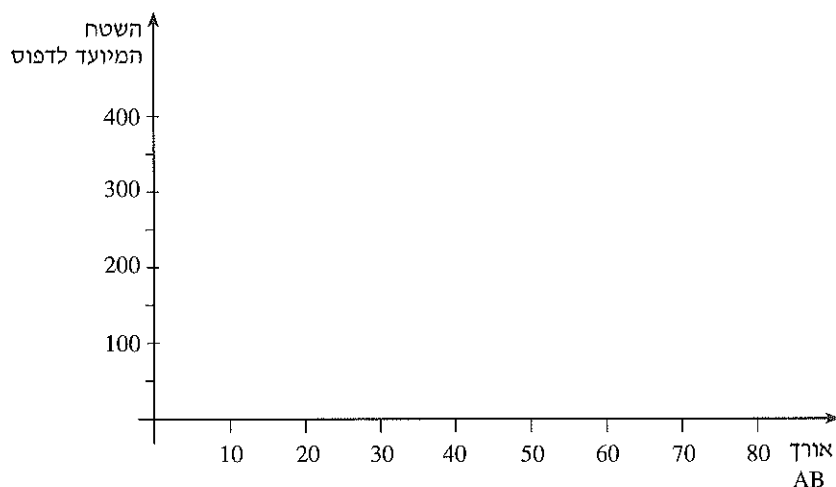


6. בית דפוס מוציא ספר שבו שטח כל דף 600 סמ"ר. השטח המוקצב לשוליים מתואר בשרטוט.

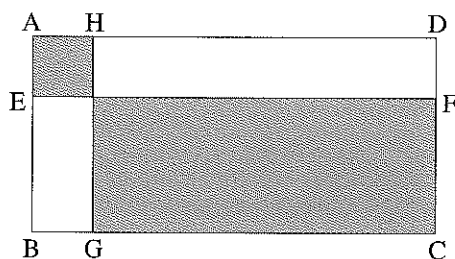
(א) חשבו את השטח המיועד להדפסה, אם $AB = 15$ ס"מ.

(ב) בחרו ערך הגיוני ל-AB וחשבו את השטח המיועד להדפסה.

(ג) חשבו את השטח המיועד להדפסה אם בחרו בדף שבו $AB = 75$ ס"מ.
(ד) סמנו במערכת הצירים (בקירוב), את הנקודות שחישבתם.



- (ה) סמנו $AB = x$, ובטאו את השטח המודפס s כפונקציה של x .
(ו) חקרו את הפונקציה s (תחום - התייחסו לבעיה, נקודות קיצון - רשמו את סוגן, השלימו את הסקיצה שבסעיף ד').
(ז) עבור איזה ערך של x מתקבל שטח מודפס מקסימלי? מהו השטח המקסימלי?
שרטטו דף לפי המידות שמצאתם, ובתוכו שרטטו את השטח המודפס.



7. נשחק משחק של צביעת

שטחים בתוך מלבן $ABCD$

שצלעותיו 20 ס"מ

ו- 10 ס"מ.

חוקי המשחק: כל אחד

בתורו בוחר את אורך AE ,

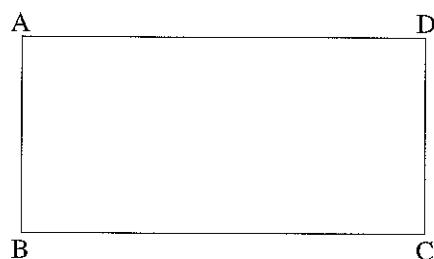
מסמן $AE = AH$,

מעביר קווים מקבילים לצלעות המלבן וצובע את השטחים כבשרטוט.

השטח הצבוע שייך לזה שבחר את אורך AE , השטח הלא צבוע שייך

למשתתף השני.

המשתתף במשחק בעל השטח הגדול יותר, מנצח בתור זה.



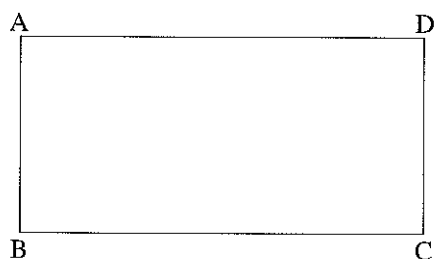
(א) שרטטו (בקירוב) וחשבו

את שטחי המלבנים

הצבועים אם $AE = 2$ ס"מ.

חשבו גם את השטח

הלא צבוע.



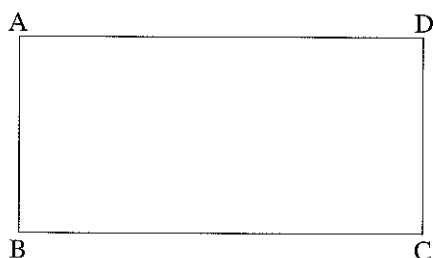
(ב) שרטטו (בקירוב) וחשבו

את שטחי המלבנים

הצבועים אם $AE = 3$ ס"מ.

חשבו גם את השטח הלא

צבוע.



(ג) - סמנו $AE = x$.

- רשמו פונקציה g

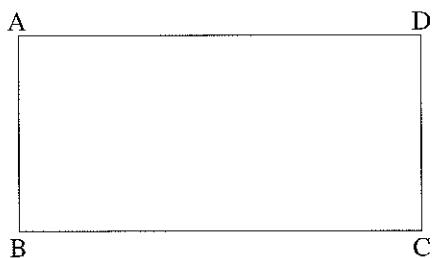
המתארת את השטח

הצבוע כפונקציה של x .

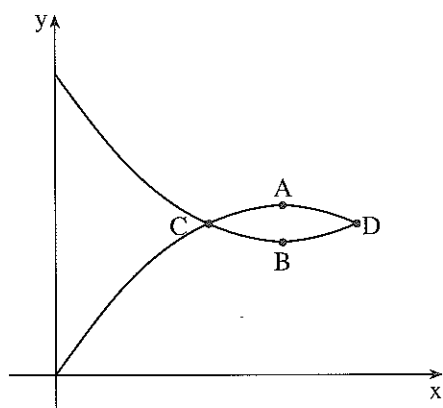
- רשמו גם פונקציה h

המתארת את השטח

שאינו צבוע כפונקציה של x .



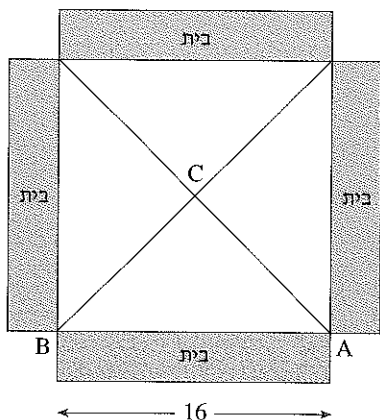
- (ד) - מה השטח המקסימלי שיכול להישאר לא צבוע.
 - צבעו את השטחים המתאימים השייכים לבוחר.



- (ה) משורטטים הגרפים המתאימים לפונקציות h, g .
 - התאימו חוק לגרף, רשמו את החוק המתאים על הגרף.
 - חשבו את שיעורי הנקודות: D, C, B, A.
 - מה משמעות הנקודות A, B, C, D מבחינת המשחק?

- (ו) מה השטח המקסימלי שיכול הבוחר לצבוע? הסבירו, (היעזרו בגרף).

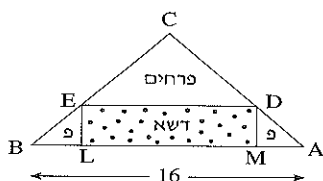
- (ז) מהו התחום שבו ינצח המשתתף במשחק, שלא צובע?



8. בשכונה של אבי תכננו מגרשים
ברביעיות כפי שמודגם בשרטוט, צלע
הריבוע 16 מ'. כל בית קיבל שטח
בצורת משולש לגינה.

(א) הסבירו מדוע לגינה של כל אחד
צורה של משולש שווה שוקיים.
חשבו את זוויות המשולש.

משפחת גן רוצה לתכנן את שטח הגינה. היא מעוניינת בדשא צמוד לבית
ובשטחים לפרחים כבשרטוט.



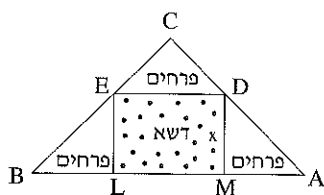
(ב) חשבו את השטח המיועד לדשא
(מלבן EDML)

אם:

$$(i) MD = 3 \text{ מ'}$$

(שימו לב, גם $\triangle DAM$ הוא שווה שוקיים).

$$(ii) MD = 7 \text{ מ'}$$

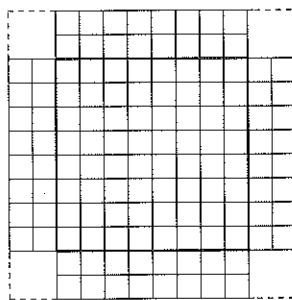
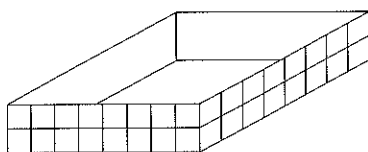


(ג) בטאו את שטח הדשא אם
 $MD = x$. איזה אורך צריכים
לבחור עבור x , כדי ששטח
הדשא יהיה מקסימלי? מהו שטח
הדשא במקרה זה?

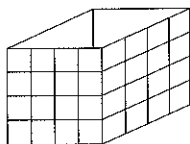
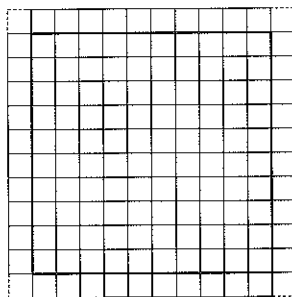
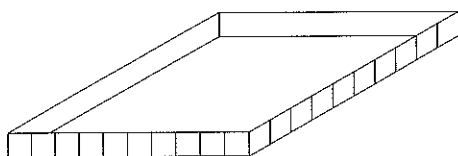
9. מדף נייר משובץ ריבועי, שצלעו 12 יחידות, יוצרים תיבות פתוחות באופן הבא: גוזרים בארבע פינות ריבועים, בעלי אותו אורך צלע, ומקפלים לאורך הקווים המודגשים. ניתן ליצור תיבות שונות (ראו ציורים).

א) שרטטו בדף המשובץ שרטוט המתקבל מגזירה של ריבוע באורך צלע של 2 יחידות.

רשמו בתיבה המשורטטת את המימדים המתאימים, וחשבו את הנפח.

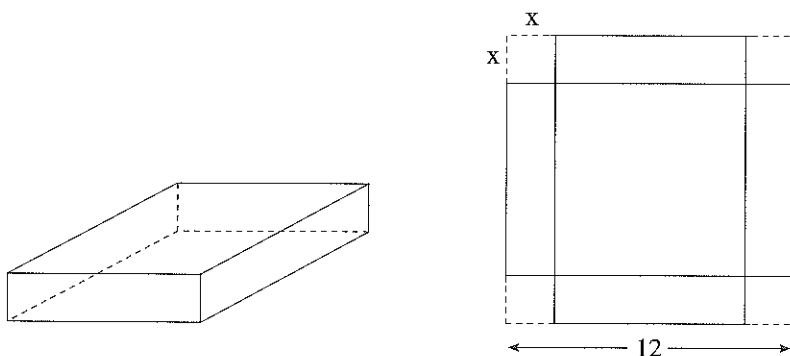


ב) חשבו את נפח התיבה אם גוזרים ריבועים באורך צלע של יחידה אחת.



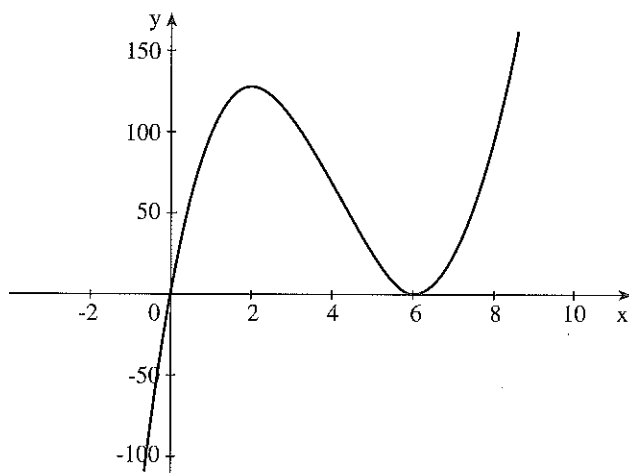
ג) חשבו את נפח התיבה שנבנתה מגזירת ריבוע באורך צלע של 4 יחידות. (רשמו מימדי התיבה בשרטוט).

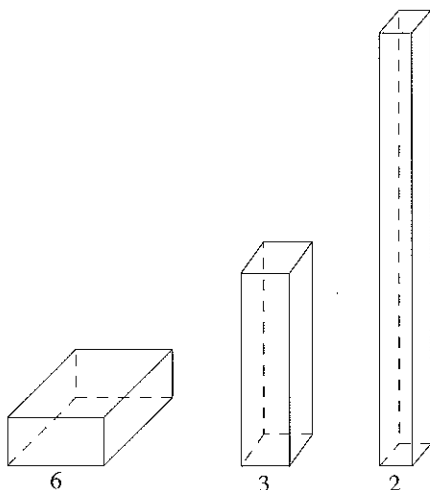
ד) רשמו פונקציה v , המתארת את נפח התיבה כאשר גוזרים בפינות ריבוע שאורך צלעו x יחידות.



ה) מהו הערך של x עבורו הנפח מקסימלי?
 רשמו את מימדי התיבה בעלת הנפח המקסימלי שניתן ליצור. חשבו את הנפח המקסימלי.

ו) חלק מהגרף בשרטוט מתאים לפונקציה v . צבעו את חלק הגרף המתאים.

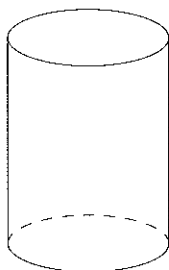




10. בבית חרושת לקופסאות יפות מעוניינים לבנות קופסאות פתוחות עשויות כסף. לקופסאות צורת תיבה שבסיסה ריבוע. נפח כל קופסא 108 סמ"ק. מעוניינים כמובן לחסוך בהוצאות היצור על-ידי הקטנת שטח פני הקופסה ככל האפשר.

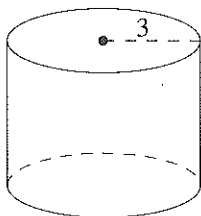
- (א) לגבי כל קופסה חשבו:
 (i) את גובה הקופסה.
 (ii) את סכום שטחי חמש הפאות (התחתית ו-4 הפאות הצדדיות).

(ב) סמנו ב- x את צלע בסיס הקופסה. בטאו את הגובה h ואת שטח חמש הפאות s באמצעות x . מצאו עבור איזה ערך של x השטח מינימלי? בדקו שאכן קבלתם מינימום. מהו השטח המינימלי?



11. באותו בית-חרושת מעוניינים ליצור קופסאות מוזהבות לתכשיטים. לקופסאות צורת גליל עם מכסה ונפח כל אחת 125 סמ"ק. כמובן רוצים לחסוך בחומרים.

נפח הגליל בעל רדיוס r וגובה h הוא: $v = \pi r^2 \cdot h$ 



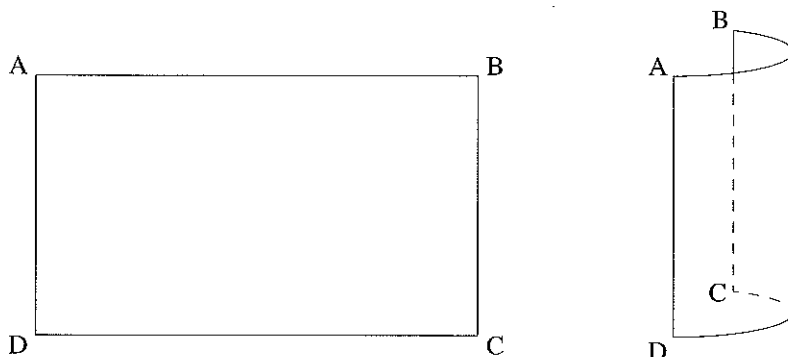
- (א) רדיוס בסיס הגליל הוא 3 ס"מ.
 (i) חשבו את הגובה h של הקופסה.

היקף מעגל: $2\pi r$.



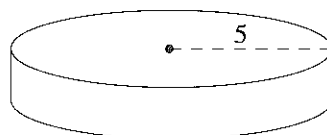
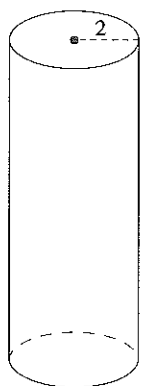
(ii) חשבו את היקף הבסיס של הקופסה.

(iii) רשמו על השרטוטים את הגובה והיקף הבסיס במקומות המתאימים וחשבו את שטח המעטפת.



(iv) חשבו את שטח שני הבסיסים של הקופסה ואת שטח הפנים (המעטפת והבסיסים).

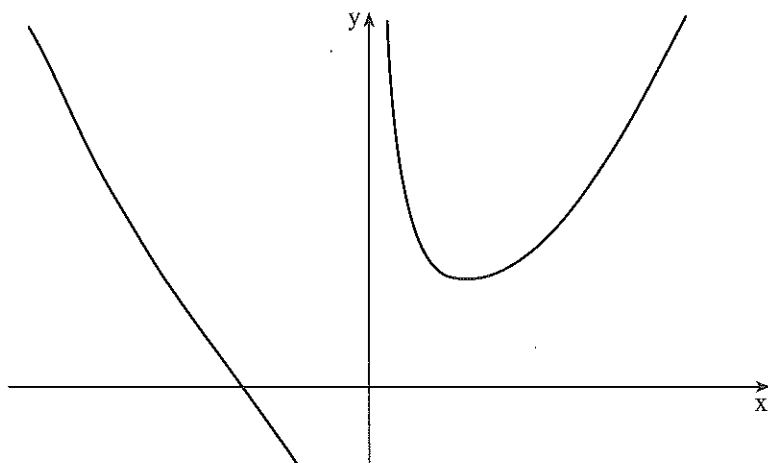
ב) לגבי כל אחת משתי הקופסאות המשוורטות חשבו את:
(i) גובה הקופסה. (ii) שטח המעטפת. (iii) שטח הפנים.



ג) סמנו ב- x את רדיוס הבסיס. בטאו את גובה הקופסא h ושטח הפנים s של הקופסא, באמצעות x .

ד) עבור איזה ערך של x השטח מינימלי? מהו השטח במקרה זה?

ה) חלק מהגרף בשרטוט משמאל מתאים לפונקציית שטח הפנים s . צבעו את חלק הגרף המתאים.



הגרף הכא הוא הכנה לארבעת הגרפים אחריו.

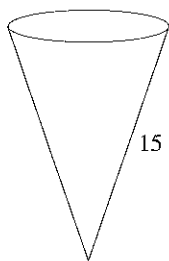
12. פתרו ובדקו על ידי הצבה אם הפתרונות מתאימים.

$$(א) \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}} = \sqrt{x^2 - 2} \quad (\text{כפלו את המשוואה ב-} \sqrt{x^2 - 2})$$

$$(ב) \quad \frac{3x}{\sqrt{10-x}} - 2\sqrt{10-x} = 0$$

$$(ג) \quad \frac{x^2}{\sqrt{48-x^2}} = \frac{\sqrt{48-x^2}}{2}$$

$$(ד) \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{4x}{\sqrt{x^2-4}} = \sqrt{x^2-4}$$

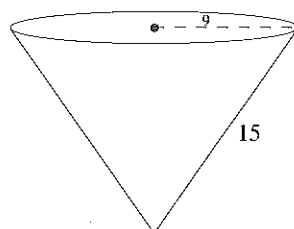
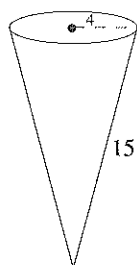
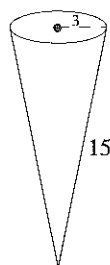


13. רוצים ליצור טילון ענק של גלידה, אורך הקו היוצר 15 ס"מ.

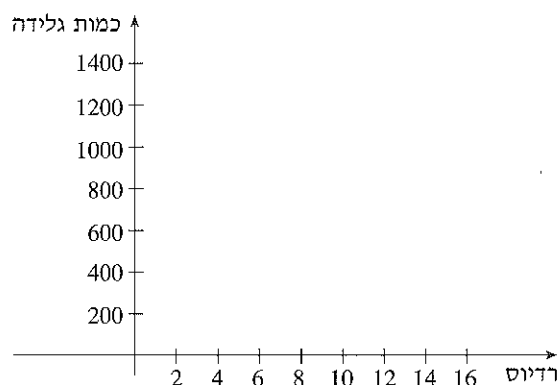
נפח חרוט: $\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$ כאשר r רדיוס הבסיס, 

ו- h אורך הגובה.

(א) (i) חשבו את כמות הגלידה (נפח הטילון) בכל אחד מהמקרים הבאים:



(ii) סמנו את התוצאות שקיבלתם בסעיף (i) במערכת הצירים שלפניכם.



(iii) שערו האם כמות הגלידה תיגדל ככל שמגדילים את הרדיוס.

(ב) מהו תחום ההגדרה של הבעיה?

(ג) חשבו את כמות הגלידה כאשר הרדיוס 14 ס"מ.

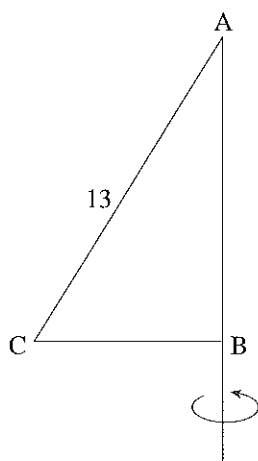
סמנו את התוצאה במערכת הצירים.

בדקו את השערתכם בסעיף א (iii).

ד) סמנו את רדיוס בסיס הטיילון ב- x ובטאו את כמות הגלידה g כפונקציה של x .

ה)  עבור איזה ערך של x כמות הגלידה מקסימלית? חשבו את הכמות המקסימלית. סמנו את הנקודה המתאימה במערכת הצירים והשלימו סקיצה של גרף הפונקציה g .

ו) אברהם לא אוהב טילונים נוזלים ומעוניין לקבל אותה כמות מקסימלית בגליל שרדיוסו כרדיוס בסיס החרוט. מה צריך להיות גובה הגליל?



14. מסובבים משולש ישר זווית שאורך היתר שלו 13 יחידות, סביב AB .

א) איזה גוף מתקבל?

ב) חשבו את נפח גוף הסיבוב אם:

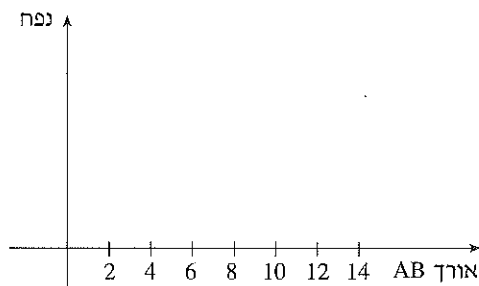
(i) $AB = 5$ יח'

(ii) $AB = 8$ יח'

(iii) $AB = 10$ יח'

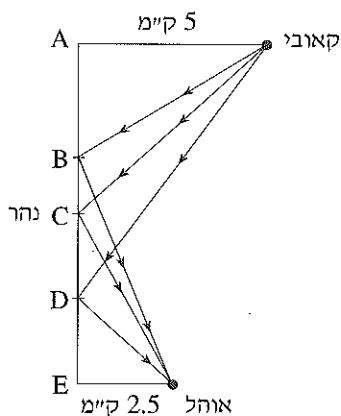
ג) רשמו את התחום המתאים לבעיה.

ד) רשמו יחידות על ציר y וסמנו את כל הנקודות שקיבלתם (מסעיפים ב' ו-ג').

