

ספריה מתמטית

ד. שמיר

ב. אמירה

משואות אלגבריות

א'

ס פ ר י ה מ ת מ ט י ת

י"ל בעריכת בנימין אמירה

משואות אלגבריות

ספר ללמוד ולעיון
למתלמד ולמשכיל

מאת

בנימין אמירה ודניאל שמיר

חלק א'

ירושלים ותל-אביב, תש"ח

הוצאת "הספריה המתמטית", ירושלים ותל-אביב

ספר זה זכה בשנת תש"ח בפרס
לזכר דוד ר. לבסון ז"ל
לפרסום עבודות במדעים מדויקים, שניתן
מטעם האוניברסיטה העברית בירושלם.

*The David R. Lebeson Memorial
Prize for Publications in Mathe-
matics and Sciences was awarded in
1947/8 to the Authors of this book by
The Hebrew University, Jerusalem.*

כל הזכויות שמורות למחברים
נדפס בארץ-ישראל

*Copyright by B. Amirà and D. Shamir
Printed in Eretz-Israel*

דפוס „גוטנברג" — צבי כסף, תל-אביב

ה ת כ ן

עמוד

- 6 הקדמת המו"ל והעורך
- 7 הקדמת המחברים
- 9—36 פרק א'. מבוא. מספרים ממשיים ומרוכבים
- א. 1. מספרים רציונליים (9). א. 2. מספרים אי-רציונליים (13). א. 3. קו המספרים (16). א. 4. מספרים מדומים ומרוכבים (18). א. 5. מישור המספרים (20). א. 6. פעולות חשבון (23). תרגילים (34).
- 37—66 פרק ב'. המשואות האלגבריות ושרשיהן
- ב. 1. הפולינום והמשואה האלגברית (37). ב. 2. פעולות החשבון בפולינומים (38). ב. 3. פולינומים ומחלקיהם (44). ב. 4. שרשי פולינום ומחלקיו הלינאריים (49). ב. 5. משפט הבינום של ניוטון (52). ב. 6. נגזרות של פולינומים (57). ב. 7. נוסחת טיילור ושרשים מרוכבים (61). תרגילים (65, 60, 56, 48, 44).
- 67—86 פרק ג'. פתרון המשואות מהמעלה הראשונה עד הרביעית
- ג. 1. המשואות מן המעלה הראשונה והשניה (67). ג. 2. נוסחת קרדן-טרטליא לפתרון משואות מן המעלה השלישית (70). ג. 3. פתרון טריגונומטרי של המשואות מן המעלה השלישית (76). ג. 4. פתרון המשואות מן המעלה הרביעית (80). תרגילים (86, 80, 75).
- 87—112 פרק ד'. המשפט היסודי של האלגברה
- ד. 1. מבוא (87). ד. 2. רציפות (91). ד. 3. משפט בולצנו לפולינומים בעלי מקדמים ממשיים (95). ד. 4. שרשים של פולינומים בעלי מקדמים ממשיים (98). ד. 5. מושג החסם התחתון והמינימום (102). ד. 6. המשפט היסודי של האלגברה (106). תרגילים (94, 97, 101).

הקדמת המו"ל והעורך

אחרי הפסקה ארוכה הנני מנסה לחדש את הוצאת „הספריה המתמטית“. בהקדמה לספר הראשון של הספריה הזאת הדגשתי את הקשיים החמריים שהתגברתי עליהם אז בעזרת ידיד נאמן. הפעם נוספו לקשיים החמריים גם קשיי הזמן. על-כן אזכיר ברגשי תודה הנובעים מקרב לבי את העזרה שנתנו לי ידידים יקרים ונאמנים: מר יהושע אוסקר פישר ז"ל ויבדלו לחיים טובים וארוכים מר הלל הילמן ומר אריה שנקר. כן נתנו לי את עזרתם חברים מן „החוג למתמטיקה בתל-אביב“ ואחדים מתלמידי לשעבר.

אני מקוה, כי התועלת, אשר יפיקו קוראי הספר הזה, תעורר את חוג ידידי המדע המדויק לבוא לעזרתי ולהבטיח את הוצאת הספרים הבאים של „הספריה המתמטית“.

ב. א.

הקדמת המחברים

הספר, הנמסר בזה לקורא העברי, הוא חלק א' של חבור מקיף יותר, אשר בגלל קשיי הזמן לא יכולנו להוציאו לאור בשלמותו עתה. אנו מקוים למסור לדפוס את החלק השני בזמן הקרוב. מטרת הספר הזה (כמטרת „הספריה המתמטית“ בכללה) היא, לתת למתלמד ולמשכיל חמר ללמוד ולעיון, אשר אינו דורש ידיעות רחבות מאלה הנתנות לתלמידי הכתות העליונות של בית-ספר תיכון. החמר הנכלל בספר הזה מהווה כעין גשר מן הפרקים הנלמדים בביה"ס התיכון (משואות מן המעלה הראשונה והשניה) אל הפרקים הנלמדים בשנים הראשונות באוניברסיטה (המשפט היסודי של האלגברה, וכו'). אנו מקוים, כי סגנון הספר לא יהיה קשה בעיני הקורא. אף-על-פי שלא ותרנו בשום מקום על הדיוק המלא בנסוח המשפטים ובהוכחתם.

תודתנו הנאמנה נתונה לועדה מטעם האוניברסיטה העברית בירושלים ולרקטור האוניברסיטה הפרופ' מ. פקטה על שזכו אותנו בפרס דוד ר. לבסון ז"ל לשנת תש"ח.

ידידים מסורים עזרו לנו בעבודתנו: מרת חנה שמיר העתיקה את כתב-היד, מר שמשון עמיצור קרא את כתב-היד והעיר הערות חשובות, המהנדס נ. פופר עזר לנו בקריאת ההגהות, מר ערגד יעקבי הכין את שרטוטי הצורות; תודתנו נתונה להם מקרב לב.

תודה מיוחדת חייבים אנו למר צבי פספ ולפועלי דפוס „גוטנברג“ בתל-אביב על העמל הרב ועל המסירות שבהם התגברו על קשיים טכניים רבים והוציאו מתחת ידם עבודה נאה וראויה לשבח.

ירושלים ותל-אביב
כסלו, תש"ח.

ב. א.
ד. ש.

פרק א'. מבוא. מספרים ממשיים ומרוכבים

א. 1. מספרים רציונליים. האלגברה האלמנטרית היא פרק מפרקי המתמטיקה המתבססים על מושג המספר. נסקור איפוא בקצרה את התפתחות המושג הזה. ראשיתו במושג המספר השלם החיובי, המספר הטבעי. אולם גם מהות המספר הטבעי איננה דבר המובן מאליו, ומושג זה דורש בסוס מתמטי והגיוני מדויק. בסוס זה הוא תוצאה של חקירות אכסיומטיות שנעשו בסוף המאה שעברה ובראשית המאה הזאת. פרטי הדברים האלה חורגים מתחומי הספר הזה ועלינו להסתפק בהנחה, כי הדבר ידוע לקורא, או לבקשו לעיין בספרים המבארים את מושג המספר בכל הדיוק הדרוש.* מושג המספר הטבעי מוגדר בעזרת מערכת אכסיומות מתאימה; ואת החוקים, אשר לפיהם אפשר לחשב חשבונות במספרים, קובעים בהגדרות מתאימות של פעולות החשבון. הגדרת הפעולה "חבור" מרשה להתאים לכל שני מספרים טבעיים a ו- b מספר טבעי אחר, הנקרא "סכום" של שני ה"מחברים" a ו- b (כתיב: $a + b$). הגדרת הפעולה "כפל" קובעת את ה"מכפל ה" של שני ה"גורמים" a ו- b (כתיב: $a \cdot b$ או ab). לעומת זאת אפשר להגדיר את ה"חסור" של ה"מחסר" b מן ה"נחסר" a , רק אם a גדול

* למשל בספרו של יוחאן אדמונד לנדאו:

E. Landau, Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930.

ראה גם:

O. Hölder, Die Arithmetik in strenger Begründung, Berlin 1929.

מ a, b נקרא „גדול מ b ” (כתיב: $a > b$), אם קיים מספר טבעי x , המקיים את השוויון $x + b = a$; נקרא „קטן מ b ” (כתיב: $a < b$), אם $b > a$. הציון $a < b$ (קרי: a קטן או שווה ל b) אומר שלא קיים $a > b$; וכן $a \geq b$ (א a גדול או שווה ל b) אומר, כי לא קיים $a < b$. החסור קובע את ה„הבדל” בין שני מספרים טבעיים a ו b (כתיב: $a - b$) כפתרון יחיד של המשוואה

$$x + b = a.$$

להגדרת ה„חלוק” וה„מנה” של ה„נחלק” וה„מחלק” קודמת

הגדרה. a נקרא „כפולה של b ”, אם קיים מספר טבעי x , המקיים את השוויון $x \cdot b = a$.

המנה של שני מספרים טבעיים a ו b (כתיב: $a : b$, או $\frac{a}{b}$) מוגדרת כפתרון היחיד של המשוואה

$$x \cdot b = a.$$

היא קיימת איפוא, אם a הוא כפולה של b (הנחלק הוא כפולה של המחלק) ואינה קיימת (בתחום המספרים הטבעיים) במקרה אחר. חקירת התכונות של פעולות החשבון במספרים טבעיים קובעת את התכונות היסודיות:

1. תכונת הקומוטטיביות של החבור ושל הכפל

$$a + b = b + a;$$

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

2. תכונת האסוציאטיביות של החבור ושל הכפל

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

3. תכונת הדסטריבוטיביות של הכפל לגבי החבור

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

ראינו, כי ההבדל והמנה של שני מספרים טבעיים קיימים (בתחום המספרים הטבעיים) רק בתנאים ידועים. כדי לקיים את המנה של שני מספרים טבעיים כל-שהם, עלינו להגדיר את השבר. וכדי לקיים את ההבדל בין שני מספרים (טבעיים או שברים) כל-שהם, עלינו להרחיב (בעזרת הגדרה מתאימה) את תחום מושג המספר באופן, שיכיל את המספרים השליליים (השלמים והשברים) ואת האפס. כל מספר יכול עתה להכתב בצורת שבר (מנה של שני מספרים שלמים; הנחלק הוא מונה השבר והמחלק הוא מכנה; המכנה תמיד שונה מאפס). גם המספרים השלמים יכולים להכתב בצורת שבר שמכנהו 1.

כל המספרים, הידועים לנו עתה, הם שברים. אסף כל המספרים האלה הוא אסף המספרים הרציונליים. הגדרת פעולות החשבון במספרים אלה קובעת את קיום הסכום והמכפלה (של שני מספרים כל-שהם) בעלי תכונות הקומוטטיביות, האסוציאטיביות והדסטריבוטיביות; כמו-כן קיימים ההבדל והמנה; אך זו האחרונה רק בתנאי שהמחלק יהיה שונה מ-0. הפעולות האלה במספרים רציונליים אינן מוציאות אותנו מתחום המספרים הרציונליים. כלומר סכום, הבדל, מכפלה ומנה (פרט לחלוק ב-0) של שני מספרים רציונליים הם מספרים רציונליים. שבר שמכנהו 0 אינו קיים (אינו מוגדר).

אולם באלגברה ידועות גם פעולות אחרות. אם נכפול מספר רציונלי a כל-שהוא במספר הזה עצמו, נקבל מספר אשר ציונו a^2 (קרי: a בחזקה השניה או a ברבוע); ואם נכפול a ב a ועוד ב a וכ' עד שיהיו n גורמים a , נקבל מספר אשר ציונו a^n (קרי: a בחזקת n). פעולה זו היא העלאה לחזקה, ואם a הוא מספר רציונלי, יהיה גם a^n מספר רציונלי, ולא יצאנו מתחום המספרים הידועים לנו לפי שעה. אך אם נשאל שאלה הפוכה: יהי b מספר רציונלי כל-שהוא; האם אפשר תמיד למצוא מספר רציונלי a כך שיהיה b שווה לחזקה השניה של a ($b = a^2$)? התשובה תהיה שלילית, כי למשל במקרה $b = 2$ קיים

משפט. בין כל המספרים הרציונליים אין למצוא מספר, אשר בחזקתו השניה ישוה למספר 2. הוכחה. אם נאמר, כי קיים מספר רציונלי כזה, נוכל לכתוב אותו בצורת $\frac{m}{n}$ (m ו n מספרים שלמים). נוכל גם להניח, כי ל m ול n אין גורמים משותפים (צמצום שברים!). עתה נכתוב

$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2},$$

ומכאן,

$$2n^2 = m^2.$$

המספר $2n^2$ הוא זוגי. לכן גם m^2 הוא זוגי. אולם m^2 לא יוכל להיות זוגי מבלי ש m יהיה זוגי. לכן $m = 2k$ ומכאן

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

ולכן

$$n^2 = 2k^2.$$

עתה $2k^2$ זוגי ולכן n^2 זוגי, ולפיכך n זוגי. m ו n שניהם זוגיים, כלומר גורם משותף להם (הגורם 2) וזה סותר את ההנחה, כי אין לשני מספרים אלה גורם משותף.

בקשת מספר a , אשר חזקתו ה n ית תשוה למספר נתון b , היא הוצאת השורש. ציונה: $a = \sqrt[n]{b}$ (a הוא שורש n י b). אם $n = 2$, אין נוהגים לכתוב את ה 2 במקום n , וכותבים $a = \sqrt{b}$ במקום $a = \sqrt[n]{b}$ (קרי: שורש מרובע מ b).

ובכן ראינו, כי בתחום המספרים הרציונליים לא קיים מספר a , המקיים את השוויון $a^2 = 2$.

כאן מתגלה הצורך להרחיב את מושג המספר באופן שגם שאלות חשבון כאלה תקבלנה את פתרונן. דבר זה יעשה על-ידי הרחבת תחום המספרים באופן שיכלול גם מספרים אחרים, אשר יקראו בשם מספרים אירציונליים.

א. 2. מספרים אירציונליים. ובכן אין מספר רציונלי, אשר חזקתו השניה תשוה ל 2. לפיכך, אם x הוא מספר רציונלי, יהיה תמיד x^2 גדול או קטן מ 2. נחלק את כל המספרים הרציונליים לשתי כתות א' וב', ונקבע, כי x יהיה בכתה א', אם הוא שלילי או אפס או, אם הוא חיובי ומקיים את אי-השוויון $x^2 < 2$; x יהיה בכתה ב', אם הוא חיובי ומקיים את אי-השוויון $x^2 > 2$. ועתה נעיין בתכונותיה של חלוקה זו.

א. הכתה א' והכתה ב' אינן ריקות.

הכתה א' מכילה את כל המספרים השליליים. גם המספר 1, למשל, נמצא בכתה א'; ובכתה ב' נמצאים מספרים חיוביים גדולים למדי, כמו 100 למשל, או גם $\frac{3}{2}$, כי $\left(\frac{3}{2}\right)^2 > 2$.

ב. כל מספר רציונלי שייך לכתה א' או לכתה ב'. דבר זה נובע מן הכלל, אשר לפיו נקבעה החלוקה, ומן העובדה, שאין מספר רציונלי, אשר רבועו שווה ל 2.

ג. כל מספר בכתה א' קטן הנהו מכל מספר בכתה ב'. המספרים השליליים והאפס מקיימים בלי ספק תכונה זו, כי המספרים בכתה ב' חיוביים כולם; והמספרים החיוביים בכתה א' מקיימים את התכונה אף הם: כי, יהי $\frac{m}{n}$ מספר חיובי מכתה א' ו $\frac{p}{q}$ מספר מכתה ב' (m, n, p, q מספרים טבעיים); אז

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 < 2 < \left(\frac{p}{q}\right)^2;$$

$$\frac{m^2}{n^2} < \frac{p^2}{q^2};$$

$$m^2 q^2 < n^2 p^2;$$

לכן

$$mq < np;$$

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}.$$

אלה הן שלוש תכונות יסודיות של החלוקה אשר לפנינו. עתה נראה כיצד קובעת חלוקה זו את המספר $\sqrt{2}$. חלוקה כזו של המספרים הרציונליים, המקיימת את שלוש התכונות א. ב. ג., נקראת בשם חתוך; תוצאת החלוקה היא חתך. בטרם נמשיך בבאור המושג הזה נציין עוד בשתי תכונות של המספרים הרציונליים.

1. אם נתונים שני מספרים רציונליים שונים זה מזה, אפשר תמיד למצוא מספר רציונלי הנמצא ביניהם. הדבר ברור, כי משני המספרים האלה יהיה אחד קטן מן השני. נחשב עתה, למשל, את מחצית סכומם. מספר זה יהיה רציונלי, והוא גדול מן הקטן שבשני המספרים וקטן מן הגדול שבהם.

2. אם נציין בכל המספרים הרציונליים הגדולים ממספר רציונלי נתון, לא נמצא ביניהם מספר אחד, אשר יהיה קטן מכל האחרים. וכן אם נציין בכל המספרים הקטנים ממספר רציונלי נתון, לא נמצא ביניהם אחד, אשר יהיה גדול מכל האחרים.

קל לראות, כי התכונה 2. נובעת מן התכונה 1.

נשוב עתה אל מושג החתך. זו היא כאמור תוצאת החלוקה של כל המספרים הרציונליים לשתי כתות, אשר מתקיימות בה שלוש תכונות אלה:

- א. כתה א' וכתה ב' אינן ריקות.
- ב. כל מספר רציונלי שייך לכתה א' או לכתה ב'.
- ג. כל מספר בכתה א' קטן מכל מספר בכתה ב'.

החלוקה נעשית כמובן על-פי כלל נתון או דרישה נתונה. והנה יכול היות, כי בין המספרים של כתה א' יקצא אחד, אשר יהיה גדול מכל האחרים. או, לפי התכונה דלעיל, לא יהיה בכתה ב' מספר קטן מכל האחרים. משל: בכתה א' — כל המספרים שאינם גדולים מ 3 (כלומר: המספר 3 וכל המספרים הקטנים מ 3). בכתה ב' — כל המספרים הגדולים מ 3. וכן יכול היות, כי יהיה בכתה ב' מספר קטן מכל האחרים. אז לא יהיה בכתה א' מספר גדול מכל

האחרים*. בשני מקרים אלה יאמר, כי החתך קובע מספר רציונלי (את הגדול שבכתה א', או את הקטן שבכתה ב').

אולם יכול גם היות, כי לא יהיה בכתה א' מספר גדול מכל האחרים ולא בכתה ב' מספר קטן מכל האחרים (משל: החלוקה דלעיל, אשר בה בקשנו הגדרה למספר $\sqrt{2}$).

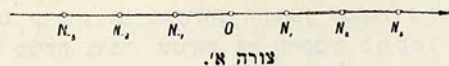
במקרה כזה נאמר, כי החתך קובע מספר אירציונלי. הגדרת פעולות החשבון בחתכים קובעת את קיום הסכום, ההבדל, המכפלה והמנה של שני חתכים (פרט לחלוק בחתך, המתאים למספר 0). התכונות היסודיות של פעולות החשבון במספרים רציונליים קיימות גם בפעולות החשבון המוגדרות לגבי חתכים. לכן אין מניעה בדבר, שנראה את החתכים כמספרים. במובן זה נוכל לאמר, למשל, כי החלוקה דלעיל (עמ' 13) קובעת את המספר $\sqrt{2}$.

אסף המספרים הרציונליים והאירציונליים (אסף כל החתכים) הוא תחום המספרים הממשיים.

המושג חתך הופיע כתוצאה של חלוקת כל המספרים הרציונליים לשתי כתות. עתה, שיש לנו תחום רחב יותר של מספרים, נוכל להגדיר את החתך כתוצאה של חלוקת כל המספרים הממשיים לשתי כתות א' וב', המקיימות את שלוש התכונות דלעיל. חקירה נוספת קובעת, כי חלוקה כזאת אינה יוצרת סוג חדש של מספרים. כל חלוקה כזאת קובעת מספר ממשי מסוים α באופן שכל מספר, שהוא קטן מ α , יהיה שייך לכתה א', וכל מספר שהוא גדול מ α יהיה שייך לכתה ב'. המספר α עצמו יכול להיות שייך לאחת משתי הכתות, הדבר תלוי בכלל שלפיו נעשתה החלוקה.

