אינטגרלים

מהדורת עיצוב

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

אינטגרלים

מהדורת עיצוב

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

יוצא לאור במסגרת
המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט
מיסודם של
משרד החינוך והתרבות, האוניברסיטה העברית בירושלים ומכון ויצמן למדע, רחובות

נדפס בישראל תשנ"ז - 1997
דפוס גיידט בע"ם

חובר על-ידי:
נורית הדס

ייעוץ:
טומי דרייפוס

ניסוי, קריאה, והגהות
שרה קירו
רחל בוהדנה
סנדרה צוריאנו

הדפסה:
שושי בנג'ו
ציקי גלוסקא

עריכה במחשב:
שושי בנג'ו

שרטוטים:
חנה וגה
קרן קצב

עיצוב גרפי:
אגי (רחל) בוקשפן

לתלמיד

נקודת המוצא ללימוד נושא האינטגרלים הוא דיון במשמעות הקשר בין השתנות גדלים שונים (כמו דרך וכמות), להשתנות שטח מתחת לגרף של פונקציה המתארת את הגדלים האלה.

הגישה, כמו בכל הספרים בסדרה זו, מדגישה קשר בין המושגים הרבים הקשורים לנושא האינטגרלים, וקשר בין הנושא החדש לנושאים שהופיעו בפרקים הקודמים באנליזה.

אנו מקווים שתהנה ותפיק תועלת מלימודיך בעזרת ספר זה.

תודתנו נתונה לכיתות י"ב תשנ"ו ותשנ"ז בביה"ס אורט לוד שלמדו על פי מהדורת הניסוי. תגובותיהם והערותיהם עזרו לנו רבות בעיצוב הגירסה הנוכחית.

תוכן עניינים

עמוד

באור סמלים

מורה מסביר

תרגיל ״מפתח״ בו נלמד ענין חדש

לעבודה עצמית

שים לב

תרגיל ״קצת יותר קשה״

תרגיל הכנה

סיכום

מהירות, דרך וזמן

1. שרה רותי ויעל רצות כל בוקר.
שרה רצה שעה אחת במהירות של 7 קי"מ לשעה.
רותי רצה $\frac{3}{4}$ שעה במהירות של 8 קי"מ לשעה.
יעל רצה $\frac{1}{2}$ שעה במהירות של 10 קי"מ לשעה.
מי מהן רצה את המרחק הגדול ביותר?

כאן אנו מניחים, שבמשך כל זמן התנועה מתקדמים באותה מהירות. (במציאות המהירות משתנה ואז צריך להבחין בין מהירות בכל רגע למהירות ממוצעת.)

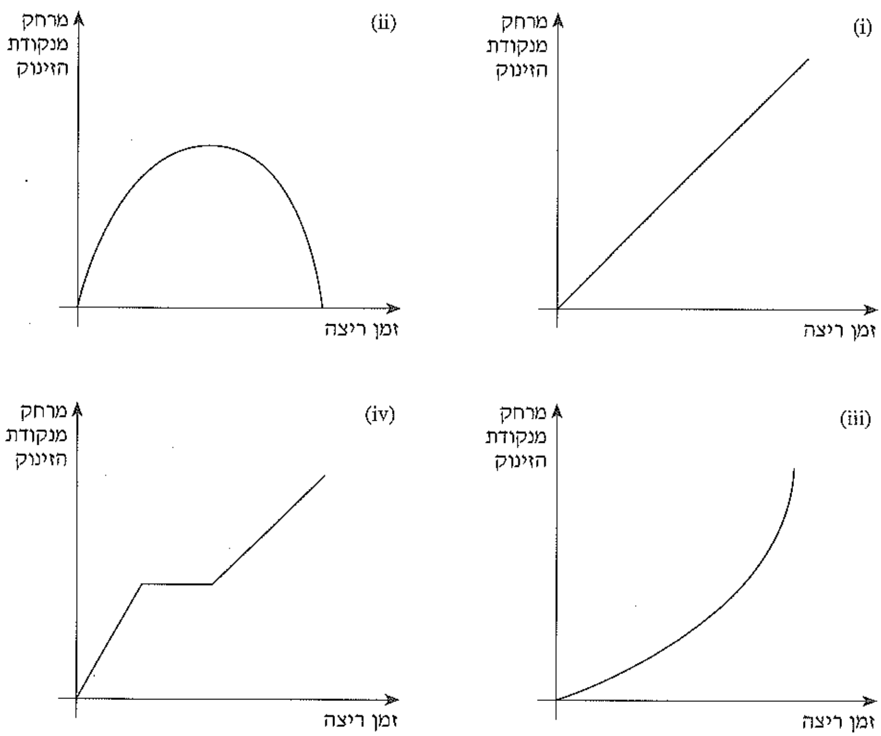
2. א) דן ואורי התאמנו לקראת תחרות מכוניות.
דן עבר 720 קי"מ במשך 4 שעות.
אורי עבר 600 קי"מ במשך 3 שעות.
המהירות של מי משניהם היתה גדולה יותר?
ב) אורך מסלול התחרות עצמו 500 קי"מ. דן עבר אותו ב 2.5 שעות ואורי עבר אותו ב 2 שעות. מה היתה המהירות של כל אחד מהם ביום התחרות?

3. ציפי רודפת אחרי רעות.
המרחק ביניהן בתחילת המרדף הוא 50 מטרים.
רעות רצה במהירות של 2 מטרים בשניה.
ציפי רצה במהירות של 3 מטרים בשניה.

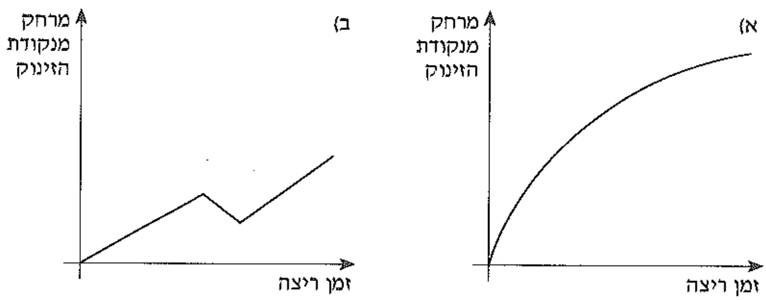
א) בכמה מטרים מתקרבת ציפי לרעות בכל שניה?
ב) אחרי כמה שניות תשיג ציפי את רעות?
ג) שנה את הנתון לגבי המהירות של ציפי, כך שציפי לא תוכל להשיג את רעות.

4. רון ויורם התאמנו ברכיבה על אופניים לאורך דרך של 140 ק״מ.
מהירות הרכיבה של רון היתה 28 ק״מ לשעה.
מהירות הרכיבה של יורם היתה 20 ק״מ לשעה.
כמה שעות התאמן כל אחד מהם?

5. הגרפים בשאלה זו מתארים את המרחק של רצים מנקודת הזינוק לפי הזמן שחלף מרגע הזינוק.
א) איזה מהגרפים מתאר רץ שנח בדרך?
ב) איזה מהגרפים מתאר רץ שחזר לנקודת המוצא?
ג) איזה מהגרפים מתאר רץ שהגביר את מהירותו משך כל זמן הריצה?
ד) איזה מהגרפים מתאר רץ שרץ בקצב קבוע כל זמן הריצה?



6. הגרפים המשורטטים מתארים מרחקי ריצה מנקודת הזינוק לפי הזמן שחלף מרגע הזינוק. תאר במילים את תנועת הרצים, התייחס גם למהירותם.



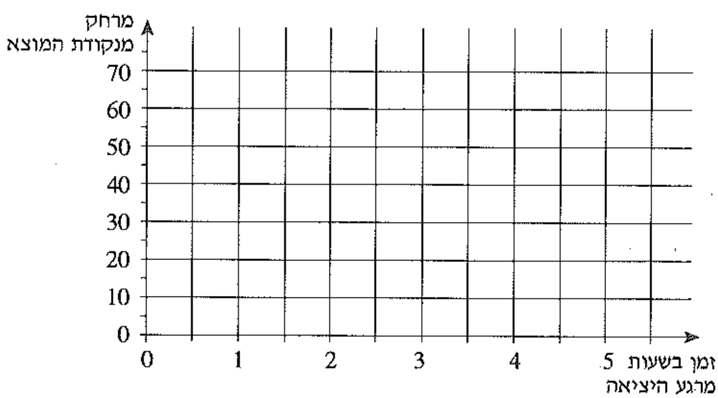
7. מתן רוכב על אופניים במהירות קבועה של 25 קמ"ש ומתרחק כל הזמן מנקודת המוצא.

א) באיזה מרחק מנקודת המוצא יהיה אחרי שעה? סמן נקודה מתאימה במערכת הצירים.

ב) באיזה מרחק מנקודת המוצא יהיה אחרי שעתיים? סמן נקודה מתאימה במערכת הצירים.

ג) סמן נקודה המתאימה למרחקו ברגע שיצא לדרך.

ד) שרטט גרף המתאר את מרחקו של מתן מנקודת המוצא, כפונקציה של הזמן שחלף מהרגע שיצא.



ה) רשום את חוק הפונקציה המתארת את מרחקו של מתן מנקודת המוצא (y) כפונקציה של הזמן שחלף (x).

ו) בכמה מתקדם מתן בכל שעה?

ז) מה מבטא את המהירות בגרף? ומה מבטא את המהירות בחוק הפונקציה?

8. אורי מתאמן בצעידה קבועה.
לפניך טבלה המתארת את מרחקו מהבית, בדרכו חזרה, כפונקציה של הזמן שחלף מהרגע שהתחיל לחזור.

זמן בשעות	0	0.5	1	1.5	2
מרחק מהבית בק"מ	16	12	8	4	0

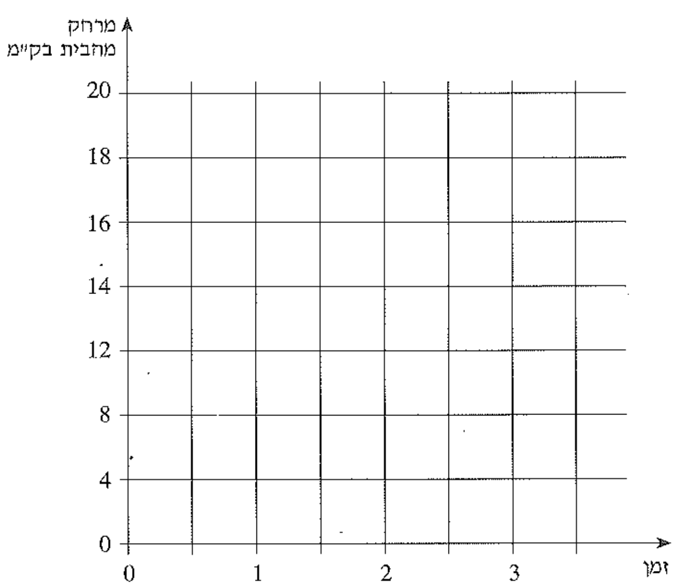
א) שרטט גרף מתאים.

ב) רשום את חוק הפונקציה המתארת את מרחקו של אורי מהבית (y), כפונקציה של הזמן שחלף מאז שהתחיל לחזור (x).

$y =$

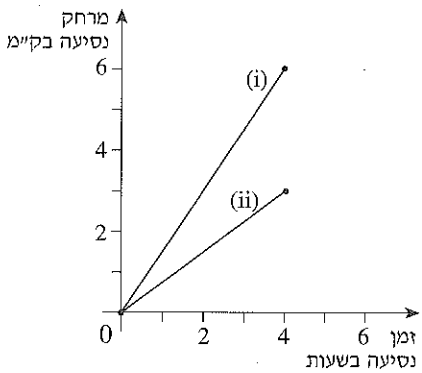
ג) - כמה ק"מ עבר בשעה הראשונה?
- כמה ק"מ עבר בשעה השנייה?
- כמה ק"מ עבר בזמן שחלף מ 0.5 ועד 1.5 שעות מאז התחיל לחזור?
- בכמה ק"מ הוא מתקרב לביתו בכל שעה?

ד) - מה מהירות הצעידה שלו?
- מה מבטא את מהירותו בגרף? ומה מבטא את מהירותו בחוק הפונקציה?
- מה מבטא השיפוע השלילי?



9. בגרף הראשון מתוארת תנועה של שתי מכוניות.

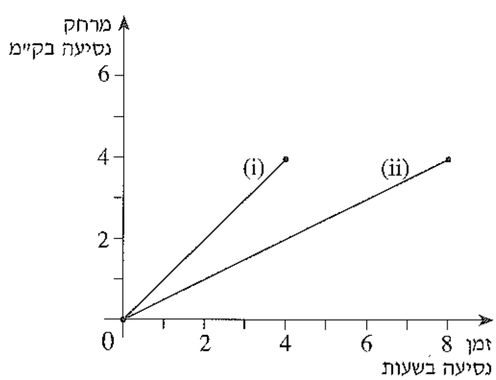
א) האם שתי המכוניות נסעו אותו מרחק? אם לא, מי נסעה מרחק גדול יותר?



ב) האם זמן הנסיעה של שתי המכוניות שווה? אם לא, מי נסעה יותר זמן? נמק.

ג) האם המכוניות נסעו באותה מהירות? אם לא, למי מהן מהירות גדולה יותר? הסבר. איך מתבטאת מהירות המכוניות בגרפים?

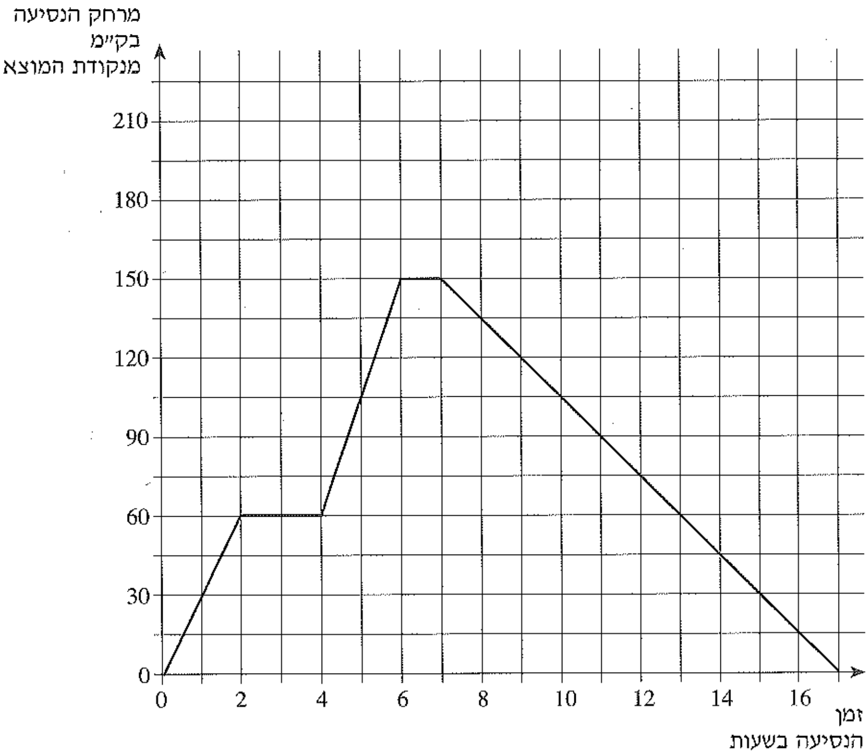
ד) חזור וענה על שאלות א׳-ג׳ עבור תנועת שתי המכוניות המתוארות בגרף השני.



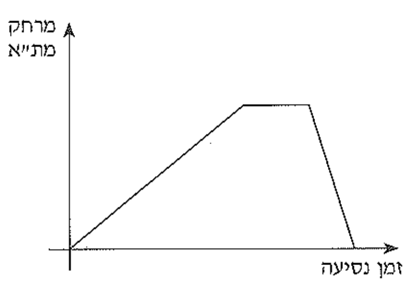
תרגילים

10. לפניך גרף המתאר תנועה של רוכב אופניים.

רשום את מהירות רוכב האופניים בכל אחד מהקטעים המתוארים בגרף.



11. תאר את תנועת המכונית המתוארת בגרף, התייחס גם למהירות.



12. לפניך גרפים המתארים תנועה של כלי רכב מתל אביב ואליה.

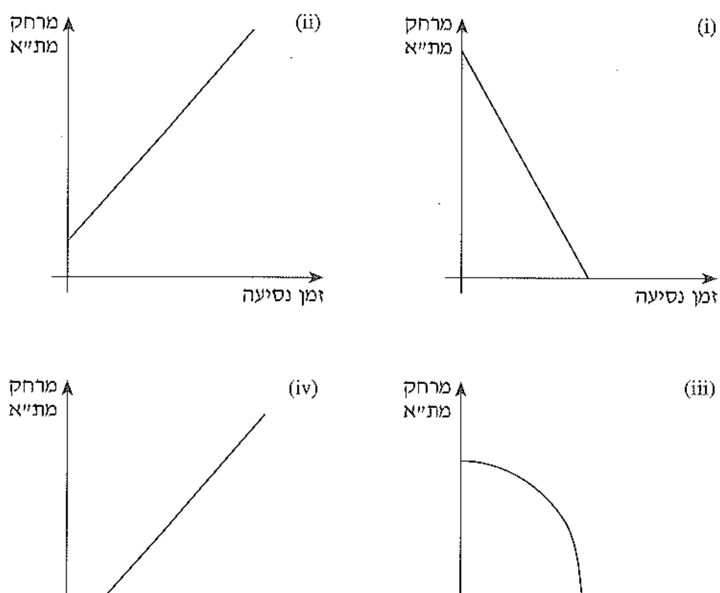
א) איך אפשר לזהות בגרף אם מכונית יצאה לדרכה מתל אביב?

ב) איזה מהגרפים מתאר נסיעה במהירות קבועה **מתל אביב**?

ג) איזה מהגרפים מתאר נסיעה במהירות קבועה **אל תל אביב**?

ד) איזה מהגרפים מתאר נסיעה של מכונית שלא יצאה מתל אביב והיא **מתרחקת** מת״א?

ה) איזה מהגרפים מתאר נסיעה במהירות **שאינה** קבועה?



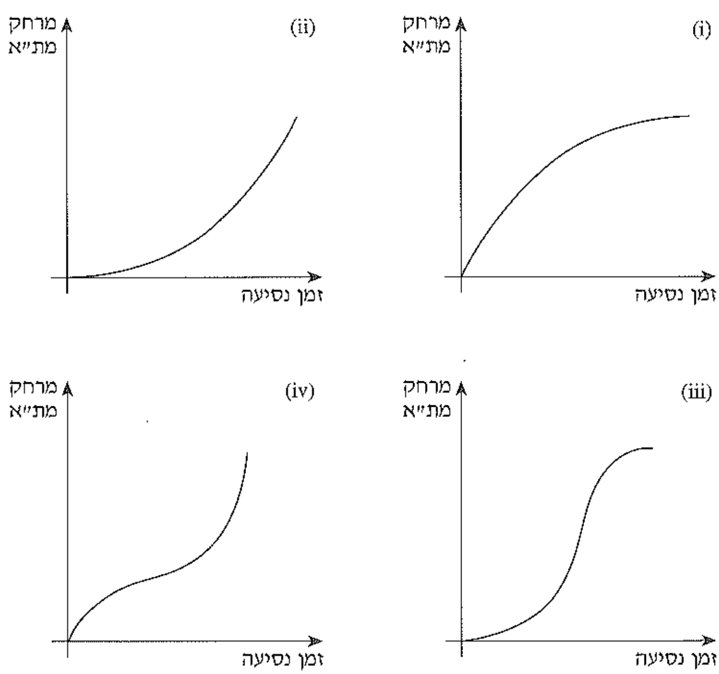
13. לפניך גרפים המתארים תנועה של כלי רכב מתל אביב.

א) איזה מהגרפים מתאר רכב שמגביר את מהירותו כל זמן הנסיעה?

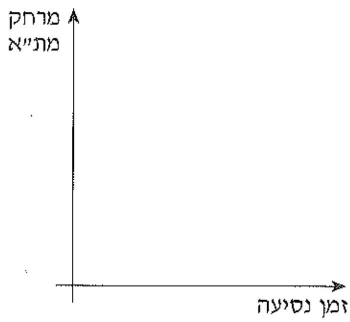
ב) איזה מהגרפים מתאר רכב שמקטין את מהירותו כל זמן הנסיעה?

ג) איזה מהגרפים מתאר רכב שתחילה מגביר את מהירותו ואחר כך מקטין אותה?

ד) איזה מהגרפים מתאר רכב שתחילה מקטין את מהירותו ואחר כך מגביר אותה?



14. שרטט גרף של תנועת מכונית היוצאת מתל אביב, נוסעת במהירות קבועה, אחר כך חונה, ואז ממשיכה להתרחק מתל אביב במהירות שהולכת וגְדֵלה.



15. הגרפים המשורטטים מתארים השתנות כמות מים בבריכה במשך זמן מסויים.

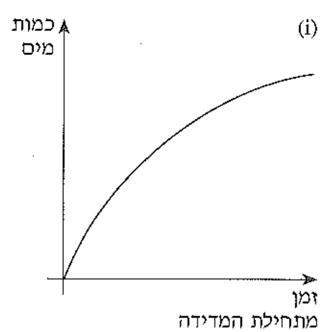
א) איזה גרף מתאר הכנסת מים לבריכה בקצב קבוע?

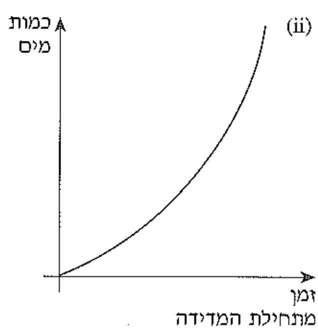
ב) אילו גרפים מתארים זרימה בקצב קבוע? (הכנסת מים או הוצאתם.)

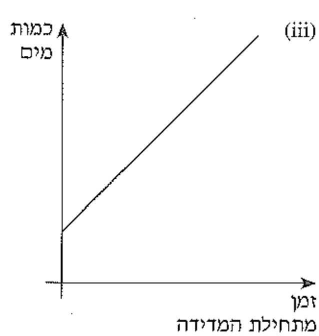
ג) איזה גרף מתאר זרימה בקצב הולך וגָדֵל?

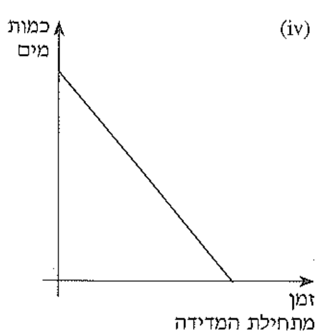
ד) איזה גרף מתאר זרימה בקצב הולך וקָטֵן?

ה) איזה גרף מתאר הזרמת מים לבריכה שהיו בה כבר מים?