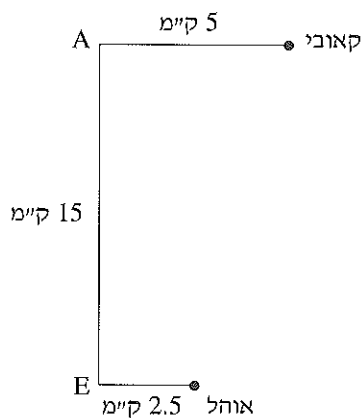


ה) בטאו את נפח גוף הסיבוב v , אם $AB = x$.

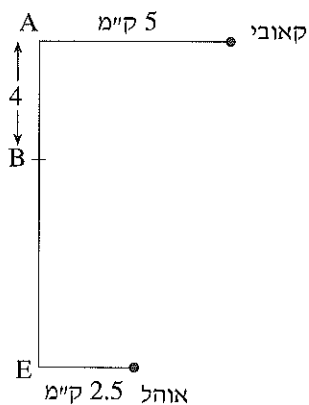
ו) מצאו את x עבורו הנפח מקסימלי. חשבו את הנפח המקסימלי. הוסיפו נקודה זו במערכת הצירים והשלימו סקיצה.



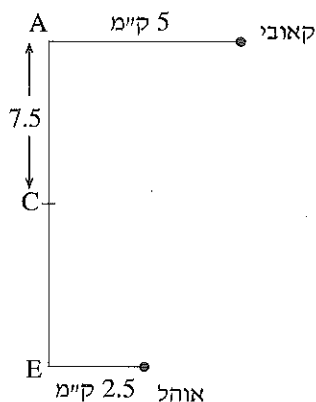
15. קאובי רוצה להשקות בנהר את סוסו בדרכו לאוהלו הנמצא במרחק 2.5 ק"מ מהנהר. הקאובי נמצא במרחק 5 ק"מ מהנהר. הוא יכול לרכב במסלולים שונים (ראו ציור). הקאובי מעוניין למצוא את הדרך הקצרה ביותר. אורך קטע הנהר המשורט 15 ק"מ ($AE = 15 \text{ ק"מ}$).



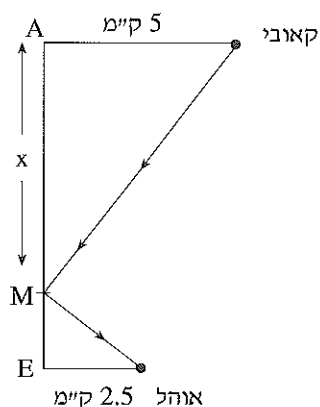
א) שרטטו את המסלול שיעבור הקאובי אם יחליט להשקות את הסוס בנקודה A . חשבו את המרחק.



ב) שרטטו את המסלול שיעבור הקאובי אם יחליט להשקות את הסוס בנקודה B . חשבו את המרחק.

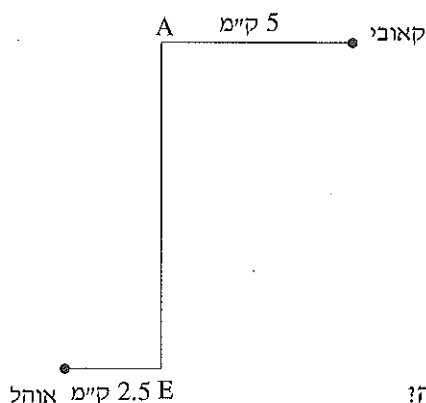


- (ג) שרטטו את המסלול שיעבור
הקאובי אם יחליט להשקות את
הסוס בנקודה C.
חשבו את המרחק.



- (ד) (i) סמנו ב-x את המרחק לאורך
הנהר מ-A לנקודה בה הסוס
ישתה (M). בטאו את
המרחק בין הקאובי לנקודה
M בעזרת x.
בטאו את המרחק בין
הנקודה M לאוהל.
רשמו פונקציה שתבטא את
המרחק של כל המסלול
שיעברו הקאובי והסוס.

- (ii) מצאו x עבורו המרחק יהיה מינימלי. מצאו את המרחק המינימלי. 



- (ה)  נניח שהאוהל נמצא בצד
השני של הנהר.
(i) שרטטו את המסלול
הקצר ביותר במקרה זה.
(ii) באיזה מרחק מ-A
לאורך הנהר, ישתה
הסוס במסלול זה?
השוו עם התוצאה
שקיבלתם בסעיף ד'.
(iii) מה אורך המסלול במקרה זה?

16. קבלן מעוניין לבנות בניין משרדים. עלות הבניה היא פונקציה f של מספר הקומות x :

$$f(x) = 750,000 + 50,000 \cdot \frac{x(x+1)}{2}$$

\$750,000 - מחיר הקרקע

\$50,000 תוספת העלות של הקומה ביחס לעלות הקומה שמתחתיה.

(א) חשבו את עלות הבניה עבור בניין עם קומה 1, בניין עם 2 קומות, בניין עם 3 קומות, בניין עם 4 קומות.

(ב) הקבלן מתכוון להשכיר את כל קומות המשרדים במחיר אחיד ולכן כדאי לו לבנות בניין שהעלות הממוצעת לכל קומה תהיה מינימלית.

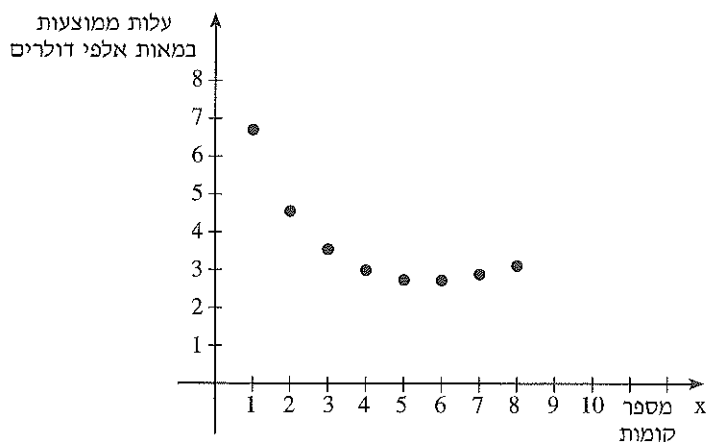
(i) g היא פונקציה המתארת את העלות הממוצעת:

$$g(x) = \frac{750,000}{x} + 50,000 \frac{(x+1)}{2}$$

חשבו את העלות הממוצעת לקומה עבור הבנינים שנידונו בסעיף א'.

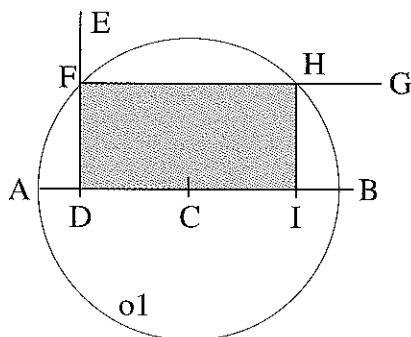
(ii) חשבו את מספר הקומות עבורן העלות הממוצעת היא מינימלית. (שימו לב לתוכן הבעיה).

(ג) משורטט גרף הפונקציה g . נסו להסביר מדוע הגרף מאוד מתון עבור מספר קומות גדול מ-6 קומות.



17. בשאלה זו שני חלקים. בחלק הראשון תחקרו באמצעות התוכנה "הנדסה בתנועה", בעיה של השתנות שטח מלבן שאחד מקודקודיו (D) נע על הקוטר (ראו שרטוט). בחלק השני תחקרו בעיה דומה בעזרת אנליזה.

חלק ראשון: מלבן בתוך מעגל.



הביאו את הסמן למסך והקישו.
תסומן נקודה A.



שרטטו קטע באורך 6 יחידות.

רשמו: ישר מ-A
באורך 6.



חלקו את AB
ל-2 חלקים.
הנקודה תסומן ב-C.



סמנו את אמצע הקטע.

מעגל שמרכזו
C ברדיוס AC.



שרטטו מעגל שקוטרו AB (ברדיוס AC).

הביאו את הסמן לקוטר
והקישו, תסומן נקודה D.
(שימו לב למקומה של D בשרטוט).



סמנו נקודה D על AB ושרטטו אנך
מ-AB בנקודה D.

רשמו: אנך מישר
AB בנקודה D.



חיתוך של המעגל
O1 והאנך DE.
הנקודה תסומן ב-F.
(אם יש צורך הקישו שנית על בנה כך שתסומן
נקודת החיתוך כבשרטוט).



סמנו את נקודת החיתוך של האנך
והמעגל.

מקביל לישר AB
מנקודה F.



העבירו מקביל מהנקודה F ל-AB.

סמנו את נקודת החיתוך השנייה של המקביל והמעגל.

חיתוך של המעגל o1 והמקביל FG. (אם יש צורך הקישו שנית על בנה כך שתסומן נקודת החיתוך השנייה (H).

שרטטו אנך מנקודה H אל AB.

אנך מנקודה H אל הישר AB.

צבעו את המלבן DFHI.

לחצו על **Shift** ועל  וסמנו את קודקודי המלבן. **עריכה** ← מלא צורה.

מדדו את AD.

הביאו את מד-האורך למסך ורשמו AD.

מדדו את שטח המלבן.

הביאו את מד-השטח למסך ורשמו את קודקודי המלבן (DFHI).

שרטטו גרף המתאר את שטח המלבן כפונקציה של אורך AD:

הביאו את מערכת הצירים למסך. רשמו מה מייצג כל ציר.

הביאו את המסגרת למסך והקישו. הביאו את הסמן לחץ הקטן שבקצה מד-האורך AD, לחצו, הזיזו עד לחץ המופיע ליד הציר האופקי ושחררו. (AD ירשם ליד הציר). חזרו לגבי מד-השטח והציר האנכי.

שנו יחידות על הצירים.

הקישו פעמיים על אחד הצירים. יופיע מסך:

יחידות על הצירים
ציר אופקי מ-0 עד 8
ציר אנכי מ-0 עד 10

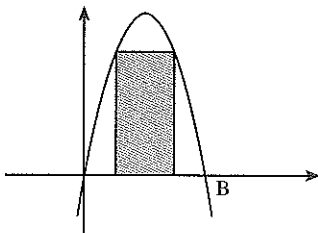
שרטטו את הגרף: הזיזו את D.

הזיזו את D, הגרף ישורטט.

עבור איזה ערך של AD השטח מקסימלי?

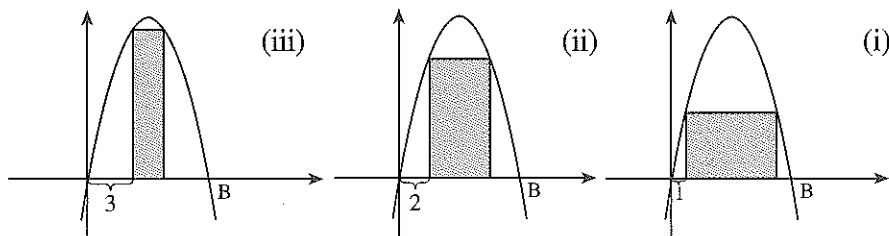
חלק שני: מלבן חסום בפרבולה

לפניכם סקיצה של גרף פונקציה ריבועית $f(x) = -x^2 + 8x$, ומלבן חסום על-ידי גרף הפונקציה וציר x (ראו שרטוט).



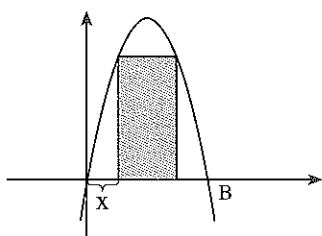
(א) מצאו את שיעורי הנקודה B.

(ב) חשבו את שטחי המלבנים בכל אחד מהשרטוטים.



(ג) – בטאו את צלע המלבן הנמצאת על ציר x, בעזרת x.

– בטאו את הצלע השנייה של המלבן בעזרת x.



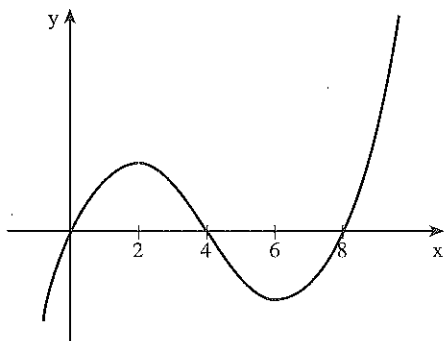
– בטאו את הפונקציה s המתארת את שטח המלבן כפונקציה של x.

(ד) חשבו עבור איזה ערך של x שטח המלבן מקסימלי. מצאו את השטח המקסימלי.

(ה) חלק מהגרף בשרטוט מתאים לפונקציה s.

– איזה חלק מהתחום מתאים לתאור הבעיה? (הדגישו בשרטוט.)

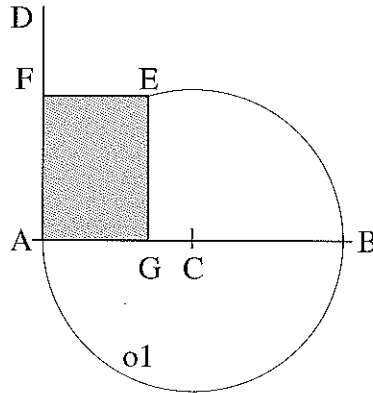
– סמנו במקומות המתאימים על הצירים את הערכים שמצאתם בסעיפים הקודמים.



18. בשאלה זאת שני חלקים.

בחלק הראשון תחקרו, באמצעות התוכנה "הנדסה בתנועה", השתנות שטח מלבן שאחד מקודקודיו (E) נע על המעגל, קודקוד נוסף (A) הוא קצה הקוטר. (ראו שרטוט). בחלק השני תחקרו בעיה דומה באמצעות אנליזה.

חלק ראשון: מלבן ומעגל



שרטטו קטע באורך 6 יחידות.

הביאו את הסמן למסך והקישו.
תסומן נקודה A.



רשמו: ישר מ-A
באורך 6.

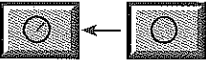


חלקו את AB
ל 2 חלקים.



סמנו את אמצע הקטע.

מעגל שמרכזו
C ברדיוס AC.



שרטטו מעגל שקוטרו AB (ברדיוס AC).

אנך מישר AB
בנקודה A.



העבירו אנך מ-AB בנקודה A.

הביאו את הסמן למעגל והקישו.
תסומן נקודה E.
(ראו מיקומה של E בשרטוט).



סמנו נקודה E על המעגל.

אנך מנקודה
E לישר AD.



שרטטו מנקודה E אנכים
ל-AD ול-AB.

אנך מנקודה
E לישר AB.

צבעו את המלבן AFEG.

לחצו על **Shift** ועל  וסמנו את קודקודי המלבן.
עריכה ← מלא צורה.

מדדו את AG.

הביאו את מד-האורך למסך
←  ורשמו AG.

מדדו את שטח המלבן.

הביאו את מד-השטח למסך
←  ורשמו את קודקודי המלבן (AFEG).

שרטטו גרף המתאר את שטח המלבן כפונקציה של AG:

הביאו את מערכת הצירים למסך.
רשמו מה מייצג כל ציר.

הביאו את המסגרת
←  למסך והקישו.

הביאו את הסמן לחץ הקטן שבקצה מד-האורך AG, לחצו, הזיזו עד לחץ המופיע ליד הציר האופקי ושחררו. (AG ירשם ליד הציר).
חזרו לגבי מד-השטח והציר האנכי.

שנו יחידות על הצירים.

הקישו פעמיים על אחד הצירים.
יופיע מסך:

יחידות על הצירים
ציר אופקי מ-0 עד 7
ציר אנכי מ-0 עד 15

שרטטו את הגרף: הזיזו את E.

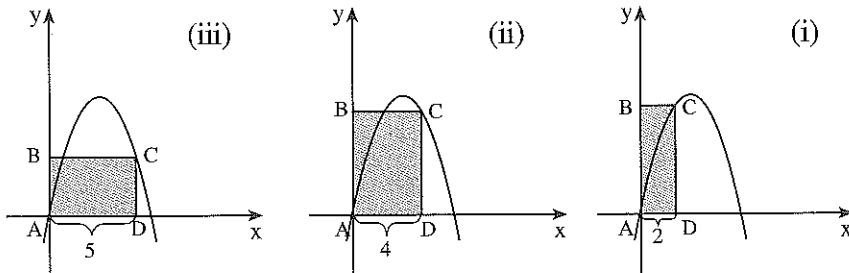
הזיזו את E, הגרף ישורטט.
← 

עבור איזה ערך של AG השטח מקסימלי?

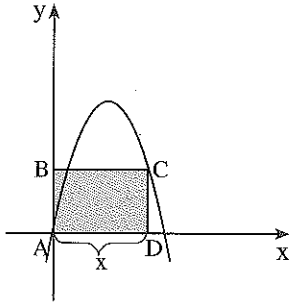
חלק שני: מלבן ופרבולה

לפניכם סקיצות של גרף הפונקציות $f(x) = 6x - x^2$ ומלבן עם קודקוד על גרף הפונקציה (ראו בשרטוטים).

א) חשבו את שטח המלבן הצבוע בכל שרטוט.



(ב) בטאו את שטח המלבן כפונקציה של x .



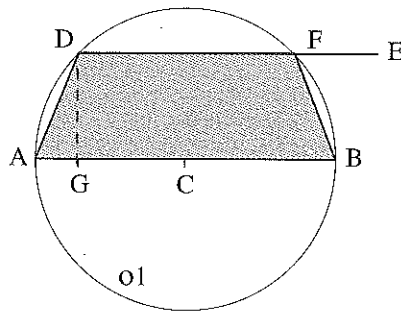
(ג) עבור איזה ערך של x השטח מקסימלי? מהו השטח המקסימלי?

19. בשאלה זו שני חלקים.

בחלק הראשון תחקרו באמצעות התוכנה "הנדסה בתנועה" השתנות שטח טרפז החסום במעגל שאחד מקודקודיו (D) נע על המעגל, ובסיסו הגדול של הטרפז הוא קוטר.

בחלק השני תחקרו בעיה דומה באמצעות אנליזה.

חלק ראשון: טרפז חסום במעגל



שרטטו קטע באורך 6 יחידות.

הביאו את הסמן למסך והקישו, תסומן נקודה A.

רשמו: ישר מ-A באורך 6.

חלקו את AB ל 2 חלקים.

מעגל שמרכזו C ברדיוס AC.

סמנו את אמצע הקטע.

שרטטו מעגל שקוטרו AB (ברדיוס AC).

סמנו נקודה D על המעגל ושרטטו דרכה מקביל ל-BC.

הביאו את הסמן למעגל והקישו, תסומן נקודה D. שימו לב היכן נקודה D בשרטוט)



רשמו: מקביל לישר AB בנקודה D.



חיתוך של המעגל ol והמקביל DE. (אם יש צורך הקישו שנית על בנה כך שתסומן נקודת החיתוך השניה F).



סמנו נקודת חיתוך שניה של המקביל DE והמעגל.

חברו את שוקי הטרפז.

ישר מ-A ל-D. ישר מ-F ל-B.



שרטטו אנך מנקודה D אל AB.

אנך מנקודה D אל ישר AB.



בחרו צבע שונה וצבעו את הטרפז.

לחצו על Shift ועל  וסמנו את קודקודי הטרפז.

צבע ...

עריכה ← מלא צורה.

מדדו את AG.

הביאו את מד-האורך למסך ורשמו AG.



מדדו את שטח הטרפז.

הביאו את מד-השטח למסך ורשמו את קודקודי המלבן (ADFB).



שרטטו גרף המתאר את שטח הטרפז כפונקציה של AG:

הביאו את מערכת הצירים למסך. רשמו מה מייצג כל ציר.

הביאו את המסגרת למסך והקישו.



הביאו את הסמן לחץ הקטן שבקצה מד-האורך לחצו, הזיזו עד לחץ המופיע ליד הציר האופקי ושחררו. (AG ירשם ליד הציר). חזרו לגבי מד-השטח והציר האנכי.

שנו יחידות על הצירים.

הקישו פעמיים על אחד הצירים. יופיע מסך:

יחידות על הצירים

ציר אופקי מ-0 עד 8

ציר אנכי מ-0 עד 15

שרטטו את הגרף: הזיזו את D.

הזיזו את D, הגרף ישורטט.

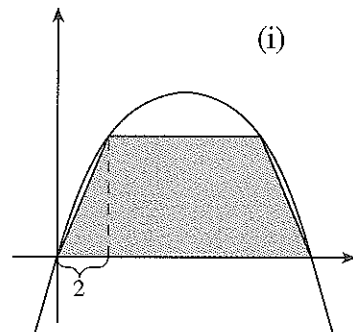
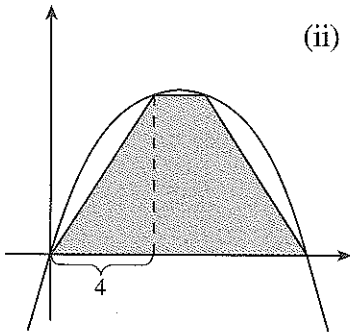


עבור איזה ערך של AG שטח הטרפז מקסימלי? מהו השטח המקסימלי?

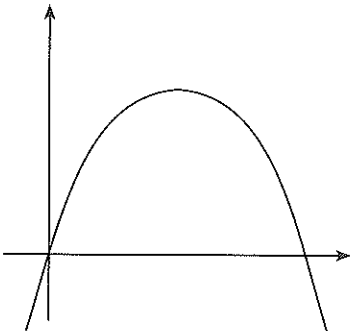
חלק שני: טרפז חסום בפרבולה

לפניכם סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$ וטרפז שווה שוקיים חסום בין גרף הפונקציה וציר x .

(א) חשבו את שטח הטרפז הצבוע בכל שרטוט.



(ב) שרטטו את המקרה הגבולי, בו הטרפז הוא משולש, וחשבו את שטחו.



(ג) (i) בטאו את שטח הטרפז כפונקציה של x .

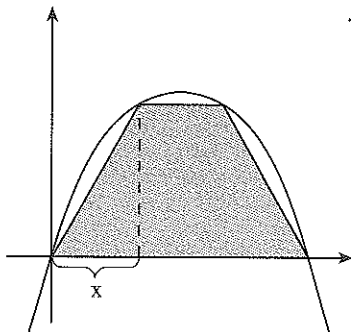
(x הוא שעור הראשון של קודקוד

הבסיס הקטן הקרוב לציר x ,

ראו שרטוט).

(ii) מהם הערכים ש- x יכול לקבל?

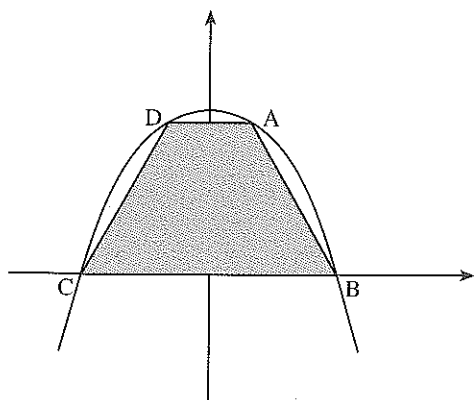
שימו לב לתשובתכם לסעיף ב'.



(ד) עבור איזה ערך של x השטח המקסימלי?

— מצאו את השטח והמקסימלי.

20. טרפז ABCD חסום בין גרף הפונקציה $f(x) = 16 - x^2$ וציר x .



(א) חשבו את שיעורי B ו-C.

(ב) חשבו את שטח הטרפז אם השיעור הראשון של A הוא 2.

(ג) חשבו את שטח הטרפז אם השיעור הראשון של A הוא 3.

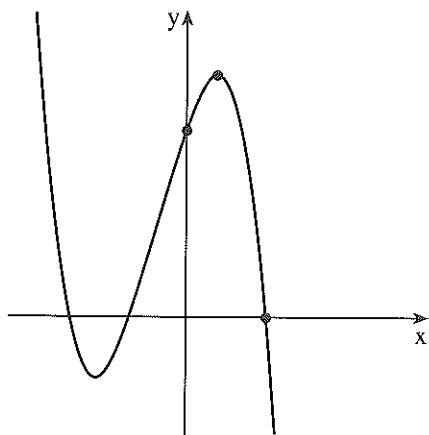
(ד) מה צריכים להיות שיעורי A כדי שהשטח יהיה מקסימלי? (בטאו את השטח כפונקציה של השיעור הראשון של A, x , ומצאו עבור איזה ערך של x השטח המקסימלי).