* אילו היה $\frac{m}{n}$ המספר הרציונלי הקטן ביותר בכתה ב' ו- $\frac{p}{q}$ המספר הרציונלי הגדול ביותר בכתה א', היה קיים מספר רציונלי, הוא $\frac{1}{2}(\frac{p}{q} + \frac{m}{n})$, אשר אינו שייך לשום כתה — בניגוד לתכונה ב'.

א. 3. קו המספרים. על קו ישר נקבע נקודה O (אשר תקרא בשם ראשית); ימינה ממנה נקבע נקודה N_1 . הקטע ON_1 יוכל לשמש קנה-מדה: ארכו יקבע כיחידת ארך. אם נמשיך לסמן על הקו הישר נקודות $N_2, N_3, \dots$ וכו' (ימינה זו מזו) באופן, שהקטעים $N_1N_2, N_2N_3, \dots$ יהיו שווים בארכם לקטע ON_1 , נוכל לאמר, כי נקודות אלה מתארות את סדרת המספרים הטבעיים (ר' צורה א'). וכן נסמן שמאלה מן הראשית את הנקודות $N_{-1}, N_{-2}, \dots$ אשר תתארנה את המספרים השלמים השליליים.



בניה גאומטרית פשוטה מאפשרת כידוע חלוקה של כל קטע נתון ל n חלקים שווים (n מספר טבעי). לפיכך אפשר לסמן על הקו הישר נקודות מתאימות למספר $\frac{m}{n}$, אשר בו m ו n מספרים טבעיים. באופן זה נושא הקו הישר (ימינה מ O) נקודות המתאימות לכל המספרים הרציונליים החיוביים. נסכים עתה, כי נקודת הראשית תתאים למספר 0 והנקודה הנמצאת שמאלה מ O במרחק השווה למרחקה של הנקודה מימין, המתאימה למספר $-\frac{m}{n}$, תתאר את המספר השלילי $-\frac{m}{n}$. עתה נוכל לאמר, כי הקו הישר נושא עליו נקודות, המתאימות לכל המספרים הרציונליים.

אם נתונים שני מספרים רציונליים שונים זה מזה, אפשר תמיד לקבוע לפחות עוד מספר רציונלי, הנמצא ביניהם; וכן בין שתי נקודות שונות זו מזו על קו ישר נתון אפשר תמיד לקבוע לפחות עוד נקודה, הנמצאת ביניהן, כך מתקבל הרשם כאלו אסף הנקודות שעל הקו ואסף המספרים הרציונליים מתאימים זה לזה התאמה הדדית וחד-ערכית. אולם אין הדבר כן. קל להוכיח, כי ארך האלכסון של רבוע, אשר ארך הצלע שלו שווה לארך הקטע ON_1 ,

מתאים (לפי משפט פיתגורס) למספר $\sqrt{2}$ (אשר איננו רציונלי) וקל למצוא ימינה מ O נקודה, אשר מרחקה מ O יהיה שווה לארך האלכסון הזה. לפיכך, אף-על-פי שנדמה לנו כאילו „ממלאות“ הנקודות, המתאימות למספרים הרציונליים, את הקו כולו, הנה יש עליו גם נקודות, המתאימות למספרים אחרים. כל מספר, אשר אפשר להגדירו בעזרת חתוך, ימצא את מקומו המתאים על הקו הזה. קו זה יוכל איפוא לתאר את אסף כל המספרים הממשיים; הוא יקרא בשם קו המספרים.

נסמן על קו המספרים שני ערכים a_1 ו b_1 , ($a_1 < b_1$). בפנים הקטע $[a_1, b_1]$ נקבע קטע $[a_2, b_2]$, ($a_2 < b_2$), וכן נמשיך ונקבע קטע בפנים קטע. הקטע ה n יקבע בפנים הקודם לו בשני הערכים a_n ו b_n , ($a_n < b_n$). אם יגדל ה n עד אין קץ, נקבל סדרה אינסופית של קטעים, הכלואים זה בפנים זה*. ארך הקטעים האלה יכול לרדת עד ל 0. במקרה זה נקרא לסדרת הקטעים בשם: סדרה אינסופית של קטעים אפסים. בסדרה כזאת כל הנקודות של הקטע $[a_n, b_n]$ משותפות לו ולקטעים הקודמים לו, אך לא כולן משותפות לו ולקטעים הבאים אחריו.

אם נבדוק סדרת קטעים אפסים כזאת, נוכל לשאול, אם ישנן נקודות שהן משותפות לכל הקטעים כולם. התשובה היא: נקודה אחת לכל היותר יכולה להיות משותפת לכל קטעי הסדרה. הדבר ברור, כי, אלו היו שתי נקודות שונות זו מזו A ו B משותפות לכל הקטעים, כי אז היה כל הקטע AB משותף להם. לקטע AB יש ארך מסוים (שונה מ 0), ובין קטעי הסדרה, אשר ארכם יורד ל 0, יופיעו סוף-סוף קטעים, אשר ארכם קטן מארך AB . אולם מכאן לא הוכח עדיין כי אמנם יש נקודה אחת משותפת לכולם. מציאותה של נקודה כזו נקבעת באכסיומה. היא אומרת:

סדרה אינסופית של קטעים $[a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

* אין איסור לקצוות a_n ו b_n (או לאחד מהם) להתכחד לפעמים עם הקצוות של הקטע הקודם לו.

הכלואים זה בפנים זה ואשר ארכם יורד ל 0 בגדול n לאין-סוף, קובעת נקודה אחת, משותפת לכל הקטעים.

א. 4. מספרים מדומים ומרוכבים. הוצאת השרש המרובע

דרשה את הרחבת מושג המספר באופן, שיכלול גם מספרים אי-רציונליים; זאת ראינו בסעיף א. 1. בקשנו שם מספר a , אשר בחזקתו השניה ישוה ל b . בעיה זו מוצאת את פתרונה בתחום המספרים הממשיים, אם b הוא מספר ממשי חיובי או 0. אולם אם נבקש מספר, אשר בחזקתו השניה ישוה למספר -1, למשל, לא ימצא מספר כזה בתחום המספרים אשר לפנינו. והדבר ברור: כי רבוע של כל מספר ממשי, חיובי או שלילי, הוא מספר חיובי; רבוע המספר 0 הוא 0.

כדי להרחיב את מושג המספר באופן, שיקיים את דרישתנו החדשה (קיום שרש מרובע ממספרים שליליים), ניצור מושג חדש, הוא המושג: זוג מספרים ממשיים. הציון (a, b) יציין זוג של מספרים ממשיים a ו b בסדר נתון זה. בדרך כלל אין הווג (a, b) מזדהה עם הווג (b, a) . השויון או הזהות של שני זוגות יקבע בדרך הבאה:

הגדרה. הווג (a, b) יקרא שוה לזוג (a', b') רק כאשר שני השוויונות $a = a'$ ו $b = b'$ קיימים יחדיו. כתיב:

$$(a, b) = (a', b').$$

אם אחד משני השוויונות האלה (לפחות) אינו קיים, נכתוב

$$(a, b) \neq (a', b').$$

כמו כן נגדיר לגבי זוגות אלה את המושגים סכום, הבדל,

מכפלה ומנה.

$$\text{סכום: } (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$\text{הבדל: } (a, b) - (a', b') = (a - a', b - b')$$

$$\text{מכפלה: } (a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

$$\text{מנה: } (a, b) : (a', b') = \left(\frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} \right)$$

הסכום, ההבדל והמכפלה מוגדרים לזוגות כל-שהם, אך המנה קיימת רק כאשר $(a', b') \neq (0, 0)$; כי אין לחלק ב $b'^2 + a'^2$, כאשר $a' = b' = 0$. בדיקה מפורטת של תכונות המושגים האלה קובעת, כי כל התכונות של פעולות החשבון, הידועות לגבי מספרים ממשיים (הקומוטטיביות, האסוציאטיביות והדסטריבוטיביות), קיימות גם בפעולות החשבון בזוגות אלה. לפיכך יהוו הזוגות סוג חדש של מספרים.

אם נבדוק סוג מיוחד של זוגות אלה, הוא סוג הזוגות אשר ציונם $(a, 0)$, נראה כי באלה קיימות כל התכונות של מספרים ממשיים*; ולכן נוכל לציין את הווג $(a, 0)$ בקצור באות a . ולפיכך נכתוב:

$$(a, 0) = a; \quad (1, 0) = 1; \quad (0, 0) = 0.$$

אם נציין עתה בזוג $(0, 1)$ ונסה לחשב בו חשבוניות לפי הכללים הקבועים בסעיף זה, ננכה, כי נוכל לציין את הרבוע של $(0, 1)$ במספר -1, כי לפי הגדרת הכפל

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

את הווג הזה $(0, 1)$ נוהגים לציין באות i , ולכן נכתוב

$$i^2 = -1.$$

לפי הגדרת הסכום והכפל של זוגות נוכל לכתוב

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0);$$

* קל לראות, למשל, כי:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0);$$

$$(a, 0) - (b, 0) = (a - b, 0);$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0);$$

$$(a, 0) : (b, 0) = (a : b, 0) \quad \text{כאשר } b \neq 0.$$

ולכן, כיון שקבענו $(a, 0) = a$, $(b, 0) = b$ ו $(0, 1) = i$, נוכל לכתוב

$$(a, b) = a + b \cdot i.$$

המספרים $a + bi$ יקראו בשם מספרים מרוכבים. הם מהווים הרחבה של מושג המספר, כיון שיש ביניהם, למשל, המספר i , המקיים את השויון $i^2 = -1$, ומספר כזה אינו קיים בתחום המספרים הידועים לנו עד עתה.

המספרים $a + 0i$ מתאימים למספרים הממשיים a . המספרים $0 + bi$ יכתבו גם בצורת bi . לאלה קוראים בשם מספרים מדומים*.

בסעיף א. 6. נשוב לעסוק במספרים מרוכבים בדרך, אשר אולי תראה מופשטת פחות מאשר בסעיף הזה.

א. 5. מישור המספרים. במישור נתון נקבע קו ישר ועליו

נקודת ראשית O . נקבע גם יחידת ארך על הקו הזה. קו זה יהיה קו המספרים, כמבואר בסעיף א. 3, וישא עליו את תאור כל המספרים הממשיים. בנקודה O נוקף במישור הנתון קו ישר, נצב לקו המספרים הזה. הנקודה O תקבע כנקודת ראשית גם לגבי הקו הנצב. נקבע על הקו הנצב את יחידת הארך שקבענו ונוכל לראות גם את הקו הנצב כקו מספרים. קו מספרים זה יתאר את המספרים המדומים. הנקודה O תתאר עליו את המספר $0 + 0 \cdot i$. כלומר, לפי ההגדרה, את המספר 0 . הנקודות שלמעלה מ O תתארנה את המספרים $b \cdot i$ עם b ממשי חיובי, והנקודות אשר למטה מ O את המספרים $b \cdot i$ עם b ממשי שלילי.

* הקורא, אשר יקרא בספר הנזכר של י. א. לגדאן, ימצא שם תאור מפורט של המספרים המרוכבים כוונות של מספרים ממשיים. תאור כזה מונע מן הלוטר את המחשבה, כי השמות "ממשי" ו "מדומה" קשורים קשר כלשהוא ב"מציאות הממסית" של מספרים כאלה. המונחים "ממשי" ו "מדומה" הם ירושה מצערת מן התקופה שבה נוצרו המושגים האלה.

עם b ממשי שלילי. שני הקווים נקראים בשם צירי המספרים; הראשון הוא ציר המספרים הממשיים והנצב לו הוא ציר המספרים המדומים. אם נראה צירים אלה כצירי קואורדינטות, נוכל לקבוע לכל נקודה N במישור את האבסציסה a ואת האורדינטה bi , הקובעות את מצבה במישור. נוכל לאמר איפוא, כי הנקודה N מתארת את

המספר $a + bi$ (ר' צורה ב'). כך אפשר ליצור התאמה הדדית וחד-ערכית בין כל נקודות המישור ובין כל המספרים המרוכבים באופן שלכל נקודה יתאים מספר יחיד ולכל מספר תתאים נקודה יחידה. לנקודות, אשר על הציר הממשי, יתאימו המספרים בצורת $a + 0i$ ולנקודות שעל הנצב — המספרים $0 + bi$. נקודת הראשית היא המספר

$$0 + 0 \cdot i = 0.$$

מישור זה הוא מישור המספרים המרוכבים (יש שקוראים לו בשם מישור של Gauss*, ויש שקוראים לתאור כזה של מספרים מרוכבים בשם הדיאגרמה של Argand).

מרחק הנקודה N ($a + bi$) מן הראשית O הוא הארך ρ של הקטע ON (ע' צורה ב'), לפי משפט פיתגורס

$$\rho = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

הערך ρ (שהוא תמיד חיובי או אפס) נקרא בשם הערך המוחלט או המודול של המספר $a + bi$. את הערך המוחלט של מספר x כל-שהוא נוהגים לציין ב $|x|$ (קרי: ערך מוחלט של x). לפיכך נכתוב

$$\rho = |a + bi| = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

* Carl Friedrich Gauss, מתמטיקון גרמני מפורסם (1777—1855).

Jean Robert Argand, מתמטיקון צרפתי, נולד בג'ניבה (1768—1822).

מקום הנקודה N במישור יכול להקבע על-ידי מתן הארך ρ והזווית φ , שבין ON ובין ציר המספרים הממשיים. הזווית φ נקראת בשם ארגומנט המספר $a + bi$ (כתיב: $\arg(a + bi)$).

במידת זווית נקבע, כנהוג במתמטיקה, כי מידת הזווית היא כמידת אורך הקשת, המתאימה לה במעגל, אשר מרכזו בקדקוד הזווית והרדיוס שלו שווה ליחידת-האורך. קשת של מעגל כזה, אשר ארכה שווה לאורך הרדיוס, נקראת „רדיאן“. מדידת הזוויות (הקשתות) תעשה איפוא מעתה ברדיאנים (ולא ב„מעלות“). לפיכך נציין ב 2π את המידה של זווית מלאה (360°); המידה של זווית שטוחה (180°)

היא π ושל זווית ישרה היא $\frac{\pi}{2}$; וכדומה בזוויות אחרות.

המספר ρ יכול לקבל ערך כל-שהוא מ 0 עד $+\infty$ והמספר φ יכול לקבל ערך ממשי כל-שהוא מ $-\infty$ עד $+\infty$ ($-\infty < \varphi < +\infty$). אולם בתאור הגרפי מתלכדת הזווית φ עם הזווית $\varphi + 2k\pi$ (k מספר שלם כל-שהוא). לפיכך נוכל לקבוע בחשבוניות רבים, כי φ משתנה מ 0 עד 2π ($0 \leq \varphi < 2\pi$). אם $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, תמצא הנקודה המתאימה ברביע הראשון של מישור המספרים, אם $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, תהיה הנקודה ברביע השני, אם $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$, תהיה הנקודה ברביע השלישי ואם $\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$, תהיה הנקודה ברביע הרביעי.

הקשר שבין קביעת הנקודה N בעזרת המספרים a ו b או בעזרת ρ ו φ נתון בשוויונות הבאים:

* הציונים $+\infty$ (קרי „אינסוף“) ו $-\infty$ (קרי „מינוס אינסוף“) אינם מספרים. הם יופיעו באי-שוויונות כגון $b < x < +\infty$ או $-\infty < y < c$, כדי לומר: x יכול להיות מספר ממשי כל-שהוא גדול מ b , או y הוא מספר ממשי כל-שהוא קטן מ c . אם נכתוב $-\infty < z < +\infty$, נתכוון לומר: z יכול לקבל ערך ממשי כל-שהוא.

$$\begin{aligned} a &= \rho \cdot \cos \varphi; & \rho &= +\sqrt{a^2 + b^2}; \\ (1) \quad b &= \rho \cdot \sin \varphi; & (2) \quad \operatorname{tg} \varphi &= \frac{b}{a}; \end{aligned}$$

ומכאן

$$a + bi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

בקביעת מקום הנקודה N לפי השוויונות (2) יש להזהר מטעות: אם היחס $\frac{b}{a}$ הוא חיובי, תתאים לו זווית φ ברביע הראשון או ברביע השלישי; וכן אם היחס $\frac{b}{a}$ הוא שלילי, יהיה מקומה של N ברביע השני או ברביע הרביעי. כדי לקבוע את מקומה הנכון של הנקודה N , עלינו לשים לב איפוא לסימני a ו b לחוד ולא ל $\operatorname{tg} \varphi$ בלבד. אם $b = 0$ ו $a \neq 0$, תמצא הנקודה N על הציר הממשי $\varphi = 0$ או $\varphi = \pi$ בהתאם לסימן של a . אם $a = 0$ ו $b \neq 0$, היחס $\frac{b}{a}$ אינו קיים, אך הנקודה N תמצא על ציר המספרים המדומים למעלה מראשית הצירים או למטה ממנה, בהתאם לסימן של b ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ או $\varphi = \frac{3\pi}{2}$). אם $a = b = 0$, היחס $\frac{b}{a}$ אינו קיים ואין לקבוע שום זווית φ . אך ρ שווה אז ל 0 , הנקודה N מתלכדת עם ראשית הצירים.

שני מספרים בעלי המודולים ρ ו ρ' והארגומנטים φ ו φ' שווים זה לזה רק אם $\rho = \rho'$ ו $\varphi = \varphi' + 2k\pi$ (k מספר שלם). הנקודות, המתארות שני מספרים כאלה, מתלכדות.

א. 6. פעולות חשבון. בסעיף א. 4. הגדרנו את מושג המספר המרוכב ואת פעולות החשבון במספרים כאלה. הדרך שהלכנו בה אולי נראתה מופשטת ביותר. דרך מעשית יותר להרחבת מושג המספר, באופן שיקיים את הדרישה הנחוצה, היא להניח כי קיים מספר (אשר כמובן לא יהיה אחד המספרים הממשיים הידועים לנו, כי אם מספר מסוג חדש), אשר חזקתו השניה שווה ל -1 . מספר

זה יצוין באות i . בסעיף א. 4. ראינו, כי אמנם אפשר להגדיר מושג כזה. כל מספר, הכתוב בצורת bi (מספר ממשי), יקרא בשם מספר מדומה. אחרי שנגדיר פעולות חשבון במספרים אלה (כדוגמת הדרך שהלכנו בה בסעיף א. 4) נראה (כתוצאה מהגדרות האלה), כי קיימות בפעולות האלה התכונות היסודיות של הפעולות במספרים ממשיים (הקומוטטיביות, האסוציאטיביות, הדסטריבוטיביות). לכן נוכל לחשב במספרים המרוכבים לפי הכללים הנהוגים באלגברה, כאלו היה i גורם אלגברי רגיל, ובתוצאת כל החשבונות נציג את הערך של i^n (מספר שלם) לפי לוח ערכים זה:

$$\begin{aligned} i^4 &= +1 & i^3 &= -1 & i &= -i & i^2 &= -1 & i &= \sqrt{-1} \\ & & & & i^5 &= i^4 \cdot i = i & & & & \\ i^{-2} &= \frac{1}{i^2} = -1 & i^{-1} &= \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i & i^0 &= +1 & & & & \\ i^{-4} &= \frac{1}{i^4} = +1 & i^{-3} &= \frac{1}{i^3} = \frac{i}{i^4} = i & & & & & & \end{aligned}$$

בכל מספר, אשר יהיה כתוב בצורת $x + yi$ (כאשר x ו- y ממשיים, $i = \sqrt{-1}$), נקרא ל- x בשם החלק הממשי ול- yi בשם החלק המדומה של $x + yi$. הצורף $x + yi$ יקרא בשם מספר מרוכב. מושג השוויון ופעולות החשבון במספרים מרוכבים, אשר הגדרנו בסעיף א. 4, ירשמו עתה בנוסחאות הבאות.