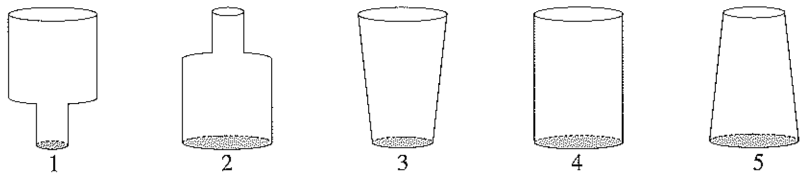


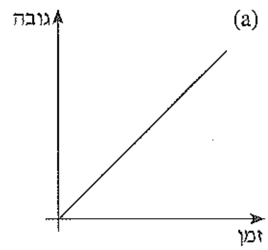


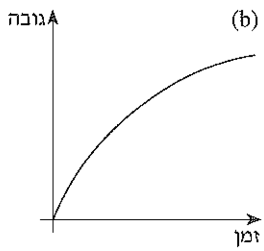
16. מים זורמים מברז בקצב קבוע וממלאים את הכלים המשורטטים.

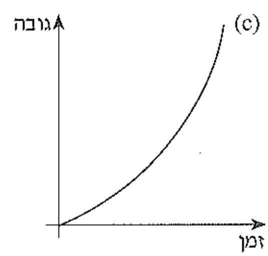
א) הגרפים מתאימים לזמן המילוי של כל כלי את גובה המים בכלי.
התאם לכל כלי את הגרף המתאים.

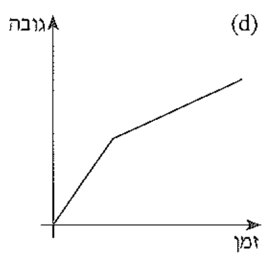
ב) מה מתארים שיפועי הקטעים בגרפים (d) ו (e) ?

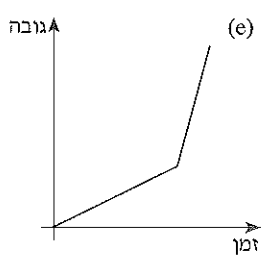






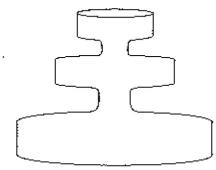


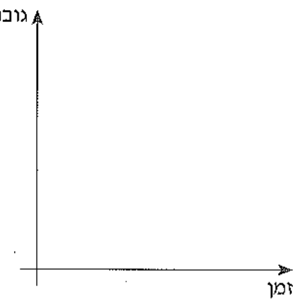


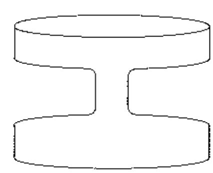


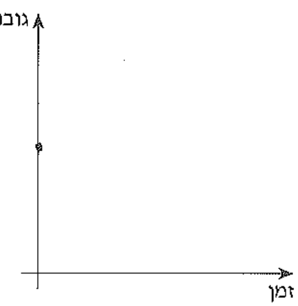
17. מים זורמים מברז בקצב קבוע וממלאים את הכלים שצורתם משורטטת כאן.

שרטט גרף המתאר את גובה המים בכלי כפונקציה של זמן המילוי.



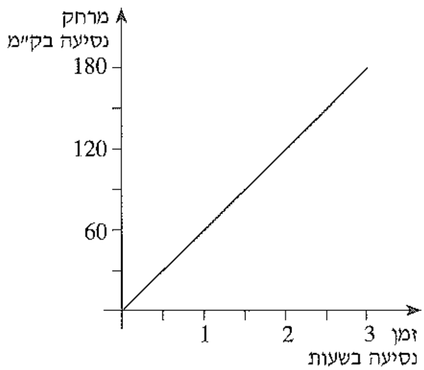






גרף של דרך וגרף של מהירות

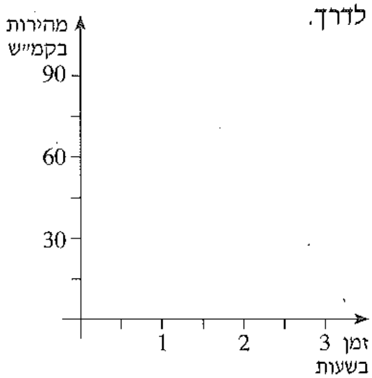
1. הגרף המשורטט מתאר את המרחק שעברה מכונית מנקודת המוצא כפונקציה של הזמן שחלף מאז שיצאה לדרך.



א) כמה ק"מ עברה המכונית בשעה הראשונה?

ב) האם בכל שעה עברה המכונית אותו מספר של ק"מ? אם כן, מה מהירותה?

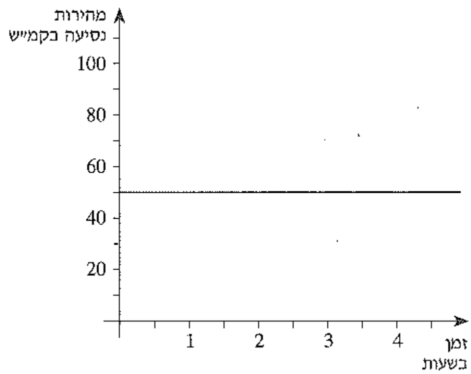
ג) שרטט גרף המתאר את מהירות המכונית, כפונקציה של הזמן שחלף מאז יצאה לדרך.



בתרגיל הקודם וגם בסעיף הקודם, הסקת מסקנות מגרף המתאר את מרחק הנסיעה כפונקציה של זמן הנסיעה. כעת ננסה להסיק מסקנות מגרפים המתארים מהירות כפונקציה של זמן הנסיעה.

2. הגרף המשורטט מתאר את מהירותה של מכונית הנוסעת במהירות קבועה.

א) מהי המהירות הקבועה?

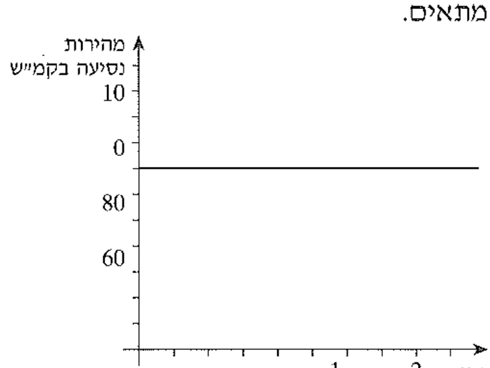


ב) כמה ק"מ עברה המכונית במשך השעתיים הראשונות?
כמה ק"מ עברה המכונית במשך 3 השעות הראשונות?

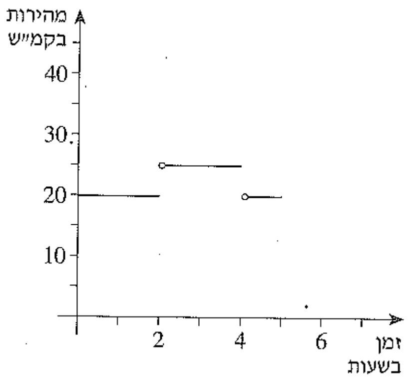
ג) צבע שטח המתאר את המרחק שעברה המכונית במשך 4 השעות הראשונות.

חישוב השטח מתחת לגרף הוא במקרים רבים, בעל משמעות. בתרגיל זה מבטא השטח את מרחק הנסיעה. (מכפלת המהירות הקבועה בזמן הנסיעה.)

ד) הגרף למטה מתאר מהירות של מכונית אחרת. איזה מרחק עברה המכונית הזו בזמן שחלף מ 2 שעות ועד ל 5 שעות מתחילת הנסיעה? צבע שטח מתאים.



3. הקטעים בגרף מתארים מהירות של רוכב אופניים.
(נזניח את הקטעים המתארים את ההאצה והאטה).



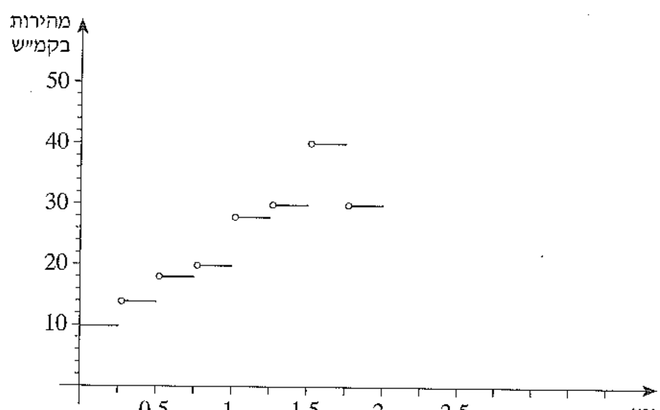
א) כמה ק"מ עבר הרוכב בשעתיים הראשונות?
צבע שטח מתאים.

ב) כמה ק"מ עבר בשעתיים הבאות? צבע שטח מתאים.

ג) כמה ק"מ בסך הכל, עבר הרוכב במשך 5 השעות?

4. הקטעים המודגשים מתארים מהירות של רוכב אופניים בפרקי זמן קצרים.

א) - כמה ק"מ עבר ברבע השעה הראשונה? (צבע שטח מתאים.)
- כמה ק"מ עבר ברבע השעה השניה? (צבע שטח מתאים.)
- כמה ק"מ עבר במשך כל חצי השעה הראשונה?
- כמה ק"מ עבר במשך כל השעה הראשונה?
- מצא את סך הכל של המרחק שעבר במשך השעתיים.



ב) סמן את אמצעי הקטעים המודגשים, וחבר אותם (בדומה למה שעשית בסטטיסטיקה כששרטטת מצולע שכיחויות על הסטוגרם).

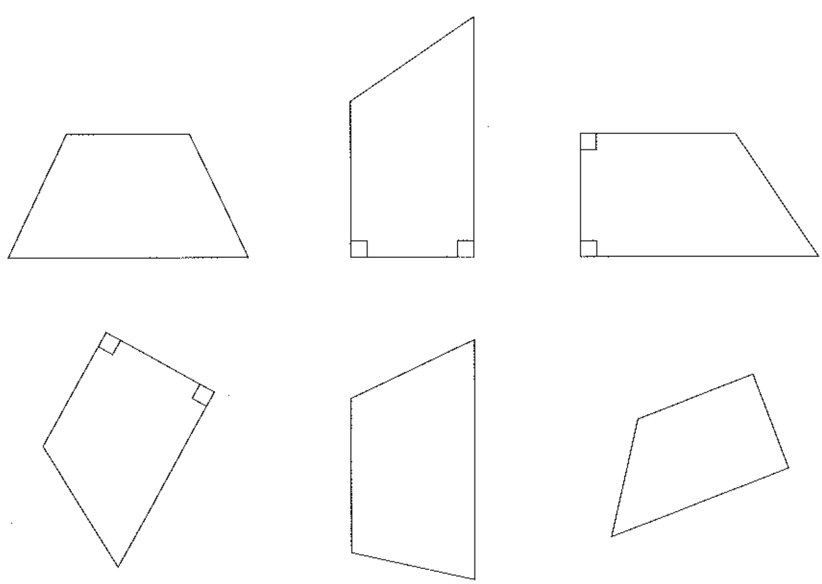
הקו שקיבלת מתאר את השתנות המהירות, השטח מתחתיו קרוב לשטחי כל המלבנים שחישבת בסעיף א'.
ראית כי לחישוב שטח מתחת לגרף נתון, יש לעיתים משמעות מעבר לחישוב השטח עצמו. בתרגילים האחרונים היה נתון גרף שתיאר מהירות נסיעה לפי זמן הנסיעה. השטח מתחת לגרף תיאר את מספר הק"מ שנסעה המכונית לפי זמן הנסיעה.

בהמשך יחידה זו, נראה איך לחשב שטחים מתחת לגרפים של פונקציות נתונות, ונביא דוגמאות של שימוש בשטחים אלה לפתרון בעיות שונות כמו מציאת אורך דרך לפי גרף של מהירות.
התרגילים בהמשך סעיף זה עוסקים בחזרה על חישובי שטח טרפז ועל כפל תבניות, (בהם יעשה שימוש בסעיפים הבאים). תלמידים השולטים בנושאים אלה יכולים לעבור לסעיף הבא.

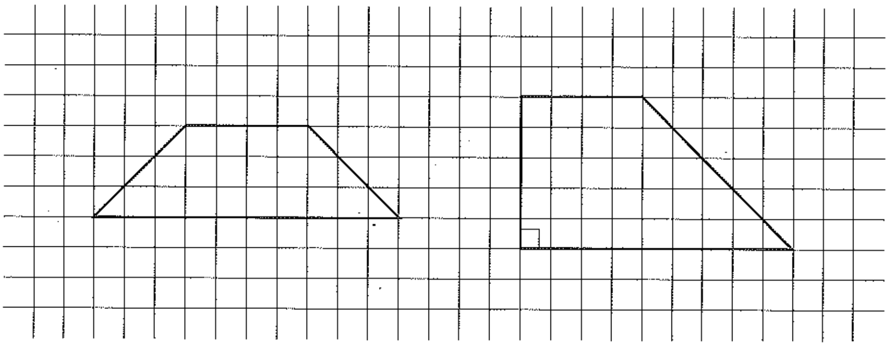
קצת על חישוב שטח טרפז

שתי הצלעות המקבילות בטרפז נקראות בסיסי הטרפז והמרחק בין הבסיסים (האנך לשניהם), הוא גובה הטרפז.

5. רשום על כל בסיס את האות **ב** ועל כל גובה את האות **ג**. אם יש צורך שרטט תחילה גובה.

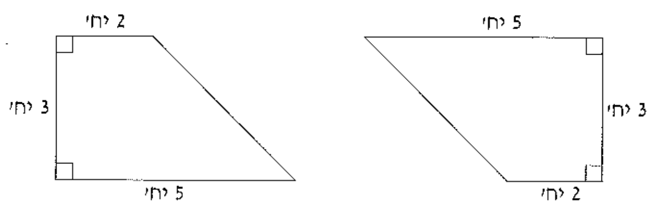


6. מה השטח של כל אחד מהטרפזים? (יחידת המידה היא משבצת ריבועית.)



7. לפניך שני טרפזים ישרי זווית חופפים.

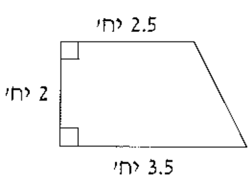
א) העתק את אחד הטרפזים בצמוד לשני, באופן שיתקבל מלבן, ששטחו שווה לסכום שטחי שני הטרפזים.



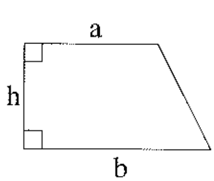
מה שטח המלבן?

מה השטח של כל טרפז?

ב) שרטט, כמו בסעיף א', מלבן ששטחו כפול משטח הטרפז המשורטט.
חשב את שטח המלבן ואת שטח הטרפז.



ג) שרטט, מלבן ששטחו כפול משטח הטרפז ישר הזווית המשורטט.
רשום תבנית לשטח המלבן.
רשום תבנית לשטח הטרפז.



שטח טרפז: (סכום אורכי הבסיסים x אורך הגובה) $\cdot \frac{1}{2}$

הראינו כיצד מתקבלת נוסחת השטח רק עבור טרפזים ישרי זווית
ורק לגביהם נשתמש בנוסחה כאן.

חזרה על כפל תבניות

8. פתח סוגריים וחבר איברים דומים.

א) $x(x-1)+2(x-1)$

ב) $3(2x+3)-4(2x+3)$

9. פתח סוגריים וחבר.

א) $(x+5)(x-2)$

ב) $(2x+1)(x-3)$

ג) $(x+2)(2x-5)$

ד) $(3x+4)(x-2)$

ה) $(0.5x+1)(x-3)$

ו) $(3x+5)(x-1)$

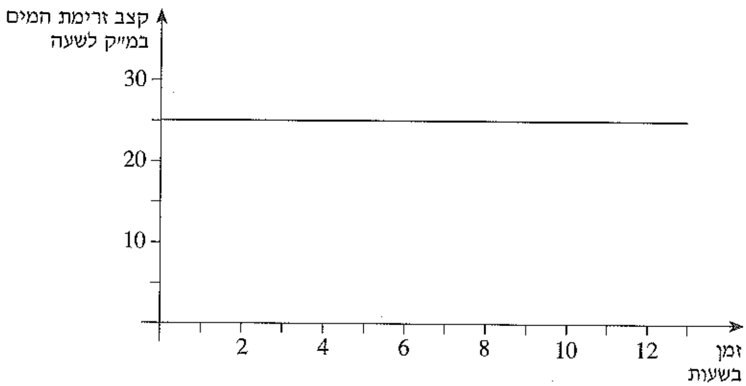
ז) $\frac{1}{2}\cdot(2x+3)(x-3)$

ח) $\frac{(2x+1)(2x+1)}{2}$

תרגילים

10. ממלאים בריכה ריקה בעזרת ברז המזרים מים בקצב קבוע.

א) כמה מ"ק (מטרים מעוקבים) של מים יוכנסו לבריכה במשך 4 השעות הראשונות?
סמן שטח מתאים בגרף.

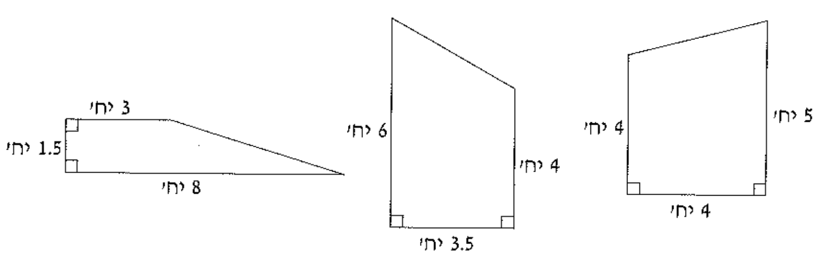


ב) כמה מ"ק של מים יוכנסו לבריכה במשך 12 השעות הראשונות? סמן שטח מתאים בגרף.

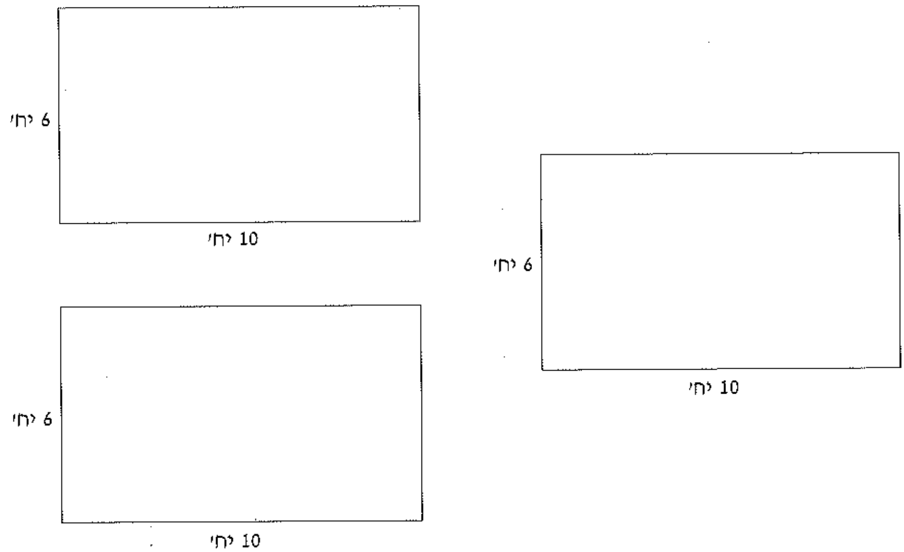
ג) כמה זמן לוקח למלא 200 מ"ק של מים?

ד) כשהבריכה מלאה יש בה 750 מ"ק של מים. כמה זמן לוקח למלא את הבריכה?

11. חשב את שטחי הטרפזים ישרי הזווית.



12. א) חלק את המלבן לשני טרפזים חופפים באופנים שונים.



ב) מה השטח של כל טרפז?

ג) האם חילקת כך שהתקבל טרפז בו אחת השוקיים 10 יחידות? אם לא, שרטט וחלק באופן כזה.

13. פתח סוגרים וחבר.

א) $2x(x + 2) + 3(x + 4)$

ב) $3x(2x - 1) - 5(x - 2)$

ג) $0.5(x - 4) - 1.5(2x + 3)$

14. פתח סוגרים וחבר.

א) $(7 + 2x)(x - 3)$

ב) $(5 + 3x)(x - 5)$

ג) $(4 + 2x)(2x - 3)$

ד) $(3 - 2x)(x - 4)$

ה) $(5 - 0.5x)(x + 1)$

ו) $(3 - 1.5x)(2x - 4)$

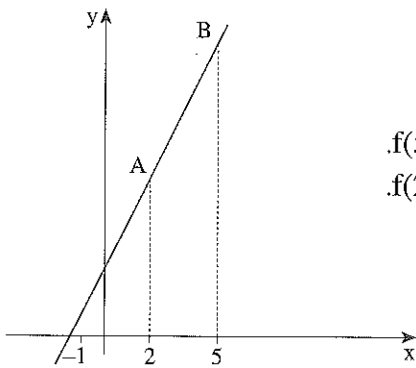
ז) $\frac{1}{2} \cdot (3 + 2x)(x - 1)$

ח) $\frac{(2 + x)(x - 4)}{2}$

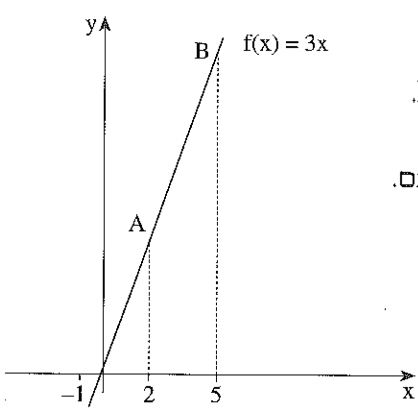
חישוב שטח מתחת לגרף של פונקציה

ראית שהשטח מתחת לגרף המהירות (הקבועה) מתאר אורך דרך. יש משמעות לשטח גם מתחת לגרף של פונקציה שאינה קבועה. נתחיל מחישוב שטח מתחת לגרף של פונקציה קווית, שאינה קבועה.

1. הגרף המשורטט הוא גרף הפונקציה $f(x) = 2x + 3$.
   - חשב את שיעורי הנקודות A ו- B.
   - צבע בשרטוט קטע שאורכו הוא $f(5)$.
   - צבע בשרטוט קטע שאורכו הוא $f(2)$.
   - צבע טרפז שבסיסיו שני הקטעים שצבעת, ושוקיו ציר x וחלק מגרף הפונקציה.
   - חשב את שטח הטרפז.