(ה) חשבו את השטח המקסימלי.

(ו) משורטט גרף פונקציה s שמתאר את שטח הטרפז כפונקציה של x (שהוא השיעור הראשון של הנקודה A).

סמנו על ציר x את התחום המתאים לתאור הבעיה.

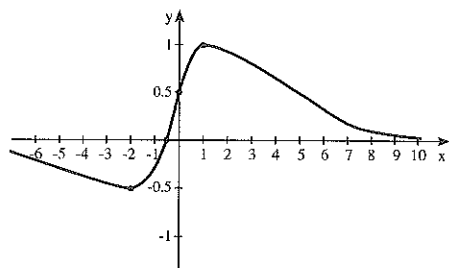
רשמו על ציר x את שיעורי x של הנקודות המסומנות ועל ציר y את שיעורי y של נקודות אלה.



תשובות

פרק א: פונקציות מנה

אסימפטוטה מהי? (עמודים 7-11)



2. (א) $(0, 0.5)$

(ג) $(2, 0.833)$, $(8, 0.26)$

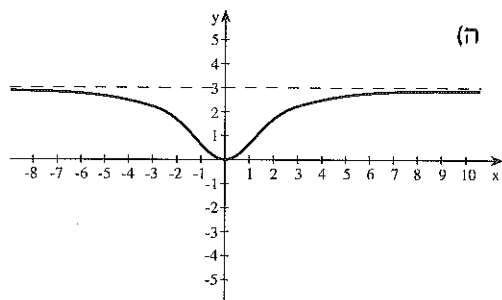
$(-3, -0.45)$, $(-6, -0.29)$

(ה) $(1, 1)$ נקודת מקסימום,

$(-2, -0.5)$ נקודת מינימום.

(ו) $(100, 0.02)$, $(150, 0.013)$, $(200, 0.01)$.

(ז) חיובי.



8. (א) $(2, 1.71)$, $(10, 2.91)$

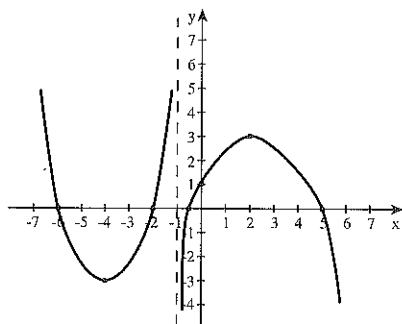
(ג) $(200, 2.9997)$

$(1000, 2.9999)$

$y = 3$ -

עוד על אסימפטוטות (עמודים 12-14)

7.



8. (א) $x = -1$ (ב) $x = 2$, $y = 0$

שברים עשרוניים קטנים (עמודים 15-16)

2. א) 0.08 , 0.002 , 0.035 ב) 0.04

3. א) (0, 0) ב) (1, 0.5) נקודות מקסימום, (ד)

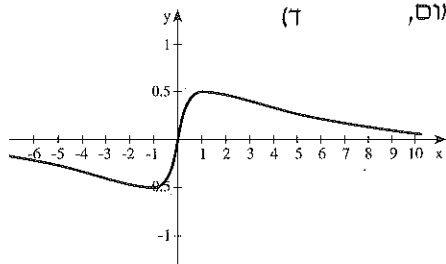
(-1, -0.5) נקודת מינימום.

ג) (-100, -0.0099)

(100, 0.0099)

(1000, 0.00099)

y = 0 , (10.000, 0.000099)



אחת מהמשפחה (עמודים 17-32)

2. א) x = 2 ב) x = -2 ג) x = 3 ד) x = -1 ה) x = 0 ו) x = 1

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1	0.5	0.33	0.25	0.2	0.17

ב) (0.25, 4) , (0.4, 2.5) , (0.5, 2) , (0.75, 1.33) ג) אין

ד) (0.001, 1000) , (0.01, 100) , (0.1, 10)

ה) (10, 0.0001) , (1000, 0.001) , (100, 0.01) , (10, 0.1) ו) אין

ח) f(1) = 1 , f(3) = 1/3 , f(0.5) = 2 , f(0.25) = 4

f(-1) = -1 , f(-3) = -1/3 , f(-0.5) = -2 , f(-0.25) = -4

4. א) אין לפונקציה נקודות קיצון. ב) הפונקציה יורדת עבור x > 0 , x < 0 .

ג) שיפוע ב-A: f'(1) = -1 , שיפוע ב-B: f'(2) = -0.25 .

f'(-1) = -1 , f'(-2) = -0.25 , f'(0.5) = -4 , f'(-0.5) = -4

ד) (ii) f'(1/3) = -9

5. א) (1/2, 3) . החוק של הפונקציה המוזת: y = 1/x + 1 .

ב) (i) x = 0 , y = 1 (ii) (-1, 0) (iii) לא זוגית ולא אי-זוגית.

ג) g'(x) = -1/x^2 ד) f'(2) = -1/4 , g'(2) = -1/4

6. א) הגרף המרוסק מתאים ל- $g(x)$. ב) $f'(1) = -1$, $g'(1) = -1$ ג) המשיקים מקבילים.

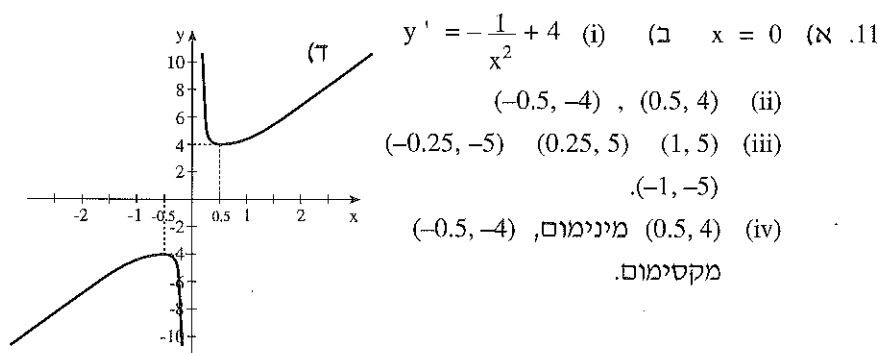
7. א) הנגזרת של כל הפונקציות: $y' = -\frac{1}{x^2}$.

8. א) $y = -\frac{1}{x}$ ג) (i) $y = 0$, $x = 0$ (ii) אין נקודות חיתוך עם הצירים. (iii) הפונקציה עולה עבור $x < 0$, $x > 0$. (iv) הפונקציה אי-זוגית.

ה) הנגזרת של כל הפונקציות: $y' = \frac{1}{x^2}$.

9. א) $(1, 0)$ ב) $y = 1$, $x = 0$

10. א) $x = -1$, $x = 1$ ג) אין פתרון ה) $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$ ב) $x = -0.5$, $x = 0.5$ ד) $x = -0.5$, $x = 0.5$ ו) $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

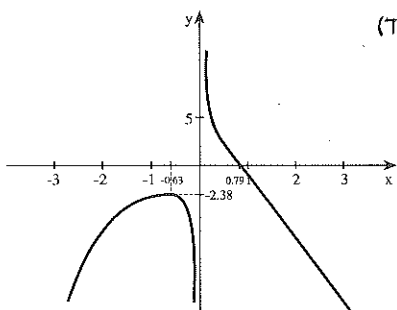


x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	(i) ג)
y	-10.4	-100.04	לא מוגדרת	100.04	10.4	

(ii) כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 0$ מימין, ערכי הפונקציה הולכים וגדלים.

כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 0$ משמאל ערכי הפונקציה הולכים וקטנים. (iii) $x = 0$

12. א) $x = 0$ ב) $y' = \frac{1}{x^2} - 1$, $(1, 0)$ מקסימום, $(-1, 4)$ מינימום.



(ט)

14. א) $x = 0$ ב) $(0.79, 0)$

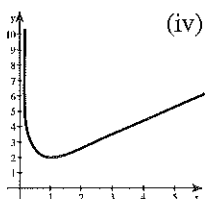
ג) $y' = -\frac{1}{x^2} - 4x$

מקסימום. $(-0.63, -2.38)$

15. א) $(i) \leftarrow h(x)$ $(ii) \leftarrow g(x)$ $(iii) \leftarrow m(x)$ $(iv) \leftarrow f(x)$

ב) $f(x), g(x)$

16. ב) $y = -\frac{1}{x} + 3$ ג) $y = 3, x = 0$ ד) $(\frac{1}{3}, 0)$



(iv) ג) 3

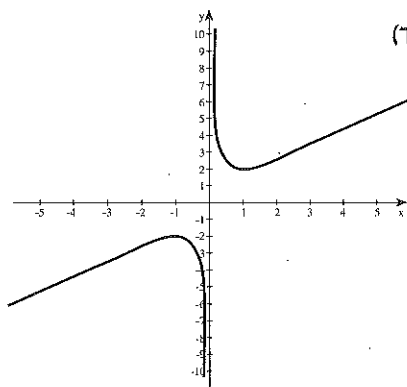
ב) $3\frac{1}{3}$

18. א) $4\frac{1}{4}$

ה) (i) $y = x + \frac{1}{x}$

(ii) $(3, 3\frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}), (4, 4\frac{1}{4})$

(iii) $x = 1, y' = 1 - \frac{1}{x^2}$



(ט)

19. ב) (i) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$

(ii) נקודות חשודות: $(-1, -2)$

$(1, 2)$

(iii) $(0.5, 2.5), (2, 2.5)$

$(-0.5, -2.5)$

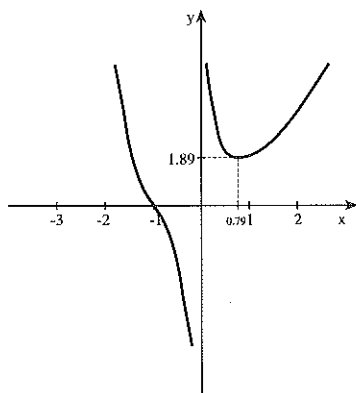
$(-2, -2.5)$

(iv) $(1, 2)$ מינימום,

$(-1, -2)$ מקסימום.

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	(i) ג)
y	-10.1	-100.01	לא מוגדרת	100.01	10.1	

(iii) $x = 0$



21. א) $x \neq 0$

ב) נקודת חיתוך עם ציר x : $(-1, 0)$

אין נקודת חיתוך עם ציר y .

ג) נקודת מינימום: $(0.79, 1.89)$.

ד) $x = 0$

פונקציות חזקה נוספות (עמודים 33-41)

$y = \frac{1}{x^3}$	$y = \frac{1}{x^2}$	
-0.125	0.25	$x = -2$
8	4	$x = 0.5$

7. ב)

8. ב) $y = \frac{1}{x^2}$: $(2, \frac{1}{4})$; $y = \frac{1}{x^4}$: $(2, \frac{1}{16})$

9. $y = \frac{1}{x^3}$: $(2, \frac{1}{8})$; $y = \frac{1}{x}$: $(2, \frac{1}{2})$

10. זוגיות: א, ג, ו ; אי-זוגיות: ב, ד, ה

11. ב) $y = 1$

ג) $(-1, 0)$ היא נקודת חיתוך עם ציר x , אין נקודת חיתוך עם ציר y .

13. (i) א, ה ; (ii) ג, ט

14. (i) - (ד) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$; (ii) - א) $(2, \frac{1}{4})$

(iii) - ב) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$; (iv) - ג) $(2, \frac{1}{8})$

(v) - ו) $(2, \frac{1}{2})$; (vi) - ה) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$

פעולות אלגבריות והזזות (עמודים 42-46)

1. א) $x \neq 0$

ב)

x	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	1	2	3
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	-9	לא מוגדרת	11	3	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$

הזזה של $\frac{1}{x}$ ביחידה אחת כלפי מעלה. החוק הוא: $y = \frac{1}{x} + 1$.

2. א) $3x + 4$ ב) $3 + \frac{1}{x}$ ג) $\frac{1}{x} - 2$ ד) $3 - \frac{1}{x}$

3. א) $y = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x}(1+x) = \frac{1}{x} + 1$

ב) א2: הזזה של $y = 3x$ ב-4 יחידות כלפי מעלה.

ב2: הזזה של $y = \frac{1}{x}$ ב-3 יחידות כלפי מעלה.

ג2: הזזה של $y = \frac{1}{x}$ ב-2 יחידות כלפי מטה.

ד2: הזזה של $y = -\frac{1}{x}$ ב-3 יחידות כלפי מעלה.

4. א) $y = \frac{1}{x} + 3$ היא הזזה של $y = \frac{1}{x}$ ב-3 יחידות כלפי מעלה.

ב) $y = 2 + \frac{1}{x}$ היא הזזה של $y = \frac{1}{x}$ ב-2 יחידות כלפי מעלה.

ג) $y = \frac{1}{x} - 2$ היא הזזה של $y = \frac{1}{x}$ ב-2 יחידות כלפי מטה.

ד) $y = \frac{1}{x} - 1$ היא הזזה של $y = \frac{1}{x}$ ביחידה אחת כלפי מטה.

5. ב) $y' = -\frac{1}{x^2} + 1$, $y = \frac{1}{x} + x$

(1, 2) מינימום , (-1, -2) מקסימום.

6.

$\frac{2+3x}{x}$	•	•	$\frac{3}{x} + 2$
$\frac{3+2x}{x}$	•	•	$-\frac{3}{x} + 2$
$\frac{3x-2}{x}$	•	•	$\frac{2}{x} + 3$
$\frac{2x-3}{x}$	•	•	$-\frac{2}{x} + 3$

7. (i)+(ii)

- (א) $y = 0.5 - 0.5x$, פונקציה קווית. (ד) $y = x + 1$, פונקציה קווית.
 (ב) $y = 4 - \frac{1}{x}$, הזזה של $y = -\frac{1}{x}$ (ה) $y = 5 - \frac{1}{x}$, הזזה של $y = -\frac{1}{x}$
 (ג) $y = \frac{1}{x} + 1.5$, הזזה של $y = \frac{1}{x}$ (ו) $y = \frac{1}{x} - 1$, הזזה של $y = \frac{1}{x}$

8. נקודת מקסימום. $(-0.63, -2.38)$

9. (א) $x \neq 0$

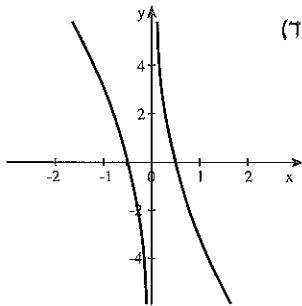
(ב) $(-0.5, 0)$ $(0.5, 0)$ נקודות חיתוך

עם ציר x . אין נקודת חיתוך עם ציר y .

(ג) אין נקודות קיצון.

(ה) אין לפונקציה תחומי עליה.

הפונקציה יורדת כאשר $x < 0$, $x > 0$.



עוד הזזות ושיקופים של $y = \frac{1}{x}$ (עמודים 47-52)

1. (א) $x = 2$ (ב) $x = 2$ (ג) $y = 0$, $x = 2$ (ד) $(0, -\frac{1}{2})$
 2. (א) $x \neq -3$

x	-3.5	-3.1	-3	-2.9	-2.5	(ב)
y	-2	-10	לא מוגדרת	10	2	

- כאשר ערכי x מתקרבים ל $x = -3$ משמאל, ערכי הפונקציה הולכים וקטנים. כאשר ערכי x מתקרבים ל $x = -3$ מימין, ערכי הפונקציה הולכים וגדלים.

$$x = -3 -$$

$$(2, \frac{1}{5}) \quad (1, \frac{1}{4}) \quad (-1, \frac{1}{2}) \quad (-2, 1) \quad (-4, -1) \quad (ג)$$

(ד) הזנו את $y = \frac{1}{x}$ שמאלה ב-3 יחידות.

$$3. \quad (א) \quad x \neq 4 \quad (ב) \quad x \neq 2 \quad (ג) \quad x \neq -1 \quad (ד) \quad x \neq \frac{1}{2}$$

$$4. \quad (i) \quad (א) \quad x = 1 \quad (ב) \quad x = -2$$

(ii) פונקציה (א) היא הזזה של $y = \frac{1}{x}$ ימינה ביחידה אחת.

פונקציה (ב) היא הזזה של $y = \frac{1}{x}$ שמאלה ב-2 יחידות.

$$5. \quad (א) \quad x \neq -1 \quad (ב) \quad x \neq -1 \quad (ג) \quad x \neq -2 \quad (ד) \quad x \neq 2$$

$$6. \quad (א) \quad \frac{1}{x-2} \quad (ב) \quad \frac{1}{x} + 1 \quad (ג) \quad \frac{1}{x-2} + 1$$

$$7. \quad (i) \quad x \neq -2 \quad (ii) \quad x \neq -2 \quad (iii) \quad x \neq 2 \quad (iv) \quad x \neq 2$$

$$8. \quad (א) \quad x \neq -2$$

(i) (ב) הזנו את $y = \frac{1}{x}$ ב-2 יחידות שמאלה וביחידה אחת למטה.

$$(ג) \quad (0, -\frac{1}{2}), (-1, 0)$$

$$(ד) \quad x = -2, y = -1$$

קצת "מתיחות" (עמודים 53-67)

$$y' = 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2} \quad (\text{א} \quad 3)$$

$$y' = \frac{3}{x^2} \quad y' = -\frac{2.5}{x^2} \quad y' = -\frac{2}{x^2} \quad (\text{ב})$$

$$x < 0, x > 0 \quad (\text{א} \quad 4) \quad y' = -\frac{4}{x^2}$$

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4	(ד)
y	-1	-2	-4	-8	לא מוגדרת	8	4	2	1	

$$y = 0, \quad x = 0 \quad (\text{ה})$$

$$y' = \frac{3}{x^2} + 2 \quad (\text{ד})$$

$$y' = -\frac{4}{x^2} + 5 \quad (\text{א} \quad 5)$$

$$y' = -\frac{4}{x^2} - 1 \quad (\text{ה})$$

$$y' = -\frac{7}{x^2} + 6x \quad (\text{ב})$$

$$y' = \frac{1}{x^2} + 12x \quad (\text{ו})$$

$$y' = -\frac{6}{x^2} + 1 \quad (\text{ג})$$

$$x = 2 \quad (\text{ד})$$

$$x = -6, \quad x = 6 \quad (\text{א} \quad 6)$$

$$x = -2 \quad (\text{ה})$$

$$x = -2, \quad x = 2 \quad (\text{ב})$$

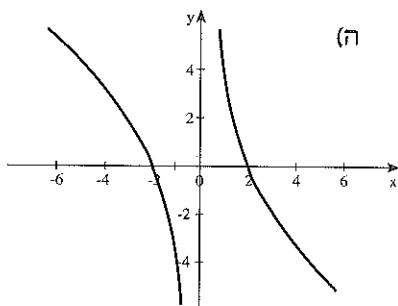
$$x = -0.71, \quad x = 0.71 \quad (\text{ו})$$

$$\text{אין פתרון} \quad (\text{ג})$$

$$x \neq 0 \quad (\text{א} \quad 7)$$

x	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	(ב)
y	-7.5	-39.9	לא מוגדרת	39.9	7.5	

- כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 0$ מימין, ערכי הפונקציה הולכים וגדלים. כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 0$ משמאל, ערכי הפונקציה הולכים וקטנים.



(ה) ג) $(-2, 0)$, $(2, 0)$ נקודות חיתוך

עם ציר x .

אין נקודת חיתוך עם ציר y .

(ד) $y' = -\frac{4}{x^2} - 1$, הנגזרת שלילית

לכל $x \neq 0$ ו $y = 0$

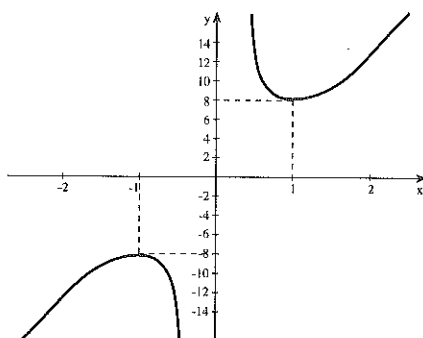
(ז) הפונקציה יורדת עבור $x < 0$, $x > 0$

הפונקציה לא עולה בתחום הגדרתה.

8. א) $x \neq 0$

x	-0.5	-0.01	0	0.01	0.5
y	-10	-400.04	לא מוגדרת	400.04	10

ב)



(ה) - כאשר ערכי x מתקרבים

ל- $x = 0$ מימין, ערכי

הפונקציה הולכים וגדלים.

כאשר ערכי x מתקרבים

ל- $x = 0$ משמאל, ערכי

הפונקציה הולכים וקטנים.

ג) אין נקודות חיתוך עם הצירים.

(ד) נקודת מינימום $(1, 8)$

נקודת מקסימום $(-1, -8)$

9. א) $y' = -\frac{2}{x^2}$, $y = \frac{2}{x} - 3$ ב) $y' = -\frac{6}{x^2} + 2$, $y = \frac{6}{x} + 2x - 1$

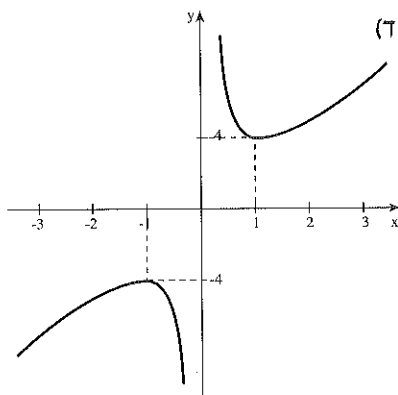
ג) $y' = \frac{2}{x^2}$, $y = 4 - \frac{2}{x}$ ד) $y' = 12x - \frac{2}{x^2}$, $y = 6x^2 + \frac{2}{x}$

ג) אין פתרון

ב) $x = -2$, $x = 2$

10. א) $x = -0.5$

ד) $x = -1$, $x = 4$



11. (א) $x \neq 0$ (ב) אין נקודות

חיתוך עם הצירים.

(ג) נקודת מינימום, $(1, 4)$

מקסימום, $(-1, -4)$.

12. (ב) צלע שניה: 18 יחידות.

היקף המלבן: 40 יחידות.

(ג) צלע השניה: $\frac{36}{x}$.

היקף המלבן: $k(x) = 2x + \frac{72}{x}$.

(ד) $x = 6$, מתקבל ריבוע שהיקפו 24 יחידות.

13. (א) אורך הצלע השניה 9 ס"מ כאשר אורך אחת הצלעות 2 ס"מ.

אורך הצלע השניה 4.5 ס"מ כאשר אורך אחת הצלעות 4 ס"מ.

(ב) $y = \frac{18}{x}$

(ג) (i) $A(1, 18)$. (ii) אורך האנך לציר y מייצג אורך צלע אחת.

(iii) אורך האנך לציר x מייצג אורך הצלע השניה.

(iv) שטח המלבן 18 סמ"ר. (v) היקף המלבן 38 ס"מ.

(ד) (i) $B(6, 3)$. (ii) צלע אחת 6 ס"מ וצלע שניה 3 ס"מ.

(iii) שטח המלבן 18 סמ"ר. (iv) היקף המלבן 18 ס"מ.

(ה) שטח המלבן 18 סמ"ר. היקף המלבן 73 ס"מ.

(ו) (i) $M(x, \frac{18}{x})$ (ii) צלע אחת x , צלע שניה $\frac{18}{x}$.

(iii) $y = 2x + \frac{36}{x}$ (iv) $x = \sqrt{18} = 4.24$ ס"מ מקבלים ריבוע.

(v) ההיקף: $4\sqrt{18} = 16.96$ ס"מ

14. (א) גובה התיבה 54 ס"מ, שטח פני התיבה: 440 סמ"ר.

(ב) גובה התיבה 24 ס"מ, שטח פני התיבה: 306 סמ"ר.

(ג) גובה התיבה $\frac{216}{x^2}$.