שוויון: $a + bi = a' + b'i$, כאשר השוויונות $a = a'$ ו- $b = b'$ קיימים יחדיו. שוויון אחד בין מספרים מרוכבים מביע איפוא למעשה שני שוויונות בין מספרים ממשיים. אם אחד משני השוויונות האלה אינו קיים (או שניהם אינם קיימים), נאמר, כי $a + bi$ שונה מ- $a' + b'i$.
כתיב: $a + bi \neq a' + b'i$.
חבור:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$$

כפל:

$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

הגדרות החסור והחלוק נובעות מן ההנחה, כי החסור הוא פעולה הפוכה לגבי החבור, והחלוק הוא פעולה הפוכה לגבי הכפל. לפיכך נקבע:

חסור:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i;$$

חלוק:

$$(a + bi) : (a' + b'i) = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}i.$$

הגדרה אחרונה זו קיימת רק בתנאי, ש a' ו- b' לא יהיו שניהם 0.

בכל הפעולות האלה אנו רואים את האות i כאילו אינה שונה בטבעה משאר האותיות. אנו מחשבים חשבונות לפי חוקי האלגברה הקבועים ובתוצאת החשבונות נציג את הערך של i^n בהתאם ללוח הערכים דלעיל.

בצד המספר $a + bi$ כדאי לציין את המספר $a - bi$, שהוא המספר המרוכב הצמוד ל- $a + bi$. הכפלת מספר מרוכב במספר הצמוד לו מביאה מספר ממשי:

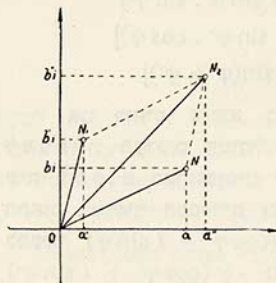
$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

את המספר הצמוד ל- $a + bi$ נוהגים לציין בקו מעל למספר:

$$\overline{a + bi} = a - bi.$$

אם נסכים לציין מספר מרוכב באות אחת, למשל $z = x + yi$, יציין $\bar{z}$ את המספר הצמוד ל- z .

התאור הגרפי במישור מתאר על נקלה את פעולות החשבון. הנה (צורה ג') תאור הסכום של שני מספרים $a + bi$ ו- $a' + b'i$. קל להוכיח, כי הנקודה N_2 (קצה האלכסון של המקבילית ONN_1N_2)



צורה ג'.

מתארת את המספר $a'' + b''i$ ($a'' = a + a'$; $b'' = b + b'$) שהוא סכום המספרים, המתאימים ל N ול N_1 .

החסור הוא פעולה הפוכה לגבי פעולת החבור. אם $a'' + b''i$ הוא סכום שני המספרים $a + bi$ ו $a' + b'i$, נוכל לאמר, כי $a + bi$ הוא ההבדל בין $a'' + b''i$ ובין $a' + b'i$.

$$(a'' + b''i) - (a' + b'i) = a + bi.$$

הצורה ג' מתארת גם את הבניה הגיאומטרית של ההבדל בין שני מספרים מרוכבים, אם נראה אותה כתאור הנוסחה

$$(a'' + b''i) - (a' + b'i) = a + bi.$$

עֵתָּה נִתְּנוֹנוֹת הַנְּקוּדוֹת N_1 ו N_2 וְאֵנּוּ מִבְּקִשִּׁים אֶת N . לִשְׁם כֵּךְ
נִרְשֹׁם אֶת הַקְּטַע $\overline{N_1 N_2}$ וְנִבְנָה דֶּרֶךְ הַנְּקוּדָה O אֶת הַקְּטַע $\overline{ON}$ מִקְבִּיל
וְחוּפֵף לִ $\overline{N_1 N_2}$ בְּשִׁים לֵב לֵכֵךְ שֶׁהַכּוּוֹן מ N ל O יִתְלַכֵּד עִם הַכּוּוֹן
מִן הַנַּחֲסֵר אֶל הַמַּחֲסֵר (בְּצוּרָה שֶׁלִּפְנֵינוּ מ N_2 ל N_1).

לתאור המכפלה של שני מספרים $a + bi$ ו $a' + b'i$ כדאי להשתמש בכתוב הטריגונומטרי. יהיו φ ו φ' הערך המוחלט והארגומנט של $a + bi$ וכן φ' ו φ' לגבי $a' + b'i$, אז נקבל

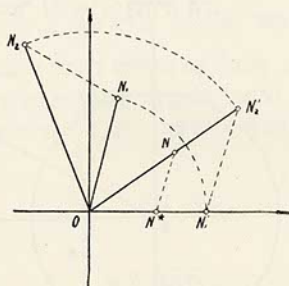
$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (a' + b'i) &= \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot \varrho'(\cos \varphi' + i \sin \varphi') \\ &= \varrho \varrho'[(\cos \varphi \cdot \cos \varphi' - \sin \varphi \cdot \sin \varphi') \\ &\quad + i(\sin \varphi \cdot \cos \varphi' + \sin \varphi' \cdot \cos \varphi)] \\ &= \varrho \varrho'[\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')]. \end{aligned}$$

אנו רואים, איפוא, כי הערך המוחלט של המכפלה שוה למכפלת הערכים המוחלטים של הגורמים וארגומנט המכפלה שוה לסכום הארגומנטים של הגורמים. בהתאם לזאת נבנה את התאור במישור המספרים (צורה ד').

תהא N הנקודה המתאימה למספר $\varphi (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ו N_1 הנקודה המתאימה למספר $\varphi' (\cos \varphi' + i \sin \varphi')$. נציין על ציר המספרים הממשיים את הנקודה N^* המתאימה למספר 1 ונבנה את המשולש $\triangle ON^*N$.

נקצה על ציר המספרים הממשיים נקודה N'_1 כך שהקטע $\overline{ON'_1}$ יחפוף את $\overline{ON_1}$. נרשום דרך N'_1 קו מקביל לקטע $\overline{N_1N}$ עד אשר יחתוך בנקודה N'_2 את המשך הקטע $\overline{ON}$ (או את הקטע עצמו). כך נוצרו שני משולשים דומים זה לזה

$$\Delta ON^*N \sim \Delta ON'_1N'_2.$$



צורה ד'.

אם נזכור עתה, כי $\overline{ON^*} = 1$, $\overline{ON} = q$, $\overline{ON_1'} = q'$, נוכל לכתוב (בגלל דמיון המשולשים הנ"ל)

$$\frac{\overline{\text{ON}'_2}}{\rho} = \frac{\varrho'}{1},$$

ומכאן

$$\overline{ON'_2} = QQ'.$$

אם נסובב את הקטע $\overline{ON_2}$ בוית φ' , תבוא הנקודה N_2' למקום הנקודה N_2 . נקודה זו מתארת את מכפלת המספרים המתאימים לנקודות N ו N_1 , כי מרחקה מ O שווה למכפלת הערכים המוחלטים φ ו φ' והארגומנט המתאים לה שווה לסכום הארגומנטים φ ו φ' .

ה ח ל ו ק הוא פעולה הפוכה לגבי פעולת הכפל. השוויון

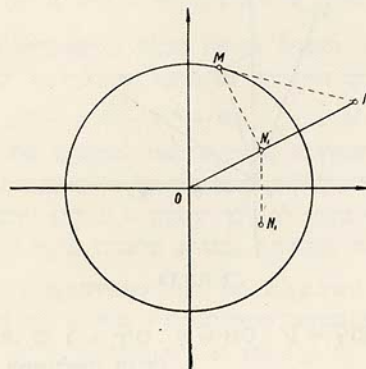
$$(a + bi) : (a' + b'i) = a'' + b''i$$

(a' ו b' לא שניהם 0) אומר, כי

$$a + bi = (a' + b'i) \cdot (a'' + b''i).$$

לתאור הגרפי של מנה יספיק, אם נדע למצא במישור המספרים

את הנקודה N_1 , המתאימה למספר $\frac{1}{a + bi}$, לאחר שתנתן הנקודה N , המתאימה למספר $a + bi$ (צורה ה').



צורה ה'.

נציין את המספר $\frac{1}{a + bi}$ ב $a' + b'i$; כלומר

$$\frac{1}{a + bi} = a' + b'i.$$

אם נציין (בכתיב טריגונומטרי)

$$a + bi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$a' + b'i = \rho' (\cos \varphi' + i \sin \varphi'),$$

נוכל לכתוב

$$1 = \rho \rho' [\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')];$$

ומכאן

$$\rho \rho' = 1; \quad \varphi + \varphi' = 2k\pi \quad (k \text{ מספר שלם}).$$

הערך המוחלט ρ' של המספר המבוקש שווה איפוא ל $\frac{1}{\rho}$ והארגומנט שלו φ' שווה ל $2k\pi - \varphi$. נבקש על הקרן הנושאת את הקטע $\overline{ON}$ נקודה N_1 , אשר מרחקה מ O שווה ל $\frac{1}{\rho}$. לשם כך נרשום, מסביב ל O כמרכז, מעגל עם הרדיוס 1. אם N נמצאת מחוץ למעגל, נעביר מ N משיק למעגל ומנקודת המגע M נוריד נצב ל $\overline{ON}$, אשר יחתוך את $\overline{ON}$ בנקודה הדרושה N_1 , כי המשולש OMN הוא ישר-זווית וקיים השוויון

$$\overline{OM}^2 = \overline{ON} \cdot \overline{ON}_1,$$

כלומר

$$1 = \rho \cdot \overline{ON}_1.$$

הנקודה המבוקשת N_1 היא הנקודה הסימטרית ל N_1 לגבי ציר המספרים הממשיים, כי המרחק $\overline{ON}_1$ שווה ל $\frac{1}{\rho}$ והארגומנט המתאים הוא $-\varphi + 2k\pi$.

אלו היתה הנקודה N בפנים המעגל היינו מחליפים זה בזה את תפקידי הנקודות N ו N_1 (בצורה ה') והנקודה המבוקשת היתה אז הנקודה הסימטרית לנקודה החיצונית.

אלו היתה הנקודה N על המעגל, כי אז היתה הנקודה N_1 סימטרית לגבי ציר המספרים הממשיים לנקודה N עצמה.

בתאור הגרפי של חבור מספרים מרוכבים ראינו (צורה ג'), כי ארך הקטע $\overline{ON}_2$ שווה לערך המוחלט של סכום שני המספרים $a + bi$ ו $a' + b'i$. ארך הקטע $\overline{ON}$ שווה לערך המוחלט של $a + bi$ וארך הקטע $\overline{ON}_1$ שווה לערך המוחלט של $a' + b'i$, הקטע $\overline{NN}_2$ חופף את הקטע $\overline{ON}_1$ (לפי הבניה). לפיכך ברורים אי-השוויונות,

הנובעים לפי משפטי הגיאומטריה מן המשולש *ONN_2

$$\overline{ON_2} < \overline{ON} + \overline{NN_2};$$

$$; \overline{ON_2} > \overline{ON} - \overline{NN_2}, \quad (\overline{ON} > \overline{NN_2}) \text{ אם}$$

$$. \overline{ON_2} > \overline{NN_2} - \overline{ON}, \quad (\overline{NN_2} > \overline{ON}) \text{ אם}$$

שני אי-השוויונות האחרונים מביעים למעשה אי-שוויון אחד האומר, כי הערך המוחלט של סכום שני מספרים אינו קטן מן הערך המוחלט של הבדל הערכים המוחלטים של שני המספרים. אנו כותבים איפוא

$$|(a + bi) + (a' + b'i)| < |a + bi| + |a' + b'i|;$$

$$|(a + bi) + (a' + b'i)| > ||a + bi| - |a' + b'i||.$$

לגבי הערך המוחלט של ההבדל בין שני מספרים מרוכבים נוכל לכתוב את אי-השוויון

$$|(a + bi) - (a' + b'i)| < |a + bi| + |a' + b'i|.$$

לגבי הכפל של שני מספרים מרוכבים ראינו, כי הערך המוחלט של המכפלה שווה למכפלת הערכים המוחלטים של הגורמים

$$|(a + bi) \cdot (a' + b'i)| = |a + bi| \cdot |a' + b'i|;$$

ולגבי החלוקה (אם a' ו b' אינם שניהם 0)

$$\left| \frac{a + bi}{a' + b'i} \right| = \frac{|a + bi|}{|a' + b'i|}.$$

הערך המוחלט של המספר הצמוד ל $a + bi$ שווה לערך המוחלט של $a + bi$

$$|a - bi| = |a + bi|.$$

המספרים המרוכבים מכילים כמקרה פרטי את המספרים הממשיים. הערך המוחלט של המספר הממשי x הוא, בהתאם להגדרה,

* אפשר להוכיח את אי-השוויונות הבאים גם כלי עזרה משפטי הגיאומטריה.

שווה ל x , אם x חיובי או 0, ושווה ל $-x$, אם x שלילי. הגדרה זו אינה סותרת את הגדרת הערך המוחלט של מספר מרוכב כל-שהוא (וממשי בכלל). לכן קיימים גם במספרים ממשיים x ו y אי-השוויונות

$$|x + y| < |x| + |y|;$$

$$|x + y| > ||x| - |y||;$$

$$|x - y| < |x| + |y|;$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$$

$$\text{אם } y \neq 0, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

נוסחת הכפל קובעת גם את נוסחת ההעלאה לחזקה. יהי

$$a + bi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

או

$$(a + bi)^2 = \rho^2 [\cos(\varphi + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi)] \\ = \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi),$$

ובדרך כלל (לכל n חיובי ושלם)

$$(a + bi)^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

אם $\rho = 1$, אז $a + bi = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ולפיכך

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

נוסחה זאת ידועה בשם נוסחת de Moivre.*

קל לראות בעזרת נוסחת החלוקה, כי נוסחת de Moivre

נכונה גם כאשר n שלילי. היא נכונה גם כאשר $n = 0$.

* Abraham de Moivre (1667—1754), מתמטיקן צרפתי, אשר

גלה בילדותו לאנגליה.

הוצאת השרש היא פעולה הפוכה לגבי פעולת ההעלאה לחזקה השווה.

$$\varrho'(\cos \varphi' + i \sin \varphi') = \sqrt[n]{\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

מביע, כי

$$\varrho^n (\cos n\varphi' + i \sin n\varphi') = \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

מכאן

$$\varrho^n = \varrho; \quad n\varphi' = \varphi + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

או

$$\varrho' = \sqrt[n]{\varrho} \quad ; \quad \varphi' = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n};$$

כלומר

$$\begin{aligned} \varrho'(\cos \varphi' + i \sin \varphi') \\ = \sqrt[n]{\varrho} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

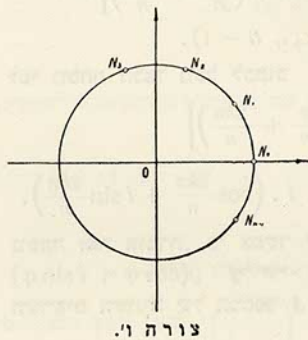
המספר הרשום באגף הימני של השוויון האחרון משנה את ערכו לפי ערך ה- k . כאשר k מקבל את הערכים $0, 1, 2, \dots, n-1$, מקבל הארגומנט $\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ את הערכים $\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}, \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}$. אלה הם n ערכים שונים זה מזה. אם k ישווה ל- n , נקבל את הארגומנט $\frac{\varphi}{n} + 2\pi$, אשר אינו שונה למעשה מן הארגומנט $\frac{\varphi}{n}$. ואם יוסיף k לקבל ערכים $n+1, n+2, \dots, 2n-1$, וכו' עד $2n-1$, יהיו הארגומנטים המתאימים גדולים ב- 2π מן הארגומנטים הקודמים, אולם ערכי המספרים בעלי הארגומנט $\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ (עובר מ- n עד $2n-1$) יהיו שווים

בהתאמה ל- n הערכים הקודמים. אנו רואים איפוא, כי לשרש ה- n ממספר נתון יש n ערכים שונים זה מזה. הדברים האלה יהיו ברורים יותר, אם נעיין בשרשים ה- n של המספר 1. נוכל לכתוב

$$1 = 1^n (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi);$$

(k מספר שלם כל-שהוא). לפיכך יקתב השרש ה- n של 1 בצורת

$$\sqrt[n]{1} = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right); \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$



נתאר את הדבר תאור גרפי (צורה ו'). מסביב לנקודת הראשית במישור המספרים נרשום מעגל עם הרדיוס 1. נקבע על היקף המעגל את הנקודות $N_0, N_1, N_2, \dots, N_{n-1}, N_n$. באופן ש N_0 תמצא על ציר המספרים הממשיים, בקצה הרדיוס היוצר עם הציר הממשי את הזווית $\frac{2\pi}{n}$, בקצה הרדיוס היוצר את הזווית $\frac{4\pi}{n}$.

וכו' עד N_{n-1} , המתאימה לזווית $\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

n נקודות אלה שונות זו מזו ומתארות n מספרים, אשר הערך המוחלט של כל אחד מהם שווה ל-1 וערכי הארגומנט שונים זה מזה. המספרים האלה מתאימים לערכי k מ-0 עד $n-1$. אם נתן ל- k את הערך n , תקצא הנקודה המתאימה על המעגל, בקצה הרדיוס, היוצר עם הציר הממשי את הזווית 2π ; הנקודה הזאת תתלכד איפוא עם N_0 . אם ימשיך k לקבל ערכים $n+1, n+2, \dots$, וכו', תתלכדנה הנקודות המתאימות עם n הנקודות אשר לפנינו. גם אם יקבל k ערכים

שלמים שליליים, נקבל נקודות על היקף המעגל, אשר תתלכדנה עם הנקודות $N_0, N_1, \dots, N_{n-1}$. השרשים ה- n יים של המספר 1 יוצרים איפוא קבוצה מסוימת של n ערכים קבועים. נוסחתם הכללית היא

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

ראינו, כי גם לשרש ה- n של $\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ יש n ערכים שונים ונוסחתם הכללית היא

$$\sqrt[n]{\varrho} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right],$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

לפי נוסחת הכפל נוכל לכתוב

$$\sqrt[n]{\varrho} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

$$= \sqrt[n]{\varrho} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) \cdot 1 \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right).$$

נוסחה זאת אומרת, כי אפשר לקבל את n השרשים השונים של $\varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ על-ידי הכפלת אחד השרשים האלה ב- n השרשים השונים של המספר 1.

תרגילים

(אותיות רומיות מציינות בתרגילים האלה מספרים ממשיים (פרט לאות i שהיא $\sqrt{-1}$). אותיות יוניות מציינות מספרים מרוכבים).

(א'). הוכח כי, אם במכפלה

$$(a + bi)(c + di) = A + Bi$$

קיים $A = B = 0$, חייב אחד הגורמים באגף השמאלי להיות 0.

(ב'). רשום את המספרים הבאים בצורה $A + Bi$:

$$\begin{aligned} & \text{(א)} \quad \frac{1}{1+i} \quad ; \quad (1+i)^2 \quad ; \quad \alpha^2 \quad ; \quad \sqrt{1+i} \quad ; \quad \sqrt{1-i} \\ & \text{(ה)} \quad \sqrt{\alpha} \quad ; \quad \frac{\alpha}{i} \quad ; \quad (1+\bar{\alpha}i)^2 \end{aligned}$$

(ג'). חשב וראה, כי $\xi^2 + \xi + 1 = 0$ אם $\xi = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$.

$$\left| \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \right| = 1 \quad \text{(ד'). הוכח את השוויון}$$

(ה'). רשום בצורה הטריגונומטרית את המספרים:

$$\begin{aligned} & \text{(א)} \quad 1+i \quad ; \quad \frac{1}{1+i} \quad ; \quad -2i \\ & \text{(ה)} \quad -1 \quad ; \quad -1+i\sqrt{3} \end{aligned}$$

(ו'). ציין במישור המספרים את הנקודות המתאימות לשרשים הבאים:

$$\begin{aligned} & \text{(א)} \quad \alpha = \sqrt[3]{1} \quad ; \quad \text{(ב)} \quad \alpha = \sqrt[4]{1} \quad ; \quad \text{(ג)} \quad \alpha = \sqrt[5]{1} \quad ; \quad \text{(ד)} \quad \alpha = \sqrt{i} \\ & \text{(ה)} \quad \alpha = \sqrt[3]{i} \end{aligned}$$

(ז'). מה הוא α , אם $\alpha^3 = 8$, $\alpha^4 = -16$?