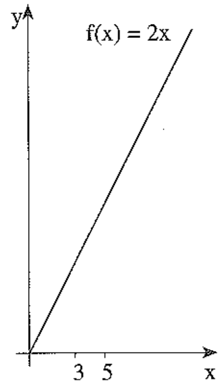
2. לפניך גרף הפונקציה $f(x) = 3x$. בנקודות $(2, 0)$ ו- $(5, 0)$ שורטטו אנכים לציר x.
   - חשב את שיעורי הנקודות A ו- B.
   - צבע את שטח הטרפז שהתקבל.
   - רשום על בסיסי הטרפז את אורכם.
   - חשב את גובה הטרפז.
   - חשב את שטח הטרפז.



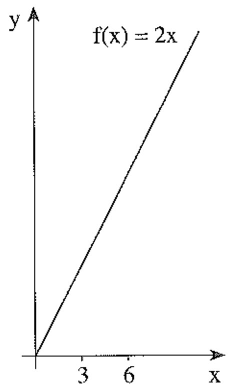
3. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x$.

א) שרטט וחשב את שטח הטרפז הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים לציר x בנקודות הבאות:

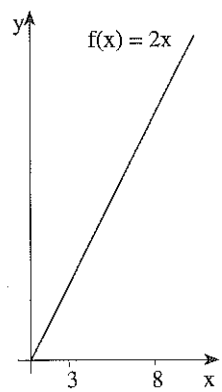
(i) $(3,0)$ ו- $(5,0)$



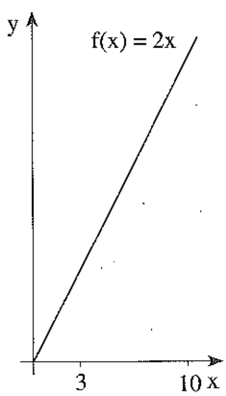
(ii) $(3,0)$ ו- $(6,0)$



(iii) $(3,0)$ ו- $(8,0)$



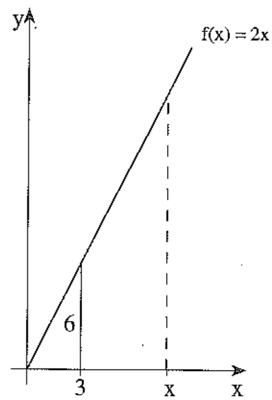
(iv) $(3,0)$ ו- $(10,0)$



ב) נשרטט ונבטא באופן כללי את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים לציר x בנקודה $(3,0)$ ובנקודה כללית $(x,0)$ על המשך הציר (מימין ל $(3,0)$):

- אורך האנך לציר בנקודה $(x,0)$ הוא $2x$, רשום בשרטוט.
- בטא את גובה הטרפז בעזרת x.
- בטא את שטח הטרפז.

$$s(x) =$$



$s(x)$ היא פונקציה חדשה, המתארת את השטח הכלוא, בין גרף הפונקציה f, ציר x, ואנכים לציר x בנקודה $(3, 0)$ ובנקודה כללית $(x,0)$ על המשך הציר. ($f(x)$ חיובית בתחום בו מדובר).

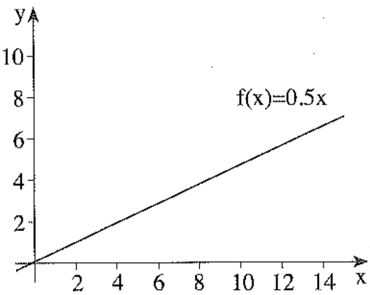
ג) הצב וחשב את $s(5)$, $s(6)$, $s(8)$, $s(10)$, והשווה עם התוצאה שבסעיף א'.

ד) פתח סוגריים בביטוי $s(x)$, חלק וכנס, ואחר כך גזור את $s(x)$.
מה הקשר בין $s'(x)$ לבין $f(x)$ הנתונה?

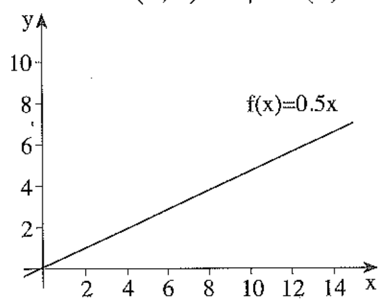
4. במערכות הצירים משורטט גרף הפונקציה: $f(x) = 0.5x$.

א) שרטט וחשב את שטח הטרפז הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, אנך לציר x ב- $(2, 0)$ ואנך לציר x בנקודות הבאות:

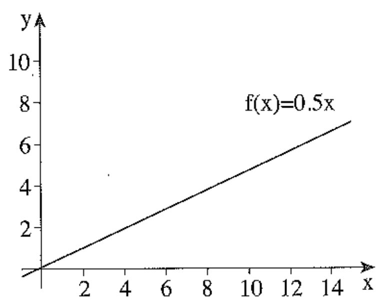
(i) בנקודה $(5, 0)$



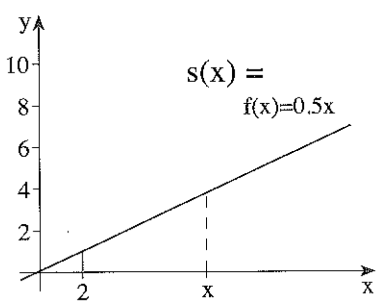
(ii) בנקודה $(9, 0)$



(iii) בנקודה $(12,0)$



ב) שרטט ובטא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים לציר x בנקודה $(2, 0)$ ובנקודה כללית $(x\ , 0)$ על המשך הציר.



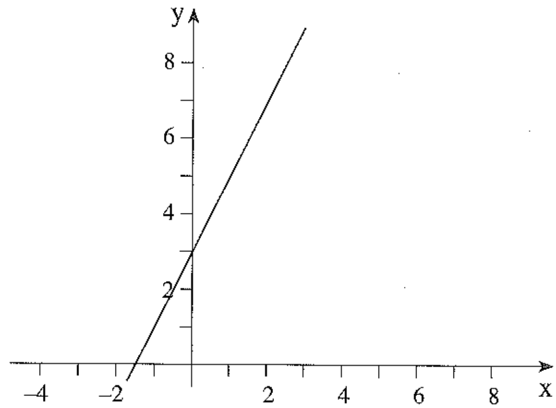
ג) מצא את $s(5)$ והשווה עם תוצאת החישוב בסעיף א (i).

ד) חשב על ידי הצבה את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים לציר בנקודות $(2, 0)$ ו-$(20, 0)$.

ה) פתח סוגריים, חבר ומצא את $s'(x)$. מה קיבלת?

5. במערכת הצירים משורטט גרף הפונקציה: $f(x) = 2x + 3$.

א) שרטט וחשב שטח של טרפז הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x ואנכים לציר x בנקודות $(-1, 0)$ ו- $(2, 0)$.



ב) בטא את השטח $s(x)$, הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, אנכים לציר בנקודה $(-1, 0)$ ובנקודה כללית $(x , 0)$ על המשך ציר x.

ג) חשב, על פי הביטוי שקיבלת את $s(2)$, והשווה עם תוצאת סעיף א׳.

ד) מצא את $s'(x)$. (לשם כך פשט תחילה את הביטוי שקיבלת עבור $s(x)$).

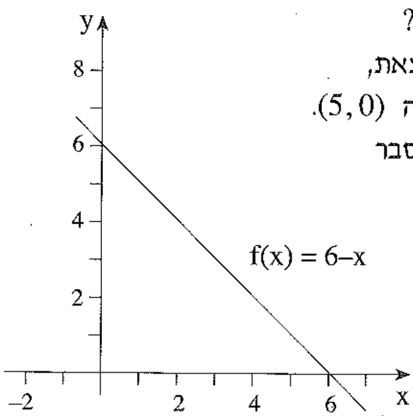
6. במערכת הצירים משורטט גרף הפונקציה: $f(x) = 6 - x$.

א) שרטט טרפז הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x ואנכים לציר x בנקודה $(1, 0)$ ובנקודה כללית $(x, 0)$ על המשך הציר. (משמאל ל-$(6, 0)$).

ב) רשום פונקציה שתבטא את שטח הטרפז הנ״ל.
האם גם כאן $s'(x)$ שווה ל- $f(x)$?

ג) חשב בעזרת הפונקציה $s(x)$ שמצאת,
את השטח הנ״ל עד לאנך בנקודה $(5, 0)$.

ד) הצב $x = 6$, בפונקציה $s(x)$ והסבר מה מתארת התוצאה שקיבלת.



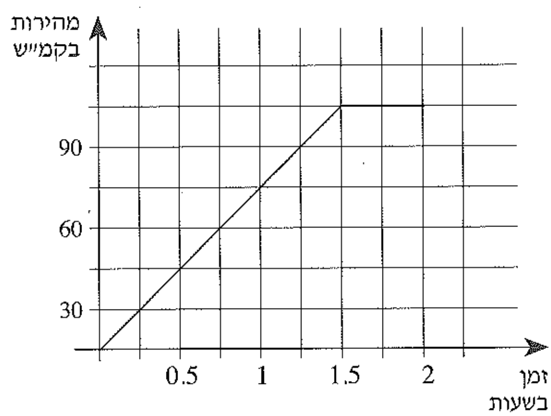
7. הגרף בשרטוט מתאר מהירות של מכונית הנוסעת במשך שעתיים.

א) מה היתה המהירות אחרי חצי שעה של נסיעה?

מה היתה המהירות אחרי שעה אחת של נסיעה?

מה היתה המהירות אחרי שעה וחצי של נסיעה?

מה היתה המהירות אחרי שעתיים של נסיעה?



כפי שראית בסעיפים הקודמים, כאשר התנועה במהירות קבועה, השטח מתחת לגרף מתאר את המרחקים שעברה המכונית בפרקי הזמן המתאימים. גם כאשר המהירות משתנה השטח מתאר את המרחקים.

ב) מה המרחק שעברה המכונית במשך השעה הראשונה? צבע שטח מתאים בגרף למעלה.

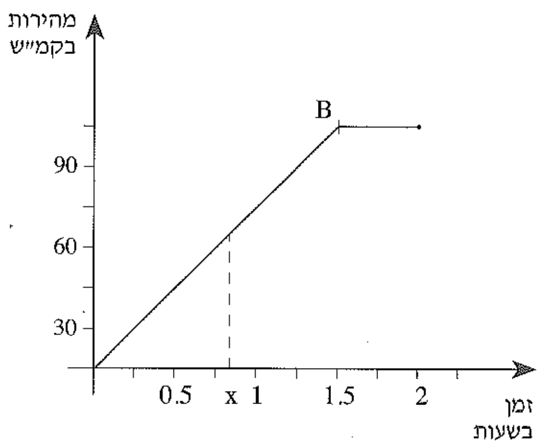
מה המרחק שעברה המכונית במשך השעתיים הראשונות לנסיעתה? צבע שטח מתאים בגרף.

ג) רשום את חוק הפונקציה עבור x בין 0 ל-1.5 שעות.

$$f(x) =$$

המשך ←

ד) רשום על האנך, בנקודה $(x, 0)$, ביטוי לאורך האנך.
רשום תבנית לשטח המשולש. $s(x) =$

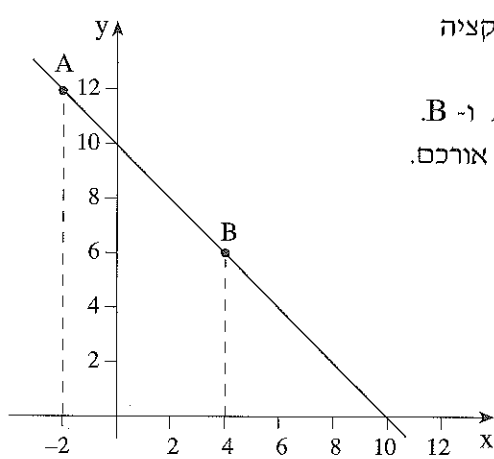


פשט וחשב את $s(1)$, והשווה עם התוצאה המתאימה בסעיף ב'.

ה) פתח סוגריים, חבר וגזור את $s(x)$.
מה הקשר בין $s(x)$ לפונקציה $f(x)$?

תרגילים

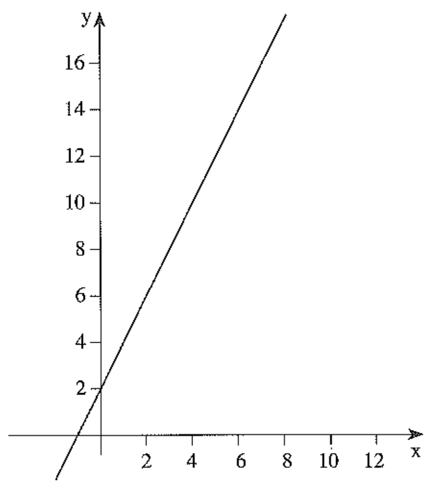
8. הגרף המשורטט הוא גרף הפונקציה
$f(x) = -x + 10$
- חשב את שיעורי הנקודות A ו- B.
- רשום על בסיסי הטרפז את אורכם.
- חשב את גובה הטרפז.
- חשב את שטח הטרפז.



9. בשני השרטוטים בתרגיל זה משורטט גרף הפונקציה $f(x) = 2x + 2$.

א) שרטט וחשב את שטח הטרפז הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, אנך לציר x בנקודה $(0, 0)$ ואנך לציר x בנקודות הבאות:

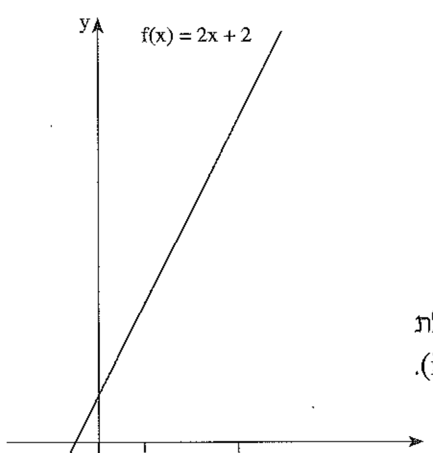
i) בנקודה $(5, 0)$ ii) בנקודה $(8, 0)$



ב) בטא את השטח בין גרף הפונקציה, ציר x ואנכים בנקודה $(0, 0)$ ובנקודה כללית $(x, 0)$ על המשך הציר.

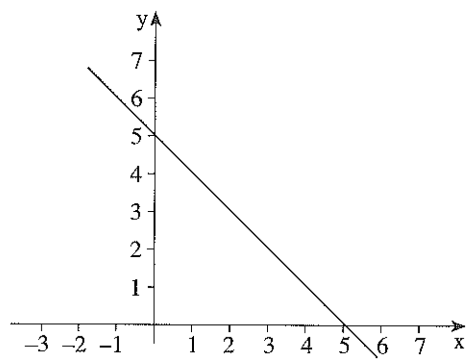
$s(x) =$

ג) פתח סוגריים, חבר וגזור. השווה ל- $f(x)$.



ד) חשב את השטח הנ"ל עד אנך בנקודה $(8, 0)$ ובדוק אם קיבלת אותה תוצאה כמו בסעיף א' (ii).

10. א) מצא פונקצית שטח $s(x)$, המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = -x + 5$, ציר x , ציר y ואנך בנקודה $(x, 0)$ על המשך הציר, לא מעבר ל- $(5, 0)$. (שרטט תחילה).



ב) חשב את $s(3)$ ואת $s(5)$.

ג) חשב את שטח המשולש המשורטט ובדוק אם קיבלת את $s(5)$.

ד) גזור את $s(x)$. מה קיבלת?

11. חישבו ומצאו כי הפונקציה $s(x) = 2x^2 - 2$, מתארת שטח הכלוא בין גרף של פונקציה, ציר x, ואנכים לציר x בנקודה $(1, 0)$ ובנקודה $(x, 0)$ שעל המשך הציר.

א) חשב את $s(3)$, $s(6)$, $s(3)$.

ב) נסה למצוא את חוק הפונקציה $f(x)$. (משוואת הישר.)

מה הגרף המתאים?

(פעילות בעזרת התוכנה הנדסה בתנועה.)

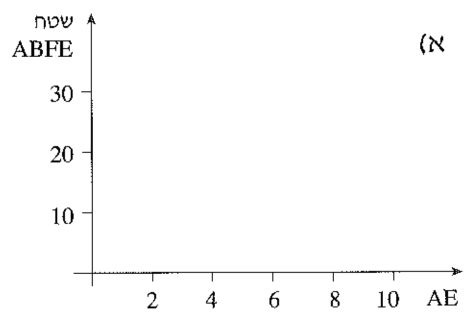
בסעיפים הקודמים הכרת פונקציה $s(x)$, המתארת את השטח מתחת לגרף של פונקציה $f(x)$. ראית כי השטח משתנה בהתאם למקומו של האנך המועבר בנקודה $(x, 0)$.

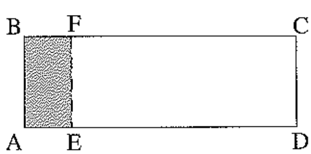
בפעילות זו תשרטט גרפים משוערים המתארים את השתנות השטח, ואחר כך תבדוק את השערותיך בעזרת התוכנה הנדסה בתנועה.

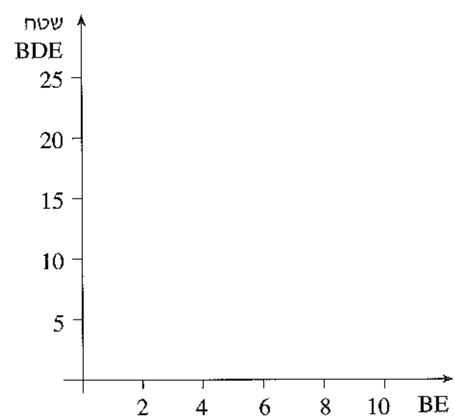
שרטט גרף המתאר את השתנות השטח הצבוע הכלוא בתוך הצורה, כשהאנך בנקודה E זז ימינה.

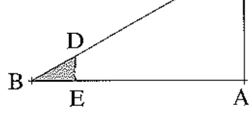
(כלומר, הנקודה E היא $(x, 0)$).

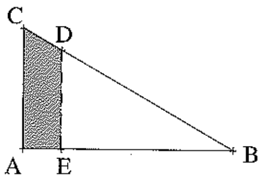
א)

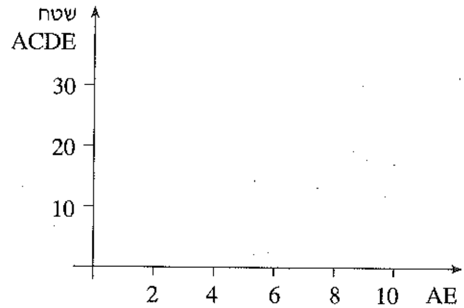


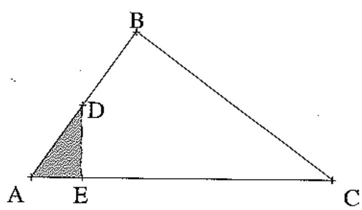


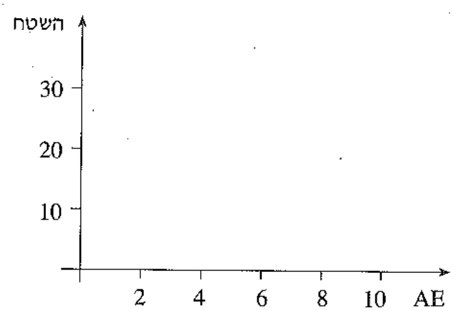




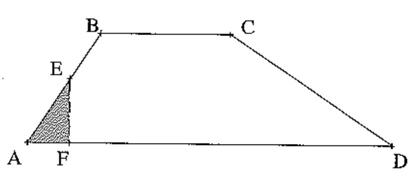


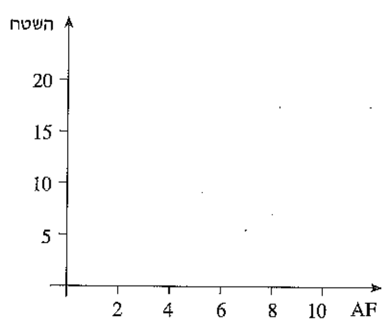




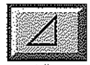
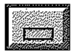
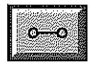
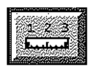
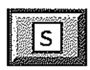
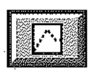


ב) בתרגיל זה הנקודה F היא $(x, 0)$.





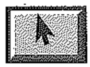
כדי לבדוק את השרטוטים פתח את התוכנה **הנדסה בתנועה.**

א) בחר מלבן.	 ←  ← בנה.
העבר אנך מנקודה E על הישר AD לישר BC:	 ← הבא את הסמן למקום כלשהו על AD והקש. תסומן נקודה E.  ← אנך מ - E לישר BC.
צבע את השטח ABFE.	 ← הקש על shift ועל הנקודות A, B, F, E. **עריכה** ← מלא את הצורה.
פתח מד אורך למדידת AE.	 ← רשום AE.
פתח מד שטח.	 ← רשום ABFE.
הכן מערכת צירים. רשום מה מתאר כל ציר.	 ← הבא את המסגרת למסך והקש. הבא את הסמן אל החץ שבתחתית מד האורך, לחץ, הזז אל החץ שבתחתית מסגרת הגרף, (מתחת לציר x) ושחרר. ירשם AE. חזור עבור מד השטח וציר y.
שנה יחידות על הצירים. רשום מספרים במסגרות המתאימות:	הבא את הסמן לאחד הצירים והקש פעמיים. ציר אופקי מ - 0 עד 10. ציר אנכי מ - 0 עד 30.
שרטט את הגרף המתאר את השתנות השטח ABFE כפונקציה של AE.	 ← הבא את הסמן לנקודה E, לחץ והזז אותו לאורך AD. הגרף ישורטט.

השווה עם הגרף המשוער ששרטטת בסעיף א', (לפני העבודה עם המחשב).

ב) בחר משולש ישר זווית.	← ← בנה.
העבר אנך לישר AB מנקודה D על הישר BC.	← הבא את הסמן למקום כלשהו על BC והקש. תסומן נקודה D. ← אנך מ -D לישר AB.
צבע את השטח DBE.	← הקש על shift ועל הנקודות D, B, E.
	<u>עריכה</u> ← מלא את הצורה.
פתח מד אורך למדידת AE.	← רשום BE.
פתח מד שטח.	← רשום DBE.
הכן מערכת צירים.	← הבא את המסגרת למסך והקש.
רשום מה מתאר כל ציר.	חבר את מד האורך לציר x, ואת מד השטח לציר y.
שנה יחידות על הצירים.	הבא את הסמן לאחד הצירים והקש פעמיים. ציר אופקי מ - 0 עד 10. ציר אנכי מ - 0 עד 25.
שרטט.	← הזז את D.