שטח פנים התיבה: $y = 4 \cdot \frac{216}{x^2} \cdot x + 2x^2 = \frac{864}{x} + 2x^2$

(ד) ממדי התיבה: אורך צלע הבסיס 1 ס"מ, גובה התיבה 216 ס"מ,

שטח הפנים: 866 סמ"ר. (ה) $x = 6$ ס"מ

15.

$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x}$	•	•	$\frac{4}{x}$
$0.4 \cdot \frac{1}{x}$	•	•	$\frac{1}{5x}$
$4 \cdot \frac{1}{x}$	•	•	$\frac{5}{x}$
$5 \cdot \frac{1}{x}$	•	•	$\frac{1}{4x}$
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x}$	•	•	$\frac{0.4}{x}$

16. (א) $y' = -\frac{3}{x^2}$ (ג) $y' = -\frac{1}{2x^2}$ (ה) $y' = -\frac{0.8}{x^2}$

(ב) $y' = -\frac{2.3}{x^2}$ (ד) $y' = -\frac{3}{4x^2}$ (ו) $y' = \frac{2}{3x^2}$

17. (א) $y' = \frac{5}{x^2}$ (ג) $y' = \frac{4}{x^2} + 4x$

(ב) $y' = -\frac{1}{2x^2} + 3$ (ד) $y' = -\frac{6}{x^2} + 1$

18. (א) $y' = -\frac{7}{x^2}$, $y = \frac{7}{x} + 2$ (ב) $y' = 3 + \frac{6}{x^2}$, $y = 3x - \frac{6}{x}$

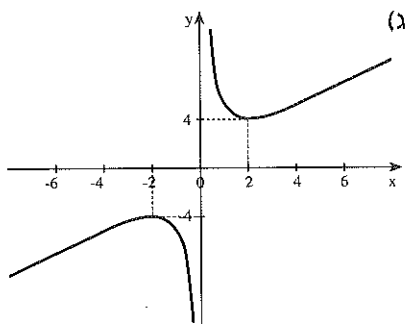
(ג) $y' = -\frac{12}{5}x$, $y = \frac{4}{5} - \frac{6}{5}x^2$ (ד) $y' = -\frac{4}{x^2} + 6$, $y = \frac{4}{x} + 4 + 6x$

19. (א) $x = -1$, $x = 1$ (ב) $x = -2$, $x = 2$

(ג) אין פתרון. (ד) אין פתרון.

20. (א) $x \neq 0$

x	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	(ב)
y	-8.5	-40.1	לא מוגדרת	40.1	8.5	



- כאשר ערכי x מתקרבים
ל- $x = 0$ משמאל, ערכי
הפונקציה הולכים
וקטנים.

- כאשר ערכי x מתקרבים
ל- $x = 0$ מימין, ערכי
הפונקציה, הולכים
וגדלים.

ג) - אין נקודות חיתוך עם הצירים.

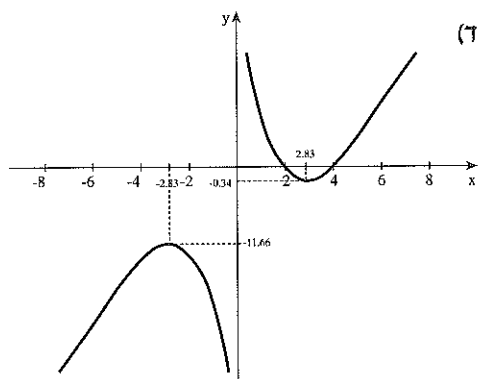
- $(2, 4)$ מינימום, $(-2, -4)$ מקסימום.

- $x = 0$ אסימפטוטה.

21. א) $x \neq 0$ ב) $y = \frac{1}{x} + 9x$, $y' = -\frac{1}{x^2} + 9$

$(\frac{1}{3}, 6)$ מינימום, $(-\frac{1}{3}, -6)$ נקודת מקסימום

22. א) $x \neq 0$ ב) $y = \frac{4}{x} + 2x^2$, $(1, 6)$ נקודת מינימום.



24. א) $x \neq 0$

ב) $(4, 0)$, $(2, 0)$ אין

נקודת חיתוך עם ציר y .

ג) $(2.83, -0.34)$ מינימום,

$(-2.83, -11.66)$ מקסימום.

ה) תחומי עליה:

$x > 2.83$, $x < -2.83$

תחומי ירידה:

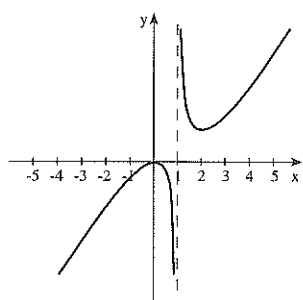
$0 < x < 2.83$, $-2.83 < x < 0$

25. ג) $y = 2(\frac{120}{x} + x)$ (ד) $(\sqrt{120}, \sqrt{120})$

על משיק לפונקציה (עמודים 68-73)

1. (א) $f'(1) = -1$ משוואת המשיק $y = -x + 2$
 (ב) נקודת ההשקה: $(-1, -1)$ משוואת המשיק: $y = -x - 2$
 (ג) שני המשיקים מקבילים.
2. (ב) $f'(-2) = -\frac{1}{4}$
3. (א) $y = 2x + 3$ (ב) $y = -2x$ (ג) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ (ד) $y = 3x - 4$
4. (א) $f'(2) = -\frac{1}{4}$ (ב) $y = -\frac{1}{4}x + 1$
 (ד) $g'(2) = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}x + 3$ (ה) שני המשיקים מקבילים.
5. (א) $A(2, 2.5)$ (ב) $f'(2) = \frac{3}{4}$ (ג) $y = \frac{3}{4}x + 1$
 (ד) $B(-1, -2)$, $y = -2$
6. (ב) $(2, \frac{1}{2})$, $(-2, -\frac{1}{2})$
 (ג) (i) $x = -0.5$, $x = 0.5 \Leftarrow -\frac{1}{x^2} = -4$ $A(0.5, 2)$
 (ii) כן, נקודת ההשקה: $(-0.5, -2)$
7. (א) $(\frac{1}{3}, 3)$, $(-\frac{1}{3}, -3)$ (ב) $(3, \frac{1}{3})$, $(-3, -\frac{1}{3})$
 (ג) $(\sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\sqrt{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$
8. (א) $y = -x - 5$ (ב) $y = -9x + 11$ (ג) $y = 2.875x + 1$
 (ד) $y = -\frac{1}{4}x + 3$ (ה) $y = 2x - 6$
9. $y = -8x + 8$
10. (א) $(\frac{1}{3}, 6)$, $(-\frac{1}{3}, -6)$ (ב) $y = -18x + 12$, $y = -18x - 12$
11. $(\frac{1}{2}, 3)$, $(-\frac{1}{2}, -3)$ $y = -2x + 4$, $y = -2x - 4$
12. $x = -0.5$, $x = 0.5$
13. משוואת המשיק בנקודה $A(1, 5.5)$ היא: $y = -3.5x + 9$
 משוואת המשיקים בנקודה $B(4, 4)$ היא: $y = 0.25x + 3$
 נקודת החיתוך של שני המשיקים היא: $(1.6, 3.4)$

חקירה של פונקציות מנה נוספות (עמודים 74-78)



(ה)

1. א) $x \neq 1$, $x = 1$

ב) $(0, 0)$

ג) נקודות חשודות: $(0, 0)$, $(2, 4)$

נקודות נוספות: $(1.5, 4.5)$, $(3, 4.5)$

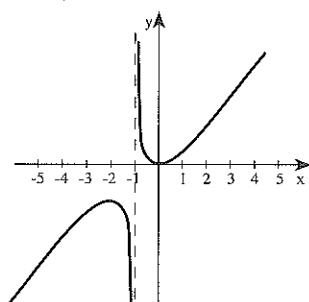
$(-1, -0.5)$, $(0.5, -0.5)$

נקודת מקסימום, $(0, 0)$

נקודת מינימום, $(2, 4)$

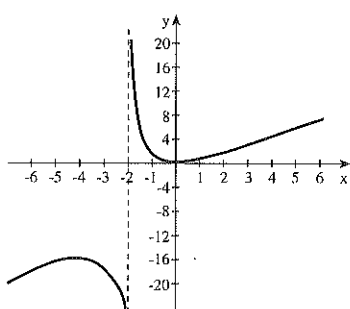
x	0.9	0.99	1	1.01	1.1
y	-8.1	-98.01	לא מוגדרת	102.01	12.1

- כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 1$ משמאל, ערכי הפונקציה הולכים וקטנים. כאשר ערכי x מתקרבים ל- $x = 1$ מימין, הפונקציה הולכים וגדלים. משוואת האסימפטוטה $x = 1$.



3. נקודת מינימום, $(0, 0)$

נקודת מקסימום, $(-2, -4)$

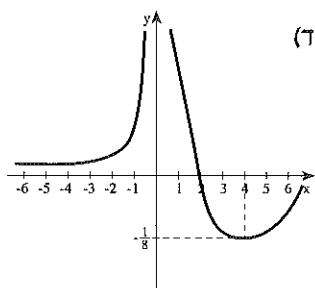


4. א) $x \neq -2$

ב) נקודת מינימום, $(0, 0)$

נקודת מקסימום, $(-4, -16)$

ג) $x = -2$



(ד)

5. א) $x \neq 0$

ב) אין נקודת חיתוך עם ציר y.

(2, 0) נקודת חיתוך עם ציר x.

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	2	4	5
y	0.375	1	3	10	לא מוגדרת	6	0	-0.125	-0.12

ה) $y = 0$, $x = 0$

6. ב) f(x) - (iii) , g(x) - (i) , h(x) - (ii) , m(x) - (iv)

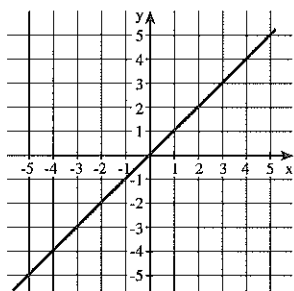
גרף עם חור וצמצום שברים (עמודים 79-85)

1. א) $x \neq 0$

ב) (0.01, 2.01) , (-0.1, 1.9) , (-0.01, 1.99) , (0.1, 2.1)

- כאשר מתקרבים ל- $x=0$, ערכי הפונקציה מתקרבים ל-2.

x	-3	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3
y	-1	0	1	1.5	לא מוגדרת	2.5	3	4	5



2. א) $x \neq 1$

$$y = \frac{x(x-1)}{x-1} = x \quad \text{ב)}$$

ב"מקורית"

(3, 3)

(1.1, 1.1)

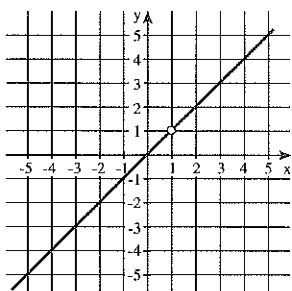
(1, אף)

ג) ב"מצומצמת"

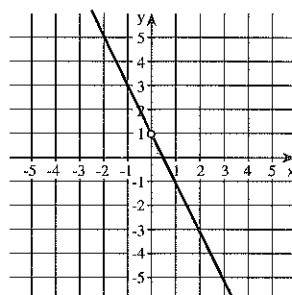
(3, 3)

(1.1, 1.1)

(1, 1)



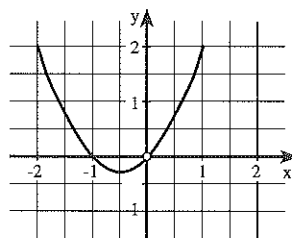
(ד)



(ג)

$$x \neq 0 \quad (\aleph \quad 3)$$

$$y = \frac{x(-2x + 1)}{x} = -2x + 1 \quad (\text{ב})$$



(ה)

$$x \neq 0 \quad (\aleph \quad 4)$$

$$y = \frac{x(x^2 + x)}{x} = x^2 + x \quad (\text{ב})$$

$$y' = 2x + 1 \quad (\text{ג})$$

נקודת מינימום. $(-0.5, -0.25)$

$$x \neq -5, \quad y = \frac{1}{x+5} \quad (\text{ד})$$

$$x \neq -3, \quad y = 1 \quad (\text{ה})$$

$$x \neq 0, \quad y = x + 2 \quad (\text{ו})$$

$$x \neq 0, \quad y = 5x \quad (\aleph \quad (\text{i}) \quad 5)$$

$$x \neq -7, \quad y = -1 \quad (\text{ב})$$

$$x \neq 2, \quad y = 5x \quad (\text{ג})$$

(ו) (ה) (ג) (ב) (א) (ii)

$$x(1 + x^2 + x) \quad (\text{ה})$$

$$x(-x^2 + x + 1) \quad (\text{ו})$$

$$5x^2(1 - 3x) \quad (\text{ז})$$

$$x(7 + 10x) \quad (\text{ח})$$

$$3x^2(x - 2) \quad (\aleph \quad 6)$$

$$x(3x - 2) \quad (\text{ב})$$

$$5(1 + x) \quad (\text{ג})$$

$$x(-x + 1) \quad (\text{ד})$$

7. (ד) $x \neq -0.5$, אי אפשר לצמצם

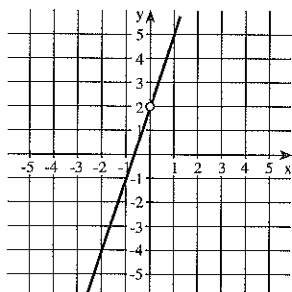
(א) $y = \frac{5}{2}$, $x \neq 1$

(ה) $y = \frac{3x}{2}$, $x \neq -2$

(ב) $y = 11x$, $x \neq -1$

(ו) $y = \frac{5x^2}{3}$, $x \neq -2$

(ג) $y = \frac{x}{2}$, $x \neq -3$

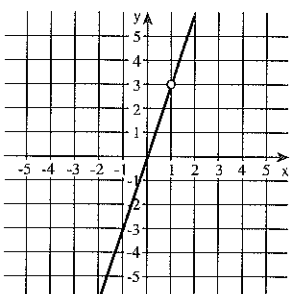


8. (א) $x \neq 0$

(ב) $y = \frac{x(3x+2)}{x} = 3x+2$

(ד) מקורית: (1, 5)

"מצומצמת": (1, 5)



9. (א) $x = 1$ (ב) $y = 3x$, (1, 3)

10. (א) $f(x) = 2x - 1$, $x \neq 0$

$g(x) = x^2$, $x \neq 2$

$h(x)$: הפונקציה מצומצמת, $x \neq 0$

$m(x)$: הפונקציה מצומצמת, $x \neq 2$

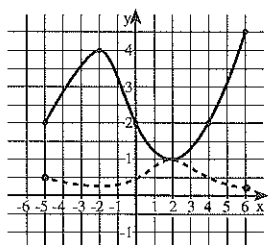
(ii) - $f(x)$, (iv) - $g(x)$

(i) - $h(x)$, (iii) - $m(x)$

פרק ב: הפונקציות f ו- $\frac{1}{f}$

פונקציה המוגדרת בקטע סגור (עמודים 86-97)

1. (א) $-2 < x < 8$, $6 < x < 8$ (ב) $1 < x < 6$ (ג) $(1, 6)$ מקסימום, $(6, -3)$ מינימום $(8, 2)$ מקסימום.
 3. (ב) $(1, -2)$ (ג) $(-2, 6)$
 4. (א) $(-3, -2)$ מינימום, $(1, 2)$ מקסימום, $(3, 1)$ מינימום. (ב) $(-3, -2)$ מינימום מוחלט.
 5. (א) $(6, 4.5)$ מקסימום מוחלט, $(2, 1)$ מינימום מוחלט.



$\frac{1}{f}$	f	(i)	(ב)
$(-2, 0.25)$	$(-2, 4)$		
$(0, 0.5)$	$(0, 2)$		
$(2, 1)$	$(2, 1)$		
$(4, 0.5)$	$(4, 2)$		
$(6, 0.22)$	$(6, 4.5)$		

- ג) (i) $(2, 1)$ (ii) כל ערכי $\frac{1}{f}$ חיוביים. (iii) כאשר f יורדת, $\frac{1}{f}$ עולה.
 (iv) $(-5, 0.5)$ מקסימום $(-2, 0.25)$ מינימום, $(2, 1)$ מקסימום מוחלט, $(6, 0.22)$ מינימום מוחלט.

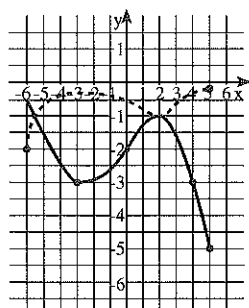
סוג	$\frac{1}{f}$	f	סוג	6. (א)+(ב)
מינימום	$(-3, 0.67)$	$(-3, 1.5)$	מקסימום	
מקסימום מוחלט	$(-2, 2)$	$(-2, 0.5)$	מינימום מוחלט	
מינימום מוחלט	$(1, 0.2)$	$(1, 5)$	מקסימום מוחלט	
מקסימום	$(3, 0.5)$	$(3, 2)$	מינימום	
מינימום	$(4, 0.25)$	$(4, 4)$	מקסימום	
מקסימום	$(6, 1)$	$(6, 1)$	מינימום	

(ד) (ii) שיעור y שלהן הוא 1.

(ה) f עולה בתחומים: $-2 < x < 1$, $3 < x < 4$. בתחומים אלו $\frac{1}{f}$ יורדת.

(ו) ערכי f ו- $\frac{1}{f}$ חיוביים.

סוג	$\frac{1}{g}$	g	סוג (א+ב)
מינימום מוחלט	$(-6, -2)$	$(-6, -0.5)$	מקסימום מוחלט
מקסימום	$(-3, -0.33)$	$(-3, -3)$	מינימום
מינימום	$(2, -1)$	$(2, -1)$	מקסימום
מקסימום מוחלט	$(5, -0.2)$	$(5, -5)$	מינימום מוחלט



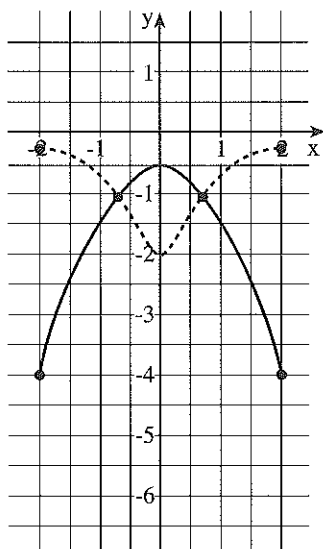
(ד) (ii) $(-5.5, -1)$ $(2, -1)$ (ג)

(iii) שיעור y שלהן (-1) .

(ה) g יורדת בתחומים: $-6 < x < -3$, $2 < x < 5$.

בתחומים אלו $\frac{1}{g}$ עולה.

(ו) שתיהן שליליות.



8. (א) הנקודות המשותפות מודגשות

בשרטוט, בסעיף ג.

(ב) $(-2, -4)$, $(2, -4)$ נקודות

מינימום של f .

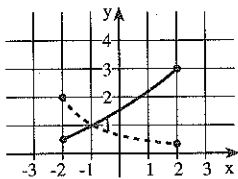
נקודת מקסימום של f $(0, -0.5)$.

נקודות $(2, -0.25)$, $(-2, -0.25)$

מקסימום של $\frac{1}{f}$.

נקודת מינימום של $\frac{1}{f}$ $(0, -2)$.

(ד) נקודת מינימום מוחלט. $(0, -2)$



11. (א) $(-2, 0.5)$ מינימום, $(2, 3)$ מקסימום. (ה)

(ב) $(-2, 2)$ מקסימום, $(2, 0.33)$ מינימום.

(ג) $(-1, 1)$

(ד) נקודות חיתוך של h עם ציר y : $(0, 1.5)$.

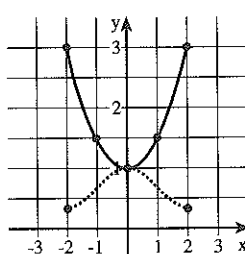
נקודת חיתוך של $\frac{1}{h}$ עם ציר y : $(0, 0.67)$.

(ז) h ו $\frac{1}{h}$ חיוביות.

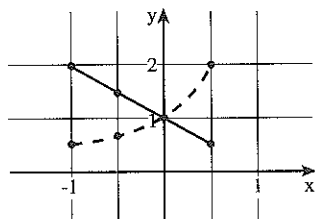
(ח) h עולה, $\frac{1}{h}$ יורדת.

12. גרף g הוא הגרף של $\frac{1}{f}$

	$\frac{1}{f}$	f	13. א+(ב+ג)
מינימום מוחלט	$(-2, 0.33)$	$(-2, 3)$	מקסימום מוחלט
	$(-1, 0.67)$	$(-1, 1.5)$	
מקסימום מוחלט	$(0, 1)$	$(0, 1)$	מינימום מוחלט
	$(1, 0.67)$	$(1, 1.5)$	
מינימום מוחלט	$(2, 0.33)$	$(2, 3)$	מקסימום מוחלט



(iii) ג



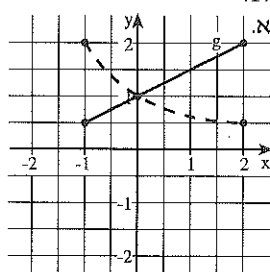
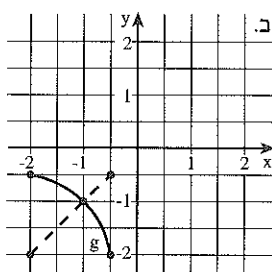
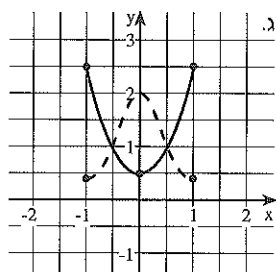
16. (א) $(-1, 2)$, $(-0.5, 1.5)$, $(0.5, 0.5)$, $(0, 1)$

(ב) $(-1, 0.5)$, $(-0.5, 0.67)$, $(0.5, 2)$, $(0, 1)$

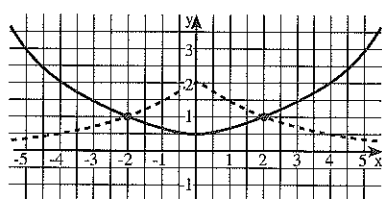
(ד) $\frac{1}{g}$ היא לא פונקציה קווית.

(ה) g יורדת, $\frac{1}{g}$ עולה.

17.



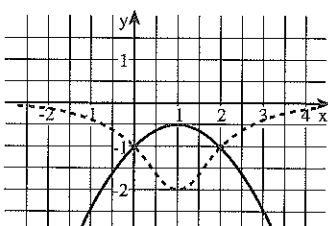
ומה אם התחום לא סגור? (עמודים 98-105)



(ז)

1. (א) מקסימום של $\frac{1}{f}$ (0, 2)

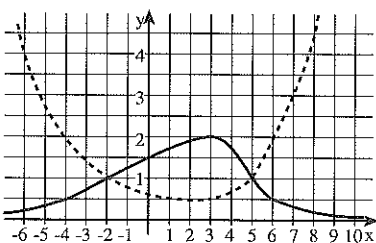
(ד) (6, 0.25), (7, 0.17)



(ח)

2. (א) מינימום של $\frac{1}{f}$ (1, -2)

(ד) (-2, -0.2), (4, -0.2)



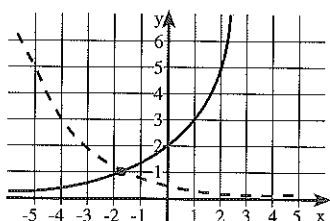
(ט)

3. (א) מינימום של $\frac{1}{f}$ (3, 0.5)

$\frac{1}{f}$	f	(ז)
(-6, 4)	$(-6, \frac{1}{4})$	
$(-3, \frac{4}{3})$	$(-3, \frac{3}{4})$	
(6, 2)	$(6, \frac{1}{2})$	
(8, 4)	$(8, \frac{1}{4})$	

(ו) ערכי $\frac{1}{f}$ גדלים כאשר ערכי x הולכים וגדלים וכאשר ערכי x הולכים וקטנים.

(ז) כאשר $x < 3$ הפונקציה יורדת, כאשר $x > 3$ הפונקציה עולה.