(ח'). חשב ומצא, כי $\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2 = -1$; האם נובע מזה, כי $\frac{1-i}{1+i}$ שווה ל- i ?

(ט'). הוכח בדרך חשבון את אי-השוויון

$$|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|,$$

וכי סימן השוויון קיים רק כאשר הבדל הארגומנטים של α ו- β הוא $2k\pi$ (k מספר שלם).

(י'). הוכח בדרך חשבון את אי-השוויון

$$|\alpha - \beta| > ||\alpha| - |\beta||.$$

(י"א). הוכח את השוויון

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2.$$

(נוסחה זו מביעה משפט ידוע בגיאומטריה. מה הוא המשפט?)

(י"ב). הוכח, כי

$$\frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

(י"ג). פתח את הבטוי $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ לפי נוסחת

הבינום (n מספר טבעי) (ר' סעיף ב. 5.) ומצא נוסחאות המביעות

את $\cos n\varphi$ ו $\sin n\varphi$ בעזרת $\cos \varphi$ ו $\sin \varphi$.

פרק ב'.

המשואות האלגבריות ושרשיהן

ב. 1. הפולינום והמשואה האלגברית. במלה מספר מתכונים אנו מעתה למספר מרוכב, מלבד אם תצוין בפרוש כונה אחרת.

הגדרות. הבטוי האלגברי $a_k x^k$, אשר בו a_k הוא מספר קבוע כל-שהוא ו x הוא גדל משתנה, נקרא בשם מונום.

סכום של מספר סופי, נאמר n , של מונומים נקרא פולינום והמקדמים a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) נקראים מקדמי הפולינום.

יהי $p(x)$ פולינום; נוכל לכתוב

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n. \quad (\text{ב. 1. 1})$$

ובעזרת ציון הסכום $\sum$ נוכל לכתוב

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

מעריך החזקה הגבוהה ביותר של המשתנה, אשר מקדמה שונה מ-0, נקרא מעלת הפולינום (ציונה: $\{p(x)\}$). אם כל מקדמי הפולינום הם אפס, נאמר, כי הפולינום שווה לאפס באופן זהותי, ומעלתו היא -1; ונציין זאת בכתוב

$$p(x) \equiv 0. \quad (\text{ב. 2. 1})$$

שני פולינומים $p(x)$ ו $q(x)$ נקראים שווים זה לזה, רק כאשר כל מקדמי הפולינום האחד שווים בהתאמה למקדמי הפולינום השני; כלומר, אם מקדמי החזקות השוות בשני הפולינומים שווים זה לזה. שוויון כזה יצוין בציון הזהות

$$p(x) \equiv q(x).$$

לדוגמה: $1 + 2x - 3x^5$ ו $1 + 2x^2 - 3x^4$ הם פולינומים בעלי המעלות 5 ו 4 בהתאמה. הפולינומים האלה אינם שווים זה לזה, כי המקדמים של החזקה השניה של x , למשל, אינם שווים זה לזה בשני הפולינומים. האחד הוא 0 והשני 2. לעומת זאת שני הפולינומים $1 + 2x - 3x^5$ ו $1 - 3x^5 + 2x$ זה לזה.

אם נציב בפולינום (ב. 1.1) במקום x מספרים כלשהם, נקבל ערכים שונים עבור $p(x)$, אלה הם ערכי הפולינום. כל מספר a , אשר עבורו ערך הפולינום הוא אפס, כלומר

$$p(a) = a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \dots + a_n a^n = 0, \quad (\text{ב. 3.1})$$

נקרא נקודת אפס (או ערך מאפס) של הפולינום $p(x)$.
אם נכתוב

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0, \quad (\text{ב. 4.1})$$

ונשאל מה הם ערכי x המיוחדים המקיימים את השוויון הזה, יקרא השוויון (ב. 4.1) בשם משוואה אלגברית. לגבי הפולינום $p(x)$ נקרא x בשם גדל משתנה ו $p(x)$ הוא פונקציה של המשתנה x . אך לגבי המשוואה $p(x) = 0$ נקרא x בשם נעלם וערכי הנעלם המקיימים את השוויון (ב. 4.1) נקראים שרשי המשוואה.

כך למשל, 1 הוא שרש של המשוואה האלגברית

$$1 + 2x^2 - 3x^5 = 0,$$

כי

$$1 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1^5 = 0.$$

מעלת הפולינום $p(x)$ היא מעלת המשוואה $p(x) = 0$ וציונה $\{p(x)\}$ (קרי: המעלה של $p(x)$). לפיכך, אם בפולינום (ב. 1.1) $a_n \neq 0$, נוכל לכתוב $\{p(x)\} = n$.

2. ב. פעולות החשבון בפולינומים. אפשר לחשב בפולינומים כמו במספרים השלמים, אם נגדיר את פעולות החשבון בהם באופן

מתאים, כך שהתכונות היסודיות של הפעולות במספרים שלמים תהיינה קיימות גם לגבי הפעולות בפולינומים. תכונות אלה הן (ר' עמ' 10): תכונת האסוציאטיביות והקומוטטיביות של החבור ושל הכפל, ותכונת הדיסטריוטיביות של הכפל לגבי החבור.

אם נתונים שני פולינומים

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \\ q(x) &= b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m, \end{aligned} \quad (\text{ב. 2.1})$$

ונניח $n \geq m$, נגדיר את סכום שני הפולינומים בשוויון

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= q(x) + p(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \\ &\dots + (a_n + b_n)x^n. \end{aligned} \quad (\text{ב. 2.2})$$

(לשם נוחיות הכתיבה קבענו כאן $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_n = 0$)
כן נגדיר את ההבדל בין שני הפולינומים האלה בשוויון

$$p(x) - q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n \quad (\text{ב. 2.3})$$

וכן יהיה

$$q(x) - p(x) = -(p(x) - q(x)).$$

המכפלה תגדר בשוויון

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \\ &\dots + a_n b_m x^{n+m}. \end{aligned} \quad (\text{ב. 2.4})$$

אם נקבע, כי $a_k = 0$ כאשר $k > n$, וכן $b_k = 0$ כאשר $k > m$, נוכל לרשום בקצור, סכום:

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k)x^k;$$

הבדל:

$$p(x) - q(x) = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k)x^k;$$

מכפלה:

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} (a_k b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots + a_k b_0) x^k.$$

מן ההגדרות האלה נובע, כי מעלת $p(x) + q(x)$ או $p(x) - q(x)$ אינה גדולה מן הגדולה בין המעלות של $p(x)$ ושל $q(x)$, ומעלת $p(x) \cdot q(x)$ שווה לסכום המעלות של $p(x)$ ושל $q(x)$.

כשם שלא תמיד אפשר למצא מספר שלם שיהיה מנתם של שני מספרים שלמים נתונים, כן לא תמיד אפשר למצא פולינום שיהיה מנת שני פולינומים נתונים. על-כל-פנים נכון המשפט הבא שהוא הכללה של משפט לגבי מספרים שלמים.

משפט החלוקה. אם $p(x)$ ו $q(x)$ שני פולינומים

ו $q(x)$ אינו מתאפס באופן זהותי, אז קיימים שני פולינומים $s(x)$ ו $r(x)$ בעלי התכונות הבאות:

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x) \quad (\alpha)$$

$$r(x) \text{ קטנה ממעלת } q(x) \quad (\beta)$$

$$r(x) \text{ קבועים באופן יחיד.} \quad (\gamma)$$

הוכחה: נוכיח תחילה את הטענות (א) ו (ב) של המשפט.

אם $p(x) \equiv 0$, הרי נוכל לקחת $s(x) \equiv 0$ ו $r(x) \equiv 0$.

אם $p(x)$ אינו מתאפס באופן זהותי, נכתוב את הנוסחות

$$(1.2) \quad a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0$$

אם $n < m$ נוכל לקבוע $s(x) \equiv 0$, $r(x) \equiv p(x)$, כי

$$p(x) = 0 \cdot q(x) + p(x) \quad (\alpha)$$

$$p(x) \text{ קטנה ממעלת } q(x) \quad (\beta)$$

אם לא, $n \geq m$ ונוכל להתבונן בפולינום

$$(2.2) \quad r_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot q(x)$$

ומעלת $r_1(x)$ שתצוין ב n_1 קטנה מ n , שהיא מעלת $p(x)$. אם מעלת

$r_1(x)$ קטנה מ m , נוכל לקבוע

$$s(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}, \quad r(x) = r_1(x),$$

כדי לקיים את (א) ו (ב) של המשפט. אך אם מעלת $r_1(x)$ גדולה או שווה ל m , נוכל לכתוב

$$r_1(x) = c_{10} + c_{11}x + c_{12}x^2 + \dots + c_{1n_1}x^{n_1},$$

$$(2.2) \quad (c_{1n_1} \neq 0, \quad n_1 \geq m \geq 0).$$

עתה נעניין בפולינום

$$(2.2) \quad r_2(x) = r_1(x) - \frac{c_{1n_1}}{b_m} x^{n_1-m} \cdot q(x).$$

מעלת הפולינום הזה, נאמר n_2 , קטנה מ n_1 (ממעלת $r_1(x)$). אם מעלתו קטנה גם מ m , נוכל לקבוע

$$s(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{c_{1n_1}}{b_m} x^{n_1-m}, \quad r(x) = r_2(x),$$

כדי לקיים את הדרישות (א) ו (ב) של המשפט. אם עדיין גדול או שווה ל m , נכתוב

$$r_2(x) = c_{20} + c_{21}x + \dots + c_{2n_2}x^{n_2}, \quad (c_{2n_2} \neq 0, \quad n_2 \geq m \geq 0)$$

(2.2) (8)

ונעניין בפולינום

$$(2.2) \quad r_3(x) = r_2(x) - \frac{c_{2n_2}}{b_m} x^{n_2-m} \cdot q(x).$$

מעלת הפולינום הזה קטנה מ n_2 ואפשר להמשיך את הדיון על $r_3(x)$ כמו שעשינו לגבי $r_2(x)$ ו $r_1(x)$.

נקבל סדרת פולינומים

$$p(x), \quad r_1(x), \quad r_2(x), \quad r_3(x), \quad \dots$$

בעלי המעלות $n > n_3 > n_2 > n_1 > n$ שהולכות ויורדות.

מכאן ברור, כי אחר מספר סופי של צעדים נגיע לפולינום $r_k(x)$, אשר מעלתו קטנה מ m . הפולינומים

$$r_1(x), r_2(x), \dots, r_k(x)$$

מקיימים את השויונות

$$p(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \cdot q(x) + r_1(x);$$

$$r_1(x) = \frac{c_{1n_1}}{b_m} x^{n_1-m} \cdot q(x) + r_2(x);$$

$$\dots$$

$$r_{k-1}(x) = \frac{c_{k-1, n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} \cdot q(x) + r_k(x);$$

ואם נחבר את כולם, נקבל

$$p(x) = \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{c_{1n_1}}{b_m} x^{n_1-m} + \dots + \frac{c_{k-1, n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m} \right) q(x) + r_k(x),$$

ונוכל לקבוע

$$(10.2. \text{ב}) \quad \begin{cases} s(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{c_{1n_1}}{b_m} x^{n_1-m} + \dots + \frac{c_{k-1, n_{k-1}}}{b_m} x^{n_{k-1}-m}, \\ r(x) = r_k(x), \end{cases}$$

כדי לקיים את הדרישות (א) ו (ב) של המשפט.

עתה נוכיח את הטענה (ג):

נניח, כי קיימים ארבעה פולינומים $r_1(x)$, $r_2(x)$, $s_1(x)$ ו $r_3(x)$

כך, שיהיה

$$(11.2. \text{ב}) \quad \begin{cases} p(x) = s_1(x) \cdot q(x) + r_1(x); & \{r_1(x)\} < \{q(x)\}; \\ p(x) = s_2(x) \cdot q(x) + r_2(x); & \{r_2(x)\} < \{q(x)\}; \end{cases}$$

ונוכיח, כי במקרה זה

$$r_1(x) \equiv r_2(x) \quad , \quad s_1(x) \equiv s_2(x).$$

מ (11.2. ב) נובע

$$s_1(x) \cdot q(x) + r_1(x) \equiv s_2(x) \cdot q(x) + r_2(x);$$

ולכן

$$(12.2. \text{ב}) \quad (s_1(x) - s_2(x)) \cdot q(x) \equiv r_2(x) - r_1(x).$$

לולא היה $s_1(x) \equiv s_2(x)$, היה $(s_1(x) - s_2(x)) \cdot q(x)$ פולינום,

אשר מעלתו גדולה ממעלת $q(x)$ או שווה לה ומעלת $r_2(x) - r_1(x)$ קטנה ממעלת $q(x)$; דבר זה לא יתכן בגלל (12.2. ב). לכן

$$s_1(x) \equiv s_2(x),$$

$$r_2(x) - r_1(x) \equiv (s_1(x) - s_2(x))q(x) \equiv 0;$$

כלומר,

$$r_1(x) \equiv r_2(x).$$

בזאת הוכחה גם הטענה (ג) של משפט החלוק.

דוגמה:

$$p(x) = 2x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1,$$

$$q(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1,$$

נמצא את $s(x)$ ו $r(x)$ באופן הבא:

$$r_1(x) = p(x) - x^2 \cdot q(x)$$

$$= (2x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1) - (2x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2)$$

$$= -2x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1;$$

$$\begin{aligned} r_2(x) &= r_1(x) - (-x) \cdot q(x) \\ &= (-2x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1) - (-2x^4 + 3x^3 - x^2 + x) \\ &= 4x^3 - 6x^2 + 3x - 1; \\ r_3(x) &= r_2(x) - 2 \cdot q(x) \\ &= (4x^3 - 6x^2 + 3x - 1) - (4x^3 - 6x^2 + 2x - 2) \\ &= x + 1. \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} s(x) &= x^2 - x + 2, \\ r(x) &= x + 1. \end{aligned}$$

כלומר,

$$\begin{aligned} 2x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1 &= \\ &= (x^2 - x + 2)(2x^3 - 3x^2 + x - 1) + (x + 1). \end{aligned}$$

תרגילים

(י"ד). בדוק, אם המספרים 1 ו-2 הם שרשים של המשוואה

$$1 + 2x^2 - 3x^4 = 0.$$

(ט"ו). הכפל את הפולינומים $3x^3 - 2x^2 - 1$ ו- $x^2 - x^3 + x^4$

זה בזה.

(ט"ז). מצא את $s(x)$ ואת $r(x)$ אם

$$p(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 8x - 7; \quad q(x) = x^2 - x + 2.$$

ב. 3. פולינומים ומחלקיהם.

הגדרה. אם $p(x)$ ו- $q(x)$ פולינומים, ואם קיים פולינום $s(x)$ המבטיח את השוויון

$$p(x) = q(x) \cdot s(x),$$

(ב. 3. 1)

ג. 3. פולינומים ומחלקיהם

45

נאמר, כי $p(x)$ מתחלק ב- $q(x)$, או גם: $q(x)$ מחלק את $p(x)$. נציין זאת כך:

$$\begin{aligned} (ב. 3. 2) \quad & q(x) \mid p(x); \\ & \text{(קרי: } q(x) \text{ מחלק את } p(x)). \end{aligned}$$

משפט. אם $p(x), A(x), B(x), r(x), s(x)$ פולינומים, ואם $p(x)$ מחלק את $A(x)$ ואת $B(x)$, אזי $p(x)$ מחלק גם את

$$r(x) \cdot A(x) \pm s(x) \cdot B(x).$$

הוכחה. מכיון ש $p(x)$ מחלק את $A(x)$ ואת $B(x)$, קיימים שני פולינומים $A_1(x)$ ו- $B_1(x)$ כך, שיהיה

$$A(x) = p(x) \cdot A_1(x); \quad B(x) = p(x) \cdot B_1(x).$$

לכן:

$$\begin{aligned} r(x) \cdot A(x) \pm s(x) \cdot B(x) &= r(x) \cdot p(x)A_1(x) \pm s(x) \cdot p(x)B_1(x) \\ &= p(x)(r(x)A_1(x) \pm s(x)B_1(x)), \end{aligned}$$

והשוויון האחרון אומר, כי $p(x)$ מחלק את

$$r(x)A(x) \pm s(x)B(x).$$

אם $p(x)$ מחלק את $A(x)$ ואת $B(x)$ ושני הפולינומים אינם מתאפסים באופן זהותי, יקרא $p(x)$ מחלק משותף של $A(x)$ ו- $B(x)$. כל מחלק של מחלק משותף, אף הוא כמובן מחלק משותף של $A(x)$ ו- $B(x)$. נוכיח, כי בין המחלקים המשותפים של $A(x)$ ו- $B(x)$ קיים מחלק אחד $d(x)$, שהוא המחלק המשותף הגדול ביותר. נציין אותו בציון

$$(ב. 3. 3) \quad d(x) = (A(x), B(x)).$$

ואלה תכונותיו:

(א) $d(x)$ הוא מחלק משותף של $A(x)$ ו $B(x)$;
 (ב) כל מחלק משותף של $A(x)$ ו $B(x)$ מחלק את $d(x)$;
 (ג) מקדם החזקה הגבוהה ביותר של x ב $d(x)$ הוא 1;
 (ד) $d(x)$ קבוע באופן יחיד; כלומר, אין שני פולינומים שונים זה מזה המקיימים את (א) (ב) ו (ג).

כדי להוכיח את קיום המחלק המשותף הגדול ביותר וכדי למצוא נחשב בדרך הנקראת אלגוריתמוס של אוקלידס: נוכל להניח כי $A(x)$ ו $B(x)$ אינם שווים ל 0 באופן זהותי. לפי משפט החלוק (עמ' 40) קיימים שני פולינומים $s(x)$ ו $r_1(x)$ המקיימים

$$A(x) = s(x) \cdot B(x) + r_1(x), \quad \{r_1(x)\} < \{B(x)\}. \quad (\text{ב. 3. 4})$$

אם $r_1(x) \equiv 0$, יכול $B(x)$ מחלק במקדם חזקתו הגבוהה ביותר של x לשמש כ $d(x)$, המקיים את הדרישות (א), (ב) ו (ג).

אם $r_1(x)$ אינו 0 באופן זהותי, קיימים שני פולינומים אחרים, $s_1(x)$ ו $r_2(x)$ עם

$$B(x) = s_1(x) \cdot r_1(x) + r_2(x); \quad \{r_2(x)\} < \{r_1(x)\}. \quad (\text{ב. 3. 5})$$

אם $r_2(x) \equiv 0$, יכול $r_1(x)$ מחולק במקדם חזקתו הגבוהה ביותר של x לשמש כ $d(x)$, כיון שפולינום זה מקיים את (א), (ב) ו (ג).