ג) תוכל להשתמש בבניה הקודמת:

מחק את הצבע מתוך משולש DBE.	הקש בתוך המשולש הצבוע, ואחר כך הקש delete.
צבע את השטח ACDE.	 ← הקש על shift ועל הנקודות E, D, C, A. **<u>עריכה</u>** ← מלא את הצורה.
רשום על מד השטח ACDE.	הקש בתוך מד השטח. מחק, ורשום ACDE.
מחק את הגרף הקודם.	הקש על מסגרת הגרף ← **<u>עריכה</u>** ← מחק את הנתונים.
חבר את מד השטח החדש לציר y.	
שרטט את הגרף. והשווה עם הגרף ששרטטת בסעיף ג'.	 ← הזז את D.

בשני הסעיפים הבאים (המופיעים בעמודים הבאים) יש צורך לנוע באופן נפרד על AB ועל BC.

כדי לא לבנות פעמיים, נבחר נקודה שאיננה נמצאת על הקטעים האלה וננוע בבחירות על שתי הצלעות.

ד) בחר משולש כללי.

בנה.

העבר אנך מנקודה **כלשהי** D לישר AC.

הבא את הסמן למקום כלשהו **מעל** A ולא על A B.

אנך מ - D לישר AC.

אל תצבע.

פתח מד אורך למדידת AE .

רשום AE.

פתח **שני מדי שטח.**

רשום ADE.

רשום ABDE.

הכן מערכת צירים.

הבא את המסגרת למסך והקש.

רשום מה מתאר כל ציר.

חבר את מד האורך לציר x, ואת מד השטח ADE לציר y.

שנה יחידות על הצירים.

הבא את הסמן לאחד הצירים, והקש פעמיים.
ציר אופקי מ - 0 עד 10.
ציר אנכי מ - 0 עד 30.

שרטט את הגרף.

הזז את D, **בזהירות** לאורך AB מ - A עד B.

החלף מד שטח.
המשך לשרטט

חבר את מד השטח ABDE לציר y.
המשך להזיז את D על BC עד C.

השווה עם הגרף ששרטטת בסעיף ד'.

ה) בחר טרפז.	בנה.
הגדל אותו.	גרור קודקודים.
חזור על הבניה מהסעיף הקודם:	הבא את הסמן למקום כלשהו **מעל** A ולא על AB והקש.
העבר אנך מנקודה **כלשהי** E לישר AD.	תסומן נקודה E. אנך מ - E לישר BC.
פתח מד אורך למדידת AF.	רשום AF.
פתח **שלושה** מדי שטח.	רשום AEF. רשום ABEF. רשום ABCEF.
הכן מערכת צירים.	הבא את המסגרת למסך והקש.
רשום מה מתאר כל ציר.	חבר את מד האורך לציר x, ואת מד השטח AEF לציר y.
שנה יחידות על הצירים.	הבא את הסמן לאחד הצירים והקש פעמיים. ציר אופקי מ - 0 עד 10. ציר אנכי מ - 0 עד 30.
שרטט את הגרף.	הזז את E, בזהירות לאורך AB מ - A **עד** B.
החלף מד שטח.	חבר את מד השטח ABDE לציר y.
המשך לשרטט.	המשך להזיז את E על BC עד C.
החלף מד שטח.	חבר את מד השטח ABCEF לציר y.
המשך לשרטט.	המשך להזיז את E על CD עד D.

השווה עם הגרף ששרטטת בסעיף ה'.

מציאת פונקציית השטח

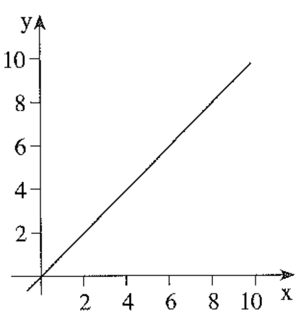
הראינו בעזרת דוגמאות כי כאשר $s(x)$ היא פונקציה המתארת את השטח הכלוא בין גרף של פונקציה קווית $f(x)$, שהיא חיובית בתחום בו מדובר, ציר x, אנך לציר בנקודה נתונה עליו, ואנך לציר x בנקודה כללית $(x, 0)$ אז $s'(x) = f(x)$.

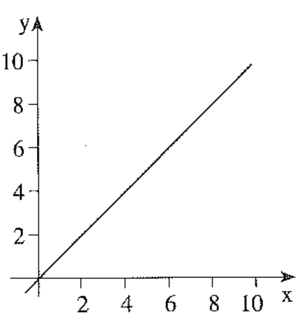
בתרגילים 2, 1 נראה איך משפיעה נקודת ההתחלה (האנך השמאלי), על פונקציית השטח.

1. א) מצא פונקציית שטח $s(x)$, המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x$, ציר x, אנך לציר בנקודה הנתונה להלן, ואנך בנקודה $(x, 0)$ אחרת על המשך הציר. (שרטט את השטח).

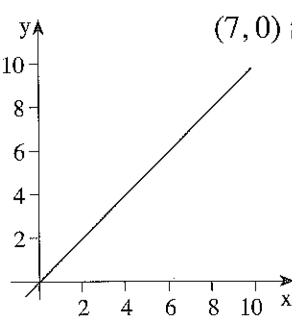
i) מאנך בנקודה $(2, 0)$

ii) מאנך בנקודה $(4, 0)$





iii) מאנך בנקודה $(7, 0)$



ב) במה שונות הפונקציות $s(x)$ שקיבלת אחת מהשניה?
מה תוכל לומר על הנגזרות שלהן?

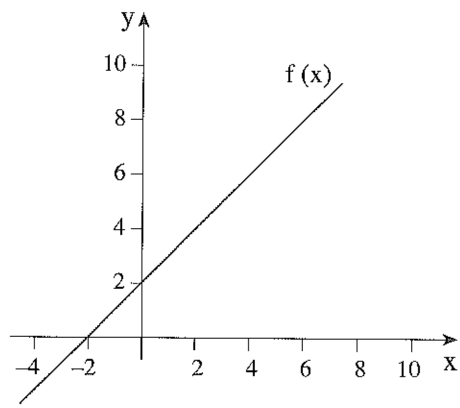
בכל הסעיפים חישבת שטח מתחת לגרף של אותה פונקציה $f(x) = x$. פונקציות השטח שקיבלת נבדלו זו מזו בתוספת קבועה ולכן יש להן אותה הנגזרת.

2. מצא פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x + 2$, ציר x, אנך בנקודה הנתונה להלן ואנך בנקודה כללית $(x, 0)$, על המשך הציר. (שרטט תחילה.)

א) מאנך בנקודה $(1, 0)$, שרטט.

ב) מאנך בנקודה $(3, 0)$.

ג) מאנך בנקודה $(0, 0)$ (מציר y).



משפחת פונקציות השטח $s(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \square$ מתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = x + 2$, ציר x, אנך בנקודה נתונה על ציר x, ואנך בנקודה כללית $(x, 0)$ על המשך הציר.

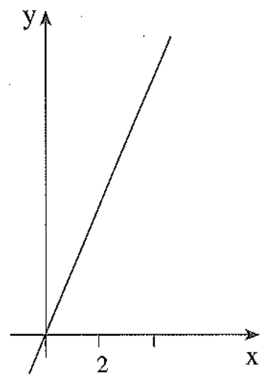
במקום לרשום משבצת ריקה (שהמספר בתוכה נקבע על פי הנקודה ממנה מעבירים את האנך הראשון) נשתמש באות c.

בדוגמה: $s(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$.

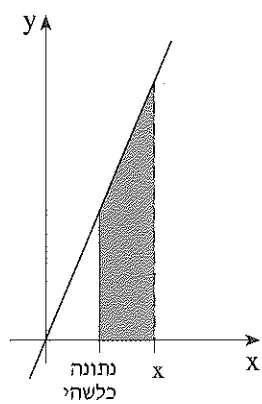
3. הפונקציה המשורטטת היא: $f(x) = 4x$.

א) מצא פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, אנך בנקודה הנתונה להלן, ואנך בנקודה כללית $(x, 0)$ על המשך הציר. שרטט את השטח.

i) בנקודה $(1, 0)$ ii) בנקודה $(3, 0)$



ב) גזור כל אחת מהפונקציות שהתקבלו ובדוק אם קיבלת את $f(x)$.



ג) רשום את **משפחת** הפונקציות $s(x)$, המתארת את השטח הצבוע.

במקום למצוא את שטח הטרפז, אפשר למצוא את פונקצית השטח מאנך בנקודה נתונה כלשהי בדרך אחרת: אפשר למצוא פונקציה $s(x)$ שהנגזרת שלה היא $f(x)$.

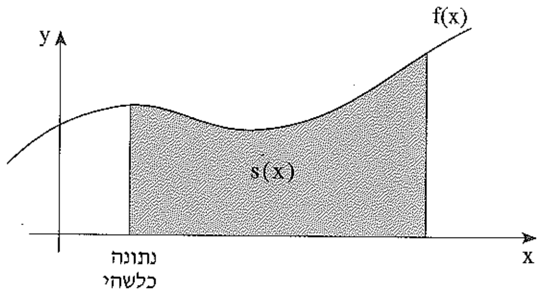
כפי שראית, יש משפחה שלמה של פונקציות כאלה, הנבדלות זו מזו בקבוע c. הערך של c נקבע על ידי מיקום האנך השמאלי היוצר את הטרפז.

4. א) **שער** מהי משפחת הפונקציות המתארת את השטח המקווקו כאשר

$f(x) = 2x$

$s(x) =$

בתרגיל 4, שיערת מהי משפחת הפונקציות $s(x)$ ללא חישוב שטח הטרפז. התוצאה שקיבלת עבור מקרים פרטיים של פונקציות קוויות נכונה גם עבור פונקציות שאינן קוויות.
אם $f(x)$ פונקציה חיובית (בתחום שבו מדובר), אז השטח הצבוע בשרטוט מתואר על ידי פונקציה $s(x)$ השייכת למשפחה המקיימת $s'(x) = f(x)$.



בהמשך הלימוד תלמד לקבוע כיצד למצוא את c על פי הנקודה הנתונה, גם כשמדובר בפונקציות שאינן קוויות. עבור פונקציות קוויות מצאנו את c כאשר חישבנו שטח של טרפז.
בינתיים נתרכז במציאת משפחות של פונקציות $s(x)$.

5. א) שער מהי משפחת הפונקציות השטח, המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 3x^2$, ציר x, אנך בנקודה נתונה כלשהי ואנך בנקודה כללית $(x , 0)$ על המשך הציר.

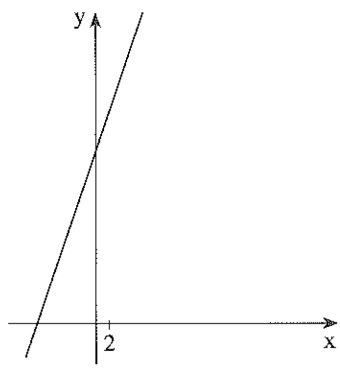
ב) - האם הפונקציה $s(x) = x^3 - 3$ שייכת למשפחה?
גזור, האם קיבלת את $f(x)$?
- האם הפונקציה $s(x) = x^2 - 3$ שייכת למשפחה?
גזור, האם קיבלת את $f(x)$?
- האם הפונקציה $s(x) = x^3 + 2$ שייכת למשפחה?
גזור, האם קיבלת את $f(x)$?

ג) רשום עוד שתי פונקציות השייכות למשפחה.

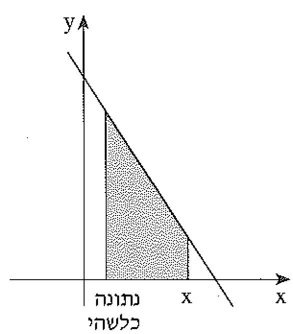
תרגילים

6. א) שער, או חשב בעזרת שטח טרפז, מהי משפחת הפונקציות $s(x)$ המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 4x + 12$, ציר x, אנך בנקודה נתונה כלשהי, ואנך בנקודה כללית $(x, 0)$ על המשך הציר. גזור ובדוק אם קיבלת את $f(x)$.

ב) העבר אנך לציר x בנקודה $(2, 0)$, וצבע את השטח המתאים מהאנך ששרטטת ועד אנך לציר בנקודה כללית $(x, 0)$ על המשך הציר.



7. א) שער מהי משפחת פונקציות השטח המתארות את השטח הצבוע, אם $f(x) = -2x + 6$. גזור ובדוק.

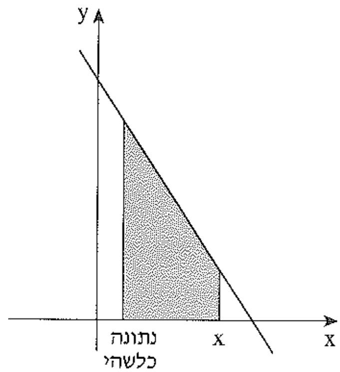


ב) - האם הפונקציה $s(x) = -x^2 + 6x + 2$ שייכת למשפחה? נמק

- האם הפונקציה $s(x) = -x^2 + 6x$ שייכת למשפחה? נמק

- האם הפונקציה $s(x) = -x^2 + 6$ שייכת למשפחה? נמק

8. א) שער מהי משפחת פונקציות השטח $s(x)$, המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = -3x^2 + 8$, ציר x, אנך לציר x בנקודה נתונה ואנך בנקודה כללית $(x, 0)$ על המשך הציר.
(מדובר בתחום בו $f(x)$ חיובית).



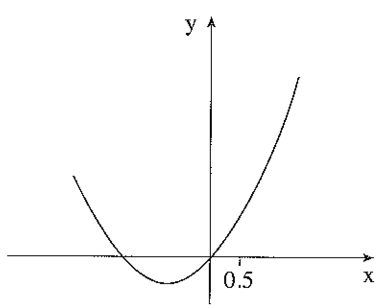
ב) גזור ובדוק אם קיבלת את $f(x)$.

ג) רשום שתי פונקציות השייכות למשפחה.

9. א) שער מהי משפחת הפונקציות $s(x)$, המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x) = 3x^2 + 2x$, אנך בנקודה נתונה כלשהי ואנך בנקודה כללית $(x, 0)$. (בתחום $x > 0$).

ב) גזור ובדוק אם קיבלת את $f(x)$.

ג) רשום שתי פונקציות השייכות למשפחה.



ד) העבר אנך לציר x בנקודה $(\frac{1}{2}, 0)$ וצבע את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, האנך ששרטטת ואנך לציר בנקודה כללית $(x, 0)$.

איך מוצאים את המשפחה S.

כפי שראית בסעיפים הקודמים $s'(x) = f(x)$. כלומר, כדי למצוא את משפחת פונקציות השטח $s(x)$, יש למצוא משפחת פונקציות שכשנגזור אותה נקבל את $f(x)$. בסעיף הקודם שיערת מהי משפחת הפונקציות, על פי הפונקציה הנתונה $f(x)$, ובדקת על ידי גזירה. בסעיף זה ניעזר בשיטה זו, של השערה ובדיקה, כדי למצוא פונקציות שהנגזרות שלהן נתונות, וכדי למצוא כללים למציאת פונקציות כאלה.

בשלב זה נעסוק במציאת פונקציות על פי הנגזרת שלהן, **גם ללא קשר לחישובי שטח**, לכן גם לא נצטמצם לתחומים בהם ערכי הפונקציה חיוביים.

1. א) רשום את משפחת הפונקציות $s(x)$ שהנגזרת שלהן $f(x) = 2x + 1$.
   ב) רשום פונקציה השייכת למשפחה, וגזור אותה. האם קיבלת את $f(x)$?

> פונקציה $s(x)$, המוגדרת בתחום רציף, והנגזרת שלה שווה ל- $f(x)$, נקראת פונקציה קדימה של $f(x)$.

2. סמן את הטענות הנכונות ובדוק בעזרת גזירה.
   א) אם $f(x) = 3x^2$, אז $s(x) = x^3$ היא פונקציה קדימה של $f(x)$.
   ב) אם $f(x) = x^2$, אז $s(x) = \frac{x^3}{3} + 10$ היא פונקציה קדימה של $f(x)$.
   ג) אם $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, אז $s(x) = x^3 + x$ היא פונקציה קדימה של $f(x)$.
   ד) אם $f(x) = x^3$, אז $s(x) = x^4$ היא פונקציה קדימה של $f(x)$.
   ה) אם $f(x) = x$, אז $s(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ היא פונקציה קדימה של $f(x)$.
   ו) אם $f(x) = x$, אז $s(x) = \frac{x^2}{2} + c$ היא משפחת הפונקציות הקדימות של $f(x)$. (c מספר כלשהו.)

3. סמן את הטענות הנכונות ובדוק בעזרת גזירה.

נתון: $f(x) = 3x^2 + 2x$

א) הפונקציה $s(x) = x^3 + x^2$ היא פונקציה קדימה של $f(x)$.

ב) הפונקציה $s(x) = x^3 + 4$ היא פונקציה קדימה של $f(x)$.

ג) הפונקציה $s(x) = x^3 + x^2 + x$ היא פונקציה קדימה של $f(x)$.

ד) הפונקציה $s(x) = x^3 + x^2 + 4$ היא פונקציה קדימה של $f(x)$.

4. א) מהי משפחת הפונקציות הקדימות לפונקציה $f(x) = x$?
רשום פונקציה מהמשפחה, גזור ובדוק.

ב) מהי משפחת הפונקציות הקדימות לפונקציה $f(x) = x^2$?
רשום פונקציה מהמשפחה, גזור ובדוק.

ג) מהי משפחת הפונקציות הקדימות לפונקציה $f(x) = x^3$?
רשום פונקציה מהמשפחה, גזור ובדוק.

ד) מהי משפחת הפונקציות הקדימות לפונקציה $f(x) = x^4$?
רשום פונקציה מהמשפחה, גזור ובדוק.

ה) מהי משפחת הפונקציות הקדימות לפונקציה $f(x) = x^{12}$?
רשום פונקציה מהמשפחה, גזור ובדוק.

ו) מהי משפחת הפונקציות הקדימות לפונקציה $f(x) = x^{14}$?
רשום פונקציה מהמשפחה, גזור ובדוק.

את הכלל שמצאת בתרגיל 4 אפשר לרשום באופן כללי:
משפחת הפונקציות הקדימות של הפונקציה $f(x) = x^n$ n טבעי
היא: $s(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$

ז) מהי משפחת הפונקציות הקדימות לפונקציה $f(x) = x^{47}$

נתון נוסף יכול לעזור לנו למצוא פונקציה מסויימת מתוך המשפחה, (כלומר למצוא את c). נראה זאת בתרגיל הבא.

5. משפחת הפונקציה הקדימות של הפונקציה $f(x) = 4x^3$ היא $s(x) = x^4 + c$

א) ידוע כי $s(2) = 0$.

כלומר, כאשר $x = 2$ ערך הפונקציה $s(x)$ הוא 0.

$$s(x) = x^4 + c$$

נציב $x = 2$ ו $s(x) = 0$: $\quad 0 = 2^4 + c$

השלם. $\quad c =$

רשום את הפונקציה: $\quad s(x) =$

ב) מצא את c אם $s(1) = 0$, ורשום את הפונקציה.

ג) מצא את c אם $s(3) = 2$, ורשום את הפונקציה.

ד) רשום פונקציה מהמשפחה $s(x)$ אם ידוע שהגרף שלה עובר דרך $(0, 12)$.

כללים למציאת פונקציות קדימות

6. לכל אחת מהפונקציות הבאות רשום את משפחת הפונקציות הקדימות. גזור ובדוק.

א) $f(x) = 3x^3$

ב) $f(x) = 6x^2$

ג) $f(x) = 5x^2$

ד) $f(x) = -x^3$

אם קיבלת, לאחר שבדקת, את הפונקציה $f(x)$ הרי שפעלת על פי הכלל הבא:

אם $s(x)$ פונקציה קדימה של $f(x)$, אז אם נכפול את $f(x)$ במספר כלשהו, גם $s(x)$, משפחת הפונקציות הקדימות, תוכפל באותו מספר.

עבור פונקציות חזקה נקבל: אם $f(x) = \boxed{k} \cdot x^n$ (n טבעי)

אז $\quad s(x) = \boxed{k} \cdot \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

7. לכל אחת מהפונקציות הבאות, רשום את משפחת הפונקציות הקדימות, גזור ובדוק.

א) $f(x) = 3x^2 + 2x$
ב) $f(x) = x^2 + x$
ג) $f(x) = 4x^3 + 6x$
ד) $f(x) = 3x^2 + 2$
ה) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

אם קיבלת, לאחר שגזרת, את הפונקציה $f(x)$ הרי שפעלת על פי הכלל הבא:

משפחת הפונקציות הקדימות לסכום של פונקציות, שווה לסכום הפונקציות הקדימות.

8. רשום את משפחת הפונקציות $s(x)$, הקדימות לפונקציה $f(x) = 6x^2 - 2x$, גזור ובדוק.

א) ידוע כי פונקציה מהמשפחה עוברת דרך הנקודה $(0, 3)$ רשום אותה.
ב) מצא את c אם $s(2) = 0$, ורשום את הפונקציה.
ג) מצא את c אם $s(-2) = 0$, ורשום את הפונקציה.
ד) מצא את c אם $s(1) = 3$, ורשום את הפונקציה.

תרגילים

9. מצא את משפחת הפונקציות הקדימות לכל אחת מהפונקציות הנתונות.

א) $f(x) = x^{12}$
ב) $f(x) = x^{20}$
ג) $f(x) = x^7$
ד) $f(x) = 6$
ה) $f(x) = x^5$
ו) $f(x) = x^{19}$
ז) $f(x) = 1$
ח) $f(x) = 0$

10. מצא את משפחת הפונקציות הקדומות לכל אחת מהפונקציות הנתונות.

א) $f(x) = 4x^2$
ב) $f(x) = 6x^3$
ג) $f(x) = 6x^5$
ד) $f(x) = 5x^9$
ה) $f(x) = 10x$
ו) $f(x) = x + 3x^2$
ז) $f(x) = 6x^2 + x$
ח) $f(x) = x^3 + x^2 + x$
ט) $f(x) = 2x + 3$
י) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

11. מצא את משפחת הפונקציות הקדומות לכל אחת מהפונקציות הנתונות.

א) $f(x) = 2x$
ב) $f(x) = 2x + 1$
ג) $f(x) = x^2$
ד) $f(x) = x^2 + 2$
ה) $f(x) = x^2 + 2x$
ו) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
ז) $f(x) = 8x^3 - 2$
ח) $f(x) = 8x^3 + 2x$
ט) $f(x) = 8x^3 + 2x - 1$
י) $f(x) = 4$

12. א) משפחת הפונקציות הקדומות לפונקציה $f(x) = 6x^2 + 4x$ היא $s(x) = 2x^3 + 2x^2 + c$. גזור ובדוק.