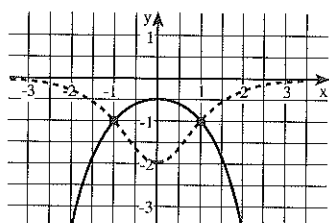
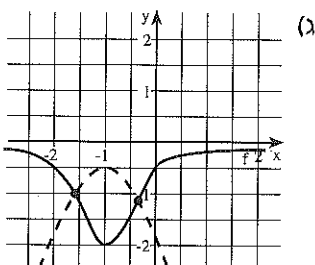
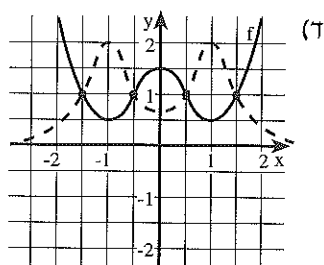
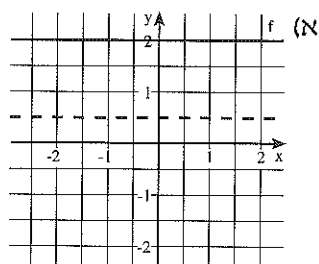
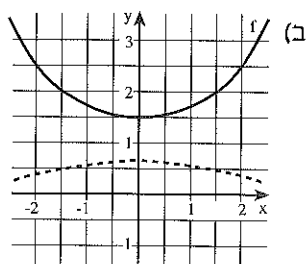


4. (א) $(-5, 5)$, $(5, 0.08)$

(ב) $(0, 0.5)$

(ה) $y = 0$

5.



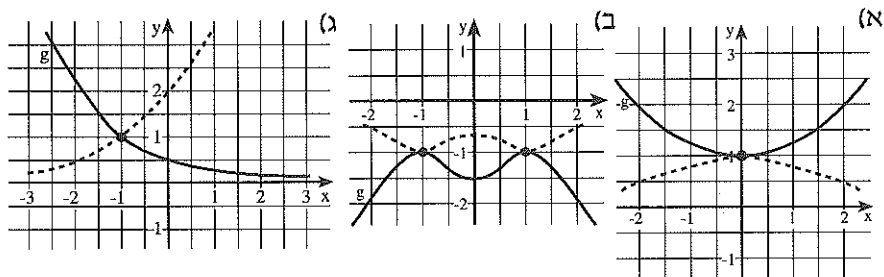
6. (א) $(0, -2)$ מינימום של $\frac{1}{f}$.

(ג) $(3, -0.1)$, $(2, -0.17)$

(ו) (i) $(-5, -0.033)$

(ii) אין ל- $\frac{1}{f}$ נקודת חיתוך עם ציר x .

(iii) $y = 0$

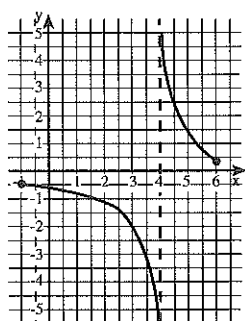


ומה אם הגרף חותך את ציר ה- x ? (עמודים 106-120)

1. (א) $(-1, -2)$, $(6, 3)$ נקודות הקצה של f .

$(6, \frac{1}{3})$, $(-1, -0.5)$ נקודות הקצה של $\frac{1}{f}$.

(ב) (i) $(4, 0)$ (ii) ל- $\frac{1}{f}$ אין נקודה מתאימה לנקודה $(4, 0)$.



(ד)

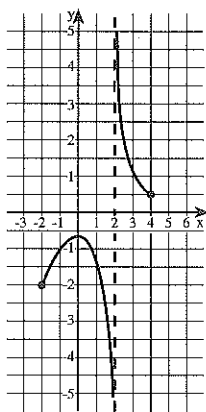
$\frac{1}{f}$	f	(ג)
$(3.5, -5)$	$(3.5, -0.2)$	B:
$(3.8, -10)$	$(3.8, -0.1)$	
$(4.1, 10)$	$(4.1, 0.1)$	
$(4.2, 5)$	$(4.2, 0.2)$	
$(4.5, 2.5)$	$(4.5, 0.4)$	A:

(ד) ערכי $\frac{1}{f}$ הולכים וקטנים משמאל ל- $x = 4$.

ערכי $\frac{1}{f}$ הולכים וגדלים מימין ל- $x = 4$.

2. (א) (i) $(2, 0)$ (iii) $y = 2$

$\frac{1}{f}$	f	(ב)
$(1.5, -2.5)$	$(1.5, -0.4)$	B:
$(1.8, -4)$	$(1.8, -0.25)$	
$(1.9, -5)$	$(1.9, -0.2)$	
$(2.1, 5)$	$(2.1, 0.2)$	
$(2.2, 2.5)$	$(2.2, 0.4)$	
$(2.5, 2)$	$(2.5, 0.5)$	A:

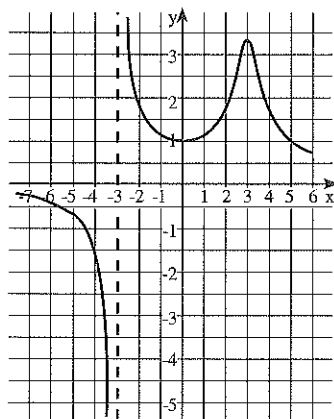


(ג) נקודות מקסימום של g : $(4, 2)$, $(-2, -0.5)$ (ד)

נקודת מינימום של g : $(0, -1.5)$

נקודות מינימום של $\frac{1}{g}$: $(4, 0.5)$, $(-2, -2)$

נקודת מקסימום של $\frac{1}{g}$: $(0, -0.67)$



3. (א) $x = -3$

(ב) $(-2.5, 3.33)$, $(-3.5, -5)$ (ה)

(ג) $\frac{1}{f}$ יורדת ושליטת משמאל לקו המפריד.

(ד) נקודת מקסימום של f : $(0, 1)$

נקודת מינימום של f : $(3, 0.3)$

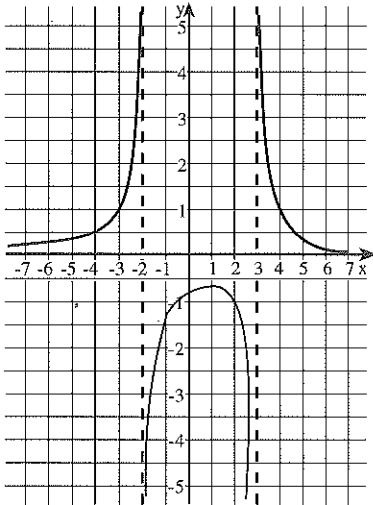
נקודת מינימום של $\frac{1}{f}$: $(0, 1)$

נקודת מקסימום של $\frac{1}{f}$: $(3, 3.33)$

4. (א) $x = 3$, $x = -2$

(ב) $(-2.25, 5)$, $(-1.75, -5)$, $(2.75, -5)$, $(3.25, 5)$

(i) עולה (ii) חיובית משמאל ל $x = -2$.



(ג) (i) $\frac{1}{h}$ עולה משמאל ל $x = -2$.

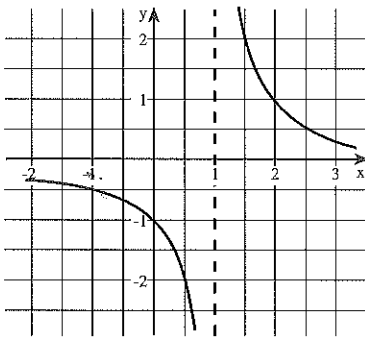
(ii) $\frac{1}{h}$ חיובית משמאל ל $x = -2$.

(ד) (i) $\frac{1}{h}$ יורדת מימין ל $x = 3$.

(ii) $\frac{1}{h}$ חיובית מימין ל $x = 3$.

(ה) נקודת מקסימום. $(0, -\frac{2}{3})$

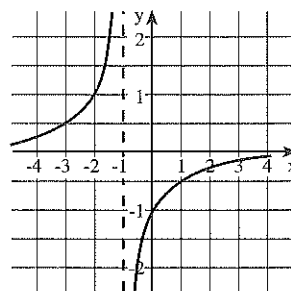
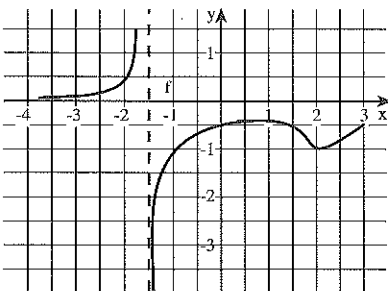
(ו) נקודות $(1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, -1)$ משותפות.



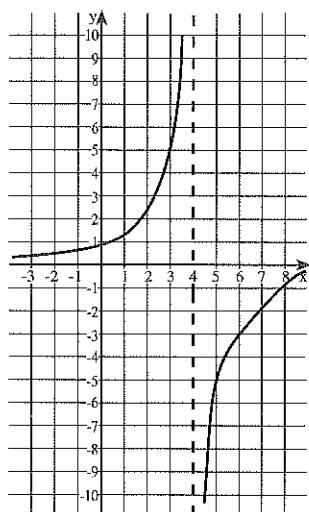
5. (א) (i) $x = 1$

(ב) (i) $(1.25, 4)$, $(0.75, -4)$

(ii) $(2, 1)$, $(0, -1)$



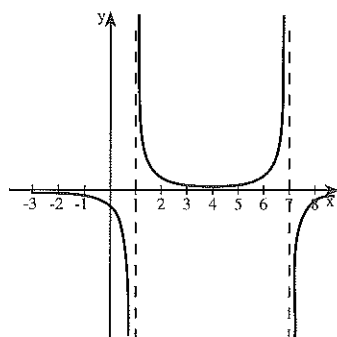
6.



7. (א) $x = 4$ (ב) $(3.5, 10)$, $(4.5, -10)$

(ג) עולה משמאל וחיובית לקו המפריד.

(ד) עולה ושלילית מימין לקו המפריד.



8. (א) $(7, 0)$, $(1, 0)$

(ב) $x = 7$, $x = 1$

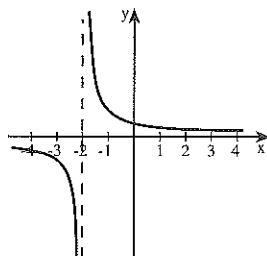
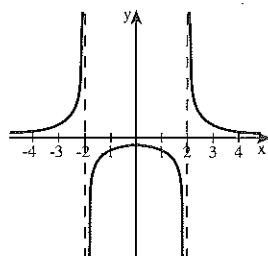
(ג) $(4, 0.2)$ מינימום.

(ד) (ii) $\frac{1}{h}$ יורדת משמאל לאסימפטוטה השמאלית.

(iii) $\frac{1}{h}$ שלילית משמאל לאסימפטוטה השמאלית.

(ה) (ii) $\frac{1}{h}$ עולה מימין לאסימפטוטה הימנית.

(iii) $\frac{1}{h}$ שלילית משמאל לאסימפטוטה השמאלית.

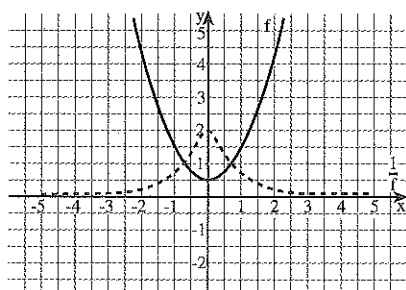


9.

שרטוט הגרף של $\frac{1}{f}$ כאשר ידוע החוק של f (עמודים 121-140)

1. א) II , ב) III , ג) IV , ד) I

8. א) $(0, \frac{1}{2})$ נקודת מינימום. ג) $(0, 2)$ נקודת מקסימום.



$\frac{1}{f}$	f (ב/ד)
$(-2, 0.22)$	$(-2, 4.5)$
$(-1, 0.67)$	$(-1, 1.5)$
$(1, 0.67)$	$(1, 1.5)$
$(2, 0.22)$	$(2, 4.5)$

ה) (ii) ציר x הוא אסימפטוטה.

(iii) $y = \frac{1}{x^2 + 0.5}$ כאשר $x = -10$, $y = 0.0099$

כאשר $x = 10$, $y = 0.0099$

ו) $\frac{1}{f}$ עולה עבור $x < 0$. הפונקציה יורדת עבור $x > 0$.

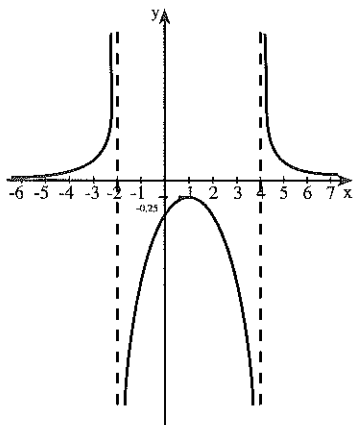
9. (i) נקודות חיתוך עם צירים: $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -3)$.
נקודת מינימום: $(1, -4)$

(ii) נקודות חיתוך עם צירים: $(-3, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 6)$.

נקודת מקסימום: $(-\frac{1}{2}, \frac{61}{4})$

(iii) נקודות חיתוך עם צירים: $(2, 0)$, $(0, 4)$.
נקודת מינימום: $(2, 0)$

(iv) א) נקודת חיתוך עם ציר y $(0, 5)$. אין נקודות חיתוך עם ציר x .
ב) $(1.5, 0.5)$ נקודת מינימום.



10. ב) $x = -1$, $x = 3$

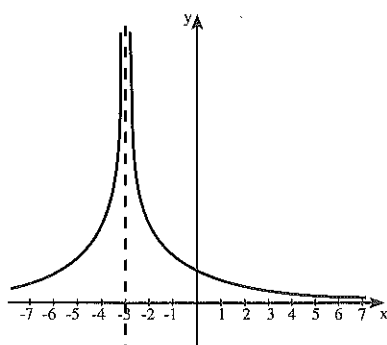
ג) (i) $(1, -0.25)$ מקסימום.

ד) יורדת וחיובית מימין ל- $x = 3$ $\frac{1}{f}$

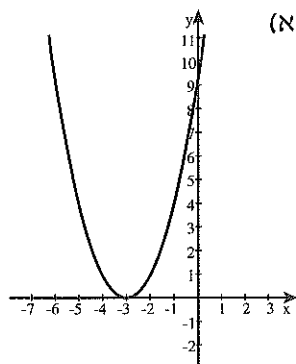
ו) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

(ii) $(-6, 0.022)$ $(6, 0.048)$

ז) 4 נקודות, שעור y שלהן 1 או -1.



(ג+ד)



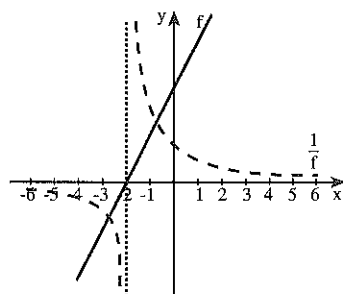
11. א)

ב) $x = -3$ ג) (i) $\frac{1}{f}$ יורדת מימין לקו המפריד. (ii) $\frac{1}{f}$ חיובית מימין לקו

המפריד.

ה) $y = 0$, $x = -3$ ו) שתי נקודות משותפות, שעור y שלהן 1.

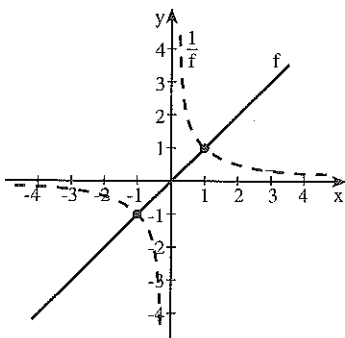
ז) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 6x + 9}$ (ii) $(-7, 0.06)$ $(4, 0.02)$



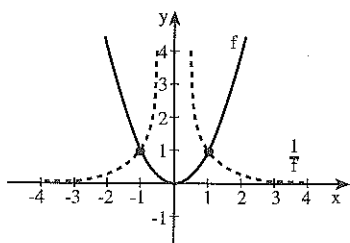
12. ב) $x = -2$

ה) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x + 4}$

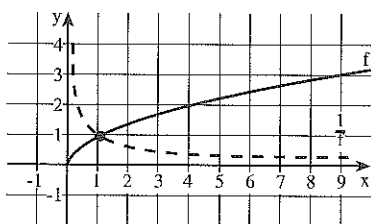
ו) לא.



$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} \quad (1) \quad x = 0 \quad (2) \quad .13$$



$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2} \quad (1) \quad x = 0 \quad (2) \quad .14$$



$$, (0.64, 0.8) , (0.04, 0.2) , (0, 0) \quad (1) \quad .15$$

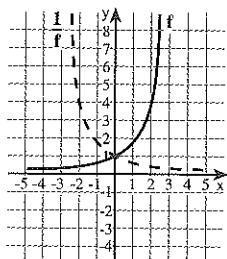
$$(4, 2) , (3, 1.73) , (1, 1)$$

$$, (0.64, 1.25) , (0.04, 5) \quad (i) \quad (2)$$

$$(4, 0.5) , (3, 0.58) , (1, 1)$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (i) \quad (1)$$

$$.(9, 0.33) , (0.09, 3.33) \quad (ii)$$



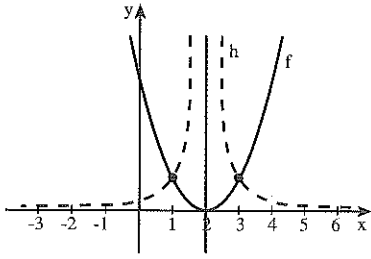
$$(2, 7.39) , (1, 2.72) \quad (1) \quad .16$$

$$, (0, 1) , (-2, 0.13) , (-5, 0.007)$$

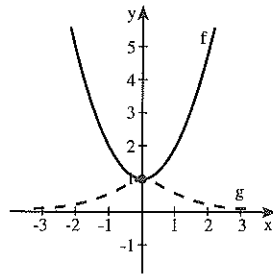
$$(2, 7.39) , (1, 2.72)$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x} \quad (i) \quad (1)$$

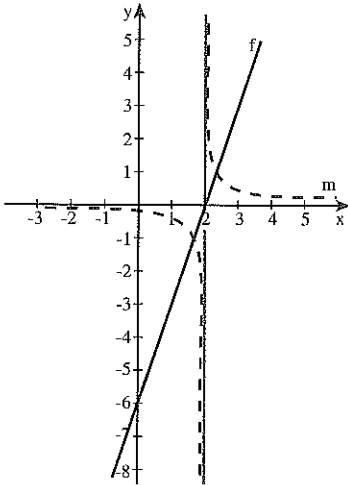
$$(-2, 7.39) , (0.1) , (5, 0.007) \quad (ii)$$



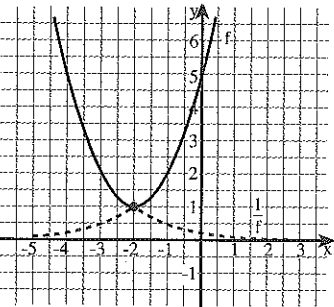
.19



.18



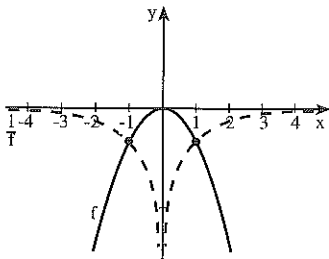
.20



(1)+(N) .21

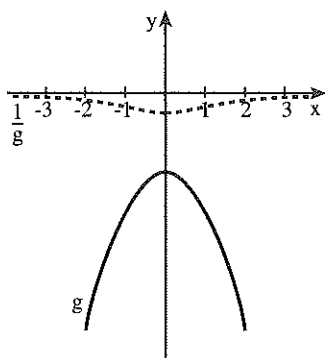
$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 4x + 5} \quad (i) \quad (T)$$

$(-6, 0.06)$, $(4, 0.03)$ (ii)



$x = 0$ (2) .22

$$\frac{1}{g(x)} = -\frac{1}{x^2} \quad (T)$$



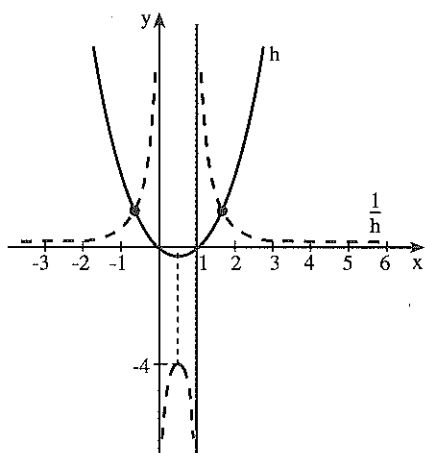
23. (א) מקסימום. $(0, -2)$

(ב) (i) מינימום. $(0, -0.5)$

(ii) עבור $x < 0$ יורדת $\frac{1}{g}$

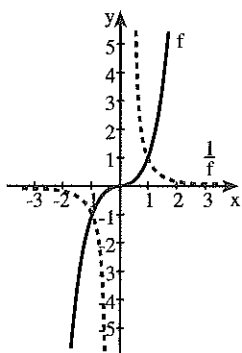
עולה. עבור $x > 0$ $\frac{1}{g}$

(iii) שלילית בכל התחום. $\frac{1}{g}$



24. (ב) $x = 1$, $x = 0$

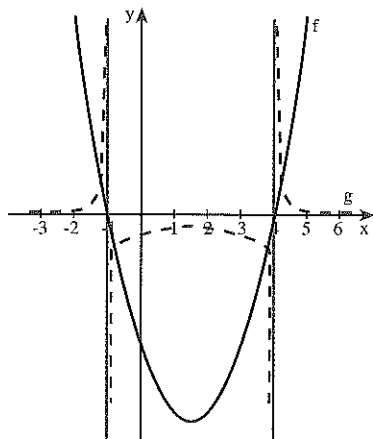
$$\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x^2 - x} \quad (ה)$$



25. (א) $x = 0$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^3} \quad (ו)$$

$$y = -\frac{1}{x^3} \quad (ז)$$



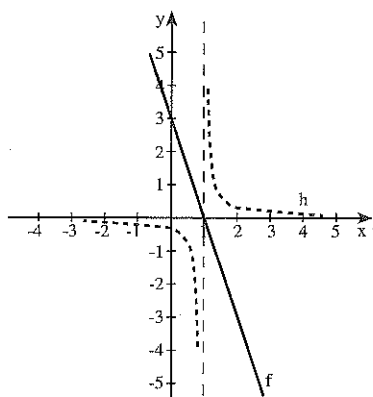
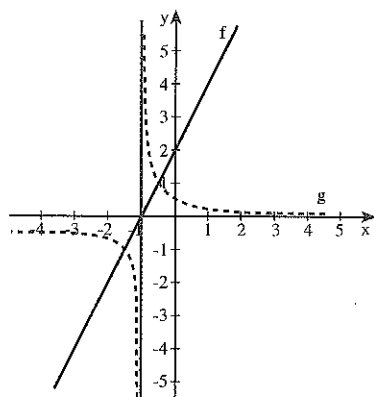
26.

27. נקודת מינימום של $\frac{1}{f}$. $(-2, 0.25)$

28. (א) נקודת מינימום. $(6, -36)$
 (ב) נקודת מקסימום. $(6, -0.03)$

30.

29.



(ii) - (7)

(iii) - (8)

(iv) - (9)

(iii) - (10) 31.

פרק ג: עוד משפחה של פונקציות

התאמה והתאמה הפוכה (עמודים 149-141)

4. א) (i) $y = 2x - 2$, $y = \frac{1}{2}x + 1$

(ii) $y = -\frac{1}{3}x + 1$, $y = -3x + 3$

(iii) $y = x$, $y = x$ (ב) מכפלת השיפועים שווה ל-1.