אם $r_2(x)$ אינו 0 באופן זהותי, אפשר למצוא שוב שני פולינומים $s_2(x)$ ו $r_3(x)$ אשר יקיימו

$$r_1(x) = s_2(x) \cdot r_2(x) + r_3(x); \quad \{r_3(x)\} < \{r_2(x)\}. \quad (\text{ב. 3. 6})$$

אם נמשיך בדרך זו, נקבל סדרת פולינומים $r_1(x), r_2(x), \dots$ אשר מעלותיהם הולכות ויורדות. לכן נגיע אחרי מספר סופי של צעדים לפולינום $r_{k+1}(x)$ המתאפס באופן זהותי, כלומר יתקיימו השוויונות הבאים:

$$\begin{aligned} A(x) &= s(x) \cdot B(x) + r_1(x), & (0 \equiv r_1(x)), \\ B(x) &= s_1(x) \cdot r_1(x) + r_2(x), & (0 \equiv r_2(x)), \\ r_1(x) &= s_2(x) \cdot r_2(x) + r_3(x), & (0 \equiv r_3(x)), \\ &\vdots & \vdots \\ r_{k-2}(x) &= s_{k-1}(x) \cdot r_{k-1}(x) + r_k(x), & (0 \equiv r_k(x)), \\ r_{k-1}(x) &= s_k(x) \cdot r_k(x). \end{aligned}$$

$r_k(x)$ מחלק במקדם חזקתו הגבוהה ביותר של x יכול לשמש כ $d(x)$ ומקיים את (א), (ב) ו (ג). קיום (ג) מובן מאילו. קיום (ב) נובע מ (ב. 3. 7), כי אפשר להוכיח בזה אחר זה, כי כל מחלק משותף של $A(x)$ ו $B(x)$ הוא גם מחלק של הפולינומים

$$\begin{cases} r_1(x) = A(x) - s(x) \cdot B(x), \\ r_2(x) = B(x) - s_1(x) \cdot r_1(x), \\ r_3(x) = r_1(x) - s_2(x) \cdot r_2(x), \\ \vdots \\ r_k(x) = r_{k-2}(x) - s_{k-1}(x) \cdot r_{k-1}(x). \end{cases} \quad (\text{ב. 3. 8})$$

וקיום (א) נובע גם הוא מ (ב. 3. 7), אם נעיין בשוויונות אלה בסדר הפוך ונזכור, כי $r_k(x)$ מחלק את $r_{k-1}(x), r_{k-2}(x), \dots, r_1(x)$ ו $A(x)$.

נשאר עוד להוכיח, כי גם (ד) נכון. אך אילו היו קיימים שני פולינומים $d_1(x)$ ו $d_2(x)$ המקיימים את (א), (ב) ו (ג), היה לפי (ב)

$$d_1(x) \mid d_2(x) \quad \text{וגם} \quad d_2(x) \mid d_1(x)$$

כלומר, היו קיימים שני פולינומים $g(x)$ ו $h(x)$ עם השוויונות $d_1(x) = g(x) \cdot d_2(x)$ וגם $d_2(x) = h(x) \cdot d_1(x)$.

מן השוויון הראשון נסיק, כי $\{d_1(x)\} > \{d_2(x)\}$.

ומן השוויון השני נקבל $\{d_1(x)\} < \{d_2(x)\}$.

מכאן שמעלות $d_1(x)$ ו $d_2(x)$ שוות זו לזו ו $g(x)$ ו $h(x)$ הם מספרים קבועים שונים מאפס (כי $A(x)$ ו $B(x)$ אינם מתאפסים באופן זהותי). מכיון שהמקדמים של החזקות הגבוהות ביותר של x ב $d_1(x)$ ו $d_2(x)$ שווים שניהם ל 1, יהיה $g(x) = h(x) = 1$ ולכן $d_1(x) \equiv d_2(x)$ וגם (ד) הוכח.

הדרך שהלכנו בה אינה אלא הכללה של האלגוריתמוס של אוקלידס, הידוע בתורת החשבון כאמצעי לחשוב המחלק המשותף הגדול ביותר של שני מספרים שלמים.

תרגילים

(י"ז). מצא את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים

$$2 - x^2 + x^3 \text{ ו } 1 - x - 2x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 3x^5.$$

(י"ח). כנ"ל לגבי הפולינומים

$$6 - 4x^4 + 3x - x^6 \text{ ו } 6 - 3x^3 + 2x^2 - x^4.$$

(י"ט). חשב באלגוריתמוס של אוקלידס את המחלק המשותף

הגדול ביותר של שני המספרים 324 ו 246, מבלי לפרק מספרים אלה לגורמים. הוכח את אמתות תשובתך.

$$\text{רמז לפתרון: } (246 < 78) \quad 324 = 1 \cdot 246 + 78$$

$$(12 < 78) \quad 246 = 3 \cdot 78 + 12 \text{ וכי}$$

(כ). כנ"ל לגבי המספרים 1629 ו 819.

ב. 4. שרשי פולינום ומחלקיו הלינאריים. * יהא α מספר

ו $p(x)$ פולינום, אשר מעלתו גדולה או שווה ל 1. נעיין ב $p(x)$ ובפולינום $q(x) = x - \alpha$ ונמצא לפי משפט החלוק (ראה עמ' 40) את הפולינומים $s(x)$ ו $r(x)$ המקיימים

$$p(x) = s(x) \cdot (x - \alpha) + r(x). \quad (\text{ב. 4. 1})$$

מעלת $q(x)$ היא 1, ומעלת $r(x)$ קטנה מ 1. לפיכך הפולינום $r(x)$ הוא מספר קבוע ואפשר לחשבו בהצבת מספר כל-שהוא בנוסחה (ב. 4. 1). אם נציב במקום x את המספר α , נקבל

$$p(\alpha) = r(\alpha) \equiv r(x). \quad (\text{ב. 4. 2})$$

לכן

$$p(x) = s(x) \cdot (x - \alpha) + p(\alpha); \quad (\text{ב. 4. 3})$$

ומכאן, אם $p(\alpha) = 0$, יהיה $p(x) = s(x) \cdot (x - \alpha)$, כלומר הפולינום $p(x)$ יתחלק ב $(x - \alpha)$.

נניח עתה, כי $p(x) = A(x) \cdot (x - \alpha)$, מקום שם $A(x)$ הוא פולינום נתון כל-שהוא; אז יהיה $p(\alpha) = A(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) = 0$, לפיכך קיים

משפט. תנאי הכרחי ומספיק לכך, שהפולינום $p(x)$ יתחלק ב $(x - \alpha)$ הוא, כי יהיה ערך מאפס של הפולינום $p(x)$.

הבטוי $x - \alpha$, שהוא פולינום ממעלה ראשונה, נקרא בשם מחלק לינארי של הפולינום $p(x)$.
וכן קיים המשפט הבא:

משפט. אם $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ הם k מספרים שונים זה מזה, והם שרשי המשוואה $p(x) = 0$, אז קיים פולינום $q(x)$ כך, שיהיה

* אנו נאמר לפעמים בקצור "שרש של הפולינום $p(x)$ " במקום "נקודת אפס" או "ערך מאפס" ונתכונן או לשרש של המשוואה $p(x) = 0$.

$$\phi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k) \cdot q(x). \quad (4.4)$$

הוכחה. כיון ש $p(\alpha_1) = 0$ הרי קיים (לפי המשפט הקודם) פולינום $p_1(x)$ המקיים את השוויון

$$\phi(x) = (x - \alpha_1) \cdot p_1(x).$$

כיון שגם $p(\alpha_2) = 0$ ו α_2 שונה מ α_1 , נוכל לכתוב

$$p_1(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot p_1(\alpha_2) = 0; \quad \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0.$$

לכן $p_1(\alpha_2) = 0$ וקיים איפוא פולינום $p_2(x)$ המבטיח את השוויון

$$p_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot p_2(x);$$

$$\phi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot p_2(x).$$

כיון שגם $p(\alpha_3) = 0$ הרי

$$p_2(\alpha_3) = (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)p_2(\alpha_3) = 0;$$

$$\alpha_3 - \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 - \alpha_2 \neq 0.$$

לכן $p_2(\alpha_3) = 0$ דבר המוכיח את קיומו של פולינום $p_3(x)$ באופן, שיהיה

$$p_2(x) = (x - \alpha_3)p_3(x);$$

$$\phi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)p_3(x).$$

אם נחזור על פעולות אלה k פעמים, ננכח בנכוונות המשפט.

בעזרת התוצאה האחרונה נוכל להוכיח גם את המשפטים היסודיים הבאים:

משפט. לפולינום $p(x)$ ממעלה חיובית n יש לכל היותר n שרשים שונים.

הוכחה. אילו היו ל $p(x)$ יותר מאשר n שרשים שונים, אפשר היה למצוא $n+1$ מספרים שונים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, שעבורם

$$p(\alpha_1) = p(\alpha_2) = \dots = p(\alpha_{n+1}) = 0.$$

ולכן, לפי המשפט הקודם, היה קיים פולינום $q(x)$, כך שיהיה

$$\phi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n+1}) \cdot q(x). \quad (5.4)$$

אילו התאפס $q(x)$ באופן זהותי, היה גם $p(x)$ פולינום מתאפס באופן זהותי בנגוד להנחה שמעלת $p(x)$ היא חיובית. אך אם $q(x)$ אינו מתאפס באופן זהותי, יהיה האגף הימני של השוויון (ב. 4. 5) פולינום ממעלה $n+1$ לפחות, והאגף השמאלי, $p(x)$, הוא פולינום ממעלה n , ויש כאן סתירה. לכן היתה ההנחה שמספר השרשים של $p(x)$ גדול מ n מוטעית ומספר שרשי $p(x)$ אינו יכול לעלות על מעלת הפולינום $p(x)$, שהיא n .

משפט. אם $p(x)$ ו $q(x)$ הם פולינומים ממעלות קטנות או שוות ל n , ואם הערכים של שני הפולינומים שווים זה לזה עבור $n+1$ ערכים שונים של x , המשתנה x שני הפולינומים שווים זה לזה באופן זהותי.

הוכחה. נניח, כי $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ הם $n+1$ מספרים שונים, שעבורם

$$\phi(\alpha_1) = q(\alpha_1),$$

$$\phi(\alpha_2) = q(\alpha_2),$$

$$\dots$$

$$\phi(\alpha_{n+1}) = q(\alpha_{n+1}).$$

לפיכך הפולינום

$$A(x) = \phi(x) - q(x) \quad (6.4)$$

הוא בעל $n+1$ שרשים לפחות, הלא הם המספרים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, ומעלתו היא n לכל היותר. לפי המשפט הקודם מעלת $A(x)$ אינה יכולה להיות חיובית ו $A(x)$ מתאפס באופן זהותי, כלומר $p(x)$ ו $q(x)$ שווים זה לזה באופן זהותי.

תרגילים

(כ"א). הוכח, כי 1, 2, -2, הם שרשי הפולינום

$$x^3 - x^2 - 4x + 4$$

וכי אין לו שרשים אחרים. פרק פולינום זה לגורמים.

(כ"ב). $p(x) = (x+1)(x-3)(x+2)$. מצא את כל שרשיו

של פולינום זה.

(כ"ג). מצא את שרשיהם המשותפים של הפולינומים

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad \text{ו-} \quad x^3 + x^2 - x - 1$$

ב. 5. משפט הבינום של ניוטון (* Newton).

הגדרות. מכפלת כל המספרים הטבעיים מ 1 עד n כל-שהוא $n!$ (קרי: עצרת של n);

$$(ב. 1.5) \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

וכך $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ וכו'.הציון $0!$ נגדר בשוויון $0! = 1$.כמו כן, אם n ו k הם מספרים טבעיים או 0, ו $k < n$,נגדיר את הציון $\binom{n}{k}$ (קרי: n מעל k) בשוויון

$$(ב. 2.5) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

המספרים $\binom{n}{k}$ נקראים בשם מקדמים בינומיים. מקור השם הזה יתברר בהמשך הדברים.

* Isaac Newton, מתמטיקון אנגלי, ממציא החשבון האינפיניטסימלי בעל תורות חשובות באסטרונומיה ובפיסיקה (1642-1727).

מהגדרות אלה נובע עבור כל מספר טבעי n

$$(ב. 3.5) \quad \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = 1.$$

המשפט הבא מביע תכונה חשובה של המקדמים הבינומיים.

משפט-עזר. אם n ו k הם מספרים טבעיים או 0,

$$0 \leq k < n$$

$$(ב. 4.5) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

הוכחה. לפי הגדרת המקדמים הבינומיים

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!};$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!};$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!};$$

ולכן

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} [(k+1) + (n-k)] \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

עתה נוכל לנסח ולהוכיח את

משפט הבינום של ניוטון (Newton).

אם n מספר טבעי, אז

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n. \quad (\text{ב. 5.})$$

(הבטוי $a+b$, סכום של שני אברים, נקרא בשם בינום, ומכאן שם המשפט).

הוכחה. קל לבדוק ולראות, כי המשפט נכון עבור $n=1$
 $n=2$:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a+b;$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

הוכחת המשפט עבור כל מספר טבעי n תבוא בדרך האנדוקציה השלמה*: נראה, שאם המשפט נכון עבור מספר טבעי n כל-שהוא, הוא מוכרח להיות נכון גם עבור המספר הטבעי הבא אחריו, $n+1$. כיון שאנו יודעים את אמיתות המשפט עבור $n=1$ ו- $n=2$, נוכל להסיק בזה אחר זה גם את נכונותו עבור המספרים 3, 4, 5 וכו'.

נניח איפוא, כי עבור מספר n מסוים נכון השוויון

* אכסיומת האנדוקציה השלמה, שהיא חלק ממערכת האכסיומות ביסודות האנליסה המתמטית, אומרת: אם תכונה T כל-שהיא קיימת לגבי המספר 1, ואם מן ההנחה, כי תכונה זו קיימת לגבי המספר הטבעי n , נובע קיום התכונה T לגבי $n+1$, או קיימת התכונה הזאת בכל המספרים הטבעיים.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n} b^n.$$

אזי

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\ &= \left(\binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a b^n \right) \\ &\quad + \left(\binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^3 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \right) \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] a^n b + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] a^{n-1} b^2 + \dots \\ &\quad + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}. \end{aligned}$$

מכיון שלפי ההגדרות ולפי משפט-העזר

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0},$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{1},$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2},$$

$$\dots$$

$$\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n},$$

$$\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1},$$

הרי

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.$$

משפט הבינום נכון אפוא עבור המספר $n+1$; ולכן, נכון הוא עבור כל מספר טבעי.

תרגילים

(כ"ד). חשב את הערך המספרי של $5! \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{7}{2}$.

(כ"ה). הוכח, כי עבור $k < n$ קיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(כ"ו). פתח לפי משפט הבינום את הבטויים

(א) $(x-3)^5$; (ב) $(y+z)^7$.

(כ"ז). חשב את הבטוי $(a-b)^n$.

(כ"ח). הוכח, כי

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n;$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \pm \binom{n}{n-1} \mp \binom{n}{n} = 0.$$

(כ"ט). הוכח בדרך האנדוקסיה השלמה: אם n מספר טבעי

גדול מ 1 ו x מספר גדול מ -1 אך שונה מ 0, אז

$$(1+x)^n > 1+nx.$$

ב. 6. נגזרות של פולינומים.

הגדרות. אם

(ב. 6. 1) $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
הוא פולינום, אזי הפולינום

(ב. 6. 2) $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$
 $= 1! \left[\binom{1}{1} a_1 + \binom{2}{1} a_2 x + \dots + \binom{n}{1} a_n x^{n-1} \right]$

יקרא הפולינום הנגזר או הנגזרת של הפולינום $p(x)$ ויצוין בהוספת תג מעל לאות המסמנת את הפולינום המקורי. מכיון שהנגזרת אף היא פולינום, אפשר לחשב את נגזרת $p''(x)$ (קרי: הנגזרת השניה של $p(x)$); וכן אפשר לחשב נגזרת שלישית, רביעית וכו'. את הנגזרות האלה מן הסדרים השונים נוהגים לציין באופן הבא:

$$p^{(0)}(x) = p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n;$$

$$p^{(1)}(x) = p'(x) = 1! \left[\binom{1}{1} a_1 + \binom{2}{1} a_2 x + \dots + \binom{n}{1} a_n x^{n-1} \right];$$

$$p^{(2)}(x) = p''(x) = 2! \left[\binom{2}{2} a_2 + \binom{3}{2} a_3 x + \dots + \binom{n}{2} a_n x^{n-2} \right];$$

(ב. 6. 3) $\dots + \binom{n}{2} a_n x^{n-2}$

$$p^{(k)}(x) = p^{(k)}(x) = k! \cdot \left[\binom{k}{k} a_k + \binom{k+1}{k} a_{k+1} x + \dots + \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right]; \quad (k < n)$$

$\dots + \binom{n}{k} a_n x^{n-k}$

$$p^{(n)}(x) = p^{(n)}(x) = n! \binom{n}{n} a_n;$$

וכאשר $k > n$, יהיה $p^{(k)}(x) \equiv 0$.

לפיכך, הנגזרות מסדר גבוה ממעלת הפולינום מתאפסות באופן זהותי.

לדוגמה: אם $p(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ אז

$$p'(x) = 6x^2 - 2x + 3; \quad p''(x) = 12x - 2;$$

$$p^{(3)}(x) = 12; \quad p^{(4)}(x) = p^{(5)}(x) = \dots = 0.$$

משפט. אם a ו- b מספרים, $p(x)$ ו- $q(x)$ פולינומים,

אזי

$$(a) \quad (a \cdot p(x) \pm b \cdot q(x))' = a \cdot p'(x) \pm b \cdot q'(x);$$

(הנגזרת של הפולינום $ap(x) \pm bq(x)$ היא הפולינום $a p'(x) \pm b q'(x)$.)

$$(b) \quad (p(x) \cdot q(x))' = p(x) \cdot q'(x) + p'(x) \cdot q(x);$$

(הנגזרת של המכפלה $p(x) \cdot q(x)$ היא $p(x) \cdot q'(x) + p'(x) \cdot q(x)$.)

הוכחה. אם

$$(b. 6.) \quad \begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m, \end{aligned}$$

נוכל להניח (מבלי לפגוע בכלליות ההוכחה), כי $n \geq m$ וכי $b_k = 0$ אם $k > m$.

$$\begin{aligned} a \cdot p(x) \pm b \cdot q(x) &= (aa_0 \pm bb_0) + (aa_1 \pm bb_1)x \\ &\quad + (aa_2 \pm bb_2)x^2 + \dots + (aa_n \pm bb_n)x^n; \end{aligned}$$

ולכן, לפי ההגדרה,

$$\begin{aligned} (a \cdot p(x) \pm b \cdot q(x))' &= (aa_1 \pm bb_1) + 2(aa_2 \pm bb_2)x + \\ &\quad \dots + n(aa_n \pm bb_n)x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}) \\ &\quad \pm b(b_1 + 2b_2x + \dots + mb_mx^{m-1}) \\ &= ap'(x) \pm bq'(x). \end{aligned}$$

כדי להוכיח את (ב) נחשב (לפי ההגדרה) את הנגזרת של

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \\ &\quad \dots + a_nb_mx^{n+m}. \end{aligned}$$

נקבל:

$$\begin{aligned} [p(x) \cdot q(x)]' &= (a_0b_1 + a_1b_0) + 2(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x + \\ &\quad \dots + (n+m)a_nb_mx^{n+m-1} \\ &= a_0b_1 + (a_0 \cdot 2b_2 + a_1 \cdot b_1)x + \dots + a_n \cdot mb_mx^{n+m-1} \\ &\quad + a_1b_0 + (a_1b_1 + 2a_2b_0)x + \dots + na_n \cdot b_mx^{n+m-1} \\ &= (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)(b_1 + 2b_2x + \dots + mb_mx^{m-1}) \\ &\quad + (a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1})(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) \\ &= p(x) \cdot q'(x) + p'(x) \cdot q(x). \end{aligned}$$

משפט. אם $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ הם n פולינומים, אז הנגזרת של הפולינום

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_n(x)$$

היא

$$\begin{aligned} p'(x) &= p'_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \cdot \dots \cdot p_n(x) \\ &\quad + p_1(x) \cdot p'_2(x) \cdot p_3(x) \cdot \dots \cdot p_n(x) \\ &\quad + p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p'_3(x) \cdot \dots \cdot p_n(x) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) \cdot \dots \cdot p_{n-1}(x) \cdot p'_n(x). \end{aligned}$$

הוכחה. (בדרך האנדוקציה השלמה).