ב) ידוע כי $s(1) = 0$. כלומר, כאשר $x = 1$ ערך הפונקציה $s(x)$ הוא 0.
מצא את c ורשום את הפונקציה.

ג) מצא את c אם $s(2) = 0$, ורשום את הפונקציה.

ד) מצא את c אם $s(-1) = 0$, ורשום את הפונקציה.

ה) רשום פונקציה נוספת השייכת למשפחה, וחותכת את ציר y בנקודה $(0\ ,\ 10)$.

ו) במה נבדלים הגרפים של הפונקציות $s(x)$ שקיבלת בסעיפים ב', ג' ו-ד'?

13. א) מהי משפחת הפונקציות הקדומות לפונקציה $f(x) = x^2 + 2x + 1$?
$s(x) =$

ב) ידוע שגרף של פונקציה מהמשפחה עובר דרך הנקודה $(0, 4)$.
רשום את חוק הפונקציה.

ג) ידוע שגרף של פונקציה אחרת מהמשפחה עובר דרך $(3, 0)$.
מצא את c , ורשום את חוק הפונקציה.

ד) ידוע שגרף של פונקציה שלישית מהמשפחה עוברת דרך $(1, 2)$.
מצא את c ורשום את חוק הפונקציה.

ה) ידוע שפונקציה אחרת מהמשפחה מקיימת $s(4) = 0$.
מצא את c, ורשום את חוק הפונקציה.

סימונים ושמות

אם $s'(x) = f(x)$ אז $s(x)$ זו משפחת הפונקציות הקדימות של $f(x)$.

קיים סימון ישיר בעזרת $f(x)$ למשפחת הפונקציות הקדימות $s(x)$, והוא:

$s(x) = \int f(x)\mathbf{dx}$ (רושמים dx מסיבות מתמטיות שלא נפרט כאן).

נקרא זאת: "האינטגרל הלא מסוים של הפונקציה $f(x)$".

הסימון $\int \square \cdot dx$ משמש לסימון משפחת הפונקציות הקדימות $s(x)$.

למשל, כדי לסמן ש $s(x) = 2x^4 + c$ היא משפחת הפונקציות הקדימות של $f(x) = 8x^3$ רושמים: $\int 8x^3dx = 2x^4 + c$

1. מצא את האינטגרלים:

דוגמה: $\int (x^2 + 3)dx = \frac{x^3}{3} + 3x + c$

א) $\int 3x^2\,dx$

ב) $\int (3x^2 + 4)dx$

ג) $\int (6x^3 + 2x)dx$

ד) $\int (6x^4 + 2x + 1)dx$

ה) $\int (8x^3 + x)dx$

ו) $\int (9x^2 + x + 4)dx$

ע"י 2. בדוק על ידי גזירה וסמן נכון או לא. (תוכל לרשום תחילה מספר כרצונך במקום c.)

א) $\int (x^2 + x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$

ב) $\int (3x^2 + 4)dx = x^3 + 4x + c$

ג) $\int x^2dx = 2x + c$

ד) $\int (2x + 1)dx = x^2 + c$

3. א) השתמש בסימן האינטגרל ומצא את משפחת הפונקציות הקדימות לפונקציה $f(x) = x^3$.

ב) רשום ומצא את האינטגרל הלא מסוים של הפונקציה $f(x) = x^4 + 3x^3$.

ד) השתמש בסימן האינטגרל ומצא את משפחת הפונקציות הקדימות לפונקציה $f(x) = -x^3 + 2x + 1$.

4. א) ידוע כי $s'(x) = 4x + 7$. מצא את משפחת הפונקציות הקדימות $s(x)$.

ב) מצא את $s(x)$ אם ידוע שהגרף של s עובר דרך $(0, 1)$.

5. מאחר שתחום הפונקציה חייב להיות רציף, יש להתייחס במציאת האינטגרל הבא רק לאחד משני התחומים: $0 < x$ או $x < 0$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{לכן} \quad \int \left(\frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} + c$$

בדוק על ידי גזירה וסמן נכון או לא.

א) $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + c$

ג) $\int \left(\frac{1}{x^2} + 4\right) dx = -\frac{1}{x} + 4x + c$

ב) $\int \left(3 - \frac{5}{x^2}\right)dx = 3x + \frac{5}{x} + c$

ד) $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = x + \frac{1}{x^2} + c$

6. בצע את החילוק ומצא את האינטגרל.

דוגמה: $\int \frac{2x^2 + 3}{x^2}dx = \int \left(2 + \frac{3}{x^2}\right)dx = 2x - \frac{3}{x} + c$

א) $\int \frac{2 - 3x^4}{x^2}dx$

ג) $\int \frac{5x + 2x^3}{x^2}dx$

ב) $\int \frac{x^4 - x}{x^3}dx$

ד) $\int \frac{5x^4 + x^3}{x^2}dx$

7. לכל $x > 0$ $\quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ לכן $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + c$

חשב ובדוק על ידי גזירה.

א) $\int 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

ב) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

ג) $\int \frac{4}{\sqrt{x}}dx$

ד) $\int (\frac{6}{\sqrt{x}} + 1)dx$

תרגילים

8. מצא את האינטגרלים.

א) $\int \frac{-1}{x^2}dx$

ב) $\int (\frac{1}{x^2} + x)dx$

ג) $\int (\frac{1}{x^2} + 1)dx$

ד) $\int (\frac{1}{x^2} + x + 1)dx$

ה) $\int \frac{4x^4 - x}{x}dx$

ו) $\int \frac{5}{x^2}dx$

ז) $\int (4 - \frac{3}{x^2})dx$

ח) $\int (\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2})dx$

ט) $\int \frac{x^4 - x}{x^3}dx$

י) $\int \frac{2x^4 - 5x^2}{x^4}dx$

9. א) מצא את משפחת הפונקציות: $s(x) = \int (x^2 - \frac{3}{x^2})dx$

ב) חשב את c אם ידוע כי $s(3) = 0$, ורשום את הפונקציה המתקבלת.

ג) חשב את c אם ידוע כי $s(-1) = 0$, ורשום את הפונקציה המתקבלת.

ד) חשב את c אם ידוע כי $s(2) = 0$ ורשום את הפונקציה המתקבלת.

ה) חשב את c אם ידוע שגרף הפונקציה עובר דרך $(1, 0)$ ורשום את הפונקציה המתקבלת.

ו) חשב את c אם ידוע שגרף הפונקציה עובר דרך $(1, -2)$ ורשום את הפונקציה המתקבלת.

10. א) מצא: $s(x) = \int (x - \frac{4}{x^2})dx$

ב) חשב את c אם ידוע כי $s(4) = 0$.

ג) חשב את c אם ידוע כי $s(10) = 0$.

11. מצא את האינטגרלים.

א) $\int (-\frac{1}{2\sqrt{x}})dx$

ב) $\int \frac{4}{\sqrt{x}}dx$

ג) $\int (\frac{4}{\sqrt{x}} + x)dx$

ד) $\int (\frac{4}{\sqrt{x}} + 3)dx$

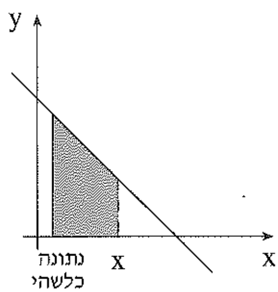
ה) $\int (\frac{6}{\sqrt{x}} - 2x + 1)dx$

ו) $\int (\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2})dx$

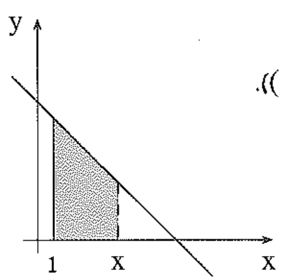
חזרה לחישובי שטחים

1. א) מהי משפחת הפונקציות המתארת את השטח הצבוע כאשר $f(x) = -x + 3$.
רשום בעזרת אינטגרל ומצא את $s(x)$.

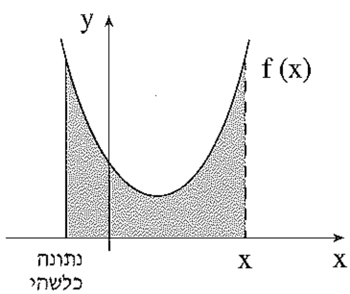
$s(x) =$.



ב) נחזור כעת לשיטת החישוב הקודמת:
בטא את שטח הטרפז (הנקודה הנתונה $(1, 0)$).
השווה עם $s(x)$ שמצאת בסעיף א',
וציין מה ערכו של c במקרה זה.



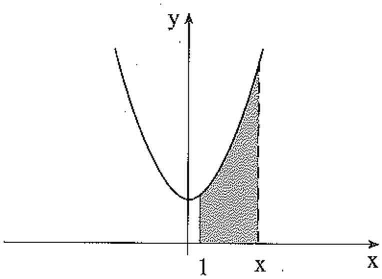
2. מצא את משפחת הפונקציות $s(x)$ המתארת את השטח הצבוע,
אם $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$
(רשום בעזרת אינטגרל).



כאן לא ניתן לחשב את ערכו של c כפי שעשינו בתרגילים הקודמים, כשנעזרנו בשטח טרפז.

בסעיפים הקודמים למדת לחשב את ערכו של c על פי נקודה נתונה על גרף של פונקציה. בסעיף זה תלמד למצוא את c לפי הנקודה על ציר x, ממנה מעבירים את האנך המציין את תחילת חישוב השטח. קביעת ערכו של c מאפשרת חישוב שטח כלוא בין גרף של פונקציה, ציר x ושני אנכים לציר.

3. א) מצא את האינטגרל $\int (3x^2+4)dx$



כלומר: $s(x) =$

ב) אם מחפשים את פונקצית השטח מאנך בנקודה $(1,0)$

אז ידוע כי $s(1) = 0$.

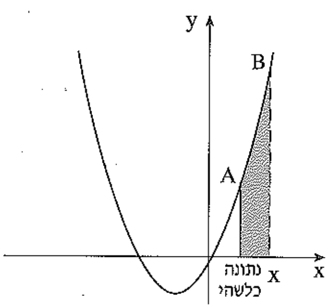
הסבר מדוע.

הצב, מצא את ערכו של c במקרה זה, ורשום את הפונקציה שהתקבלה.

ג) **חשב** את השטח מאנך בנקודה $(1,0)$ עד לאנך בנקודה $(10,0)$.

ד) **חשב** את השטח מאנך הנקודה $(1,0)$ עד לאנך בנקודה $(20,\ 0)$.

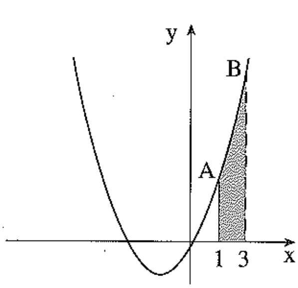
4. א) מצא את האינטגרל $\int (x^2+2x)dx$



ב) מצא את פונקצית השטח מאנך בנקודה $(1,0)$.

(כלומר, $s(1) = \boxed{}$).

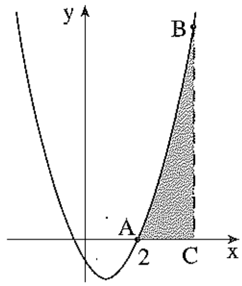
ג) חשב את השטח עד לאנך בנקודה $(3,0)$.



ד) חבר את הנקודות A ו- B וחשב את שטח הטרפז שנוצר.

ה) השווה עם השטח שקיבלת בסעיף ג'.

5. א) מצא את האינטגרל $\int (3x^2 - 5x - 2)dx$.

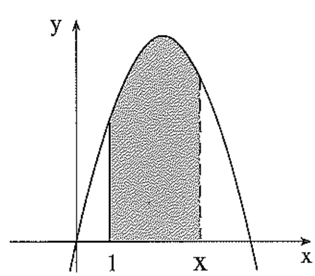


ב) לפניך סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$.
מצא את פונקצית השטח $s(x)$ החל מהנקודה $(2,0)$.
כלומר, $s(2) = 0$. מצא את c ורשום את החוק).

ג) חשב את השטח מהנקודה $(2,0)$ עד אנך בנקודה $(5,0)$.

ד) העבר את **הקטע** AB וחשב את AC , CB ואת שטח ΔABC.
השווה עם השטח שקיבלת בסעיף ג׳ ובדוק אם התוצאות הגיוניות.

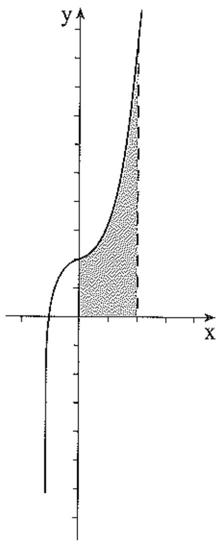
6. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = -x^2 + 6x$
א) מצא פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הצבוע. (מצא אינטגרל, חשב את c, ורשום את פונקצית השטח).



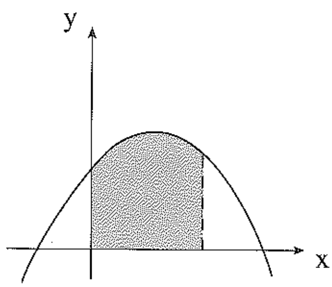
ב) חשב את השטח מאנך בנקודה $(1,0)$ עד לאנך בנקודה $(5,0)$.

ג) חשב את השטח מאנך בנקודה $(1,0)$ עד נקודת החיתוך השניה של הפונקציה עם ציר x.

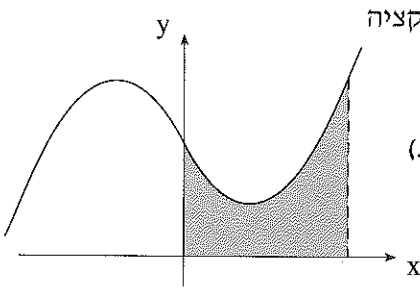
7. א) הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = x^3 + 2$.
מצא פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הצבוע.



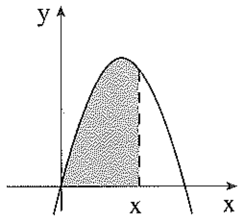
ב) הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = -x^2 + 2x + 3$
מצא פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הצבוע.



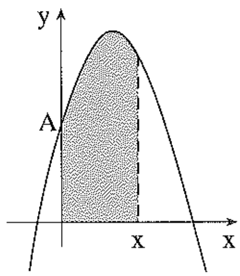
ג) הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = x^3 - 3x + 4$
מצא פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הצבוע (החל מציר y).



8. א) הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = -x^2 + 4x$.
מצא פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הצבוע.

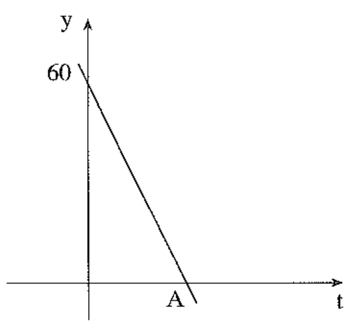


ב) הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = -x^2 + 4x + 5$
מצא פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הצבוע.



ג) העבר מקביל לציר x דרך הנקודה A. סמן את נקודת החיתוך של המקביל והישר המקווקו ב- B. נוצר מלבן, מה שטחו?
מה הקשר בין פונקצית השטח שרשמת בסעיפים בסעיף א׳ ו-ב׳ ושטח המלבן? (כאשר מדובר בשני הסעיפים, באותו ערך של x.)

9. הפונקציה $v(t)$ מתארת מהירות של כדור הנזרק כלפי מעלה.
$v(t) = -10t + 60$, t הזמן מרגע הזריקה.

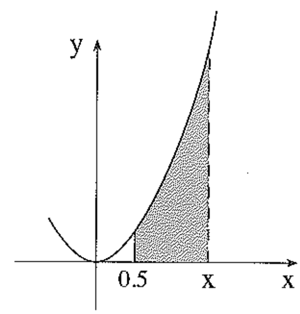


א) הסבר מדוע הפונקציה יורדת.
ב) כפי שראית בתחילת הנושא אינטגרלים, אם הפונקציה מתארת מהירות, אז השטח "הכלוא" מתאר את המרחק.
מצא את פונקצית המרחק $s(t)$.
(הסבר מדוע $s(0) = 0$ והיעזר בנתון זה למציאת c.)
ג) מה המרחק שעבר הכדור במשך השניה הראשונה?
ד) מה מתואר בנקודה A?
ה) אחרי כמה שניות הגיע הכדור לגובה מכסימלי? סמן על ציר t.
מהו הגובה המכסימלי?

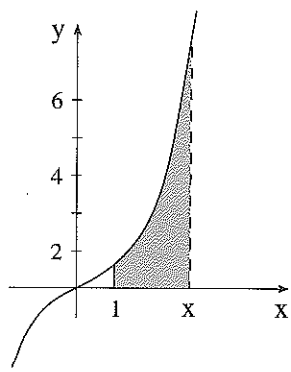
תרגילים

10. מצא את פונקציות השטח בשרטוטים הבאים.

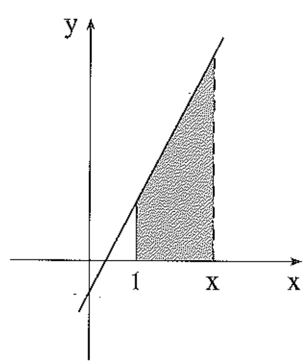
א) $f(x) = x^2$



ב) $f(x) = x^3$

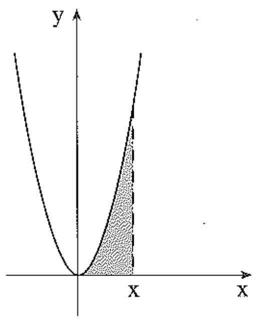


ג) $f(x) = 2x - 1$



ד) חשב את שטח הטרפז הצבוע שבסעיף ג׳ ללא שימוש באינטגרלים, והשווה עם התשובה לסעיף ג׳.

11. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = 3x^2$.



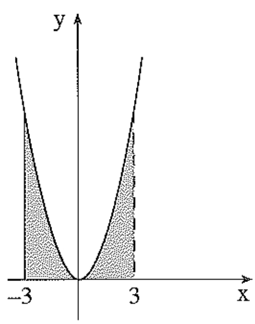
א) מצא פונקציה המתאימה לשטח הצבוע.

ב) חשב את $s(3)$.

איזה שטח מתואר על ידי $s(3)$?

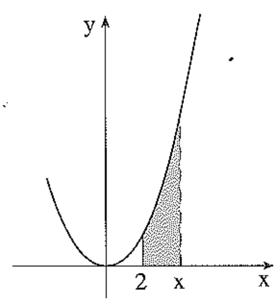
ג) מצא את השטח עד אנך בנקודה $(6, 0)$.

ד) חשב את השטח הצבוע.



12. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה

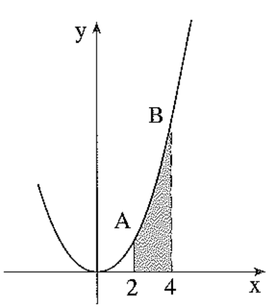
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$



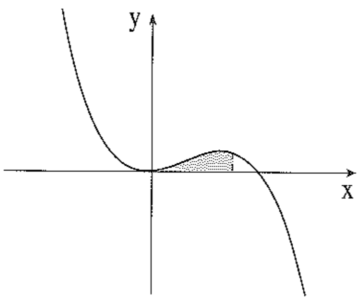
א) מצא פונקציה $s(x)$ המתאימה לשטח הצבוע.

ב) חשב את $s(4)$.

ג) חבר את A ו-B, וחשב את שטח הטרפז שנוצר. האם השטח הצבוע קטן או גדול משטח הטרפז?



13. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = x^2 - x^3$.

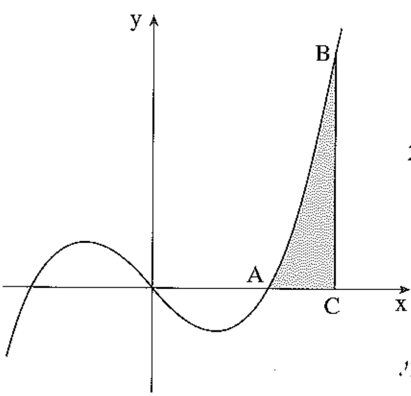


א) מצא פונקציה $s(x)$, המתאימה לשטח הצבוע.

ב) מצא את נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר x.

ג) צבע וחשב את השטח הכלוא בין שתי נקודות החיתוך של הגרף עם ציר x.

14. א) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - x$ עם ציר x.

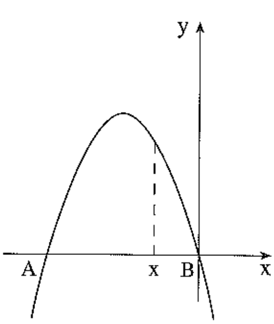


ב) מצא פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הצבוע.

ג) חשב את $s(4)$.

ד) העבר את הקטע AB וחשב את שטח ΔABC (כאשר $x = 4$). השווה עם $s(4)$ שמצאת בסעיף ג׳. האם התוצאות נראות לך הגיוניות?

15. א) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 - 4x$ עם ציר x.



ב) רשום פונקציה $s(x)$ המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x החל בנקודה A, ועד לאנך בנקודה כללית $(x, 0)$ שעל המשך הציר.

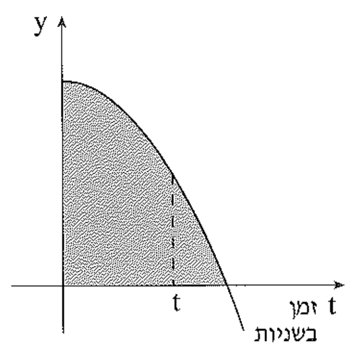
ג) צבע וחשב את השטח הנ״ל מהנקודה A ועד לנקודה B.

16. הפונקציה $v(t)$ מתארת מהירות של מכונית, t שניות לאחר הפעלת המעצורים. $v(t) = 30 - 1.2t^2$ (המהירות נמדדת במטרים לשניה).

א) מה היתה מהירות המכונית ברגע הפעלת המעצורים?

ב) כמה זמן נמשכה העצירה?

רשום ערכים מתאימים בנקודות החיתוך עם הצירים.



ג) מה מתאר השטח הצבוע?

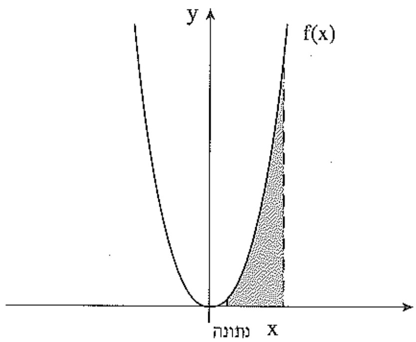
ד) רשום פונקציה שתתאר את השטח הצבוע החל מציר y ועד אנך בנקודה כללית. (מצא אינטגרל וערך מתאים של c.)