6. ב) $y = x$

9. א) $(3, -5)$, $(1, 1)$, $(0, 4)$, $(-1, 7)$

פונקציית השורש (עמודים 150-154)

7. $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-3^2}$, $\sqrt{(-5)^3}$, $-\sqrt{-16}$, $-\sqrt{-4^2}$

8. א) 3.41 , ב) 9.43 , ג) אי-אפשר , ד) 2.83 , ה) 0.59

ו) 46.96 , ז) 2.24 , ח) -2.66 , ט) -2.24

9. א) $g(9) = 3$, ב) $g(0) = 0$, ג) $g(0.25) = 0.5$

ד) $g(10) = 3.16$, ה) אי-אפשר , ו) $g(125) = 11.18$

עוד על שורשים (עמודים 155-162)

1. ב) $y = \sqrt{x} + 2$

2. ב) $y = \sqrt{x} - 3$, ד) $(0, -3)$, ה) $(9, 0)$

3. ב) $y = -\sqrt{x}$, ד) $x \geq 0$

4. ב) $y = -\sqrt{x} + 1$, ד) $(0, 1)$, $(1, 0)$, ה) $x \geq 0$

6. א) $y = \sqrt{x} + 1$, ב) $y = \sqrt{x}$, ג) $y = -\sqrt{x}$

ד) $y = -\sqrt{x} + 2$, ה) $y = \sqrt{x} - 4$, ו) $y = -\sqrt{x} - 4$

8. (א) (ii) $y = \sqrt{x} + 2$ (iii) לא (ב) (i) $y = \sqrt{x} - 4$ (iii) (16, 0) (ג) (ii) $y = -\sqrt{x} - 6$

9. (א) (2, 0), (3, 1), (6, 2), (11, 3)

(ב) (9, 2.65), (5, 1.73), (2.25, 0.5), אי-אפשר להציב אפס.

(ג) הזזה ימנית בשתי יחידות לאורך ציר x. (ד) $x \geq 2$

10. (א) (-1, 0) (ב) (0, 1) (ג) (8, 3) (5, 2.45) (3, 2) (2, 1.73) אי-אפשר להציב $x = -2$. (ה) הזזה שמאלה ביחידה אחת לאורך ציר x. (ו) $x \geq -1$

13. (א) - (iii), (ב) - (ii), (ג) - (vi), (ד) - (v), (ה) - (ii), (ו) - (iv).

על שורשים ונגזרת (עמודים 163-171)

1. (א) $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$

(ב) $f'(8) > f'(10)$ $f'(80) > f'(100)$

2. (א) 0.25 (ג) 0.25

(ד) מקבילים (ה) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. (א) (0, 0) (ב) $x \geq 0$

x	0.25	1	2	3	4	9
g(x)	1	2	2.83	3.46	4	6

(ה) ל g יש שיפוע תלול יותר (ו) $g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(ז) $g'(4) = \frac{1}{2}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$

4. $g'(9) = \frac{1}{12}$, $g'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$ (ב)

5. $y = \frac{1}{4}x + 1$ (ii) (ב)

6. (א) (ii) $-f(x)$, (i) $-g(x)$, (iii) $-h(x)$, (iv) $-k(x)$.

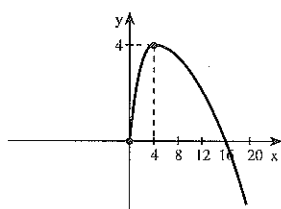
(ב) $k'(4) = \frac{3}{4}$, $h'(4) = \frac{1}{4}$, $g'(4) = \frac{1}{12}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$

9. (א)+(ב) (i) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2$ יורדת. (iii) $y' = -\frac{1}{4\sqrt{x}}$ יורדת.

(ii) $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2x$ יורדת. (iv) $y' = \frac{1}{6\sqrt{x}}$ עולה.

10. (א) $x = 1$ (ב) $x = 4$ (ג) $x = 16$ (ד) $x = 4$ (ה) $x = \frac{1}{16}$

(ו) $x = 0.63$



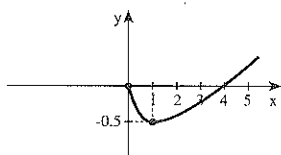
(ה)

11. (א) $x \geq 0$ (ב) $(0,0)$, $(16,0)$

(ג) מקסימום $(4,4)$

(ד) מינימום $(0,0)$

(ו) מקסימום מוחלט $(4,4)$



(ה)

12. (א) $x \geq 0$ (ב) $(0,0)$

(ד) מינימום $(0,0)$, מקסימום $(1, -\frac{1}{2})$

(ו) מינימום מוחלט $(1, -\frac{1}{2})$

13. $(1, -3)$ מינימום, $(0, 0)$ מקסימום.

כאשר $x > 1$ הפונקציה יורדת. כאשר $x < 1$ הפונקציה עולה.

14. (א) $f'(2) = 4$, $g'(2) = 0.35$ (ב) $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, $g'(\frac{1}{4}) = 1$

15. (א) $f'(4) = \frac{1}{2}$ (ב) $y = \frac{1}{2}x + 2$

16. (א) $y' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$ (ב) $y' = -3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (ג) $y' = \frac{1}{4\sqrt{x}} + 1$

17. $y = \frac{1}{2}x - 1.5$

18. (א) $f(x) - (ii)$, $g(x) - (i)$ (ב) $y = \frac{1}{4}x + 1$, $y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$

שני המשיקים נחתכים, נקודת החיתוך היא: $(-4, 0)$.

19. הפונקציה עולה בנקודה בה $x = 4$.

20. נקודת מינימום, $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$

נקודת מקסימום, $(0, 0)$

21. (א) $x \geq 0$

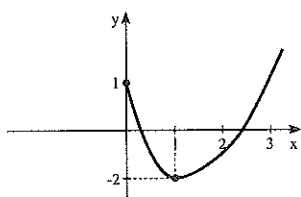
(ב) $(1, -2)$ מינימום, $(0, 1)$ מקסימום.

(ג) $(3, 3.07)$

(ה) יש שתי נקודות חיתוך עם ציר x .

(ו) כאשר $x < 0$ הפונקציה יורדת.

כאשר $x > 1$ הפונקציה עולה.



פרק ד: פונקציה מורכבת

מהי פונקציה מורכבת?

פונקציה מורכבת – בעזרת Excel (עמודים 172-180)

$$y = (5x^3 - 2)^2 \quad (\text{ד})$$

$$y = \frac{1}{5x-2} \quad (\text{א}) \quad 2.$$

$$y = \frac{1}{(6x-2)^2} \quad (\text{ה})$$

$$y = \sqrt{5x-2} \quad (\text{ב})$$

$$y = e^{4-2x^2} \quad (\text{ו})$$

$$y = (x-5)^6 \quad (\text{ג})$$

- לא, כי $f(0.4) = 0$

(ii) - ק

$$y = (2x+5)^4 \quad (\text{ד})$$

$$y = \frac{1}{2x+5} \quad (\text{א}) \quad 5.$$

$$y = \sqrt{(2x+5)} \quad (\text{ה})$$

$$y = \frac{1}{2x+5} + 5 \quad (\text{ב})$$

$$y = e^{2x+5} \quad (\text{ו})$$

$$y = \frac{1}{2(2x+5)} \quad (\text{ג})$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases} \quad (\text{ה})$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 \\ y = \sqrt[3]{f(x)} \end{cases} \quad (\text{א}) \quad 6.$$

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 2x \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases} \quad (\text{ו})$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 5x \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$\begin{cases} f(x) = 3e^x \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases} \quad (\text{ז})$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \\ y = e^{f(x)} \end{cases} \quad (\text{ג})$$

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases} \quad (\text{ח})$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \\ y = [f(x)]^4 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 4 & (i) \\ y = [f(x)]^4 \end{cases} \quad 8. \quad (ב)$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 5x & (א) \\ y = e^{f(x)} \end{cases} \quad 7.$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 2 & (i) \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases} \quad 9. \quad (ב)$$

פונקציה מורכבת - ללא מחשב (עמודים 181-184)

$$y = (5x^3 - 2)^2 \quad (ד)$$

$$y = \frac{1}{5x - 2} \quad (א) \quad (i) \quad 2.$$

$$y = \frac{1}{(6x - 2)^2} \quad (ה)$$

$$y = \sqrt{5x - 2} \quad (ב)$$

$$y = e^{4-2x^2} \quad (ו)$$

$$y = (x - 5)^6 \quad (ג)$$

- לא, כי $f(0.4) = 0$.

(ii) - פ

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	10	3. (א+ב)
f	10	5	2	1	2	5	10	101	
$\frac{1}{f}$	0.1	0.2	0.5	1	0.5	0.2	0.1	0.01	

$$y = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (i) \quad (ג)$$

$$y = (2x + 5)^2 \quad (ד)$$

$$y = \frac{1}{2x + 5} \quad (א) \quad 4.$$

$$y = \sqrt{2x + 5} \quad (ה)$$

$$y = \frac{1}{2x + 5} + 5 \quad (ב)$$

$$y = e^{2x+5} \quad (ו)$$

$$y = \frac{1}{2(2x + 5)} \quad (ג)$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases} \quad (\Gamma)$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases} \quad (\aleph) \quad .5$$

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 2x \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases} \quad (\Gamma)$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 5x \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases} \quad (\beth)$$

$$\begin{cases} f(x) = 3e^x \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases} \quad (\Gamma)$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \\ y = e^{f(x)} \end{cases} \quad (\beth)$$

$$\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases} \quad (\Gamma)$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \\ y = [f(x)]^4 \end{cases} \quad (\Gamma)$$

$$y = e^{3x^2 - 2} \quad (\Gamma)$$

$$y = \sqrt{3x^2 - 2} \quad (\aleph) \quad .6$$

$$y = 3e^{3x^2 - 2} \quad (\Gamma)$$

$$y = \sqrt{3x^2 - 2} + 3 \quad (\beth)$$

$$y = e^{3(3x^2 - 2)} \quad (\Gamma)$$

$$y = \frac{1}{3x^2 - 2} \quad (\beth)$$

$$\begin{cases} f(x) = -x \\ y = e^{f(x)} \end{cases} \quad (\Gamma)$$

$$\begin{cases} f(x) = 4 - 2x^2 \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases} \quad (\aleph) \quad .7$$

$$\begin{cases} f(x) = 1 - 4x \\ y = [f(x)]^2 \end{cases} \quad (\Gamma)$$

$$\begin{cases} f(x) = 4 - 2x \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases} \quad (\beth)$$

$$\begin{cases} f(x) = 6 - x \\ y = [f(x)]^4 \end{cases} \quad (\Gamma)$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x \\ y = e^{f(x)} \end{cases} \quad (\beth)$$

נגזרת של פונקציה מורכבת (עמודים 185-192)

$$f'(0) = 1 \quad (\text{א}) \quad \text{ב} \quad f(-1) = 0.37, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 2.72 \quad (\text{א}) \quad .1$$

$$y = x + 1 \quad (\text{ii})$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3 \\ y = [f(x)]^2 \end{cases} \quad (\text{א}) \quad .3$$

$$y' = 5(1+x)^4 \quad (\text{iii}) \quad y' = -6(4-2x)^2 \quad (\text{א}) \quad \text{ב} \quad .4$$

$$y' = 2 \cdot (2-2x)(2x-x^2) \quad (\text{iv}) \quad y' = 12x \cdot (3+2x^2)^2 \quad (\text{ii})$$

$$y = 3x - 5 \quad (\text{א}) \quad f'(2) = 3 \quad f'(x) = 3(x-1)^2 \quad (\text{א}) \quad (\text{א}) \quad .5$$

$$y = 48x + 88 \quad .6$$

$$y' = 1.5e^{0.5x} \quad (\text{ד}) \quad y' = 5e^{5x} \quad (\text{א}) \quad .7$$

$$y' = e^x - e^{-x} \quad (\text{ה}) \quad y' = -2e^{-2x+5} \quad (\text{ב})$$

$$y' = 6e^{3x} + 12e^{-3x} \quad (\text{ו}) \quad y' = -2xe^{-x^2} \quad (\text{ג})$$

$$A(0.5, 0.13), \quad B(2, 2.72) \quad (\text{א}) \quad .8$$

$$y'(0.5) = 0.26, \quad y'(2) = 5.44 \quad (\text{א}) \quad y' = 2e^{2x-3} \quad (\text{ב})$$

$$y = -4x + 2 \quad (\text{א}) \quad y'(1) = -4 \quad (\text{ב}) \quad A(1, -2) \quad (\text{א}) \quad .9$$

$$y = -2x + 1 \quad \text{משוואת המשיק}; \quad .10$$

$$y = 0.25x + 1 \quad (\text{ב}) \quad h'(4) = 0.25 \quad h(4) = 2 \quad (\text{א}) \quad .11$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \quad (\lambda) \qquad y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}} \quad (\aleph) \quad .13$$

$$y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \quad (\daleth) \qquad y' = \frac{7-2x}{2\sqrt{7x-x^2}} \quad (\beth)$$

$$y = 3x-4 \quad (\lambda) \qquad g'(2) = 3 \quad (\beth) \qquad g'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-4}} \quad (\aleph) \quad .14$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}; \text{משוואת המשיק} \quad .15$$

$$y' = -\frac{3}{(3x+4)^2} \quad (\daleth) \qquad y' = -\frac{2}{(2x-5)^2} \quad (\aleph) \quad .16$$

$$y' = -\frac{10}{x^3} \quad (\hept) \qquad y' = -\frac{6x}{(x^2+1)^2} \quad (\beth)$$

$$y' = \frac{6}{x^4} \quad (\lambda) \qquad y' = -\frac{6}{(3x)^2} \quad (\lambda)$$

$$y'(1) = \frac{1}{4}, \quad y' = \frac{3-2x}{(x^2-3x)^2} \quad (\beth) \quad A(1, -\frac{1}{2}) \quad (\aleph) \quad .17$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \quad (\lambda)$$

$$y' = \frac{-6x}{(4-x^2)^2} \quad (\hept) \qquad y' = (8x-2)e^{4x^2-2x} \quad (\aleph) \quad .18$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(3+2x)^2} \quad (\lambda) \qquad y' = -4e^{-2x} + 12e^{4x} \quad (\beth)$$

$$y' = \frac{x}{2\sqrt{4+x^2}} + 3 \quad (\lambda) \qquad y' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}} + 3x^2 \quad (\lambda)$$

$$y' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{9-x}} \quad (\hept) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \quad (\daleth)$$

$$f'(-3) = -3$$

$$f'(x) = -3(x+2)^2 \quad (\aleph \quad 19)$$

$$y = -0.75x + 1.75 \quad (\beth$$

$$y = -4x \quad (\aleph \quad 20)$$

$$y = -4x + 21 \quad (\daleth$$

$$y = 0.5x - 0.25 \quad (\aleph$$

חקירה של פונקציות מורכבות (עמודים 193-210)

$$p(x) \quad (\aleph \quad q(x), l(x), n(x), g(x) \quad 1.$$

$$h(x), f(x) \quad (\daleth$$

$$(-5, 1.73) \quad (-6, 1) \quad (-6.5, 0) : g \quad (\aleph \quad 2.$$

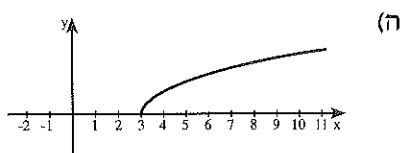
$$(4, 0) \quad (3, 1) \quad (1, 2) \quad (-2, 2.45)$$

$$(-6.5, 0) \quad (-6, 1) \quad (3, 1) \quad (4, 0) \quad (\beth$$

$$x \geq -2 \quad (\text{iv}) \quad x \leq 4 \quad (\text{iii}) \quad x \geq 0 \quad (\text{ii}) \quad x \geq -3 \quad (\text{i}) \quad (\aleph \quad 3.$$

$$n(x) \rightarrow (\text{i}) \quad h(x) \rightarrow (\text{iv}) \quad m(x) \rightarrow (\text{ii}) \quad g(x) \rightarrow (\text{iii}) \quad - \quad (\beth$$

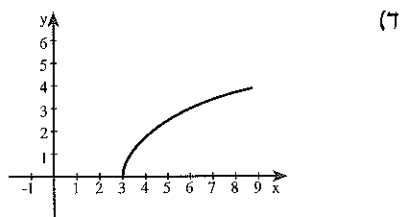
$$x \geq -3 : n, \quad x \geq -2 : h, \quad x \geq 0 : m, \quad x \leq 4 : g \quad -$$



$$x \geq 3 \quad (\aleph \quad 4.$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \quad (\beth$$

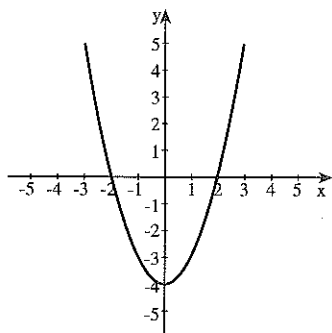
$$(3, 0) \quad (\aleph$$



$$x \geq 3 \quad (\aleph \quad 5.$$

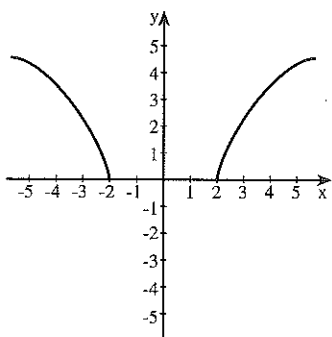
$$(3, 0) \quad (\beth$$

$$(3, 0) \quad (\aleph$$



6. (א) נקודות חיתוך עם הצירים:
 $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -4)$
 מינימום. $(0, -4)$

(ב) $x \leq -2$ או $x \geq 2$

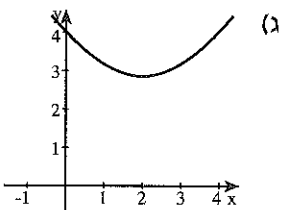


(ד) $x \leq -2$ או $x \geq 2$ (ג)

7. (ב) (ii)

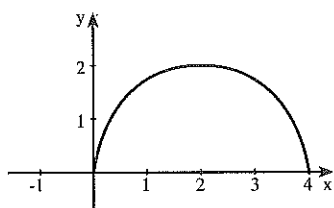
8. (א) $(0.5, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(2.5, 1)$.

- (ב) (i) כאשר ערכי הפונקציה f בין 0 ל-1, g מעל f .
 (ii) כאשר ערכי הפונקציה f גדולים מ-1, g מתחת ל- f .



9. (ב) $f'(x) = \frac{2x - 4}{\sqrt{(4 - x)^2 + x^2}}$

מינימום. $(2, 2.83)$



10. (ב) $0 \leq x \leq 4$ בין $x = 0$ ל-

$$(x = 4)$$

(ג) $(0, 0)$, $(4, 0)$

(ד) $(2, 2)$ מקסימום.

$(0, 0)$, $(4, 4)$ נקודות מינימום.

11. (ג) (i) $x = 2$ (ii) אורכי הצלעות: 2 , 2 , 2.83

(iii) משולש שווה שוקיים.

12. (א) המרחק: 8 ק"מ. הזמן: 2.17 שעות.

(ב) המרחק: 6.83 ק"מ. הזמן: 1.94 שעות.

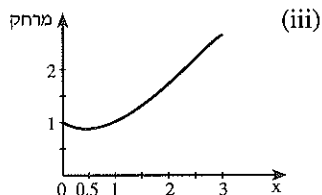
(ג) הזמן: 1.95 שעות.

(ד) $BM = \sqrt{x^2 + 4}$, $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{3} + \frac{6 - x}{4}$ (ה) 2.27 ק"מ.

13. חלק שני:

(א) (i) $AB = 2.83$, $B(-2, 6)$; $AB = 5.1$, $B(1, 3)$; $AB = 4.24$, $B(3, 11)$

(ii) $g(x) = \sqrt{x^4 - 11x^2 + 36}$ (iii) $x = -2.35$, $x = 2.35$



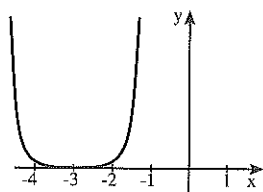
14. (א) $(0.25, 0.5)$, המרחק: 0.9

$(1, 1)$, המרחק: 1

$(2.25, 1.5)$, המרחק: 1.95

(ב) (i) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

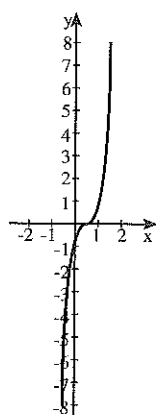
(ii) $(0.5, 0.87)$



15. א) $(-3, 0) ; (0, 81)$ ב) $(-3, 0)$ ג) $(-3, 0)$

ד) הפונקציה עולה עבור $x > -3$

הפונקציה יורדת עבור $x < -3$.



ג)

16. א) $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, -1)$

ב) אין.

ד) $x < \frac{1}{2}$

17. (i) א) $(0, 1)$ ב) $(1, 2.72)$ מקסימום

ד) בתחום $x < 1$ הפונקציה עולה, בתחום $x > 1$ הפונקציה יורדת.

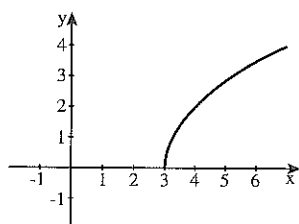
18. א) $(0, 2.72)$ ב) אין נקודות קיצון. ד) הפונקציה עולה לכל x .

19. א) $x \geq 0$ ב) $x \leq 12$ ג) $x \geq -4$ ד) $x \leq 2.5$

20. א) $x \geq 3$ או $x \leq -3$ ב) $x \geq 0$ או $x \leq -3$

ג) לכל x . ד) $0 \leq x \leq 6$ ה) $x \geq 5$ או $x \leq -1$

ו) $-1 \leq x \leq 4$



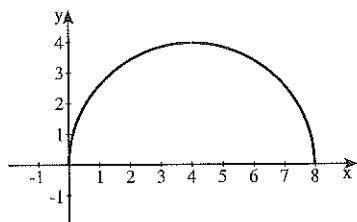
(iv)

21. א) (i) $x \geq 3$

(ii) $(3, 0)$

(iii) $(3, 0)$ מינימום

(v) g עולה לכל x בתחום.



(iv) $0 \leq x \leq 8$ (i) (ב)

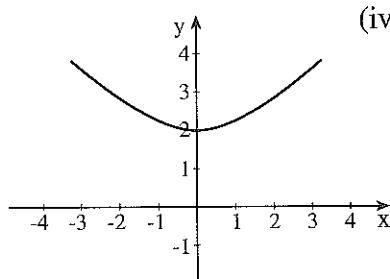
(8, 0), (0, 0) (ii)

(4, 4) מקסימום. (iii)

נקודות (0, 0), (8, 0)

מינימום.

(v) m עולה בתחום $0 < x < 4$ m יורדת בתחום $4 < x < 8$.

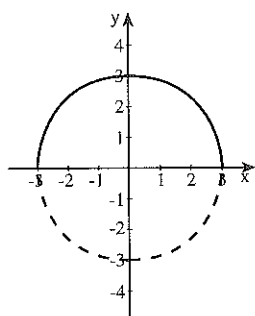


(iv) (0, 2) (ii) לכל x (i) ג

(0, 2) מינימום (iii)

h יורדת בתחום $x < 0$ (v)

h עולה בתחום $x > 0$



22. (א + ב) הגרף הרציף של $g(x)$.

הגרף המקווקו של $-g(x)$.

$-3 \leq x \leq 3$ (ג)

23. (א) $g(x)$, $m(x)$ מתאימים לגרף (ii). $k(x)$, $h(x)$ מתאימים לגרף (iii).

(i) $v(x)$, $n(x)$ מתאימים לגרף.

(ב) תחום ההגדרה של $m(x)$ ו $g(x)$: $x \leq 0$ או $x \geq 4$.

תחום ההגדרה של $h(x)$ ו $k(x)$: $0 \leq x \leq 4$.

תחום ההגדרה של $n(x)$ ו $v(x)$: $x \geq 4$.