המשפט נכון במקרה $n = 2$, כי מקרה זה מתלכד עם המקרה

(ב) של המשפט הקודם.

נניח, כי המשפט קיים עבור מכפלת n פולינומים $p_k(x)$, $n = 1, 2, \dots, n$, ונוכיח, כי אז יהיה קיים גם עבור מכפלת $n + 1$ פולינומים.

אם נכתוב

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_n(x),$$

$$P(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_n(x) \cdot p_{n+1}(x) = p(x) \cdot p_{n+1}(x),$$

הרי יהיה

$$\begin{aligned} P'(x) &= (p(x) \cdot p_{n+1}(x))' \\ &= p'(x) \cdot p_{n+1}(x) + p(x) \cdot p'_{n+1}(x) \\ &= p'_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_n(x) \cdot p_{n+1}(x) \\ &\quad + p_1(x) \cdot p'_2(x) \cdot \dots \cdot p_n(x) \cdot p_{n+1}(x) \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad + p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p'_n(x) \cdot p_{n+1}(x) \\ &\quad + p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_n(x) \cdot p'_{n+1}(x), \end{aligned}$$

ובזאת הוכח המשפט.

תרגילים

(ל'). חשב את הנגזרות של הפולינומים הבאים:

$$p(x) = 2x - 3x^2 + 4; \quad s(x) = 3x^3 - 4;$$

$$q(x) = x - 5 + x^7; \quad r(x) = x + 1,$$

ושל הפולינום

$$A(x) = p(x) \cdot q(x) - s(x) \cdot r(x).$$

(ל'). חשב את כל הנגזרות (הנגזרות מכל הסדרים)

של הפולינומים $6 + 3x^2 - x^5$, $1 - x - x^2$, $x - 3x^5 + 2x^6$.

(ל'). חשב את הנגזרות של המכפלה $x^m \cdot x^n$ בשתי דרכים והשווה את התוצאות.

(ל'). הוכח כי, אם פולינום $A(x)$ מתחלק ב $[p(x)]^2$, נגזרתו $A'(x)$ מתחלקת בפולינום $p(x)$.

ב. 7. נוסחת טיילור (Taylor*) ושרשים מרבים.

משפט. אם α מספר כל שהוא ו $p(x)$ פולינום ממעלה n , אז

$$p(x) = p(\alpha) + \frac{p'(\alpha)}{1!}(x - \alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 +$$

$$\dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(x - \alpha)^n. \quad (\text{ב. 7. 1})$$

נוסחה זו נקראת נוסחת טיילור לפולינומים ואגפה הימני נקרא פתוח טיילור של $p(x)$ סביב (הנקודה) α .

הוכחה. אם

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (\text{ב. 7. 2})$$

נוכל לכתוב

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1[\alpha + (x - \alpha)] + a_2[\alpha + (x - \alpha)]^2 + \\ &\quad \dots + a_n[\alpha + (x - \alpha)]^n. \end{aligned}$$

ולפי נוסחת הבינום

* Brook Taylor, מחמשיקן אנגלי, (1685—1731).

$$p(x) = (x - \alpha)^k \cdot q(x); \quad q(\alpha) \neq 0.$$

לפי נוסחת טיילור עבור $p(x)$ נקבל

$$p(x) = (x - \alpha)^k \cdot q(x) = p(\alpha) + \frac{p'(\alpha)}{1!} (x - \alpha) +$$

$$\dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n.$$

ואם נציב בשוויון האחרון α במקום x , נקבל

$$0 = p(\alpha) + 0 + \dots + 0.$$

כלומר,

$$p(\alpha) = 0;$$

$$(x - \alpha)^k \cdot q(x) = \frac{p'(\alpha)}{1!} (x - \alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!} (x - \alpha)^2 +$$

$$\dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n;$$

לכן,

$$(x - \alpha)^{k-1} \cdot q(x) = \frac{p'(\alpha)}{1!} + \frac{p''(\alpha)}{2!} (x - \alpha) +$$

$$\dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^{n-1}. \quad (\text{ב. 4.7})$$

אם α היה שרש מסדר ראשון של $p(x)$, גמרנו את ההוכחה, כי במקרה זה אנף שמאל של השוויון האחרון שווה ל $q(x)$ (כי $k = 1$) ואם נציב בשוויון זה α במקום x , נקבל $0 \neq q(\alpha) = p'(\alpha)$ כנדרש במשפט.

אם α הוא שרש מסדר גדול או שווה ל 2, הרי $k - 1 > 0$ ולכן נקבל, אם נציב α במקום x בשוויון (ב. 4.7),

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + \\ &+ a_1 \alpha + \left(\frac{1}{1}\right) a_1 (x - \alpha) \\ &+ a_2 \alpha^2 + \left(\frac{2}{1}\right) a_2 \alpha (x - \alpha) + \left(\frac{2}{2}\right) a_2 (x - \alpha)^2 \\ &+ \dots \\ &+ a_n \alpha^n + \left(\frac{n}{1}\right) a_n \alpha^{n-1} (x - \alpha) + \left(\frac{n}{2}\right) a_n \alpha^{n-2} (x - \alpha)^2 + \\ &\dots + \left(\frac{n}{n}\right) a_n (x - \alpha)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= p(\alpha) + \frac{p'(\alpha)}{1!} (x - \alpha) + \frac{p''(\alpha)}{2!} (x - \alpha)^2 + \\ &\dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n. \end{aligned}$$

הגדרה. אם $p(x)$ פולינום בעל השרש α , ו n מספר טבעי כך, ש $p(x)$ מתחלק ב $(x - \alpha)^n$ אבל אינו מתחלק ב $(x - \alpha)^{n+1}$, אזי n נקרא מדרג הרבוי של השרש α , או סדר השרש α .

משפט. אם α שרש מסדר k של הפולינום $p(x)$,

אז

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad p^{(k)}(\alpha) \neq 0. \quad (\text{ב. 3.7})$$

ונהפוך, אם קיים (ב. 3.7), אז α הוא שרש מסדר k של $p(x)$.

לשון אחר: (ב. 3.7) הוא תנאי הכרחי ומספיק לכך, ש α יהיה שרש מסדר k של הפולינום $p(x)$.

הוכחה. אם α שרש מסדר k של הפולינום $p(x)$, אשר מעלתו n , הרי קיים פולינום $q(x)$ כך שיהיה

$$0 = \frac{p'(\alpha)}{1!} + 0 + \dots + 0;$$

כלומר,

$$p'(\alpha) = 0.$$

לכן יהיה

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^{k-1} q(x) &= \frac{p''(\alpha)}{2!} (x - \alpha) + \frac{p^{(3)}(\alpha)}{3!} (x - \alpha)^2 + \\ &\dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^{n-1}; \end{aligned}$$

$$(x - \alpha)^{k-2} \cdot q(x) = \frac{p''(\alpha)}{2!} + \frac{p^{(3)}(\alpha)}{3!} (x - \alpha) +$$

$$\dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^{n-2}.$$

(ב. 7. 5)

אם הסדר k היה בדיוק 2, השוויון (ב. 7. 5) יִקָּטב

$$q(x) = \frac{p''(\alpha)}{2!} + \frac{p^{(3)}(\alpha)}{3!} (x - \alpha) + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^{n-2}$$

ולכן

$$0 \neq q(\alpha) = \frac{p''(\alpha)}{2!} + 0 + \dots + 0,$$

כלומר,

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = 0 \neq p''(\alpha),$$

כנדרש במשפט.

אם הסדר k גדול מ-2, אפשר להמשיך כמו לעיל ולהראות בזה-אחר-זה שהנגזרות $p''(x), p^{(3)}(x), \dots, p^{(k-1)}(x)$ שוות לאפס כאשר מציבים בהן α במקום x , אבל $p^{(k)}(\alpha) \neq 0$; ובזאת הוכח החלק הראשון של המשפט.

אם נתון, כי

$$p(\alpha) = p'(\alpha) = \dots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0, \quad p^{(k)}(\alpha) \neq 0,$$

או, לפי נוסחת טיילור,

$$\begin{aligned} p(x) &= p(\alpha) + \frac{p'(\alpha)}{1!} (x - \alpha) + \dots + \frac{p^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!} (x - \alpha)^{k-1} \\ &\quad + \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n \\ &= \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n \\ &= (x - \alpha)^k \left[\frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} + \frac{p^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!} (x - \alpha) + \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^{n-k} \right]. \end{aligned}$$

מכאן ש $p(x)$ מתחלק ב $(x - \alpha)^k$, אבל אינו מתחלק ב $(x - \alpha)^{k+1}$ בגלל $p^{(k)}(\alpha) \neq 0$ וכך הוכח גם החלק השני של המשפט.

תרגילים.

(ל"ד). הוכח בעזרת המשפט האחרון בדרך ששמשה בסעיף (ב. 4), כי לפולינום $p(x)$ ממעלה n יש n שרשים לכל היותר, גם אם נמנה כל שרש מספר פעמים השווה לסדרו.

(ל"ה). הוכח, כי השרשים המרובים של פולינום $p(x)$ הם השרשים המשותפים של הפולינומים $p(x)$ ו $p'(x)$.

(ל"ו). הוכח, כי לפולינומים $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$ ו $x^3 - 7x - 6$ אין שרשים מרובים.

(ל"ז). פתח את הפולינומים בתרגיל הקודם לפי נוסחת טיילור סביב הנקודות $x = 1$, $x = 2$.

(ל"ד). מצא את השרשים המרבים של הפולינומים

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x - 12, \quad x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 5x - 3$$

$$1 \text{ ו } x^4 - 4x^2 - 4$$

(ל"ט). הוכח, שאם $p(x)$ ו $q(x)$ פולינומים ממעלה n לכל

היותר ואם קיים מספר α , אשר עבורו $p(\alpha) = q(\alpha)$, $p'(\alpha) = q'(\alpha)$,
 $\dots$, $p^{(n)}(\alpha) = q^{(n)}(\alpha)$, אז $p(x)$ ו $q(x)$ שווים זה לזה באופן זהותי.

(מ'). פתח את הבטוי $(a+x)^n$ מסביב לנקודה $x=0$ והראה,

כי הפתוח של טיילור הוא הפתוח לפי נוסחת הבינום.

פרק ג'. פתרון המשוואות מהמעלה הראשונה עד הרביעית

ג. 1. המשוואות מן המעלה הראשונה והשניה.

מן הפרק הקודם ידוע, כי לפולינום

$$P_1(x) = a_0 + a_1x, \quad a_1 \neq 0 \quad (\text{ג. 1. 1})$$

יש ערך מאפס אחד לכל היותר. אם ישנו ערך כזה ונציינו ב α ,
 יהיה, לפי ההגדרה,

$$a_0 + a_1\alpha = 0,$$

$$a_1\alpha = -a_0;$$

ולכן

$$\alpha = -\frac{a_0}{a_1}.$$

אבל, אם נציב בפולינום $P_1(x)$ במקום x את המספר $\left(-\frac{a_0}{a_1}\right)$, נקבל

$$P_1\left(-\frac{a_0}{a_1}\right) = a_0 + a_1 \cdot \left(-\frac{a_0}{a_1}\right) = a_0 - a_0 = 0;$$

ומכאן

המשפט: למשוואה האלגברית מן המעלה הראשונה

$$a_0 + a_1x = 0, \quad a_1 \neq 0 \quad (\text{ג. 1. 2})$$

יש שרש יחיד, הוא

$$x = -\frac{a_0}{a_1} \quad (3.1.1)$$

נטפל עתה בפולינום מן המעלה השניה

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad a_2 \neq 0, \quad (4.1.1)$$

ונגיד, כי יש לו ערך מאפס α . אזי

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 = 0,$$

ולכן, אם נכפיל את השויון האחרון ב a_2 , נקבל

$$4a_0a_2 + 4a_1a_2\alpha + 4a_2^2\alpha^2 = 0.$$

אם נוסיף עתה לשני אגפי השויון את המספר $a_1^2 - 4a_0a_2$, ונהפוך את סדר האברים באגף השמאלי של השויון, נקבל

$$4a_2^2\alpha^2 + 4a_1a_2\alpha + a_1^2 = a_1^2 - 4a_0a_2;$$

או, בצורה אחרת,

$$(2a_2\alpha + a_1)^2 = a_1^2 - 4a_0a_2. \quad (5.1.1)$$

למספר (הממשי או המרוכב) $a_1^2 - 4a_0a_2$ יש שני שרשים רבועיים (ממשיים או מרוכבים). אם נציין אחד מהם בציון המקבל $\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}$, יהיה השרש השני $-\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}$, ונוכל לציין בציון $\pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}$ את שני השרשים בבת אחת: את השרש האחד נקבל, אם נכתוב את הסימן $+$, ואת השני, אם נכתוב את הסימן $-$.

מ (5.1.1) נובע, כי

$$2a_2\alpha + a_1 = \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2};$$

$$2a_2\alpha = -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2};$$

ולכן

$$\alpha = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

הוכחנו עתה, כי, אם יש שרשים למשוואה $P_2(x) = 0$, אין הם אלא המספרים

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2};$$

$$x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

אבל, אם נציב בפולינום $P_2(x)$ במקום x את x_1 או את x_2 , נקבל

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} + a_2 \left(\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \right)^2 &= \\ = a_0 - \frac{a_1^2}{2a_2} \pm \frac{a_1}{2a_2} \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2} + \frac{a_1^2}{4a_2} & \\ \mp \frac{a_1 \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} + \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2} &= 0. \end{aligned}$$

לפיכך x_1 ו x_2 הם שרשים של $P_2(x) = 0$. ונוכל לנסח את

המשפט: למשוואה האלגברית מן המעלה השניה

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0, \quad a_2 \neq 0, \quad (6.1.1)$$

יש שני שרשים, והם

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2};$$

(7.1.1)

$$x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

שני השרשים שוים זה לזה כאשר ורק כאשר

$$a_1^2 - 4a_0a_2 = 0.$$

ג.2. נוסחת קרדן-טרטליא (Cardan-Tartaglia) לפתרון

משואות מן המעלה השלישית.

נעין בפולינום מן המעלה השלישית

$$(ג.2.1) \quad P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad a_3 \neq 0$$

ונציב במקום המשתנה x את הבטוי

$$(ג.2.2) \quad x = z - \frac{1}{3} \cdot \frac{a_2}{a_3},$$

מקום שם z משתנה חדש. נקבל:

$$P_3\left(z - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}\right) = a_0 + a_1\left(z - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}\right) + a_2\left(z - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}\right)^2 + a_3\left(z - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}\right)^3$$

$$= \left[a_0 - \frac{1}{3} a_1 \cdot \frac{a_2}{a_3} + \frac{1}{9} a_2 \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^2 - \frac{1}{27} a_3 \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^3 \right] + \left[a_1 - \frac{2}{3} a_2 \cdot \frac{a_2}{a_3} + \frac{1}{3} a_3 \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^2 \right] z + \left[a_2 - a_3 \cdot \frac{a_2}{a_3} \right] z^2 + a_3 z^3.$$

נגדיר עתה את הפולינום

$$(ג.2.3) \quad Q_3(z) = \frac{1}{a_3} \cdot P_3\left(z - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}\right) = z^3 - pz - q,$$

מקום שם

* Nicolo Tartaglia, מתמטיקן איטלקי, (1500–1557).

Hieronimo Cardano, מתמטיקן איטלקי, (1501–1576).

$$p = \frac{1}{3} \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^2 - \frac{a_1}{a_3},$$

(ג.2.4)

$$q = -\frac{a_0}{a_3} + \frac{1}{3} \frac{a_1 a_2}{a_3^2} - \frac{2}{27} \cdot \left(\frac{a_2}{a_3} \right)^3,$$

ונניח, כי β הוא שרש של המשואה $Q_3(z) = 0$; כלומר,

$$\beta^3 - p\beta - q = 0.$$

אם נפרק את β לשני מחברים $\beta = u + v$ בתנאי שיהיה

$$(ג.2.5) \quad u \cdot v = \frac{p}{3},$$

נקבל

$$\begin{aligned} \beta^3 - p\beta - q &= (u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) - p(u+v) - q \\ &= u^3 + v^3 - q + 3uv(u+v) - p(u+v) \\ &= (u^3 + v^3 - q) + (3uv - p)(u+v) = 0. \end{aligned}$$

ולפי התנאי (ג.2.5) המחובר $(3uv - p)(u+v)$ הוא אפס. לכן יהיה

$$(ג.2.6) \quad u^3 + v^3 = q.$$

ואם נעלה את שני אגפי השויון (ג.2.5) לחזקה השלישית, נקבל

$$u^3 \cdot v^3 = \frac{p^3}{27}.$$

מ (ג.2.6) נובע

$$(ג.2.7) \quad v^3 = q - u^3,$$

ולכן

$$u^3 \cdot (q - u^3) = \frac{p^3}{27}.$$

או, בצורה אחרת,

$$(ג.2.8) \quad (u^3)^2 - q \cdot u^3 + \frac{p^3}{27} = 0.$$

המשוואה האחרונה היא משוואה מן המעלה השניה, אם נראה את u^3 כנעלם. לפי נוסחת הסעיף הקודם

$$u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}, \quad (9.2.ג.)$$

או

$$u^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}};$$

ומכאן, לפי (ג.2.7),

$$v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}},$$

או

$$v^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}.$$

ברור, כי אין כל חשיבות לדבר איזה משני ערכי השרש

הרבעי נציג במקום $\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$; כי, אם נציג במקום אחד הערכים את השני, נחליף רק את תפקידיהם של u ו v , ודבר זה לא ישנה את הערך של β , שהוא $(u+v)$.

אם נוציא את השרשים השלישיים משני האגפים של השוויון

(ג.2.9), נקבל

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

ואם נסמן ב u_1, u_2, u_3 את שלשת הערכים של שרש שלישי זה, נוכל לקבל, לפי התנאי (ג.2.5), את המספרים

$$v_1 = \frac{p}{3u_1}; \quad v_2 = \frac{p}{3u_2}; \quad v_3 = \frac{p}{3u_3};$$

ובעזרתם את שלשת הפתרונות $\beta_3, \beta_2, \beta_1$ של המשוואה $Q_3(z) = 0$.

$$(10.2.ג.) \quad \begin{cases} \beta_1 = u_1 + v_1 = u_1 + \frac{p}{3u_1}; \\ \beta_2 = u_2 + v_2 = u_2 + \frac{p}{3u_2}; \\ \beta_3 = u_3 + v_3 = u_3 + \frac{p}{3u_3}. \end{cases}$$

פתרונות אלה מתקבלים איפוא על-ידי כך שמציבים בבטוי

$$\beta = u + \frac{p}{3u}$$

במקום u את שלשת הערכים של השרש

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

עתה קל לראות, כי שלשת המספרים $\beta_3, \beta_2, \beta_1$ הם באמת פתרונות של המשוואה

$$Q_3(z) = z^3 - pz - q = 0.$$

כי (לפשטות ההוכחה נסמן ב β אחד המספרים $\beta_3, \beta_2, \beta_1$)

$$\begin{aligned} \beta^3 - p\beta - q &= \left(u + \frac{p}{3u}\right)^3 - p\left(u + \frac{p}{3u}\right) - q \\ &= u^3 + pu + \frac{p^2}{3u} + \frac{p^3}{27u^3} - pu - \frac{p^2}{3u} - q \\ &= u^3 + \frac{p^3}{27u^3} - q = \frac{1}{u^3} \left[(u^3)^2 - qu^3 + \frac{p^3}{27} \right], \end{aligned}$$

ולפי (ג.2.8) המסגרת האחרונה שווה לאפס,

כיון ש $Q_3(z)$ הוגדר בשוויון (ג. 2. 3) ו $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ הם שרשים של $Q_3(z) = 0$ הרי

$$\frac{1}{a_3} P_3\left(\beta_1 - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}\right) = 0 ; \quad \frac{1}{a_3} P_3\left(\beta_2 - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}\right) = 0 ;$$

$$\frac{1}{a_3} P_3\left(\beta_3 - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}\right) = 0 ;$$

ולכן המספרים

$$\alpha_1 = \beta_1 - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}, \quad \alpha_2 = \beta_2 - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}, \quad \alpha_3 = \beta_3 - \frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3}$$

הם שלשת השרשים של המשוואה $P_3(x) = 0$. מכאן

המשפט: למשוואה האלגברית מן המעלה השלישית

$$(ג. 2. 11) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0, \quad a_3 \neq 0,$$

יש שלשה שרשים, אשר ערכם

$$(ג. 2. 12) \quad \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3} + u_1 + \frac{p}{3u_1}; \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3} + u_2 + \frac{p}{3u_2}; \\ \alpha_3 = -\frac{1}{3} \frac{a_2}{a_3} + u_3 + \frac{p}{3u_3}; \end{cases}$$

מקום שם u_1, u_2, u_3 הם שלשת הערכים של השרש

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

והמספרים p, q מוגדרים בשוויונות

$$p = \frac{1}{3} \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 - \frac{a_1}{a_3},$$

$$q = -\frac{a_0}{a_3} + \frac{1}{3} \frac{a_1 a_2}{a_3^2} - \frac{2}{27} \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2.$$

שלשת השרשים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ יכולים גם לא להיות שונים זה מזה. הנוסחה (ג. 2. 12) היא נוסחת קרדן-טרטליא.