ה) חשב את השטח הצבוע.

מה מבטא השטח מבחינת תוכן הבעיה?

ייעול בחישובי שטח

1. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = 3x^2$.

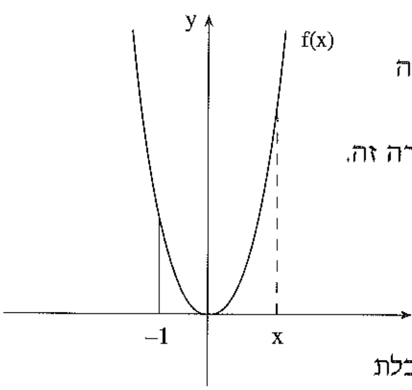


א) רשום את משפחת הפונקציות $s(x)$ המתארת את השטח הצבוע.

ב) אם מחשבים את השטח החל מאנך בנקודה $(1,0)$ אז $s(1) = 0$.
הצב, מצא את ערכו של c ורשום את $s(x)$ במקרה זה.

ג) מצא את c אם מחשבים את השטח מאנך לציר x בנקודה $(0.5,0)$.
רשום את $s(x)$ במקרה זה.

ד) שרטט את השטח מאנך לציר x בנקודה $(-1,0)$, ועד לאנך בנקודה כללית $(x,0)$ על המשך הציר.
מצא את c ורשום את $s(x)$ במקרה זה.



ה) רשום את שלוש הפונקציות שקיבלת בסעיפים ב', ג' ו-ד'.

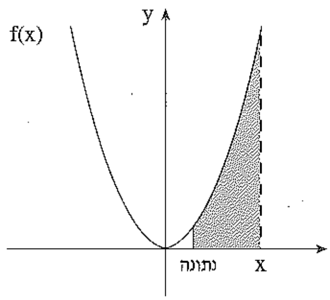
$s(x) =$

$s(x) =$

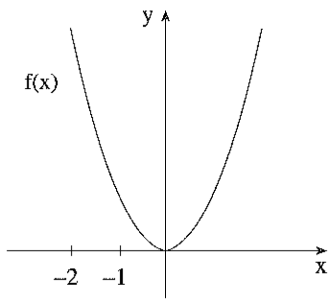
$s(x) =$

מה תוכל לומר על הגרפים שלוש הפונקציות?

2. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = x^2$



א) רשום את משפחת הפונקציות $s(x)$
המתארת את השטח הצבוע.

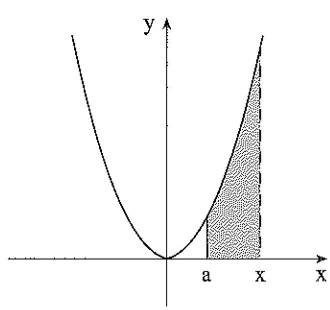


ב) שרטט את השטח מאנך לציר x
בנקודה $(-2, 0)$, ועד לאנך בנקודה
כללית $(x, 0)$ על המשך הציר.
מצא את c ורשום את $s(x)$ במקרה זה.

ג) מצא את c אם מחשבים את השטח
מאנך לציר x בנקודה $(2, 0)$.
רשום את $s(x)$ במקרה זה. שרטט.

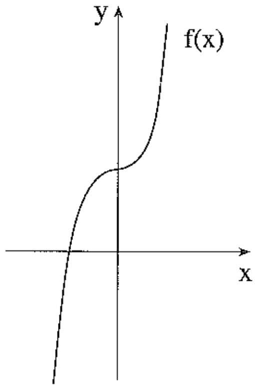
ד) הראה כי אם מחשבים את השטח מאנך לציר x בנקודה $(a , 0)$,

אז $c = \frac{a^3}{3}$.



במקרה זה, משפחת הפונקציות היא מהצורה: $s(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

3. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = x^3 + 3$.



א) מצא את משפחת הפונקציות $s(x)$:

$$s(x) = \int (x^3 + 3)dx$$

ב) מצא את c כאשר מחשבים את השטח מאנך בנקודה $(1, 0)$ ועד נקודה כללית $(x, 0)$ על המשך הציר.
צבע שטח מתאים בגרף.

ג) מצא את c אם מחשבים את השטח מאנך לציר x בנקודה $(-1, 0)$.
רשום את $s(x)$ במקרה זה.

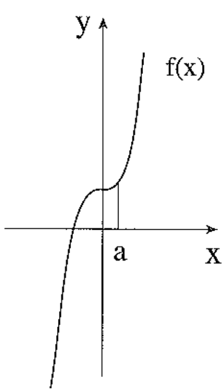
ד) מצא את c כאשר מחשבים את השטח מציר y.

ה) בטא את c כאשר מחשבים את השטח מאנך בנקודה $(a, 0)$. (כל השטח מעל ציר x.)
רשום מחדש את $s(x)$ (בעזרת a).

ו) הצב $a = 1$ והשווה לתוצאה שקיבלת בסעיף ב'.

4. א) נתונה משפחת פונקציות **שטח**: $s(x) = 2x^4 + c$
בטא את c בעזרת a, אם חישוב השטח הוא מאנך בנקודה $(a, 0)$.
ורשום את משפחת הפונקציות $s(x)$ בעזרת a.

5. אם $f(x) = 4x^3 + 1$, אז $s(x) = x^4 + x + c$.



א) בדוק על ידי גזירה.

ב) בטא את c בעזרת a, אם חישוב השטח הוא מאנך בנקודה $(a , 0)$.

ג) רשום את $s(x)$ אם $a = 2$.

ד) רשום את $s(x)$ אם $a = -2$.

ה) רשום את $s(x)$ אם צריך למצוא את השטח מציר y.

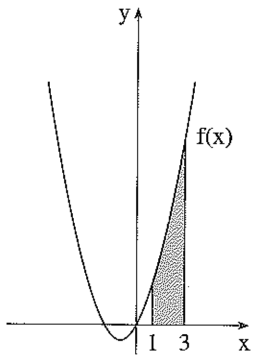
ו) מה הקשר בין הגרפים של הפונקציות $s(x)$ שקיבלת בסעיפים ג', ד' ו-ה'?

6. משפחת פונקציות השטח המתאימה לפונקציה $f(x)$ המשורטטת היא: $s(x) = x^3 + x^2 + c$

(א) בטא את c (בעזרת a) אם מחשבים את השטח מאנך לציר x בנקודה $(a, 0)$ ורשום את $s(x)$.

(ב) רשום את הפונקציה אם $a = 1$.

(ג) חשב את השטח הצבוע.

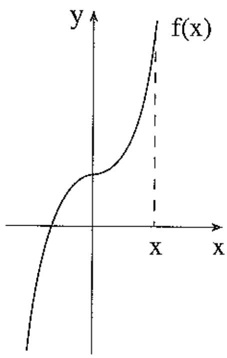


תרגילים

7. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = 2x^3 + 2$.

א) מצא את משפחת פונקציות השטח $s(x)$.

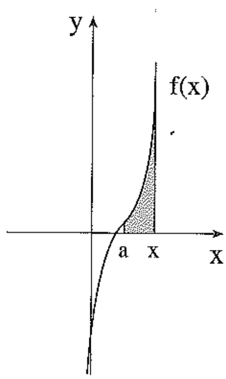
ב) - חשב את c אם מחשבים את השטח מאנך בנקודה $(1, 0)$.
- חשב את c אם מחשבים את השטח מהנקודה $(-1, 0)$.
- חשב את c אם מחשבים את השטח מציר y.



8. משפחת פונקציות **השטח** המתאימה לפונקציה $f(x)$ שבשרטוט, היא:

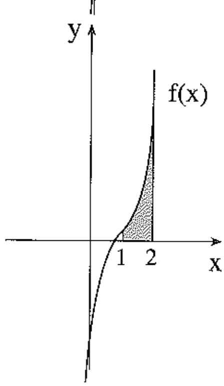
$$s(x) = (2x - 1)^4 + c$$

א) בטא את c, בעזרת a, אם מחשבים את השטח מאנך בנקודה $(a , 0)$ ורשום את $s(x)$.

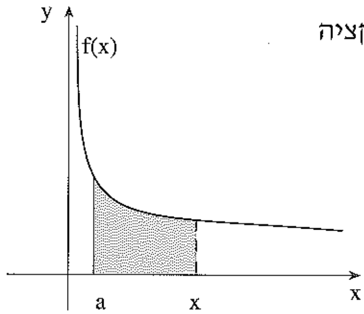


ב) רשום את הפונקציה אם $a = 1$.

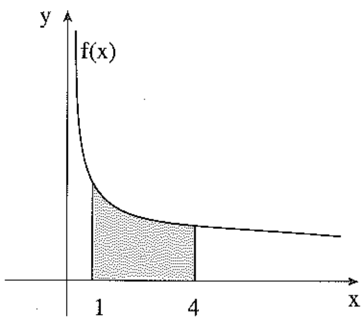
ג) חשב את השטח הצבוע.



9. משפחת פונקציות **השטח** המתאימה לפונקציה $f(x)$ שבשרטוט היא $s(x) = \sqrt{x} + c$.

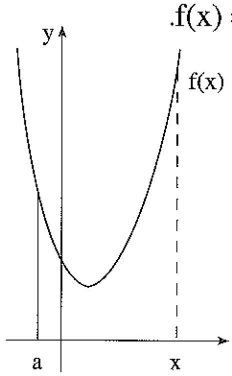


א) בטא את c אם מחשבים את השטח הצבוע מאנך בנקודה $(a , 0)$, ורשום את $s(x)$ בעזרת a.



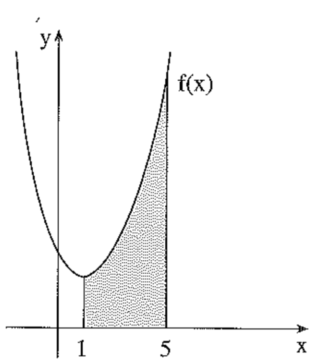
ב) חשב את השטח הצבוע.

10. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = x^2 - 2x + 2$.



א) מצא את משפחת הפונקציות $s(x)$ המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר x, אנך לציר בנקודה נתונה $(a , 0)$ ואנך בנקודה כללית $(x , 0)$ על המשך הציר. (בטא את c בעזרת a.)

ב) השלם: $s(x) =$

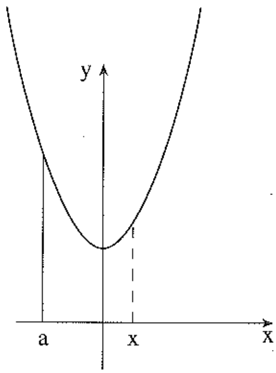


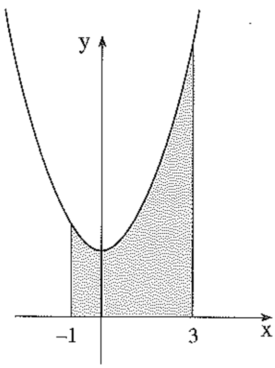
ג) רשום את $s(x)$ אם $a = -1$.

ד) רשום את $s(x)$ אם $a = 1$.

ה) חשב את השטח הצבוע.

עוד ייעול בחישוב





1. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = 3x^2 + 1$.

א) מצא את משפחת פונקציות השטח.

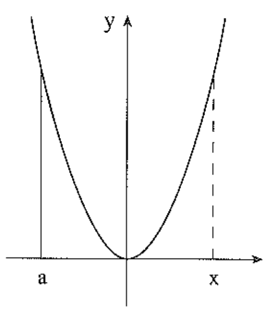
ב) בטא את c אם מדובר בשטח מאנך לציר x בנקודה $(a, 0)$.

השלם: $s(x) =$

ג) רשום את $s(x)$ אם $a = -2$.

ד) רשום את $s(x)$ אם $a = -1$.

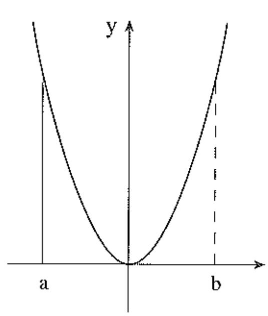
ה) חשב את השטח הצבוע



2. אם $f(x) = 3x^2$, אז משפחת פונקציות השטח היא $s(x) = x^3 + c$.

א) בטא את c בעזרת a, אם מדובר בשטח מאנך לציר x בנקודה $(a , 0)$.

השלם: $s(x) =$

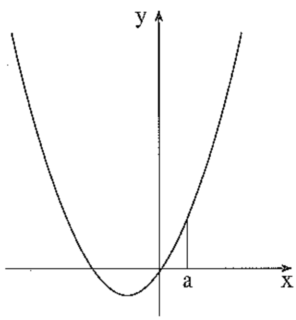


ב) בטא, בעזרת a ו b, את השטח מאנך לציר x בנקודה $(a , 0)$ עד אנך לציר בנקודה $(b , 0)$.

ג) חשב את השטח אם $a = -1$, $b = 3$.

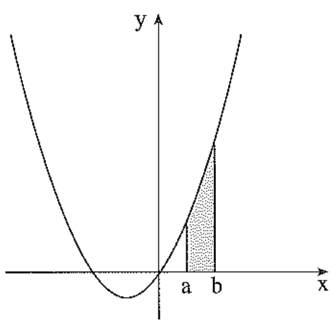
3. אם $f(x) = x^2 + 2x$,

אז $s(x) = \int (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$



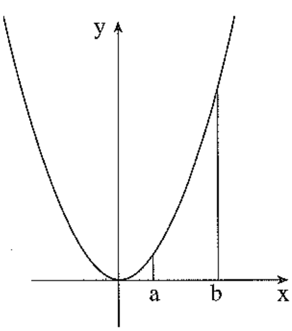
א) בטא את השטח אם מדובר בשטח מאנך בנקודה $(a , 0)$. (בטא תחילה את c בעזרת a.)
השלם:

$s(x) =$



ב) בטא את השטח מאנך בנקודה $(a , 0)$ עד אנך בנקודה $(b, 0)$.

ג) חשב את השטח אם $a = 1$, $b = 4$.

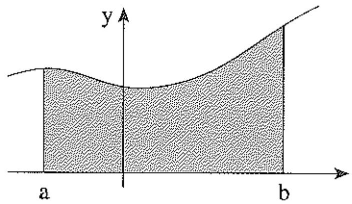


4. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = x^2$

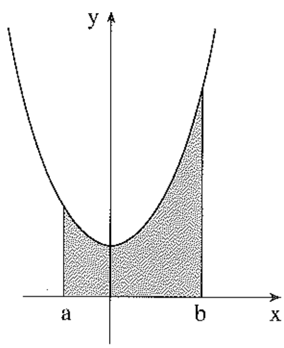
א) מצא: $s(x) = \int x^2 \, dx =$

ב) בטא את השטח מאנך בנקודה $(a, 0)$ עד אנך בנקודה $(b, 0)$.

אם נתונה פונקציה $f(x)$ חיובית בתחום שבו מדובר, אז כדי לקבל את השטח הצבוע, מוצאים פונקציה קדימה, מציבים ומחשבים את ערך הפונקציה הקדימה כאשר $x = b$ ומחסרים ממנו את ערכה כאשר $x = a$.



5. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$.

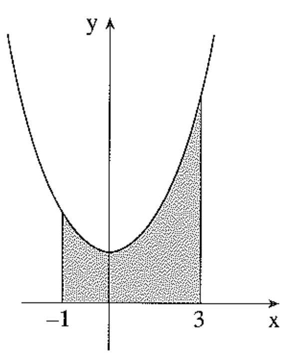


א) מצא: $s(x) = \int (x^2 + 1)dx =$

ב) בטא את השטח מאנך בנקודה $(a\ ,0)$ ועד אנך בנקודה $(b\ ,0)$.

השטח = (   ) - (   )

ג) חשב את השטח הצבוע.



6. נתונה הפונקציה $f(x) = -3x^2 + 3$.

א) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x, וסמן אותן במערכת צירים. האם לפרבולה יש מינימום או מקסימום?
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב) מצא את $\int (-3x^2 + 3)dx =$

ג) בטא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים לציר בנקודות $(a , 0)$ ו- $(b , 0)$.
(a ו- b בתחום בו הפונקציה חיובית).

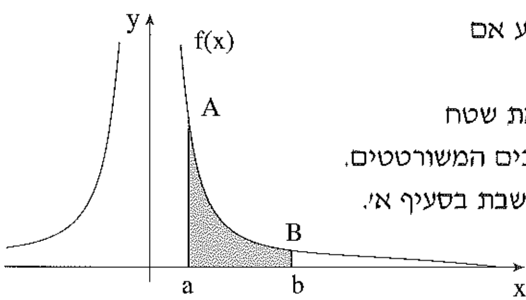
ד) צבע ומצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר x. (בין נקודות החיתוך עם הציר.)

7. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

א) בטא את השטח הצבוע.

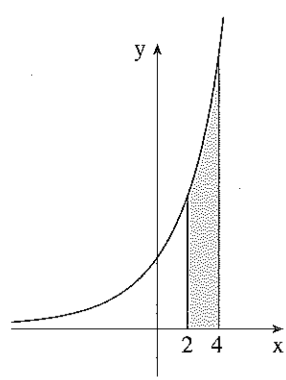
ב) חשב את השטח הצבוע אם $a = 1$ ו- $b = 4$.

ג) חבר את AB, וחשב את שטח הטרפז, שבסיסיו האנכים המשורטטים.
השווה עם השטח שחישבת בסעיף א'.

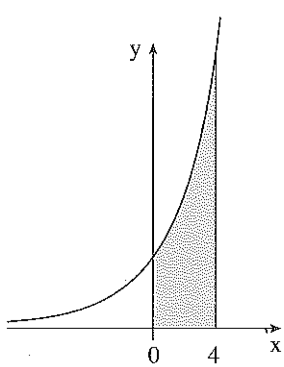


8. הגרפים המשורטטים מתארים את הפונקציה $f(x) = 2e^x$.
חשב את השטח הצבוע.

א)

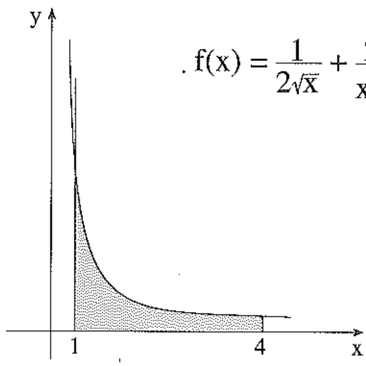


ב)



9. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}$.

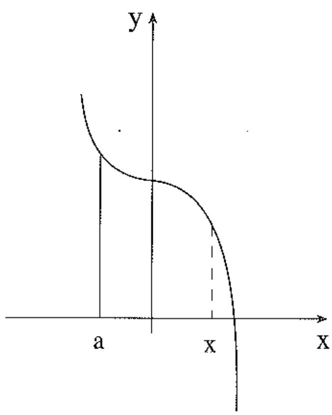
רשום וחשב את השטח הצבוע.



תרגילים

10. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה

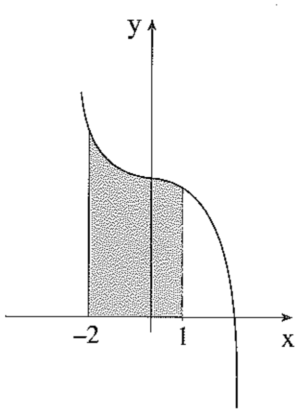
$$f(x) = -2x^3 + 4$$



א) מצא: $s(x) = \int (-2x^3 + 4)dx$

ב) בטא את השטח מאנך בנקודה $(a, 0)$.

ג) בטא את השטח מאנך בנקודה $(a, 0)$ ועד אנך בנקודה $(b, 0)$. (בתחום בו הפונקציה חיובית).

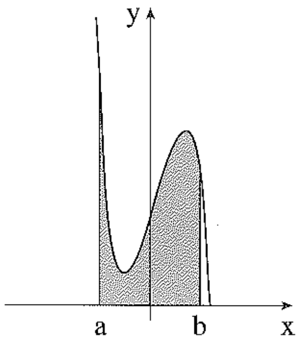


ד) חשב את השטח הצבוע.

11. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = -2x^3 + 4x + 3$.

א) בטא את השטח הצבוע בעזרת a ו-b.
(מצא תחילה אינטגרל).

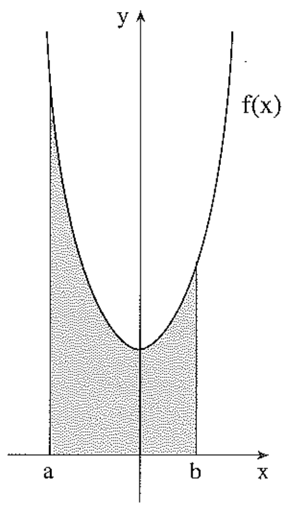
ב) חשב את השטח אם $a = -3$, $b = 1$.



12. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = 3x^2 + 2$

א) בטא את השטח הצבוע בעזרת a ו-b.

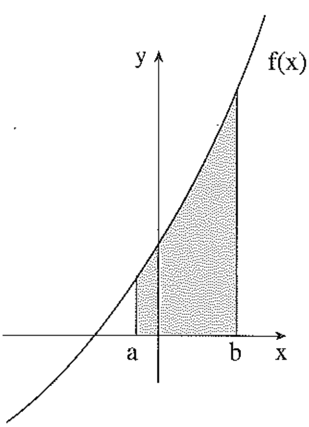
ב) חשב את השטח אם האנכים הם בנקודות
$(0, 0)$ ו- $(1, 0)$.



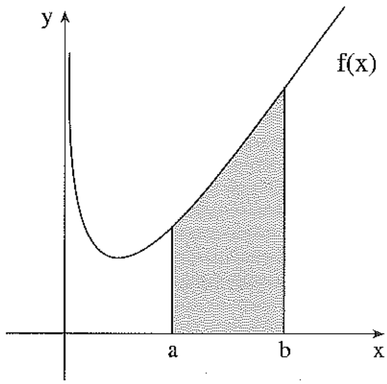
13. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = e^x + x$

א) בטא את השטח הצבוע בעזרת a ו b.

ב) חשב את השטח הצבוע, אם
האנכים הם בנקודות
$(-0.5, 0)$ ו- $(2, 0)$



14. נתון $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x$



א) בטא את השטח הצבוע בעזרת a ו b.

ב) חשב את השטח הצבוע. אם $a = 1$ ו- $b = 4$.

15. א) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 3x$ עם ציר x.

ב) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה וצבע את השטח הכלוא בין הגרף לבין ציר x.

ג) חשב את השטח שצבעת בסעיף ב'.