24. (א) 7.62 ס"מ

$$x = 5 \quad (\text{ii}) \quad y = \sqrt{2x^2 - 20x + 100} \quad (\text{i}) \quad (\text{ד})$$

25. (א) $CM = 2.83$, $C(4, 3)$, $BM = 1.41$, $B(1, 2)$, $AM = 2$, $A(0, 1)$

$$(1.5, 2.22) \quad (\text{ג}) \quad y = \sqrt{x^2 - 3x + 4} \quad (\text{ב})$$

אינטגרל של פונקציה מורכבת (עמודים 211-215)

$$y' = -2e^{-2x+1} \quad (\text{ג}) \quad y' = 3e^{3x} \quad (\text{ב}) \quad y' = 2e^{2x+3} \quad (\text{א}) \quad .1$$

$$y' = -e^{-x} \quad (\text{ד})$$

$$-3e^{-x+1} \quad (\text{ג}) \quad \frac{e^{3+2x}}{2} + c \quad (\text{ב}) \quad \frac{e^{4x}}{4} + c \quad (\text{א}) \quad .3$$

$$-e^{-2x+1} + x^2 + c \quad (\text{ו}) \quad 4e^{-x+2} + c \quad (\text{ה}) \quad e^{2x+3} + c \quad (\text{ד})$$

$$y' = -5(3-x)^4 \quad (\text{ג}) \quad y' = 15(5x-1)^2 \quad (\text{ב}) \quad y' = 8(2x+3)^3 \quad (\text{א}) \quad .4$$

$$y' = -6(2-3x) \quad (\text{ד})$$

$$\frac{(0.5x+1)^4}{2} + c \quad (\text{ג}) \quad \frac{(5-2x)^5}{-10} + c \quad (\text{ב}) \quad .5$$

$$\frac{(x+4)^6}{6} + c \quad (\text{ג}) \quad \frac{(4x+1)^5}{20} + c \quad (\text{ב}) \quad \frac{(3-x)^4}{-4} + c \quad (\text{א}) \quad .6$$

$$\frac{(-2x+3)^3}{-6} + c \quad (\text{ו}) \quad \frac{(x-1)^5}{5} + c \quad (\text{ה}) \quad \frac{(0.1x-2)^4}{0.4} + c \quad (\text{ד})$$

$$\frac{(3-0.5x)^5}{-2.5} + c \quad (\text{ה}) \quad \frac{(7-3x)^6}{-18} + c \quad (\text{ז})$$

$$y' = \frac{1}{(-x+1)^2} \quad (\lambda) \quad y' = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (\mu) \quad y' = -\frac{2}{(2x+4)^2} \quad (\nu) \quad .7$$

$$y' = -\frac{0.5}{(0.5x-2)^2} \quad (\tau)$$

$$-\frac{2}{0.5x-3} + c \quad (\lambda) \quad -\frac{1}{x-4} + c \quad (\mu) \quad \frac{1}{3(3x-2)} + c \quad (\nu) \quad .9$$

$$\frac{1}{4x} + c \quad (\lambda) \quad -\frac{1}{4(2x-1)} + c \quad (\mu) \quad \frac{2}{3(3x+1)} + c \quad (\tau)$$

$$.10 \quad 2.79 \text{ י"ר}$$

$$.11 \quad (\lambda) \quad f(x) - i \quad , \quad g(x) - ii \quad (\mu) \quad 1.26 \text{ י"ר}$$

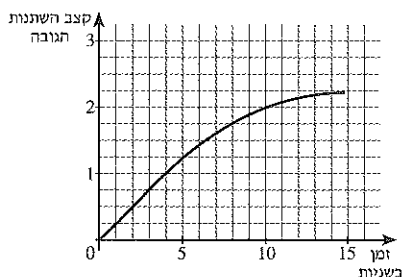
$$.12 \quad (\lambda) \quad x = 0.5 \quad (\mu) \quad 0.5 \text{ י"ר}$$

$$.13 \quad 0.5 \text{ י"ר}$$

$$.14 \quad 0.2 \text{ י"ר}$$

פרק ה: הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

קצב שינוי של פונקציה (מ- f ל- f') (עמודים 216-238)



1. א) 1 ס"מ, 4 ס"מ, 17 ס"מ

ב) 1

ג) (i) 20 ס"מ

(ii) אחרי $\frac{92}{3}$ שניות.

ד) (i) 0.5 ס"מ, 1.5 ס"מ,

2 ס"מ

ה) זמן מתחילת המדידה	2	3	5	7	10	12	13
קצב השתנות הגובה	0.5	0.75	1.25	1.7	2	2.1	2.2

2. א) אחרי שעה, 11.5 שעות, 18 שעות.

ב) אחרי 5 שעות ואחרי 20 שעות.

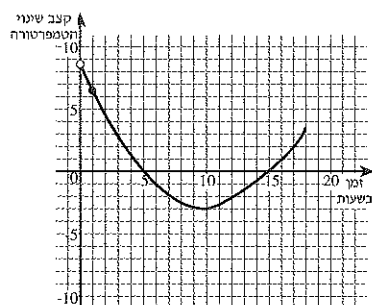
ג) (i) בתחילת המדידה הייתה הטמפרטורה הנמוכה ביותר. הטמפרטורה

הייתה 8° , (ii) $(15, 10^\circ)$

ד) מ- 5 שעות עד 15 שעות, מתחילת המדידה, הטמפרטורה יורדת.

מ- 15 שעות עד 120 שעות, מתחילת המדידה, הטמפרטורה עולה.

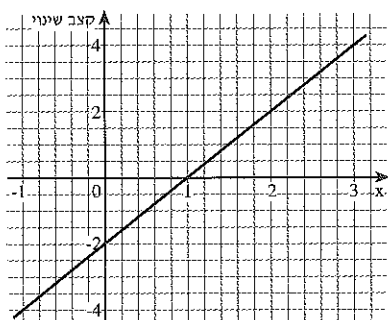
ה) זמן בשעות	1	3	4	5	7	10	13	15	18
קצב שינוי הטמפרטורה	6.5	3	1.3	0	-2	-3	-1.5	0	3.5



ו)

3. (א) עד $x = 1$ הפונקציה יורדת. ב- $x = 1$ לפונקציה יש נקודת מינימום.
עבור $x > 1$ הפונקציה עולה.

ב) x	-1	0	0.5	1	1.5	2	3
קצב השינוי	-4	-2	-1	0	1	2	4



ג)

$$f'(x) = 2x - 2 \quad (i) \quad (ד)$$

12. עולה מ- מינימום ב יורדת מקסימום ב עולה מינימום ב יורדת עד
f: $x = -3 \rightarrow x = -3 \rightarrow 0$ בין -3 ל- $0 \rightarrow x = 0 \rightarrow 3$ בין 0 ל- $3 \rightarrow x = 3 \rightarrow x = 3$

חיובית מ מתאפסת ב שלילית מתאפסת ב חיובית מתאפסת ב שלילית עד
f': $x = -3 \rightarrow x = -3 \rightarrow 0$ בין -3 ל- $0 \rightarrow x = 0 \rightarrow 3$ בין 0 ל- $3 \rightarrow x = 3 \rightarrow x = 3$

13. עולה מ מינימום ב יורדת מקסימום ב עולה עד
f: $x = -1 \rightarrow x = -1 \rightarrow 3$ בין -1 ל- $3 \rightarrow x = 3 \rightarrow x = 3$

חיובית מ מתאפסת ב שלילית מתאפסת ב חיובית עד
f': $x = -1 \rightarrow x = -1 \rightarrow 3$ בין -1 ל- $3 \rightarrow x = 3 \rightarrow x = 3$

14. שלילית מתאפסת ב חיובית מתאפסת ב שלילית עד
f': $x = -2.5 \rightarrow x = -2.5 \rightarrow -0.5$ בין -2.5 ל- $-0.5 \rightarrow x = -0.5 \rightarrow 0.5$ בין -0.5 ל- $0.5 \rightarrow$
שלילית מ מתאפסת ב חיובית מתאפסת ב שלילית עד
 $x = 0.5 \rightarrow 2.5$ בין 0.5 ל- $2.5 \rightarrow x = 2.5 \rightarrow x = 2.5$

15. (א) $x = 1.5, x = -2$ (i)

(ב) שלילית מ מתאפסת ב חיובית מתאפסת ב שלילית עד
 f' : $x = 1.5 \rightarrow x = 1.5 \rightarrow$ בין -2 ל- $1.5 \rightarrow x = -2 \rightarrow x = -2$

16. (א) $(1, 0)$

(ב) שלילית מ מתאפסת ב חיובית עד
 f' : $x = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow x = 1$

17. (א) $(1, 0)$

(ב) חיובית מ מתאפסת ב חיובית עד
 f' : $x = 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow x = 1$

19. (ב) שלילית מ מתאפסת ב חיובית מתאפסת ב שלילית עד
 f' : $x = 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ בין -4 ל- $2 \rightarrow x = -4 \rightarrow x = -4$

20. (א) עד $x = -1.6$ הפונקציה עולה.

עבור $x = -1.6$ יש לפונקציה מקסימום.

בין $x = -1.6$ ל- $x = -0.5$ הפונקציה יורדת.

עבור $x = -0.5$ יש לפונקציה מינימום.

בין $x = -0.5$ ל- $x = 0.5$ הפונקציה עולה.

עבור $x = 0.5$ יש לפונקציה מקסימום.

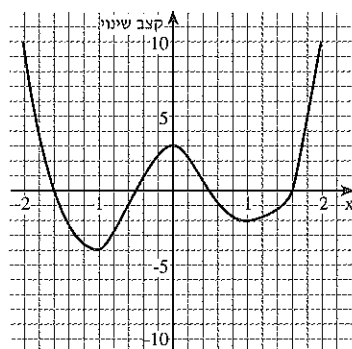
בין $x = 0.5$ ל- $x = 1.6$ הפונקציה יורדת.

עבור $x = 1.6$ יש לפונקציה מינימום.

מ- $x = 1.6$ הפונקציה עולה.

x	-2	-1.6	-1	-0.5	0	0.5	1	1.6	2
קצב שינוי	10	0	-4	0	3	0	-2	0	10

ג)



21. עולה מ מינימום ב יורדת מקסימום ב עולה מינימום ב יורדת עד
 $f: x = -3 \rightarrow x = -3 \rightarrow 2$ בין -3 ל- $2 \rightarrow x = 2 \rightarrow 4$ בין 2 ל- $4 \rightarrow x = 4 \rightarrow x = 4$

חיובית מ מתאפסת ב שלילית מתאפסת ב חיובית מתאפסת ב שלילית עד
 $f': x = -3 \rightarrow x = -3 \rightarrow 2$ בין -3 ל- $2 \rightarrow x = 2 \rightarrow 4$ בין 2 ל- $4 \rightarrow x = 4 \rightarrow x = 4$

22. שלילית מ מתאפסת ב חיובית מתאפסת ב שלילית עד
 $f': x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow 2$ בין 0 ל- $2 \rightarrow x = 2 \rightarrow x = 2$

24. א) $(2, 0)$, $(4, 0)$

שלילית מ מתאפסת ב חיובית מתאפסת ב שלילית עד
 $f': x = 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow 4$ בין 2 ל- $4 \rightarrow x = 4 \rightarrow x = 4$

ב) שלילית בתחומים: $x < 2$, $x > 4$. חיובית בתחום: בין $x = 2$ ל- $x = 4$.

25. א) $(4, 0)$

שלילית מ מתאפסת ב חיובית עד
 $f': x = 4 \rightarrow x = 4 \rightarrow x = 4$ (ב)

26. (ב) f' מתאפסת ב- $x = -1$, $x = 2$
 f' חיובית בתחום: בין $x = -1$ ל- $x = 2$. f' שלילית בתחומים: $x < -1$, $x > 2$

27. (א) סימן השיפוע חיובי. 28. (iii)

מגרף הנגזרת f' לגרף הפונקציה f (עמודים 239-247)

1.	עולה מ	מינימום ב	יורדת	מקסימום ב	עולה עד
f :	$x = 6 \rightarrow$	$x = 6 \rightarrow$	בין 2 ל- 6 $\rightarrow$	$x = 2 \rightarrow$	$x = 2 \rightarrow$
	$x = 6$	$x = 6$		$x = 2$	$x = 2$
	חיובית מ	מתאפסת ב	שלילית	מתאפסת ב	חיובית עד
f' :	$x = 6 \rightarrow$	$x = 6 \rightarrow$	בין 2 ל- 6 $\rightarrow$	$x = 2 \rightarrow$	$x = 2 \rightarrow$
	$x = 6$	$x = 6$		$x = 2$	$x = 2$

2. (א) $x = -2$, $x = 3$

(ב)	חיובית מ	מתאפסת ב	שלילית	מתאפסת ב	חיובית עד
f' :	$x = 3 \rightarrow$	$x = 3 \rightarrow$	בין -2 ל- 3 $\rightarrow$	$x = -2 \rightarrow$	$x = -2 \rightarrow$
	$x = 3$	$x = 3$		$x = -2$	$x = -2$
	עולה מ	חשודה ב	יורדת	חשודה ב	עולה עד
f :	$x = 3 \rightarrow$	$x = 3 \rightarrow$	בין -2 ל- 3 $\rightarrow$	$x = -2 \rightarrow$	$x = -2 \rightarrow$
	$x = 3$	$x = 3$		$x = -2$	$x = -2$

(ג) ב- $x = -2$ יש מקסימום. ב- $x = 3$ יש מינימום.

3. (א) ב- $x = 3$ יש מינימום.

4. (א) כן, ב- $x = -2$ יש מקסימום. (ב) לא.

6. (א) ב- $x = -2$ יש מקסימום, ב- $x = 2$ יש מינימום.

7. (ii), (iv).

8. (א) $x = 2$, $x = 6$ (ב) ב- $x = 2$ יש מקסימום (ג) יורדת בתחום: $x > 2$

9. (א) נקודה אחת ב- $x = -2$. (ב) ב- $x = -2$ יש מינימום.

10. (ב) 5 נקודות קיצון.

ב- $x = -5$, $x = 0$, $x = 5$ יש מינימום.

ב- $x = -2$, $x = 2$ יש מקסימום.

11. (א) $x = 5$, $x = 1$

(ב) חיובית מ מתאפסת ב שלילית מתאפסת ב חיובית עד
 f' : $x = 5 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ בין 1 ל-5 $\rightarrow x = 5 \rightarrow x = 1$

f : עולה מ חשודה ב יורדת חשודה ב עולה עד
 $x = 5 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ בין 1 ל-5 $\rightarrow x = 5 \rightarrow x = 1$

12. (א) כן; ב- $x = 3$ יש מינימום.

13. (א) $f'(0)$ - שלילי. $f'(4)$ - חיובי (ב) $x > 1/3$

14. השרטוט בסעיף (ג).

15. (א) ב- $x = -1$ יש מינימום.

(ג) הפונקציה עולה בתחום: $x > -1$

הפונקציה יורדת בתחום: $x < -1$

16. (א) $x = 2$, הנקודה היא לא נקודת קיצון.

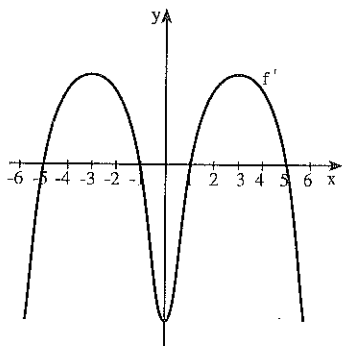
18. (א) אין נקודות קיצון. (ב) (ii)

19. (ב) לפונקציה f יש 4 נקודות קיצון:

ב- $x = -5$ יש מינימום, ב- $x = -1$

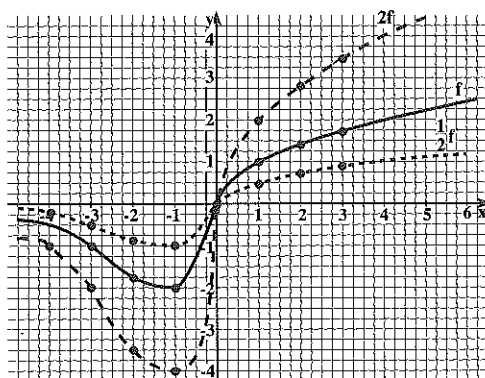
יש מקסימום, ב- $x = 1$ יש

מינימום, ב- $x = 5$ יש מקסימום.



פרק ו: מכפלה של פונקציות

גרפים של מכפלה של פונקציות (עמודים 248-255)



1. א)

6. א) x^5 ב) $2x^9$ ג) $3x^5$ ד) $3x^5$ ה) $3x^2 + x^3$ ו) $x^3 + 2x + x^2$

7. א) $8x^5$ ב) $2x^3$ ג) $2x^3 + 7x^2 + 3x$ ד) $2x^5 + 5x^4 + 2x^3$

8. א) $5x^4 + 12x^2 + 2x$ ב) $14x^6 + 16x^3 - 3x^2$ ג) $10x^4 + 32x^3 + 2x + 4$

ד) $12x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ ה) $2x^3 + 7x^2 + 3x$ ו) $2x^5 + 5x^4 + 2x^3$

נגזרת של מכפלת פונקציות (עמודים 256-260)

5. א) $y' = 5x^4 - 3x^2 + 8x$ ג) $y' = 10x^4 + 30x^2 - 2x$

ב) $y' = 14x^6 - 6x^2$ ד) $y' = 5x^4 - 4x^3 - 8x + 4$

6. א) $y' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$ ג) $y' = 1$

ב) $\frac{1}{2\sqrt{x}} (x^2 + x) + \sqrt{x} (2x + 1)$ ד) $y' = 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \right) (\sqrt{x} - x)$

$$y' = e^x 2x + 2(e^x + 4) \quad (\text{ה}) \quad y' = 2e^x + 2xe^x \quad (\text{א}) \quad 7.$$

$$y' = e^x (3 - 2x) - 2e^x \quad (\text{ו}) \quad y' = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} e^x \quad (\text{ב})$$

$$y' = -4xe^x + (1 - 2x^2) e^x \quad (\text{ז}) \quad y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x \quad (\text{ג})$$

$$y' = e^x \sqrt{x} + \frac{e^x + 2}{2\sqrt{x}} \quad (\text{ח}) \quad y' = e^x (x^2 - 4) + 2xe^x \quad (\text{ד})$$

$$y' = e^x (1 - x) - e^x \quad (\text{יב}) \quad y' = 2e^x + 2xe^x \quad (\text{ii}) \quad (\text{א}) \quad 9.$$

$$y' = 2x - 3x^2, \quad y = x^2 - x^3 \quad (\text{iii}) \quad y' = 12x^3 \quad (\text{i}) \quad (\text{ב})$$

$$y' = 100x^4, \quad y = 20x^5 \quad (\text{v})$$

$$y' = 9x^2 - 8x + 3, \quad y = 3x^3 - 4x^2 + 3x - 4 \quad (\text{vi})$$

חקירה של מכפלת פונקציות (עמודים 261-274)

חקירה של מכפלה עם פונקציה מעריכית (עמודים 261-265)

$$y = \frac{-3}{e} = -1.1 \quad (\text{iv}) \quad x = -1 \quad (\text{iii}) \quad (\text{ב}) \quad \text{א. אפס.} \quad (\text{א}) \quad 1.$$

$$x = 1 \quad (\text{ה}) \quad x = 0 \quad (\text{ד}) \quad x = 0.5 \quad (\text{ג}) \quad x = -2, x = 0 \quad (\text{ב}) \quad x = -1 \quad (\text{א}) \quad 2.$$

$$x = -1 \quad (\text{ו})$$

$$x = -1, \quad y' = 2e^x + 2xe^x \quad (\text{א}) \quad 3.$$

$$x = 0, \quad x = -2, \quad y' = 6xe^x + 3x^2 e^x \quad (\text{ב})$$

$$x = 3, \quad y' = xe^x - 3e^x \quad (\text{ד}) \quad x = 0, \quad y' = -xe^x \quad (\text{ג})$$

$$x = 1, \quad x = -3, \quad y' = 2xe^x + x^2 \cdot e^x - 3e^x \quad (\text{ה})$$

$$x = -\frac{2}{3}, \quad 2xe^{3x} + 3x^2 e^{3x} \quad (\text{ו})$$

$$y = -4e^2 = -29.56 \quad (\text{ג}) \quad y = 8e^{-4} = 0.17 \quad (\text{ב}) \quad x = 2, \quad x = -4 \quad (\text{א}) \quad 4.$$

$$(1, -e) \quad (\text{א}) \quad 5.$$

$$(-2, e^2) \quad (\text{ב}) \quad 6.$$

$$(-1.5, 2.68) \quad (\text{א}) \quad (-0.5, 2.43) \quad (\text{ב}) \quad 7.$$

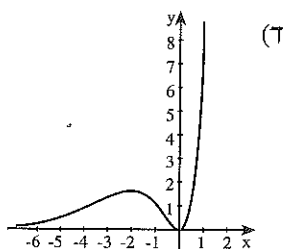
$$f'(-1) = -0.37 \quad (\text{ב}) \quad \text{הפונקציה יורדת.}$$

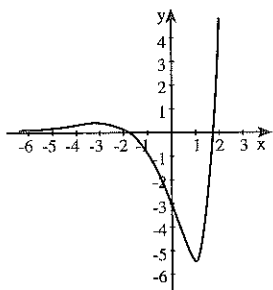
$$(i) \text{ יורדת} \quad (ii) \text{ עולה} \quad (\text{ב}) \quad \text{ק} \quad 8.$$

$$(-2, 1.62) \quad (\text{א}) \quad (0, 0) \quad (\text{ב}) \quad \text{מינימום} \quad 9.$$

$$\text{לא} \quad (\text{ב})$$

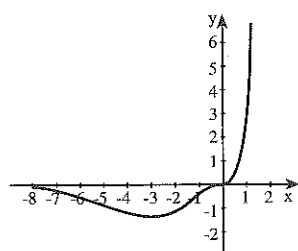
$$y = 0 \quad (\text{ג}) \quad \text{לפונקציה יש אסימפטוטה.}$$



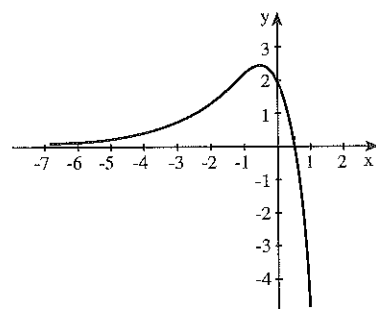


10. א) $(-1.73, 0)$, $(1.73, 0)$, $(0, -3)$
 ב) $(-3, 0.3)$ מקסימום $(1, -5.44)$ מינימום

11. א) $x = -1.41$, $x = 1.41$ ב) $x = 1$ ג) $x = 2$, $x = 0$ ד) $x = 1$, $x = -2$

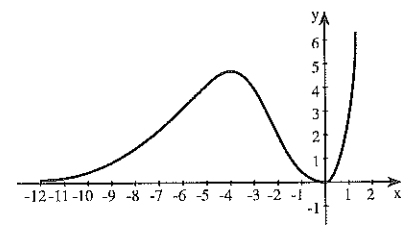


12. א) (i) $(0, 0)$
 (ii) $(-3, -1.34)$ מינימום.
 (iii) לפונקציה יש אסימפטוטה, $y = 0$.
 (v) הפונקציה יורדת בתחום: $x < -3$.
 הפונקציה עולה בתחום: $x > -3$.
 ב) $(-3, 1.34)$ מקסימום.

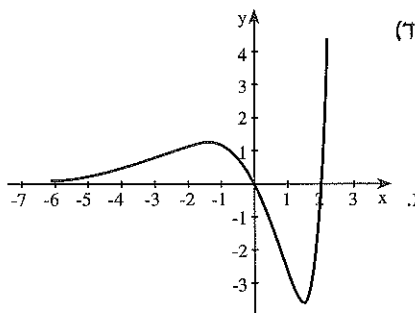


13. א) $(0.5, 0)$ $(0, 2)$
 ב) $(-0.5, 2.43)$ מקסימום.
 ג) לפונקציה יש אסימפטוטה, $y = 0$.