תרגילים

פתור את המשוואות הבאות (כלומר מצא את שרשיהן):

$$(א'') \quad 2x + 6 = 0.$$

$$(ב'') \quad 3x - 4i = 0.$$

$$(ג'') \quad (1 + 2i)x + 6 - 5i = 0.$$

$$(ד'') \quad x^2 + 2x - 3 = 0.$$

$$(ה'') \quad x^2 - 4x - 21 = 0.$$

$$(ו'') \quad x^2 + 2x + 5 = 0.$$

$$(ז'') \quad x^2 + ix + 2 = 0.$$

$$(ח'') \quad x^3 + x - 2 = 0.$$

$$(ט'') \quad x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$$

$$(י') \quad x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$$

$$(יא'') \quad x^3 + ix - x + 3i = 0.$$

(ב'') הראה, כי תנאי הכרחי ומספיק לכך, שלמשוואה מן המעלה השנייה יהיה שרש כפול, הוא $a_2^2 - 4a_1a_3 = 0$.

(ג'') הוכח כי, אם x_1 ו x_2 הם שני השרשים של

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (a_2 \neq 0),$$

אזי

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

(נ"ד). הראה, כי תנאי הכרחי ומספיק לכך, שלמשוואה מן המעלה השלישית יהיה שרש כפול (שני שרשים שווים), הוא $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 0$. מהו השרש הכפול במקרה זה? (רמז: אל תשתמש בנוסחת קרדן-טרטליא, אלא בנגזרת של הפולינום ובתרגיל ל"ה של הפרק הקודם).

ג. פתרון טריגונומטרי של המשוואות מן המעלה השלישית. נוסחת קרדן-טרטליא מן הסעיף הקודם נותנת אמנם את שרשי המשוואות מן המעלה השלישית בכל המקרים, אולם היא מסובכת למדי ומביעה לעתים את השרשים בצורה שאינה נוחה. נבדוק, לדוגמה, את שרשי המשוואות

$$(1.3.1) \quad x^3 + 3x - 4 = 0;$$

$$(2.3.1) \quad z^3 - 2z + 1 = 0.$$

קל לראות, כי $x = 1$ וכן $z = 1$ הם שרשים של המשוואות האלה, אך נוסחת קרדן-טרטליא נותנת שרשים אלה בצורה

$$(3.3.1) \quad x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \frac{-3}{3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}},$$

$$(4.3.1) \quad z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{5}{108}}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{5}{108}}}}$$

וקשה לראות, כיצד מביעים ביטויים אלה את המספר 1.

עובדה זאת מביאה אותנו לחקירת התכונות של שרשי המשוואה

$$(5.3.1) \quad x^3 - px - q = 0,$$

כאשר p ו q ממשיים,

א. פתרון טריגונומטרי של המשוואות מן המעלה השלישית 77

א. אם $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} > 0$, אז u^3 ממשי, ולכן יהיה אחד הערכים של u ממשי ושני האחרים מרוכבים. לפיכך יהיה גם אחד השרשים β בנוסחה (2.10) ממשי ושני האחרים מרוכבים.

ב. אם $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 0$, יהיה $u^3 = v^3$, ל u (וכן ל v) יהיו שלשה ערכים: אחד ממשי ושני מרוכבים, אולם הדרישה, כי $u \cdot v$ יהיה ממשי (הרי $3uv = p$ הוא ממשי), תביא לכך שלבטוי $u + v$ יהיו שלשה ערכים ממשיים, שמהם שניים שווים זה לזה (ראה תרגיל נ"ד).

ג. אם $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$, יהיה u^3 (וכן v^3) מספר מרוכב. נראה עתה, כי במקרה זה יהיו לבטוי $u + v$ שלשה ערכים ממשיים שונים זה מזה.

מקרה זה ידוע בספרות הקלסית בשם "casus irreducibilis".

נעיין איפוא במשוואה

$$(1.5.3) \quad x^3 - px - q = 0,$$

אשר בה p ו q הם מספרים ממשיים, p חיובי וקיים אי-השוויון

$$(2.6.3) \quad \frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}.$$

על-ידי כתיבת $\leq$ במקום $<$ בנוסחה האחרונה אנו כוללים גם את המקרה הקודם ב' בדיון אשר יבוא. כי גם במקרה הזה יש למשוואה (3.5) שלשה שרשים ממשיים, אלא ששניים מהם יהיו, כאמור, שווים זה לזה.

לפי משפט de Moivre קיים (עבור כל קשת φ בין 0 ל 2π)

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 \\ &= \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi - 3 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi; \end{aligned}$$

ולכן, כיון שהחלקים הממשיים בשני אגפי השוויון שווים זה לזה, נקבל

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi \\ &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi(1 - \cos^2\varphi) \\ &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.\end{aligned}$$

לפיכך קיים עבור כל φ

$$(7.3.ג) \quad \cos^3\varphi - \frac{3}{4}\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos 3\varphi \equiv 0.$$

אם נכפיל את הזהות האחרונה במספר חיובי כל-שהוא k^3 , נקבל

$$(8.3.ג) \quad k^3\cos^3\varphi - \frac{3}{4}k^2 \cdot k\cos\varphi - \frac{k^3}{4}\cos 3\varphi \equiv 0.$$

$$\text{נקבע } k = 2\sqrt{\frac{p}{3}} > 0 \text{ ונציג בנוסחה (8.3.ג)}$$

$$(9.3.ג) \quad x = k \cdot \cos\varphi.$$

נקבל:

$$(10.3.ג) \quad x^3 - px - \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}\cos 3\varphi = 0.$$

כיון ששוויון זה קיים בכל φ , נקבע את φ כך, שיהיה

$$\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}\cos 3\varphi = q.$$

כלומר,

$$(11.3.ג) \quad \cos 3\varphi = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}} = \sqrt{\frac{\frac{q^2}{4}}{\frac{p^3}{27}}};$$

ולפי התנאי (6.3.ג) יהיה

$$-1 < \sqrt{\frac{\frac{q^2}{4}}{\frac{p^3}{27}}} < 1.$$

השוויון (11.3.ג) קובע ל φ שלשה ערכים שונים זה מזה בין

$$0 \text{ ל } 2\pi. \text{ כי, אם } \varphi = \varphi_1 \text{ מקיים את השוויון (11.3.ג), גם } \varphi_1 + \frac{2m\pi}{3}$$

(m מספר שלם) יקיים את השוויון הזה. בין הקשתות המתאימות למספרים $0, \pm 1, \pm 2$, אם $m = 0$ אפשר לבחור שלש קשתות $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ המקיימות את (11.3.ג) ונמצאות בין 0 ל 2π (כל קשת אחרת φ , אשר תקיים את (11.3.ג), תהיה שונה מ φ_1 או מ φ_2 או מ φ_3 בכפולה של 2π). לכן, לפי (9.3.ג) ו (10.3.ג), הערכים

$$(12.3.ג) \quad \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\varphi_1, \\ x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\varphi_2, \\ x_3 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\varphi_3, \end{cases}$$

הם שלשת השרשים של המשוואה (5.3.ג). מכאן

המשפט: למשוואה האלגברית מן המעלה השלישית

$$(5.3.ג) \quad x^3 - px - q = 0,$$

שבה p ו q מספרים ממשיים המקיימים

$$(6.3.ג) \quad \frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27},$$

יש שלשה שרשים ממשיים, שאפשר להביעם בנוסחות

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \varphi_1, \\ x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \varphi_2, \\ x_3 = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \varphi_3, \end{cases}$$

מקום שם $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ הן שלש הקשתות בין 0 ל 2π המקיימות את השוויון

$$\cos 3\varphi = \sqrt{\frac{\frac{q^2}{4}}{\frac{p^3}{27}}} = \frac{9q}{2p^2} \sqrt{\frac{p}{3}}. \quad (13.3.ג)$$

תרגילים

פתור את המשוואות הבאות בדרך טריגונומטרית:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x - 2 &= 0. & (נ"ה) \\ x^3 - 3x + 2 &= 0. & (נ"ו) \\ x^3 - 8x - 3 &= 0. & (נ"ז) \\ x^3 - 15x - 4 &= 0. & (נ"ח) \\ x^3 - 10x + 3 &= 0. & (נ"ט) \end{aligned}$$

ג. 4. פתרון המשוואות מן המעלה הרביעית. לפתרון משוואות מן המעלה הרביעית ידועות דרכים אחדות. נביא כאן שתיים מהן.

דרך הפתרון של פֶּרַרִי (Ferrari*). נעיין במשוואה

$$(1.4.ג) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0, \quad a_4 \neq 0,$$

ונניח, כי יש לה שרש α ; כלומר,

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4\alpha^4 = 0.$$

אם נכפיל את השוויון הזה ב a_4 , נקבל

$$(2.4.ג) \quad a_0a_4 + a_1a_4\alpha + a_2a_4\alpha^2 + a_3a_4\alpha^3 + a_4^2\alpha^4 = 0.$$

נטפל עתה בבטוי האלגברי

$$\begin{aligned} (3.4.ג) \quad & (a_4\alpha^2 + \frac{1}{2}a_3\alpha + z)^2 - (u\alpha + v)^2 = \\ & = a_4^2\alpha^4 + a_3a_4\alpha^3 + (2a_4z + \frac{1}{4}a_3^2 - u^2)\alpha^2 + \\ & + (a_3z - 2uv)\alpha + (z^2 - v^2), \end{aligned}$$

מקום שם z, u, v מספרים, שערכם עוד לא נקבע. אם נקבע את ערכם כך, שיקיימו

$$(4.4.ג) \quad \begin{cases} 2a_4z + \frac{1}{4}a_3^2 - u^2 = a_2a_4, \\ a_3z - 2uv = a_1a_4, \\ z^2 - v^2 = a_0a_4, \end{cases}$$

ישוה האגף הימני של (ג. 4. 3) לאפס, לפי (ג. 4. 2).

מן השוויון השני ב (ג. 4. 4) נובע

$$(5.4.ג) \quad 4u^2v^2 = (2uv)^2 = (a_3z - a_1a_4)^2;$$

ומשני השוויונות האחרים נובע

$$(6.4.ג) \quad u^2 = 2a_4z + \frac{1}{4}a_3^2 - a_2a_4,$$

$$(7.4.ג) \quad v^2 = z^2 - a_0a_4.$$

* Luigi Ferrari, מתמטיקן איטלקי (1565-1522).

אם נציב את שני הבטויים האלה של u^2 ו v^2 בתוך (ג. 4. 5), נקבל

$$4(2a_4z + \frac{1}{4}a_3^2 - a_2a_4)(z^2 - a_0a_4) = (a_3z - a_1a_4)^2.$$

השוויון האחרון אינו אלא משוואה מן המעלה השלישית לקביעת z . היא נקראת בשם „המשוואה הפותחת” (ובקצור: „הפותרת” או „רזולנטה”) של המשוואה הנתונה מן המעלה הרביעית. צורתה המפורשת היא

$$8a_4z^3 - 4a_2a_4z^2 + (2a_1a_3a_4 - 8a_0a_4^2)z + (8.4.4) + (4a_0a_2a_4^2 - a_0a_3^2a_4 - a_1^2a_4^2) = 0.$$

כיון שלמדנו למצוא את שרשי המשוואות מן המעלה השלישית, נדע לקבוע את z כך, שיקיים את (ג. 4. 8). אחרי כן נקבע את u ואת v לפי (ג. 4. 6), (ג. 4. 7) והשוויון השני של (ג. 4. 4). אזי יתקיימו השוויונות (ג. 4. 4) ו α יקיים לפי (ג. 2. 4), (ג. 3. 4) ו (ג. 4. 4) את השוויון

$$(9.4.4) \quad (a_4\alpha^2 + \frac{1}{2}a_3\alpha + z)^2 - (u\alpha + v)^2 = 0;$$

ומכאן,

$$(a_4\alpha^2 + \frac{1}{2}a_3\alpha + z)^2 = (u\alpha + v)^2.$$

לכן α מוכרח לקיים לפחות אחד מן השוויונות

$$a_4\alpha^2 + \frac{1}{2}a_3\alpha + z = u\alpha + v,$$

$$a_4\alpha^2 + \frac{1}{2}a_3\alpha + z = -(u\alpha + v);$$

כלומר, α הוא אחד השרשים של שתי המשוואות מן המעלה השנייה (לגבי הנעלם x)

$$(10.4.4) \quad \begin{cases} a_4x^2 + (\frac{1}{2}a_3 - u)x + (z - v) = 0, \\ a_4x^2 + (\frac{1}{2}a_3 + u)x + (z + v) = 0. \end{cases}$$

כמו כן, אם נציין ב $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ את ארבעת השרשים של המשוואות (ג. 4. 10), ארבעת המספרים האלה יקיימו את (ג. 4. 9); ולכן הם יהיו גם שרשים של המשוואה (ג. 4. 1). שאותה רצינו לפתור. הוכחנו איפוא את

המשפט: למשוואה מן המעלה הרביעית

$$(1.4.4) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0, \quad a_4 \neq 0,$$

יש ארבעה שרשים (שונים זה מזה או לאו), המתקבלים באופן הבא:

יהא z שרש של הפותרת

$$(8.4.4) \quad 8a_4z^3 - 4a_2a_4z^2 + (2a_1a_3a_4 - 8a_0a_4^2)z + (4a_0a_2a_4^2 - a_0a_3^2a_4 - a_1^2a_4^2) = 0$$

של המשוואה (ג. 4. 1) ויהיו u ו v מספרים המקיימים

$$(5.4.4) \quad 2uv = a_3z - a_1a_4;$$

$$(6.4.4) \quad u^2 = 2a_4z + \frac{1}{4}a_3^2 - a_2a_4;$$

$$(7.4.4) \quad v^2 = z^2 - a_0a_4;$$

אזי ארבעת השרשים של שתי המשוואות מן המעלה השנייה

$$(10.4.4) \quad \begin{cases} a_4x^2 + (\frac{1}{2}a_3 - u)x + (z - v) = 0, \\ a_4x^2 + (\frac{1}{2}a_3 + u)x + (z + v) = 0 \end{cases}$$

הם ארבעת השרשים של המשוואה (ג. 4. 1).

הערה. ננתח עתה את המשפט הזה ואת הדרך שבה הגענו אליו. תחילה נעיר כי, אם מצאנו שני ערכים u ו v המקיימים את (ג. 4. 5), (ג. 4. 6) ו (ג. 4. 7), הרי גם הערכים $-u$ ו $-v$ יקיימו

את המשוואות האלה. אולם דבר זה לא ישנה את המסקנה שאלה הגענו, כי במקרה זה מתחלפות ביניהן שתי המשוואות (ג. 4. 10).

שאלה חשובה יותר נובעת מן העובדה, כי לפותרת (ג. 4. 8) יש שלשה שרשים, ואנו הסתפקנו במציאת שרש אחד (כל-שהוא) וממנו הגענו אל ארבעת השרשים של (ג. 4. 1). ומה בדבר שני השרשים האחרים של (ג. 4. 8)?

נציין ב z_1, z_2, z_3 את שלשת השרשים של הפותרת וב $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ את ארבעת השרשים של המשוואה המקורית. נניח, כי z_1 הוא הערך שבחרנו בו עבור שתי המשוואות (ג. 4. 10) וכי α_1 ו α_2 הם שני השרשים שקבלנו מן המשוואה הראשונה ו α_3 ו α_4 מן השנייה. אם נחשב עתה את המכפלות $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ ו $\alpha_3 \cdot \alpha_4$ (ראה תרגיל נ"ג בעמ' 75), נקבל:

$$\alpha_1 \alpha_2 = \frac{z_1 - v}{a_4}; \quad \alpha_3 \alpha_4 = \frac{z_1 + v}{a_4};$$

ומכאן,

$$(ג. 4. 11) \quad z_1 = \frac{a_4}{2} (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4).$$

אולם מארבעת השרשים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ נוכל ליצור כדוגמת הבטוי $(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4)$ עוד שני בטויים אחרים, $(\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4)$ ו $(\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3)$. ולא קשה לראות, כי השרשים z_2 ו z_3 של הפותרת מתאימים לשיונות

$$z_2 = \frac{a_4}{2} (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4); \quad z_3 = \frac{a_4}{2} (\alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3).$$

עובדה זו מראה, כי הצבת הערך z_2 או z_3 במקום z_1 במשוואות (ג. 4. 10) לא תשנה את הערכים שקבלנו עבור ארבעת השרשים של המשוואה המקורית.

דרך הפתרון של דִּיקַרְט (Descartes *). כיון ש $a_4 \neq 0$ במשוואה (ג. 4. 1), נוכל לחלק את שני האגפים ב a_4 ולכתוב את המשוואה הנתונה בצורה

$$(ג. 4. 12) \quad x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0.$$

אם נציב במקום הנעלם x את הבטוי

$$(ג. 4. 13) \quad x = y - \frac{A_3}{4},$$

נקבל באגף השמאלי של (ג. 4. 12) פולינום מן המעלה הרביעית ב y . אך המקדם של y^3 יהיה שם ל 0, ונוכל לכתוב

$$(ג. 4. 14) \quad y^4 + B_2 y^2 + B_1 y + B_0 = 0.$$

צורת כתיב כזאת של משוואה מן המעלה הרביעית היא כללית, כי אפשר תמיד להביא את הצורה (ג. 4. 1) לצורה (ג. 4. 14).

עתה ננסה לפרק את האגף השמאלי של (ג. 4. 14) למכפלה של שני פולינומים מן המעלה השנייה, נכתוב

$$(ג. 4. 15) \quad y^4 + B_2 y^2 + B_1 y + B_0 = (y^2 + py + q)(y^2 - py + r)$$

ונראה כיצד אפשר לחשב את הערכים p, q, r בעזרת המספרים הנתונים B_0, B_1, B_2 . נשווה זה לזה את המקדמים המתאימים בשני האגפים של (ג. 4. 15) ונקבל:

$$B_2 = q + r - p^2,$$

$$B_1 = p(r - q),$$

$$B_0 = q \cdot r.$$

לפיכך יהיה

* René Descartes (Renatus Cartesius), מתמטיקן ופילוסוף צרפתי (1596—1650).

$$r + q = B_2 + p^2,$$

(ג. 4. 16)

$$r - q = \frac{B_1}{p};$$

ולכן נעלה את אגפי השויונות האלה לחזקה השניה ונחסירם זה מזה.

$$4qr = (B_2 + p^2)^2 - \frac{B_1^2}{p^2} = 4B_0.$$

מכאן נקבל

$$p^6 + 2B_2p^4 + (B_2^2 - 4B_0)p^2 - B_1^2 = 0.$$

אם נכתוב עתה z במקום p^2 , נקבל

$$(ג. 4. 17) \quad z^3 + 2B_2z^2 + (B_2^2 - 4B_0)z - B_1^2 = 0.$$

משוואה זאת, שהיא מן המעלה השלישית לגבי הנעלם z , היא הפותרת לפי שיטת דיקרט. בעזרתה נחשב את הערך של z , כלומר את p (כי $p = \sqrt{z}$) ואת הערכים r ו q נחשב מן השויונות (ג. 4. 16).