16. א) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 4$.

ב) שרטט וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, אנך לציר x בנקודה $(-3, 0)$, ואנך לציר x בנקודה $(3, 0)$.

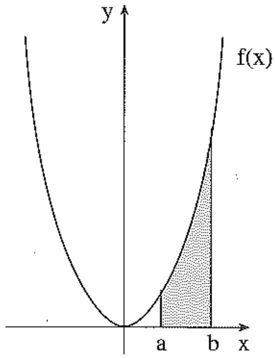
עוד סימונים ומושגים

אם $f(x) = 3x^2$,

אז $s(x) = \int 3x^2dx = x^3 + c$,

והביטוי לשטח הצבוע הוא:

$s(b) - s(a) = b^3 - a^3$



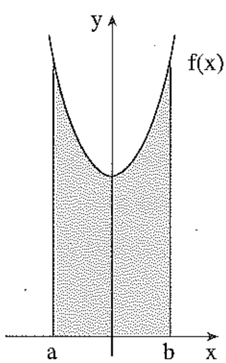
ההפרש בין ערך הפונקציה הקדימה כאשר $x = b$ לערכה כאשר $x = a$

נקרא בשם אינטגרל מסויים מ- a עד b. והוא מסומן $\int_a^b f(x)dx$

1. אם $f(x) = 3x^2 + 2$ נרשום כך:

$$\int_a^b (3x^2 + 2)dx = \left[x^3 + 2x\right]_a^b =$$

$$(b^3 + 2b) - (a^3 + 2a)$$

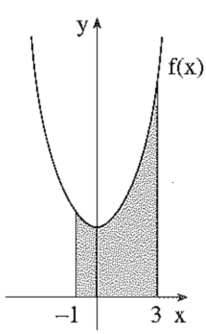


והשטח הצבוע בשרטוט למטה הוא:

$$\int_{-1}^3 (3x^2 + 2)dx = \left[x^3 + 2x\right]_{-1}^3 =$$

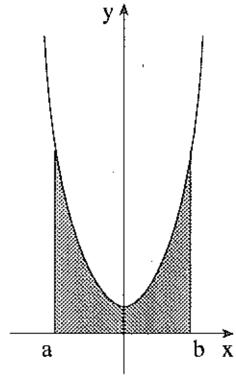
$$= (3^3 + 2 \cdot 3) - ((-1)^3 + 2 \cdot (-1)) =$$

המשך את החישוב.

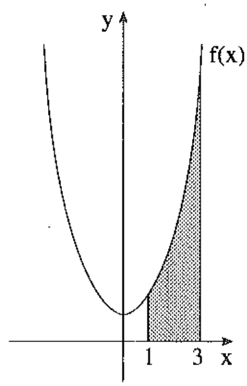


2. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = x^2 + 1$.

א) רשום את השטח הצבוע בעזרת **אינטגרל מסוים** ובטא את $s(b) - s(a)$.

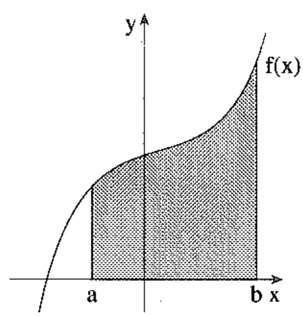


ב) הצב $a = 1$ ו- $b = 3$ וחשב את השטח הצבוע.

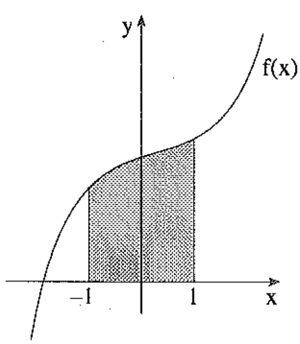


3. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = 2x^3 + 4$.

א) רשום את השטח הצבוע בעזרת **אינטגרל מסוים**, ובטא את $s(b) - s(a)$.

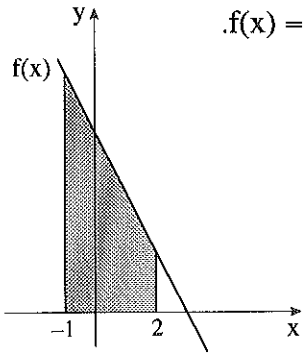


ב) הצב $a = -1$ ו- $b = 1$ וחשב את השטח הצבוע.



(ע"ע)

4. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = -2x + 6$.



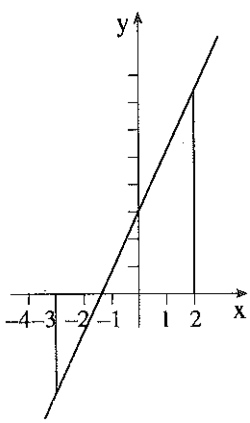
א) רשום את השטח הצבוע בעזרת אינטגרל מסוים, וחשב אותו.

ב) חשב: $\int_0^3 (-2x+6)dx =$

צבע שטח מתאים.

ג) חשב את השטח ללא אינטגרל, ובדוק את תשובתך בסעיף ב'.

5. א) חשב: $\int_{-1.5}^{2} (2x+3)dx$ צבע שטח מתאים.



ב) חשב: $\int_{-3}^{-1.5} (2x+3)dx$

ג) - צבע גם את המשולש שנוצר ברביע השלישי וחשב את שטחי המשולשים הכלואים בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים לציר בנקודות $(-3, 0)$ ו- $(2, 0)$.

- האם המספר שמצאת בסעיף ב' מתאר את השטח החל מאנך בנקודה $(-3, 0)$ ועד לאנך בנקודה $(2, 0)$? נמק.

האינטגרל המסוים מ- a עד b: $\int_a^b f(x)dx$ הוא **מספר** המתאר שטח בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים לציר בנקודות $(a , 0)$ ו- $(b , 0)$, בתנאי שמדובר בתחום בו הפונקציה **חיובית** (הגרף בתחום מעל ציר x).
(לעיתים $(a , 0)$ ו/או $(b , 0)$ הן נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x).

בסעיף הבא תלמד לחשב שטח גם כשמדובר בשטח הנמצא בתחום בו הפונקציה שלילית בכל התחום, או בחלקו.

6. א) חשב: (i $\int_{1}^{3} (4x-2)dx$ (ii $\int_{0}^{3} (4x-2)dx$

ב) מצא נקודות חיתוך של גרף הפונקציה $f(x) = 4x - 2$ עם הצירים, ושרטט את הישר.

ג) איזה מהאינטגרלים שחישבת מתאר את השטח בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים לציר ב״גבולות״ a ו- b הרשומים?

7. א) חשב את האינטגרלים המסויימים הבאים.

(i) $\int_{3}^{5} (x^2 - x - 2)dx$ (iii) $\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx$

(ii) $\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx$ (iv) $\int_{-2}^{1} (x^2 - x - 2)dx$

ב) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - x - 2$ עם ציר x, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג) איזה מהאינטגרלים המסוימים שחישבת, מתאר את השטח בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים לציר ב״גבולות״ הרשומים?

תרגילים

8. חשב את האינטגרלים המסוימים.

א) $\int_{-2}^{4} (4x-2)dx$

ב) $\int_{-2}^{0} (4x-2)dx$

ג) $\int_{0}^{1} (3x^2+2)dx$

ד) $\int_{0}^{3} (x-2)^2dx$

ה) $\int_{0}^{2} (6x^2-4x)dx$

ו) $\int_{0}^{2} (3x^2-x)dx$

ז) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} (-\frac{1}{x^2})dx$

ח) $\int_{1}^{2} \frac{2}{x^2}dx$

ט) $\int_{1}^{2} \frac{x^2-4}{x^2}dx$

י) $\int_{1}^{3} \frac{2x^4+x}{x^3}dx$

יא) $\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

יב) $\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

יג) $\int_{0}^{2} 2e^xdx$

יד) $\int_{-1}^{3} (e^x+1)dx$

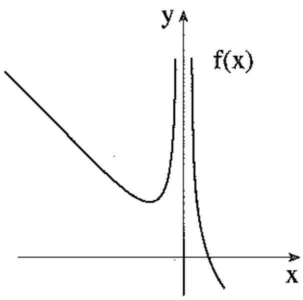
9. א) מצא את נקודות החיתוך של הפרבולה $f(x) = x^2 - 2x - 8$
עם ציר x, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב) חשב את האינטגרלים המסוימים וקבע, לגבי כל אחד, אם הוא מתאר את השטח בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים ב"גבולות" הרשומים.

(i) $\int_0^5 (x^2 - 2x - 8)dx$ (ii) $\int_4^5 (x^2 - 2x - 8)dx$

10. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - x \qquad (x \neq 0)$$



א) מצא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה
עם ציר x.

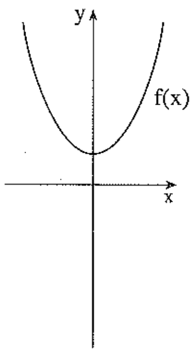
ב) חשב את האינטגרלים המסויימים, וקבע אם הם מתארים את השטח בין גרף הפונקציה, ציר x, ואנכים ב"גבולות" הרשומים.
אם האינטגרלים המסויימים אינם מתארים את השטח הסבר מדוע.

(i) $\int_{0.5}^2 (\frac{1}{x^2} - x)dx$ (iii) $\int_1^2 (\frac{1}{x^2} - x)dx$

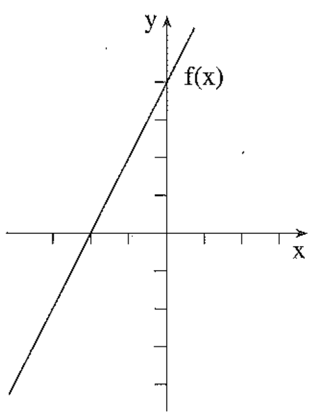
(ii) $\int_{-2}^{-0.5} (\frac{1}{x^2} - x)dx$ (iv) $\int_{-2}^{-1} (\frac{1}{x^2} - x)dx$

ואם גרף הפונקציה מתחת לציר?

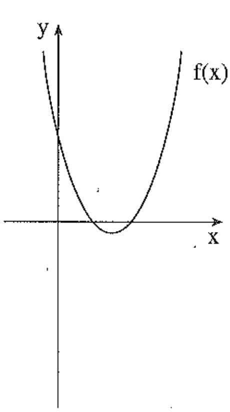
1. א) הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = x^2 + 1$.
שרטט באותה מערכת צירים את גרף
הפונקציה $g(x) = -(x^2 + 1)$.



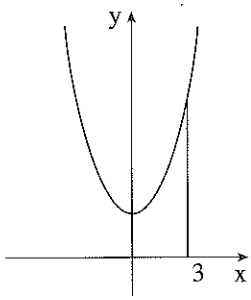
ב) הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = 2x + 4$.
שרטט באותה מערכת צירים את גרף
הפונקציה $g(x) = -2x - 4$.



ג) הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = x^2 - 4x + 3$.
שרטט באותה מערכת צירים את
גרף הפונקציה $g(x) = -x^2 + 4x - 3$.

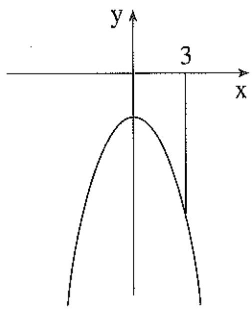


2. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = 3x^2 + 2$.



א) - חשב: $\int_0^3 (3x^2 + 2)dx$

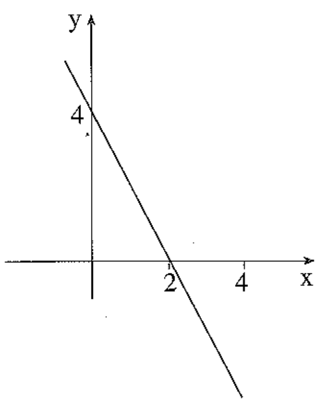
- צבע שטח מתאים.



ב) חשב: $\int_0^3 (-3x^2 - 2)dx$

ג) צבע את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $-f(x)$, ציר x, ואנכים לציר x בנקודות $(0, 0)$ ו- $(3, 0)$. מהו השטח לדעתך?
האם המספר שקיבלת בסעיף ב׳ מייצג את השטח? הסבר.

3. הגרף בשרטוט מתאר את הפונקציה $f(x) = -2x + 4$.



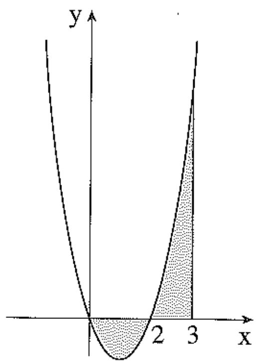
א) חשב: $\int_2^4 (-2x + 4)dx$

ב) סמן בשרטוט את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x, ואנך לציר בנקודה $(4, 0)$. מהו השטח לדעתך?

אם בתחום בו מחשבים את השטח גרף הפונקציה נמצא כולו מתחת לציר x, אז האינטגרל המסויים הוא מספר שלילי. השטח מבוטא בעזרת מספר חיובי, הנגדי לאינטגרל המסוים.

4. א) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x) = 3x^2 - 3$ עם ציר x, ושרטט סקיצה של הגרף.

ב) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, והחלק של ציר x הנמצא בין נקודות החיתוך.



5. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x^2 - 6x$.

א) חשב: $\int_0^3 (3x^2 - 6x)dx$

האם המספר שקיבלת מתאר את השטח הצבוע? הסבר.

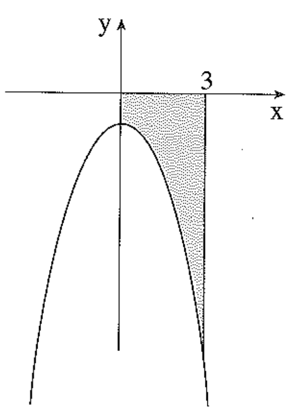
ב) - חשב את $\int_0^2 (3x^2 - 6x)dx$

- מהו השטח הצבוע הכלוא מתחת לציר x?

ג) חשב את השטח הצבוע הכלוא מעל ציר x (בין נקודת החיתוך של הגרף עם הציר ואנך לציר בנקודה $(3, 0)$).

ד) מהו גודל השטח הצבוע כולו? השווה עם תשובתך לסעיף א'.

כדי למצוא שטח הכלוא בין גרף של פונקציה, ציר x, ואנכים לציר x, כאשר חלק מהשטח נמצא מעל לציר וחלק אחר מתחתיו, מחשבים את השטחים בנפרד ומחברים.



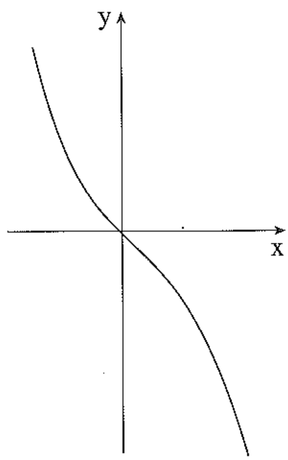
תרגילים

6'. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = -x^2 - 1$.

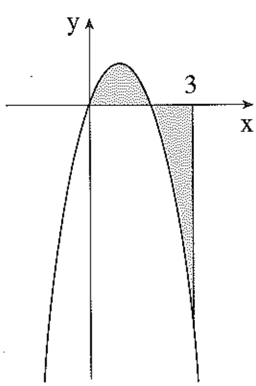
חשב את השטח הצבוע.

7. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 1.5x - 1$, עם ציר x.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
סמן וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, והחלק של ציר x הנמצא בין נקודות החיתוך.

8. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = -x^3 - x$.
סמן וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, החל מראשית הצירים ועד אנך לציר x בנקודה $(2, 0)$.



9. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = -x^2 + 2x$.

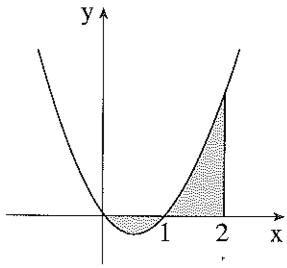


א) האם $\int_0^3 (-x^2 + 2x)dx$ מתאר את השטח הצבוע?

ב) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.

ג) חשב את השטח הצבוע.

10. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה
$f(x) = x^2 - x$.



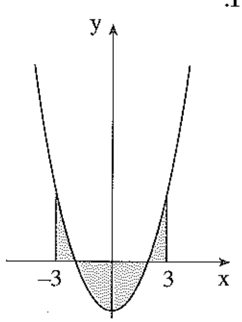
א) חשב את האינטגרל המסויים

$$\int_0^2 (x^2 - x)dx$$

ב) האם המספר שקיבלת מייצג את השטח הצבוע? הסבר.

ג) חשב את השטח הצבוע.

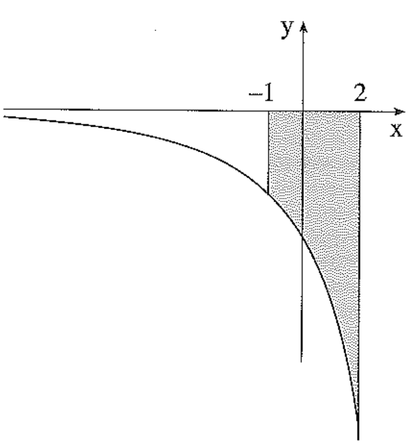
11. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = x^2 - 4$.

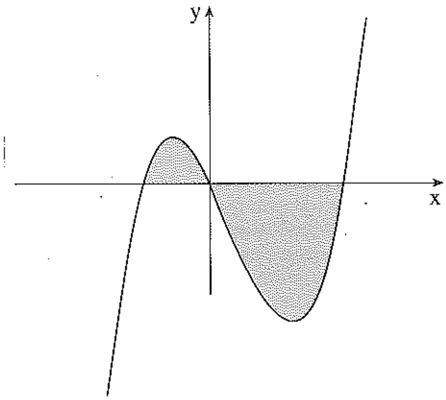


א) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.

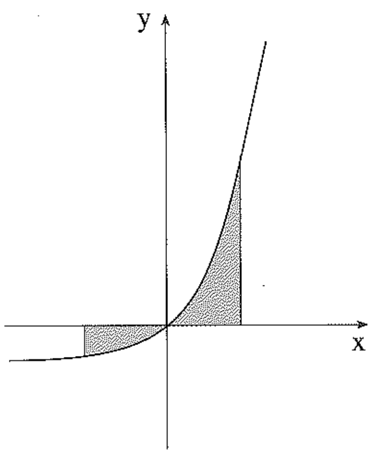
ב) חשב את השטח הצבוע.
הצעה: תוכל לייעל את החישוב, אם תשתמש בשיקולי סימטריה ותמצא תחילה שטחים שווים.

12. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = -5e^x$.
חשב את השטח הצבוע.

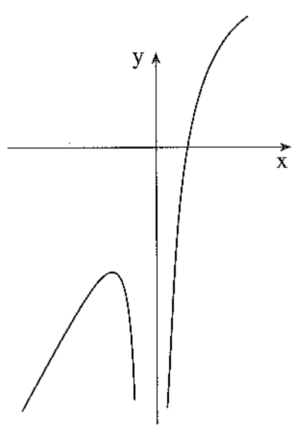




13. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$
חשב את השטח הצבוע.



14. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה $f(x) = e^x - 1$.
חשב את השטח הצבוע.



15. הגרף המשורטט מתאר את הפונקציה

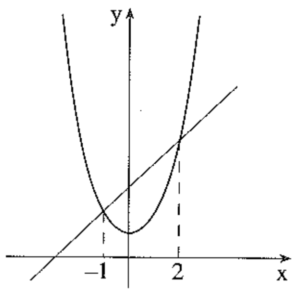
$$f(x) = 2x - \frac{2}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

- מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.
- סמן וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x, אנך לציר x בנקודה $(0.5, 0)$ ואנך לציר x בנקודה $(2, 0)$.

שטח בין גרפים של שתי פונקציות

1. בשרטוט מתוארים גרפים של שתי הפונקציות:

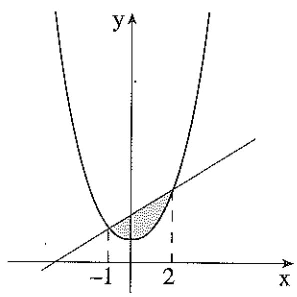
$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = x + 3$$



א) צבע, וחשב את השטח המתואר על ידי

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx$$

ב) צבע בצבע אחר, וחשב שטח המתאר את $\int_{-1}^{2} (x + 3)dx$

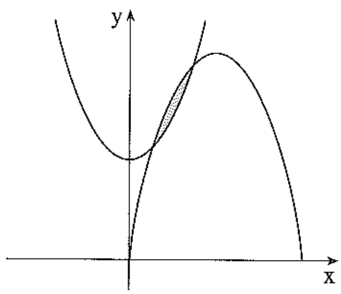


ג) חשב את השטח הצבוע.

2. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות

i) $f(x) = x^2 + 4$.

ii) $g(x) = -x^2 + 6x$.



א) התאם לכל פונקציה את הגרף.
מצא את נקודות החיתוך של שני
הגרפים, והעבר אנכים לציר x
מהנקודות האלה.

ב) רשום בעזרת אינטגרל מסוים את
השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר x, והאנכים שהעברת.
צבע את השטח הזה.

ג) רשום בעזרת אינטגרל מסוים, את השטח הכלוא בין גרף
הפונקציה $f(x)$, ציר x, והאנכים שהעברת. צבע שטח מתאים.

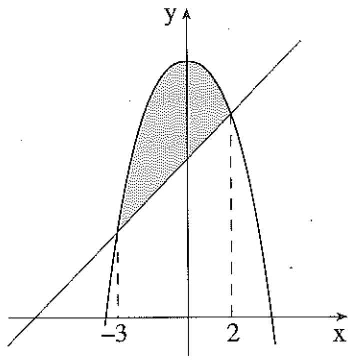
ד) רשום בעזרת הפרש של אינטגרלים, את השטח הצבוע הכלוא בין
הגרפים של שתי הפונקציות.

ה) חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.

3. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות

$f(x) = 14 - x^2$

$g(x) = x + 8$



כשמחשבים את השטח הצבוע, אפשר לחסר את הפונקציות, לפני חישוב האינטגרלים, ובכך לפשט את החישוב.

$$\int_{-3}^{2}(14 - x^2)dx - \int_{-3}^{2}(x + 8)dx = \int_{-3}^{2}\left[(14 - x^2) - (x + 8)\right]dx =$$

פתח סוגריים: $= \int_{-3}^{-2}(\qquad\qquad\qquad)dx =$

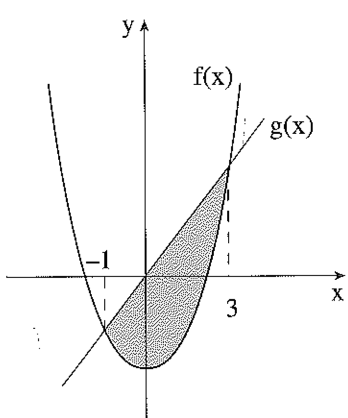
חשב את השטח.