14. א) - (iii) - ב) (iv) - ג) (ii) - ד) - (i)



15. א) $(0, 0)$
 ב) $(-4, 4.69)$ מקסימום,
 מינימום $(0, 0)$.
 ג) לפונקציה יש אסימפטוטה, $y = 0$.
 ה) תחומי עליה: $x > 0$, $x < -4$
 תחום ירידה: $-4 < x < 0$

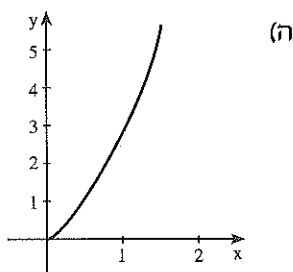


16. א) $(0, 0)$ ד)
 ב) $(-1.41, 1.17)$ מקסימום.
 ג) $(1.41, -3.41)$ מינימום.
 ד) לפונקציה יש אסימפטוטה, $y = 0$.
 ה) תחומי עליה: $x < -1.41$, $x > 1.41$.
 ו) תחום ירידה: $-1.41 < x < 1.41$.

חקירה של מכפלה עם פונקצית שורש (עמודים 266-268)

1. א) $x = 4$ ב) אין פתרון ג) $x = \frac{4}{3}$ ד) $x = 1$

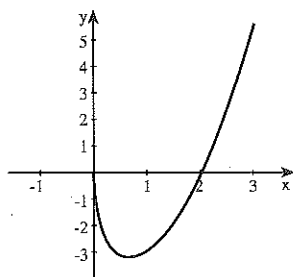
2. א) $(0, 0)$, $(4, 0)$ ב) $A(1.3, -6.16)$



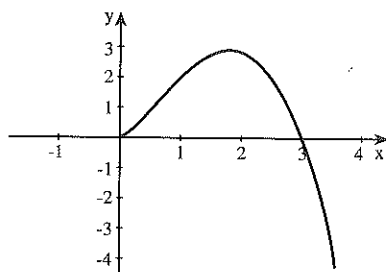
3. א) $x \geq 0$ ה)
 ב) $(0, 0)$
 ג) $x = -\frac{1}{2}$
 ד) $(0, 0)$ מינימום.

4. א) (i) $(0, 0)$ (ii) $(-3, 0)$, $(0, 0)$, $(3, 0)$ (iii) $(0, 0)$
 (iv) $(0, 0)$, $(3, 0)$ (v) $(0, 0)$, $(3, 0)$ (vi) $(0, 0)$, $(1.61, 0)$
 ב) (i), (ii), (iv), (v), (vi)
 ג) (iv)

5. א) $x = 1$ ב) אין פתרון ג) $x = \frac{1}{6}$ ד) $x = 1$



6. א) $x \geq 0$ ב) $(2, 0)$, $(0, 0)$ ד)
 ג) $(0, 0)$ מקסימום, $(0.7, -3.27)$ מינימום.
 ה) בתחום $0 < x < 0.7$ הפונקציה יורדת.
 ו) בתחום $x > 0.7$ הפונקציה עולה.



7. (א) $x \geq 0$ (ב) $(3, 0)$, $(0, 0)$
 (ג) $(0, 0)$ מינימום $(1.8, 2.9)$ מקסימום
 (ה) בתחום $0 < x < 1.8$ הפונקציה עולה.
 בתחום $x > 1.8$ הפונקציה יורדת.

פונקציות מכפלה נוספות (עמודים 269-270)

$$y' = \frac{e^x + 2x}{x} - \frac{e^x + x^2}{x^2} \quad (\text{ד})$$

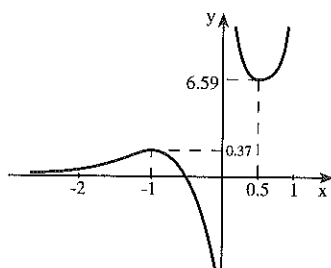
$$y' = \frac{2e^x}{x} - \frac{2e^x}{x^2} \quad (\text{א}) \quad 2.$$

$$y' = \frac{2e^x + 3x^2}{x} - \frac{2e^x + x^3}{x^2} \quad (\text{ה})$$

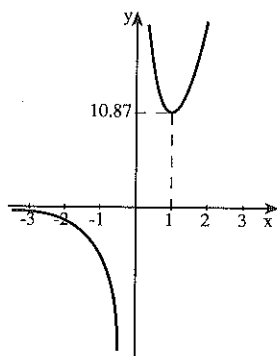
$$y' = \frac{e^x}{2x} - \frac{e^x}{2x^2} + 1 \quad (\text{ב})$$

$$y' = e^x \left(\frac{1}{x} + 1 \right) - \frac{(e^x + 1)}{x^2} \quad (\text{ו})$$

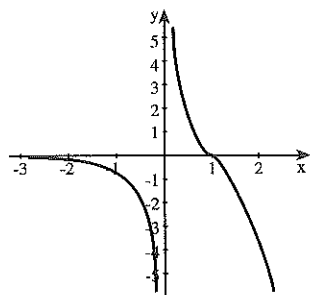
$$y' = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x + 1}{x^2} \quad (\text{ג})$$



3. (א) $x \neq 0$ (ב) $(-0.5, 0)$
 (ג) $(-1, 0.37)$ מקסימום.
 מינימום $(0.5, 6.59)$.



5. (א) $x \neq 0$
 (ב) אין נקודות חיתוך עם הצירים.
 (ג) $(1, 10.87)$ מינימום.
 (ה) תחום עליה: $x > 1$
 תחומי ירידה: $0 < x < 1$, $x < 0$



6. א) $x \neq 0$

ב) $(1, 0)$

ג) אין נקודות קיצון.

ד) תחומי ירידה: $x > 0, x < 0$

משוואת משיק (עמודים 271-274)

1. א) $x = -1$ ג) $f'(-3) = -0.3$ ד) $f'(3) = 241.03$

2. א) $f'(2) = 22.17$, $(2, 7.39)$ ב) $f'(-1) = -1.1$, $(-1, -1.84)$ ג) כן יש לפונקציה נקודת קיצון. $(0.5, -3.3)$ מינימום.

3. א) (i) שלילי (ii) אפס (iii) חיובי
ב) $f'(1) = 8.15$ ג) $(1, 2.72)$, $y = 8.15x - 5.43$

4. א) $y = 0.74x + 0.37$

5. א) $y = -0.25x - 1.25$

6. א) (i) $y = 1.85x$ (ii) $y = 2.72$

7. $y = 7.07x - 8.49$

8. $y = 19x - 52$

9. א) $y = 4.95x - 7.07$ ב) $y = 20x - 12$

10. $y = 1.76x + 2.57$

11. $y = 4.62x + 8.08$

פרק ז: מבחר בעיות קיצון

1. (ב) הצלע השניה 13 יחידות. השטח 65 יחידות ריבועיות.
 (ג) הצלע השניה $x - 18$, השטח $x(18 - x)$.
 (ד) השטח מקסימלי מתקבל למלבן שהוא ריבוע, שאורך צלעו 9 יחידות.
 השטח המקסימלי 81 יחידות ריבועיות.
 (ה) $x = 0$, $x = 36$.
 (ו) $B(9, 81)$ $A(36, 0)$
2. (ב) הצלע השניה 18 יחידות, ההיקף 40 יחידות.
 (ג) אורך הצלע השניה $\frac{36}{x}$, ההיקף $2(\frac{36}{x} + x)$.
 (ד) תחום הבעיה: $x > 0$.
 (ה) מקבלים ריבוע שצלעו 6 יחידות והיקפו 24 יחידות.
 (ו) ההיקף המינימלי 24 יחידות.
 (ז) אין מלבן שהיקפו מקסימלי.
3. (ב) 24 יחידות ריבועיות.
 (ג) 30 יחידות ריבועיות.
 (ד) 24 יחידות ריבועיות.
 (ז) $s(x) = 16x - 2x^2$
 עבור $x = 4$ שטח המקבילית מקסימלי.
4. מימדי החלקה: 15 מ', 7.5 מ'. השטח המקסימלי: 112.5 מ"ר.
5. מימדי החלקה: 4 מ' כל צלע (מתקבל ריבוע). ההיקף המינימלי: 16 מ'.
6. (א) 374 סמ"ר.
 (ג) 142 סמ"ר.
- (ה) $s(x) = (x - 4)(\frac{600}{x} - 6)$
 (ו) AB יכול לקבל ערכים הגדולים מ-4 ס"מ וקטנים מ-100 ס"מ.
 (ז) מקסימום כאשר $AB = 20$ ס"מ. נקודת מקסימום. (20, 384)
 (ח) מינימום כאשר $AB = 4$ ס"מ או $AB = 100$ ס"מ. השטח המקסימלי 384 סמ"ר.
7. (א) השטח הצבוע: 148 סמ"ר.
 השטח הלא צבוע: 52 סמ"ר.

- (ב) השטח הצבוע: 128 סמ"ר.
- השטח הלא צבוע: 72 סמ"ר.
- (ג) $h(x) = 30x - 2x^2$, $g(x) = x^2 + (20-x)(10-x) = 2x^2 - 30x + 200$
- (ד) השטח המקסימלי הלא צבוע: 112.5 סמ"ר.
- (ה) לפונקציה g מתאים הגרף שנקודה B עליו.
- לפונקציה h מתאים הגרף שנקודה A עליו.
- $D(10, 100)$, $C(5, 100)$, $B(7.5, 87.5)$, $A(7.5, 112.5)$
- (ו) השטח המקסימלי שיכול הבוחר לצבוע: 200 סמ"ר (כל המלבן).
- (ז) $x = 10$, $x = 5$.
- (ח) בתחום שבין $x = 5$ ל- $x = 10$ ינצח המשתתף שלא צובע.
8. (א) אלכסונים בריבוע שווים וחוצים זה את זה.
- (ב) (i) שטח הדשא 30 מ"ר. (ii) שטח הדשא 14 מ"ר.
- (ג) שטח הדשא: $s(x) = (16 - 2x)x$.
- עבור 4 מ' x שטח הדשא מקסימלי. השטח המקסימלי: 32 מ"ר.
9. (א) 128 יחידות נפח. (ב) 100 יחידות נפח. (ג) 64 יחידות נפח.
- (ד) $v = (12 - 2x) \cdot (12 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$
- (ה) $x = 2$. מימד הקופסה בעלת הנפח המקסימלי: 8, 8, 2.
- הנפח המקסימלי: 128 יחידות נפח.
- החלק המתאים בגרף בתחום שבין $x = 0$ לבין $x = 6$.
10. (א) הקופסה שצלע בסיסה 2 ס"מ: גובה הקופסה - 27 ס"מ, סכום שטחי 5 הפאות: 220 סמ"ר.
- הקופסה שצלע בסיסה 3 ס"מ: גובה הקופסה 12 ס"מ, סכום שטחי 5 הפאות: 153 סמ"ר.
- הקופסה שצלע בסיסה 6 ס"מ: גובה הקופסה - 3 ס"מ, סכום שטחי 5 הפאות: 108 סמ"ר.
- (ב) גובה הקופסה: $h = 108/x^2$
- סכום שטחי 5 הפאות: $s(x) = x^2 + \frac{432}{x}$
- עבור 6 ס"מ x השטח מינימלי, השטח המינימלי: 108 סמ"ר.
11. (א) (i) $h = 4.42$ ס"מ (ii) 18.85 ס"מ (iii) שטח המעטפת: 83.32 ס"מ.
- (iv) שטח הבסיסים: 56.55 סמ"ר שטח הפנים: 139.87 סמ"ר
- (ב) כאשר $x = 9.95$ ס"מ, $h = 125$ סמ"ר, שטח המעטפת - 125 סמ"ר, שטח הפנים - 150.13 סמ"ר.

כאשר $r = 5$ ס"מ : $r = 1.59$ ס"מ, h שטח המעטפת - 49.95 סמ"ר,

שטח הפנים - 207.08 סמ"ר.

$$s(x) = 2\pi x^2 + \frac{250}{x}, \quad h = \frac{125}{\pi x^2} \quad (ג)$$

(ד) עבור $x = 2.71$ ס"מ השטח מינימלי. השטח המינימלי: 138.4 סמ"ר.

(ה) החלק המתאים בגרף עבור $x > 0$.

12. (א) $x = 2$ (הפתרון $x = -1$ אינו מתאים).

(ב) $x = 4$

(ג) $x = -4, x = 4$

(ד) $x = 5$ (הפתרון $x = -1$ אינו מתאים).

13. (א) (i) כאשר $r = 9$ ס"מ, r כמות הגלידה: 1017.88 סמ"ק.

כאשר $r = 4$ ס"מ, r כמות הגלידה: 242.23

כאשר $r = 3$ ס"מ, r כמות הגלידה: 138.51 סמ"ק.

(ב) תחום הבעיה: בין $x = 0$ ל- $x = 15$.

(ג) 1105.31 סמ"ק.

$$g(x) = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{225 - x^2} \quad (ד)$$

(ה) עבור $x = 12.25$ ס"מ x כמות הגלידה מקסימלית.

הכמות המקסימלית 1360.35 סמ"ק.

(ו) גובה הגליל: 2.88 ס"מ.

14. (א) חרוט. (i) 753.98 יחידות נפח.

(ii) 879.65 יחידות נפח. (iii) 722.57 יחידות נפח.

(ג) תחום הבעיה: בין $x = 0$ ל- $x = 13$.

$$v(x) = \frac{1}{3} \pi (169 - x^2) \cdot x \quad (ה)$$

(ו) $x = 7.5$, הנפח המקסימלי: 885.54 יחידות נפח.

15. (א) המרחק: 20.21 ק"מ. (ב) המרחק 17.68 ק"מ.

(ג) המרחק: 16.92 ק"מ.

$$m(x) = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{2.5^2 + (15 - x)^2} = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{x^2 - 30x + 231.25} \quad (i) \quad (ד)$$

(ii) $x = 10$ ס"מ. המרחק המינימלי: 16.77 ק"מ.

16. (א) עלות הבניה עבור בנין עם קומה 1: \$800,000.

עלות הבניה עבור בנין עם 2 קומות: \$900,000.

- עלות הבניה עבור בנין עם 3 קומות: \$1,050,000.
 עלות הבניה עבור בנין עם 4 קומות: \$1,250,000.
 (ב) (i) עלות ממוצעת לקומה עבור בנין עם קומה 1: \$800,000.
 עלות ממוצעת לקומה עבור בנין עם 2 קומות: \$450,000.
 עלות ממוצעת לקומה עבור בנין עם 3 קומות: \$350,000.
 עלות ממוצעת לקומה עבור בנין עם 4 קומות: \$312,500.
 (ii) העלות הממוצעת מינימלית עבור בנין עם 5 או 6 קומות.

17. חלק שני: מלבן חסום בפרבולה

$$B(8, 0) \quad \text{א}$$

$$(i) \quad 42 \text{ י"ר} \quad (ii) \quad 48 \text{ י"ר} \quad (iii) \quad 30 \text{ י"ר} \quad \text{ב}$$

$$\text{ג} \quad \text{צלעות המלבן: } 8 - 2x, \quad -x^2 + 8x.$$

$$s(x) = (8 - 2x)(-x^2 + 8x)$$

$$\text{ד} \quad \text{עבור } x = 1.69 \text{ מתקבל שטח מקסימלי. השטח המקסימלי: } 49.27 \text{ י"ר.}$$

18. חלק שני: מלבן ופרבולה

$$\text{א} \quad (i) \quad 16 \text{ י"ר} \quad (ii) \quad 32 \text{ י"ר} \quad (iii) \quad 25 \text{ י"ר}$$

$$\text{ב} \quad y = x(6x - x^2)$$

$$\text{ג} \quad \text{עבור } x = 4 \text{ מתקבל שטח מקסימלי. השטח המקסימלי: } 32 \text{ י"ר.}$$

19. חלק שני: טרפז חסום בפרבולה

$$\text{א} \quad (i) \quad 128 \text{ י"ר} \quad (ii) \quad 144 \text{ י"ר}$$

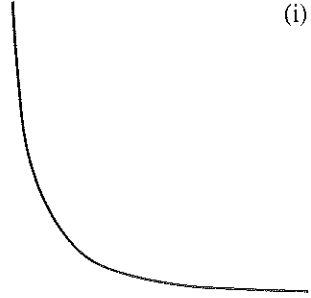
$$\text{ב} \quad 62.5 \text{ י"ר}$$

$$\text{ג} \quad y = \frac{(20 - 2x)(10x - x^2)}{2}$$

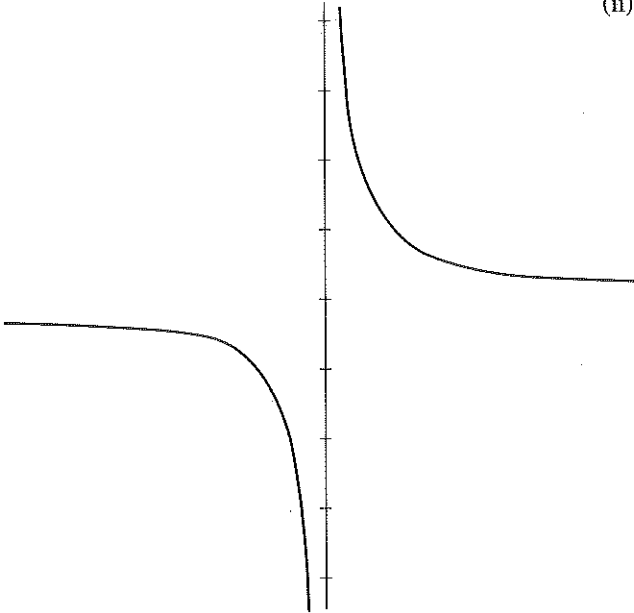
$$\text{ד} \quad \text{עבור } x = 3\frac{1}{3} \text{ מתקבל שטח מקסימלי. השטח המקסימלי: } 148.15 \text{ י"ר.}$$

דף שקוף א'

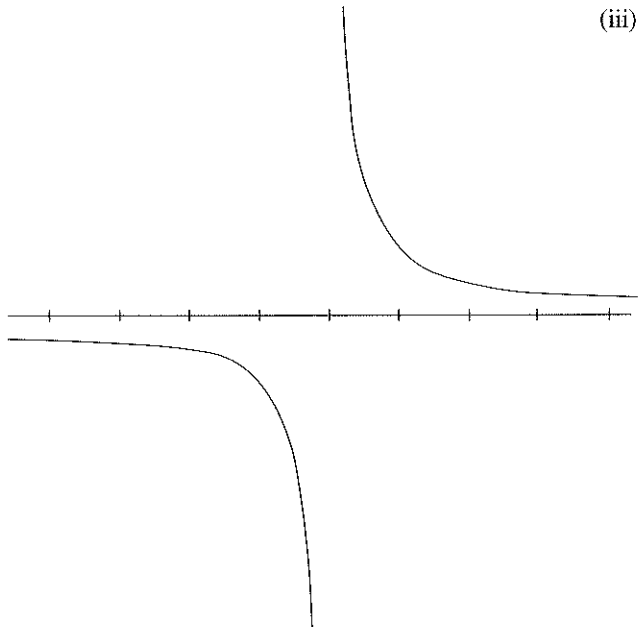
(i)



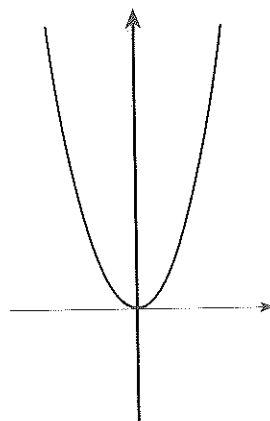
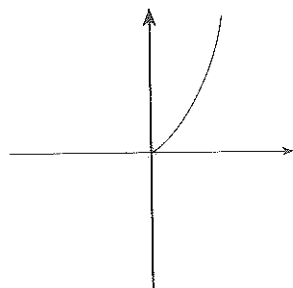
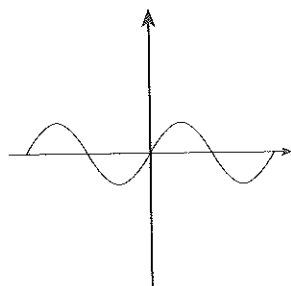
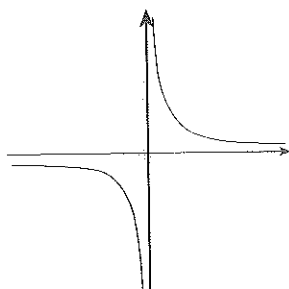
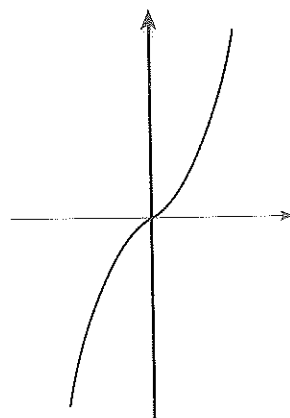
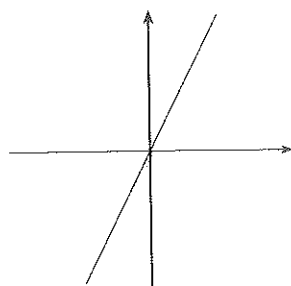
(ii)



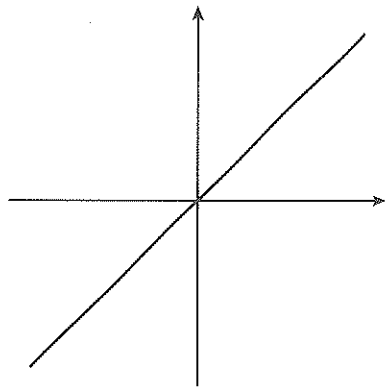
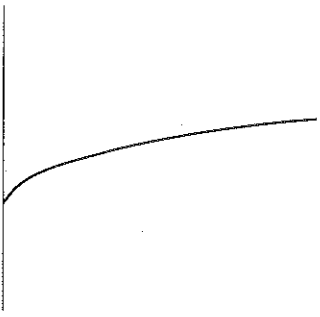
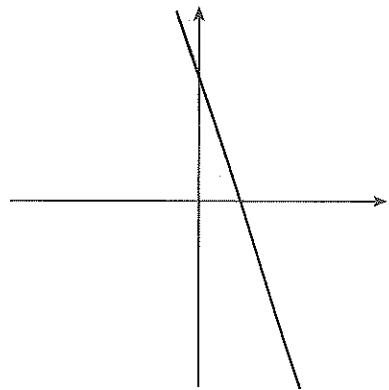
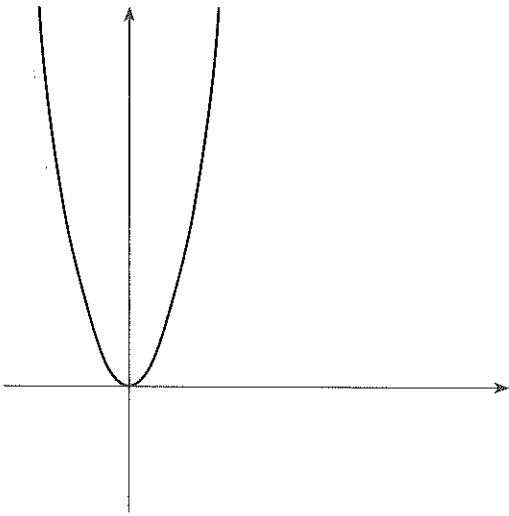
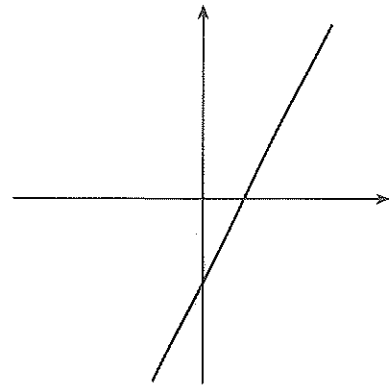
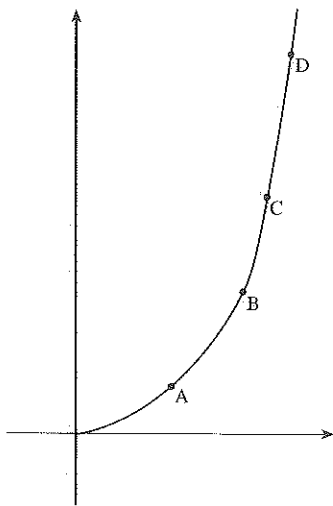
(iii)



דף שקוף ב'



דף שיקוף ג'



דף שקוף ד'