ואם חלק מהגרף מתחת לציר?

4. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 - 3$

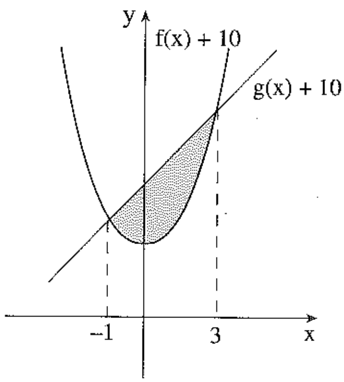
$g(x) = 2x$

יש לחשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות כמשורטט.
החישוב על ידי הפרדה בין השטח שמעל ציר ומתחתיו, וחישוב כל שטח לחוד מסובך.
נראה כיצד אפשר לחשב את השטח בדרך קצרה יותר, (בדומה למה שנעשה בתרגיל 3).



המשך ←

א) נזיז את שני הגרפים למעלה (אותה הזזה) במקביל לציר y , כך שהשטח המבוקש יהיה מעל לציר. למשל ב-10 יחידות.



האם הזזה כזו משנה את השטח?

נקבל פונקציות חדשות:

$$f(x) + 10 = x^2 - 3 + 10$$

$$g(x) + 10 = 2x + 10$$

והשטח:

$$\int_{-1}^{3} (2x + 10\ dx) - \int_{-1}^{3} (x^2 - 3 + 10\ )dx = \int_{-1}^{3} [(2x + 10\ ) - (x^2 - 3 - 10\ )]dx$$

$$\int_{-1}^{3} \left[2x - x^2 + 3\right] dx = \int_{-1}^{3} \left[2x - (x^2 + 3)\right] dx$$

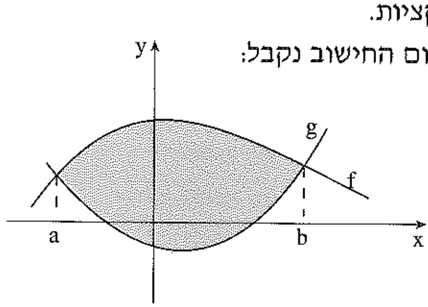
וזהו בדיוק: $\int_{-1}^{3} [g(x) - f(x)]\ dx$

ב) הסבר מה יקרה אם נזיז את הפונקציות 7 יחידות כלפי מעלה?

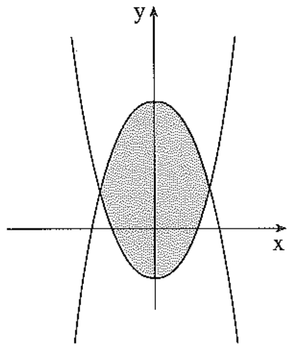
כשמחשבים שטח בין גרפים של שתי פונקציות, מחשבים את האינטגרל המסוים של הפרש הפונקציות.

כאשר f(x) נמצאת מעל g(x) בתחום החישוב נקבל:

$$\int_{a}^{b} \left[f(x) - g(x)\right] dx$$



5. א) מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות:
$f(x) = x^2 - 3$
$g(x) = -x^2 + 5$
וסמן על ציר x.



ב) רשום גבולות לאינטגרל המתאר את השטח הצבוע וחשב אותו.

$$\int [(-x^2 + 5) - (x^2 - 3)]dx$$

6. בשרטוט מתוארים גרפים של שתי פונקציות: פונקציה מסויימת g(x), ופונקציה f(x) המתקבלת על ידי הזזה של g(x) ב 3 יחידות כלפי מעלה.

א) מה תוכל לומר על שטח שתי הצורות הצבועות א', וב'?

ב) מה שטח המלבן? (צורה א').

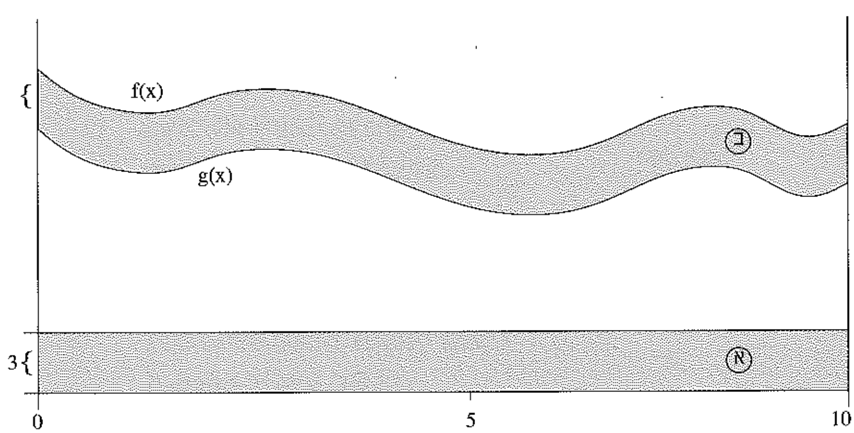
ג) נחשב את שטח צורה ב': $\int_0^{10} [f(x) - g(x)]\,dx$ = שטח צורה ב'.

i) בטא את f(x) בעזרת g(x): $f(x) =$

ii) הצב באינטגרל שלמעלה והמשך לחשב.

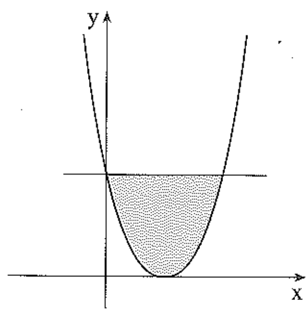
שטח צורה ב' = $\int_0^{10} [f(x) - g(x)]\,dx =$

ד) בדוק את תשובתך לסעיף א'.



תרגילים

7. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:



$$f(x) = (x-2)^2$$

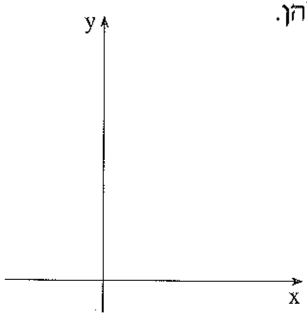
$$g(x) = 4$$

א) חשב את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב) רשום את השטח הצבוע כאינטגרל מסוים של הפרש הפונקציות.
(שים לב לסדר החיסור של הפונקציות).

ג) חשב את השטח הצבוע.

ד) שרטט בערך גרפים המתאימים להזזה של שתי הפונקציות ב- 2 יחידות **כלפי מטה**, ורשום את החוקים שלהן.



$f(x) - 2 =$

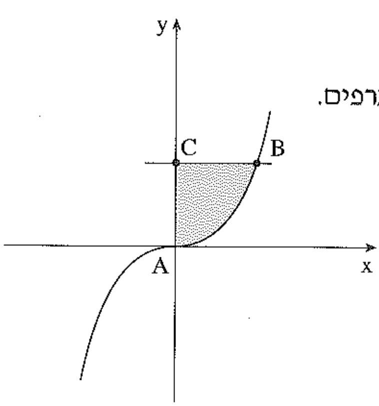
$g(x) - 2 =$

צבע את השטח בין הגרפים.
מהו השטח?

8. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = 1$$



א) חשב את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ב) רשום את השטח הצבוע כאינטגרל מסוים של הפרש הפונקציות.

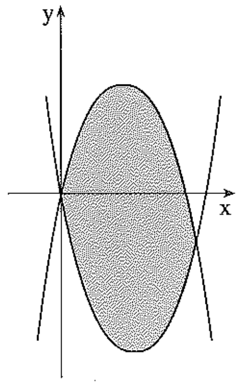
ג) חשב את השטח.

ד) חבר את AB, וחשב את שטח המשולש ABC.
בכמה גדול השטח שמצאת בסעיף ג' משטח משולש ABC?

9. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 6x$$

$$g(x) = -x^2 + 4x$$

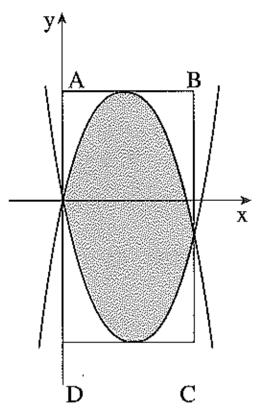


א) התאם לכל פונקציה את הגרף.

ב) חשב את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ג) רשום את השטח כאינטגרל מסוים של הפרש הפונקציות.

ד) חשב את השטח הצבוע.

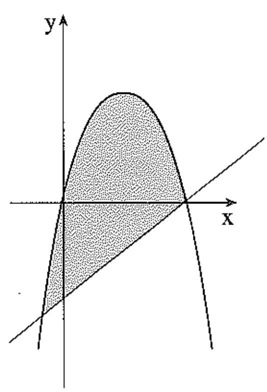


ה) מצא את הקודקודים של שתי הפרבולות,
וחשב את שטח המלבן המשורטט (ABCD).
בכמה קטן השטח שחישבת בסעיף ג׳ משטח
המלבן?

10. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = -x^2 + 6x$$

$$g(x) = x - 6$$



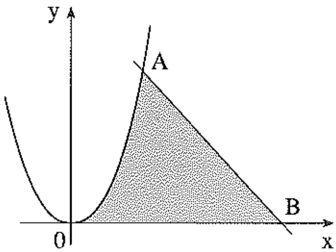
א) חשב את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב) חשב את השטח הצבוע.

קצת על חיבור שטחים

1. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2$

$g(x) = -x + 6$



א) מצא את שיעורי הנקודות A ו- B.

השטח הצבוע הוא צירוף של שני שטחים: שטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר x, ואנך לציר x דרך הנקודה A, ושטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$, ציר x, ואנך לציר x דרך הנקודה A.

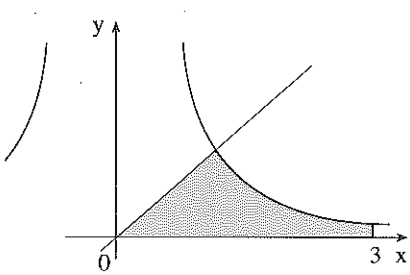
ב) כדי לחשב את השטח הצבוע, העבר אנך מ- A לציר x.

- חשב את השטח הצבוע מראשית הצירים ועד לאנך.
- חשב את השטח הצבוע מהאנך ועד לנקודה B.
- חשב את כל השטח הצבוע.

2. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

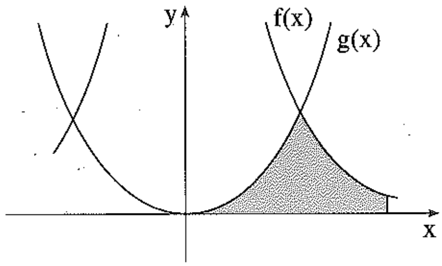
$g(x) = x$

חשב את השטח הצבוע.
(חשב תחילה את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.)



3. חשב את השטח המוגבל בין ציר x, ראשית הצירים, אנך לציר x בנקודה (3,0), והגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$g(x) = x^2$$



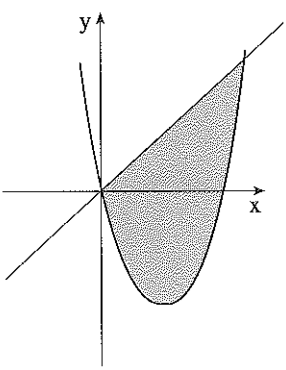
תרגילים

4. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 4x$$
$$g(x) = x$$

א) חשב את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב) חשב את השטח הצבוע.

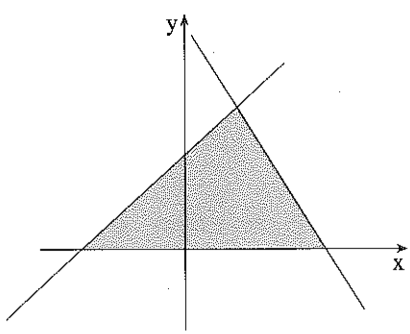


5. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = x + 2$$
$$g(x) = -2x + 5$$

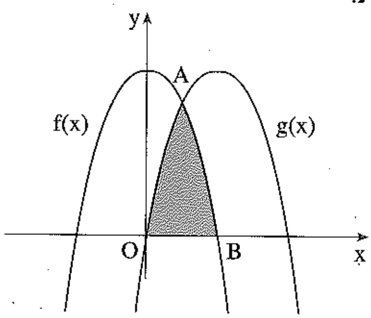
א) התאם גרף לפונקציה וחשב את נקודת החיתוך של הגרפים ואת נקודות החיתוך של כל גרף עם ציר x.

ב) חשב את השטח הצבוע.



6. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = -x^2 + 4$$
$$g(x) = -x^2 + 4x$$



א) חשב את שיעורי הנקודות A ו B.

ב) חשב את השטח הצבוע.

ג) איתן חישב את השטח באופן הבא: $S = 2\int_0^1 (-x^2 + 4)dx$.

חשב ובדוק אם הוא קיבל תוצאה נכונה, והסבר.

ד) חבר את AB ו- AO, חשב את שטח המשולש AOB, והשווה עם השטח שחישבת בסעיף ב'.

7. א) שרטט את הגרפים של הפונקציות:

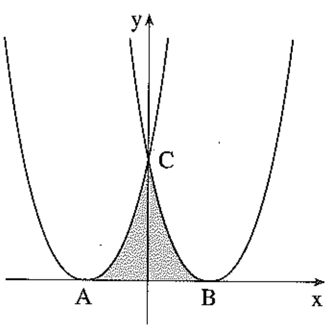
$$f(x) = x^2 - 4x$$
$$g(x) = 2x - 8$$

ב) מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.

ג) סמן וחשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

8. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:

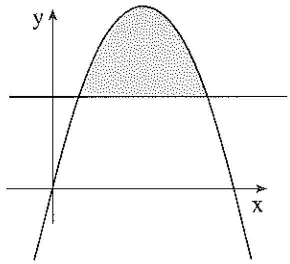
$$f(x) = (x-3)^2$$
$$g(x) = (x+3)^2$$



א) התאם חוק לגרף.

ב) חשב את השטח הצבוע.

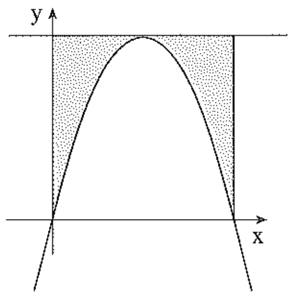
ג) העבר את BC ואת AC, חשב את שטח המשולש ABC, והשווה עם השטח שחישבת בסעיף א'.



9. בשרטוט מתוארים הגרפים של הפונקציות:

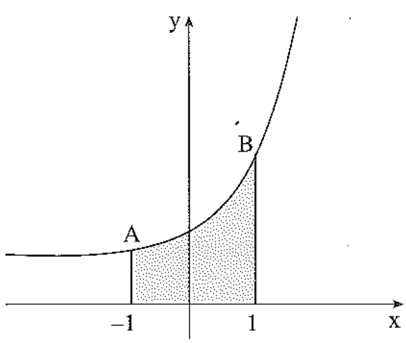
$$f(x) = -x^2 + 4x$$
$$g(x) = 3$$

א) חשב את השטח הצבוע.



ב) בנקודת המקסימום של הפרבולה העבירו ישר מקביל לציר x.
מצא את נקודת המקסימום, ורשום את משוואת הישר המקביל לציר.

ג) חשב את השטח הצבוע.



10. בשרטוט מתואר גרף הפונקציה

$$f(x) = 0.5e^x + 1$$

א) חשב את השטח הצבוע.
ב) העבר את AB.
ג) חשב את שטח הטרפז הנוצר והשווה עם השטח שחישבת בסעיף א'.

אינטגרל של פונקציה מורכבת

אם לא למדת עדיין מהי פונקציה מורכבת ומהי הנגזרת שלה, דלג על סעיף זה כאן. סעיף זה מופיע גם בחוברת אנליזה בסוף הפרק פונקציה מורכבת

1. גזור את הפונקציות.

א) $y = e^{2x+3}$

ב) $y = e^{3x}$

ג) $y = e^{-2x+1}$

ד) $y = e^{-x}$

כל אחת מהפונקציות שבתרגיל 1 היא פונקציה מורכבת מצורה $y = e^{f(x)}$ כאשר $f(x)$ **פונקציה קווית**, ולכן $f'(x)$ קבוע, כלומר מספר. במקרים שמדובר בפונקציה מורכבת כזו נוכל למצוא את האינטגרל שלה.

2. א) $\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$

גזור ובדוק: $\left(\frac{e^{2x}}{2} + c\right)' =$

ב) $\int 3e^{4x-1}dx = \frac{3e^{4x-1}}{4} + c$

גזור ובדוק: $\left(\frac{3 \cdot e^{4x-1}}{4}\right)' =$

ג) מצא: $\int e^{-x+2}\,dx$

גזור את התוצאה שקיבלת ובדוק.

3. מצא את האינטגרלים.

א) $\int e^{-2x}dx$

ב) $\int e^{3+2x}dx$

ג) $\int 3e^{-x+1}dx$

ד) $\int 2e^{2x+3}dx$

ה) $\int -4e^{-x+2}dx$

ו) $\int (2e^{-2x+1} + 2x)dx$

4. גזור את הפונקציות.

א) $y = (2x + 3)^4$

ב) $y = (5x - 1)^3$

ג) $y = (3 - x)^5$

ד) $y = (2 - 3x)^2$

כל אחת מהפונקציות שבתרגיל 4 היא פונקציה מורכבת מהצורה $y = [f(x)]^n$ כאשר $f(x)$ פונקציה קווית, ולכן $f'(x)$ קבוע, (כלומר מספר).

5. א) $\int (2x + 4)^3dx = \frac{(2x + 4)^4}{4 \cdot \boxed{2}} + c$

גזור ובדוק.
הסבר את החילוק ב 2.

ב) מצא: $\int (5 - 2x)^4dx$

גזור ובדוק.

ג) מצא: $\int (0.5x + 1)^3dx$

גזור ובדוק.

6. מצא את האינטגרלים:

א) $\int (3-x)^3dx$

ב) $\int (4x+1)^4dx$

ג) $\int (x+4)^5dx$

ד) $\int (0.1x-2)^3dx$

ה) $\int (-x-1)^4dx$

ו) $\int (-2x+3)^2dx$

ז) $\int (7-3x)^5dx$

ח) $\int (3-0.5x)^4dx$

$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ לכן: $\int (-\frac{1}{x^2})\,dx = \frac{1}{x} + c$

7. גזור את הפונקציות הבאות

א) $y = \frac{1}{2x+4}$

ב) $y = \frac{1}{x+1}$

ג) $y = \frac{1}{-x+1}$

ד) $y = \frac{1}{0.5x-2}$

כל אחת מהפונקציות שבתרגיל 7 היא פונקציה מורכבת מהצורה $y = \frac{1}{f(x)}$ כאשר $f(x)$ זו פונקציה קווית ולכן $f'(x)$ קבוע (כלומר, מספר).

8. א) $\int -\frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2(2x+1)} + c$ גזור ובדוק.

ב) $\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{x+2} + c$ גזור ובדוק.

9. מצא את האינטגרלים.

א) $\int -\frac{1}{(3x-2)^2}\,dx$

ב) $\int \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$

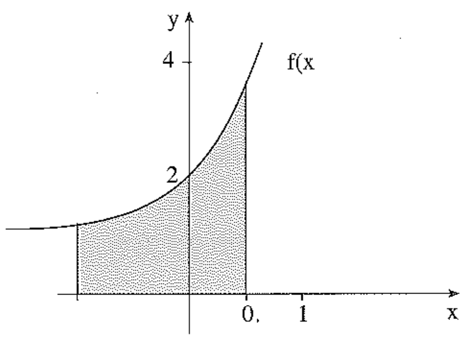
ג) $\int \frac{1}{(0.5x-3)^2}\,dx$

ד) $\int \frac{-2}{(3x+1)^2}\,dx$

ה) $\int \frac{1}{2\,(2x-1)^2}\,dx$

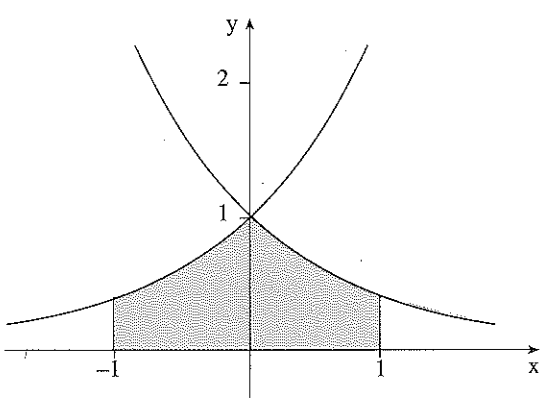
ו) $\int \frac{-1}{(2x)^2}\,dx$

10. בשרטוט מתואר גרף
הפונקציה $f(x) = e^{2x} + 1$
חשב את השטח הצבוע.



11. בשרטוט מתוארים הגרפים
של הפונקציות: $f(x) = e^{x}$
$g(x) = e^{-x}$

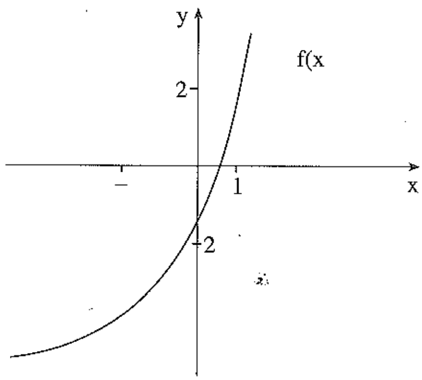
א) התאם לכל פונקציה את הגרף.



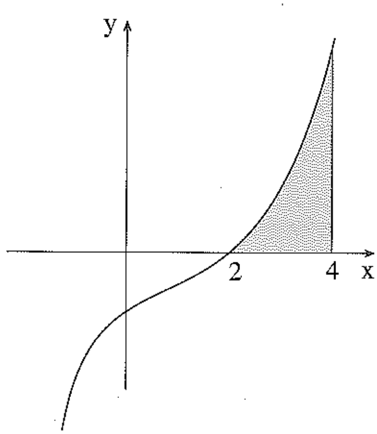
ב) חשב את השטח הצבוע.

תרגילים

12. בשרטוט מתואר גרף הפונקציה
$$f(x) = e^{2x} - e$$
א) מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.
ב) צבע וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר x וציר y.



13. בשרטוט מתואר גרף הפונקציה
$$f(x) = (0.5x - 1)^3$$
חשב את השטח הצבוע.



14. בשרטוט מתואר גרף הפונקציה
$$f(x) = (-x - 1)^4$$
חשב את השטח הצבוע.