ארבעת השרשים של (ג. 4. 14) יהיו איפוא שרשי המשוואות

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x^2 - px + r = 0,$$

בהתאם לנוסחה (ג. 4. 15).

את נתוח הדרך הזאת, כדוגמת הנתוח בעמ' 84, נשאיר לקורא

כתרגיל.

תרגילים

פתור את המשוואות הבאות:

$$(ס') \quad x^4 + 2x^2 - x - 2 = 0.$$

$$(ס"א) \quad x^4 + x^3 - x - 1 = 0.$$

$$(ס"ב) \quad x^4 - 4x^2 + 2x - 4 = 0.$$

$$(ס"ג) \quad x^4 - x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0.$$

$$(ס"ד) \quad 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1 = 0.$$

פרק ד.

המשפט היסודי של האלגברה

ד. 1. מכוא. עד עתה טפלנו במסקנות הנובעות מן ההנחה, כי למשוואה נתונה יש שרשים; אבל לא הוכחנו, כי לכל משוואה אלגברית יש שרשים. העובדה הזאת, קיום השרשים, מהווה את תכנו של "המשפט היסודי של האלגברה". להוכחת המשפט הזה דרושות לנו ידיעות אלמנטריות בתורת הפונקציות המרוכבות.

יהי z מספר מרוכב, אשר עלול לקבל ערך כל-שהוא מתוך קבוצה נתונה T של מספרים מרוכבים, או יקרא z "משתנה מרוכב" והקבוצה T תקרא "תחום ההשתנות" של z . אם למשל T היא קבוצת כל ה z המקיימים את אי-השוויון $|z - a| < r$, אז תחום ההשתנות הוא העגול, אשר מרכזו a והרדיוס שלו r . המעגל $|z - a| = r$ מהווה את "שפת התחום". תחום T זה הוא "תחום פתוח"; אך אם נצרף אליו את כל נקודות השפה (כלומר נעניין בכל ה z המקיימים $|z - a| \leq r$), נקבל תחום T^* שהוא "תחום סגור".

יהי w משתנה מרוכב, אשר השתנותו קשורה בהשתנות ה z במשוואה $w = f(z)$. w או $f(z)$ תקרא אז "פונקציה (מרוכבת) של המשתנה המרוכב z ". אם לכל נקודה z , השייכת ל T , מתאים ערך נתון של $f(z)$, נאמר, כי $f(z)$ מוגדרת בתחום T .

אם הקבוצה T מכילה נקודות ממשיות בלבד, יהיה z "משתנה ממשי" (ויצוין לרוב באות x או y או t). אם למשל T היא קבוצת כל הערכים x המקיימים את אי-השוויונות $a < x < b$,

אז תחום ההשתנות הוא הקטע מ a עד b על ציר המספרים הממשיים. זה הוא קטע פתוח וציונו (a, b) . קבוצת כל הערכים x המקיימים $a < x < b$ היא הקטע הסגור מ a עד b וציונו $[a, b]$.

אם y הוא משתנה ממשי כזה, שלכל x מן התחום $a < x < b$ מתאים ערך נתון של y , אז y הוא פונקציה ממשיית של המשתנה הממשי x , $y = f(x)$, המוגדרת בתחום הנתון.

אם z משתנה מרוכב בתחום נתון T , והערכים w המתאימים לערכי z מתוך T , הם מספרים ממשיים, אז $w = f(z)$ היא פונקציה ממשיית של המשתנה המרוכב z . למשל $w = |az^n|$ (n מספר טבעי) היא פונקציה ממשיית של z מרוכב, מוגדרת בתחום מרוכב T כל-שהוא.

תהי נתונה קבוצה Q של נקודות z במישור. אם מספר הנקודות z , השייכות ל Q , גדול מכל מספר טבעי נתון, אז Q היא קבוצה אינסופית.

אם קיים מספר חיובי H כזה, שכל הערכים z , השייכים ל Q , מקיימים את אי-השוויון $|z| < H$, אז נקראת Q „קבוצה חסומה“. אם כל ערכי z הם מספרים ממשיים, נוכל לכתוב $-H < z < H$.

אם קיימת נקודה z_0 כזאת, שלכל δ חיובי (קטן כרצוננו) ימצא בתוך Q מספר אינסופי של נקודות z , המקיימות את אי-השוויון

$$|z - z_0| < \delta,$$

אז נקראת z_0 בשם „נקודת הצטברות“ („ערך-הצטברות“) של אברי הקבוצה Q . הנקודה z_0 אינה חייבת להיות שייכת לקבוצה Q .

(דוגמה: כל המספרים עם $\frac{1}{n}$ טבעי; 0 הוא ערך-הצטברות של

אברי הקבוצה ואינו שייך לקבוצה).

משפט. (Bolzano—Weierstrass). לכל קבוצה Q אינסופית וחסומה של מספרים ממשיים x יש לפחות נקודת הצטברות ממשיית אחת.

הוכחה. הקבוצה Q חסומה; לכן אפשר לקבוע שני מספרים ממשיים a_1 ו b_1 כך, שלכל x מתוך Q יהיה

$$a_1 < x < b_1.$$

הקטע $[a_1, b_1]$ מכיל את כל אברי הקבוצה. נחצה את הקטע הזה ואז תכיל לפחות אחת משתי מחציות-הקטע מספר אינסופי של אברים מאברי הקבוצה (כי, לולא זאת, היה בכל מחצית-הקטע מספר סופי של אברים ולכן גם בקטע כולו מספר סופי בלבד). נקודת

האמצע של הקטע $[a_1, b_1]$ מתאימה למספר $\frac{a_1 + b_1}{2}$. מספר זה

יצוין ב a_2 , אם יש ימינה ממנו מספר אינסופי של אברים; הוא יצוין ב b_2 , אם אין ימינה ממנו אלא מספר סופי של אברים. במקרה הראשון נקבע עוד $b_2 = b_1$ ובמקרה השני נקבע $a_2 = a_1$. כך נקבל קטע $[a_2, b_2]$, אשר ארכו שווה למחצית האורך של $[a_1, b_1]$ ואשר מכיל קבוצה אינסופית של אברים מאברי הקבוצה הנתונה. עתה נמשיך ונחצה את הקטע $[a_2, b_2]$. גם כאן תכיל לפחות אחת משתי מחציות-הקטע מספר אינסופי מאברי הקבוצה ונוכל כמו קודם לקבוע קטע $[a_3, b_3]$, אשר ארכו שווה למחצית האורך של $[a_2, b_2]$, ואשר מכיל קבוצה אינסופית של אברים. אם נמשיך בדרך זו, נקבל סדרה אינסופית של קטעים $[a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) כלואים זה בתוך זה וארכם יורד ל 0 . סדרה זאת קובעת כידוע מספר ממשי מסוים x_0 (ר' פרק א' עמ' 17). עתה נוכיח, כי המספר הזה x_0 הוא נקודת הצטברות של אברי הקבוצה הנתונה. ואמנם, נקבע מספר חיובי δ קטן כרצוננו ונעניין בקטע $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. אורך הקטע

* Bernard Bolzano, מתמטיקן ומילוסוף צ'כי (1781—1848).

Karl Weierstrass, מתמטיקן גרמני, (1815—1879).

הזה הוא 28. אך בין הקטעים $[a_n, b_n]$ יש קטעים, אשר ארכם קטן מ ε (כאשר n גדול למדי). קטעים אלה נמצאים בתוך הקטע $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ (אשר בחרנו קטן כרצוננו) והוא מכיל איפוא מספר אינסופי של אברים מן הקבוצה הנתונה. לכן x_0 היא נקודת הצטברות.

משפט זה נכון גם לגבי קבוצות של מספרים מרוכבים.

משפט. לכל קבוצה Q אינסופית וחסומה של מספרים מרוכבים $z = x + iy$ יש לפחות נקודת הצטברות אחת.

הוכחה. הקבוצה Q חסומה; לכן קיים (במישור xOy) עגול בעל רדיוס קבוע R , אשר מרכזו בראשית הצירים O ואשר מכיל בקרבו את כל נקודות הקבוצה (ראה את ההגדרה בעמוד 88). נרשום מסביב לעגול הזה את הרבוע החוסם אותו ואשר צלעותיו מקבילות לצירי ה x וה y . הרבוע הזה מכיל את כל נקודות הקבוצה Q . צירי ה x וה y מחלקים אותו לארבעה רבועים. נקבע עוד (למען שלמות ההוכחה), כי נקודות הרבוע הראשון, הנמצאות על ציר ה x , שייכות לרבועים שמעל לציר הזה, והנקודות, הנמצאות על ציר ה y , שייכות לרבועים שמימין לציר ה y . עתה ברור, כי לפחות באחד מארבעת הרבועים שלפנינו יש מספר אינסופי של נקודות מנקודות הקבוצה Q . (כי, לולא זאת, היה מספר כל נקודות הקבוצה Q סופי, בנגוד לנתון). נטפל ברבוע כזה ונחלק אותו (בעזרת שני קטעים מקבילים לצירי ה x וה y) לארבעה רבועים שוים זה לזה. נקבע גם כאן (וכן להלן), כי הנקודות הנמצאות על קטע מקביל לציר ה x , שייכות לרבוע שמעל לקטע, והנקודות, הנמצאות על קטע מקביל לציר ה y , שייכות לרבוע שמימין לקטע. גם עתה יכיל לפחות אחד מארבעת הרבועים שנתקבלו נקודות רבות לאינסוף מנקודות הקבוצה Q . אם נמשיך בדרך זו, נקבל סדרה אינסופית של רבועים אפסים, וכל אחד מרבועי הסדרה יכיל נקודות רבות לאינסוף מנקודות הקבוצה Q . סדרה זאת של רבועים אפסים קובעת נקודה מסוימת

z_0 . כי האבסציסות והאורדינטות של קדקדי הרבועים מהוות שתי סדרות של קטעים אפסים על צירי ה x וה y ואלה קובעות נקודות x_0 ו y_0 שהן קואורדינטות של הנקודה z_0 המשותפת לכל רבועי הסדרה הנ"ל. הנקודה z_0 היא נקודת הצטברות של נקודות הקבוצה Q . ואמנם, כל עגול עם רדיוס ε מסביב ל z_0 כמרכז (ע חיובי קטן כרצוננו) מכיל רבועים מסדרת הרבועים האפסים שפנינו (הוא מכיל לפחות את כל הרבועים בעלי אלכסון קטן מ ε). לפיכך מכיל עגול זה נקודות רבות לאינסוף מנקודות הקבוצה Q , כנדרש בהגדרת המושג „נקודת הצטברות“.

ד. 2. רציפות. יהא α מספר מרוכב ו $p(x)$ פולינום ממעלה n לכל היותר. ערכו של $p(x)$ בנקודה $x = \alpha$ הוא $p(\alpha)$ וערכו בנקודה $x = \alpha + h$ מקום שם h מספר כל-שהוא, הוא $p(\alpha + h)$. נוכיח עתה, כי ערכי הפולינום $p(x)$ בשתי הנקודות האלה אינם שונים בהרבה זה מזה, אם רק שתי הנקודות $x = \alpha$ ו $x = \alpha + h$ קרובות למדי. במלים אחרות, הערך המוחלט $|p(\alpha + h) - p(\alpha)|$ קטן כרצוננו, אם רק h בערכו המוחלט קטן למדי. תכונה זאת של הפולינום (ושל פונקציות רבות אחרות) היא תכונת הרציפות. נבאר דברים אלה ביתר פירוט.

הגדרה. אם $f(z)$ פונקציה (אשר ערכיה מספרים ממשיים או מרוכבים) המוגדרת בתחום השתנות נתון, ואם α נקודה בתחום הנתון, אזי תקרא „פונקציה רציפה בנקודה α “, אם עבור כל מספר חיובי ε (ויהי ε זה קטן כרצוננו) אפשר למצוא מספר חיובי δ כך, שעבור כל מספר h (ממשי או מרוכב) שעבורו $f(\alpha + h)$ מוגדר ואשר מקיים

$$|h| < \delta, \quad (ד. 2. 1)$$

קיים אי-השוויון

$$|f(\alpha + h) - f(\alpha)| < \varepsilon. \quad (ד. 2. 2)$$

במלים אחרות: מרחק הנקודה המתארת במישור את הערך $f(\alpha + h)$ מן הנקודה $f(\alpha)$ קטן מ ε , אם $|h|$ קטן מ δ , ואם נרצה שמרחק זה ילך ויקטן, עלינו להקטין בהתאמה את δ (כלומר את $|h|$). אם $|h|$ יקטן וישאף לאפס, תשאף הנקודה $\alpha + h$ להתלכד עם α והערך $f(\alpha + h)$ ישאף להתלכד עם הערך $f(\alpha)$. זאת נוהגים לציין בכתיב:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} f(\alpha + h) = f(\alpha). \quad (3.2.ד)$$

נוסחה זו מביעה בעצם את כל מושג הרציפות של $f(z)$ בנקודה α . (lim הוא קצור המלה הרומית limes ופרושה: גבול.) כאשר $|h|$ שואף לאפס יכולים ערכי $f(\alpha + h)$ שלא לשאוף לשום גבול מסוים, או אפילו לשאוף לגבול מסוים אך שונה מ $f(\alpha)$. תכונת הרציפות של $f(z)$ בנקודה α היא איפוא עצם העובדה כי $f(\alpha + h)$ שואף לגבול מסוים (כאשר $|h|$ שואף ל 0) וכי גבול זה הוא הערך $f(\alpha)$ דוקא.

הגררה. אם הפונקציה $f(z)$ רציפה בכל נקודה α של תחום נתון תקרא הפונקציה רציפה בתחום הנתון.

נוכיח עתה שהפולינומים הם פונקציות רציפות של המשתנה בכל נקודה α (ממשית או מרוכבת).

משפט. אם $p(z)$ פולינום מהמעלה n ו α מספר מרוכב כל-שהוא, אזי, עבור כל מספר חיובי ε (נתון מראש) אפשר למצוא מספר חיובי δ (תלוי ב $p(z)$, ב α וב ε) בעל התכונה הבאה:

עבור כל המספרים h , המקיימים

$$|h| < \delta, \quad (4.2.ד)$$

קיים אי-שוויון

$$|p(\alpha + h) - p(\alpha)| < \varepsilon. \quad (5.2.ד)$$

(לשון אחר: הפולינום $p(z)$ הוא פונקציה רציפה של המשתנה המרוכב z בנקודה α כל-שהיא).

הוכחה. אם מעלת $p(z)$ קטנה מ 1, המשפט נכון, כי אז $p(z)$ הוא גדל קבוע, ולכן

$$p(\alpha) = p(\alpha + h); \quad |p(\alpha + h) - p(\alpha)| = 0 < \varepsilon.$$

אם המעלה n של $p(z)$ גדולה או שווה ל 1, אזי, לפי נוסחת טילור,

$$p(\alpha + h) = p(\alpha) + \frac{p'(\alpha)}{1!} \cdot h + \frac{p''(\alpha)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} \cdot h^n;$$

(6.2.ד)

$$|p(\alpha + h) - p(\alpha)| = \left| \frac{p'(\alpha)}{1!} \cdot h + \frac{p''(\alpha)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} \cdot h^n \right|$$

$$= |h| \cdot \left| \frac{p'(\alpha)}{1!} + \frac{p''(\alpha)}{2!} \cdot h + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} \cdot h^{n-1} \right|$$

(7.2.ד)

$$\leq |h| \cdot \left(\left| \frac{p'(\alpha)}{1!} \right| + \left| \frac{p''(\alpha)}{2!} \right| \cdot |h| + \dots + \left| \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} \right| \cdot |h|^{n-1} \right).$$

אם נבחר עתה את δ כך, שיקיים את שני התנאים

$$\delta < 1, \quad \delta < \frac{\varepsilon}{\left| \frac{p'(\alpha)}{1!} \right| + \left| \frac{p''(\alpha)}{2!} \right| + \dots + \left| \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} \right|}, \quad (8.2.ד)$$

אזי, לפי (7.2.ד), עבור כל h המקיים $|h| < \delta$ יהיה נכון

$$|p(\alpha + h) - p(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{\left| \frac{p'(\alpha)}{1!} \right| + \left| \frac{p''(\alpha)}{2!} \right| + \dots + \left| \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} \right|}$$

$$\cdot \left(\left| \frac{p'(\alpha)}{1!} \right| + \left| \frac{p''(\alpha)}{2!} \right| \cdot 1 + \dots + \left| \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!} \right| \cdot 1^{n-1} \right) = \varepsilon,$$

ובזאת הוכח המשפט.

הערה. כיון שקיים תמיד

$$|p(\alpha + h) - p(\alpha)| \leq |p(\alpha + h) - p(\alpha)|,$$

לכן גם הפונקציה $|p(z)|$ היא פונקציה רציפה של המשתנה z בנקודה α כל-שהיא.

תרגילים

מצא δ מתאים בתרגילים הבאים:

$$\varepsilon = \frac{1}{100}, \quad \alpha = 3, \quad p(x) = 2x - 3. \quad (\text{ד'})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10}, \quad \alpha = i, \quad p(x) = x^2 + 1. \quad (\text{ו'})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1000}, \quad \alpha = 1 - i, \quad p(x) = 1 + x + 2x^2. \quad (\text{ז'})$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1000000}, \quad \alpha = 2 + 3i, \quad p(x) = 1 - (1 + i)x^2 - (3 - i)x^3. \quad (\text{ח'})$$

(ט'). הוכח כי, אם $f(z)$ ו $g(z)$ הן פונקציות רציפות בנקודה

$z = \alpha$, אז גם הפונקציה $F(z)$, המוגדרת בשויון

$$F(z) = f(z) + g(z),$$

רציפה בנקודה α .

(י). רמז: $|F(\alpha + h) - F(\alpha)| \leq |f(\alpha + h) - f(\alpha)| + |g(\alpha + h) - g(\alpha)|$.

(ע'). הוכח כי, אם $f(z)$ רציפה בנקודה $z = \alpha$ ו c מספר מרוכב

קבוע כל-שהוא, אז גם הפונקציה $F(z)$, המוגדרת בשויון $F(z) = cf(z)$,

רציפה בנקודה α .

ד. 3. משפט בולצנו לפולינומים בעלי מקדמים ממשיים.

אם $p(x)$ הוא פולינום בעל מקדמים ממשיים, הרי עבור כל ערך ממשי $x = \alpha$ יהיה גם הערך $p(\alpha)$ מספר ממשי. לכן נוכל להשתמש לגבי פולינומים כאלה במשפטים הבאים, העוסקים בפונקציות ממשיות ורציפות.

משפט. תהי פונקציה ממשית ורציפה בקטע $a \leq x \leq b$. יהי x_0 שייך לקטע הנתון והערך $f(x_0)$ חיובי; אז אפשר לקבוע ערך חיובי δ באופן, שערכי הפונקציה $f(x)$ בקטע $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ יהיו כולם חיוביים (למשל, גדולים מ $\frac{f(x_0)}{2}$).

הערה. אם $x_0 = a$, נתכוון לקטע $a \leq x \leq a + \delta$; ואם $x_0 = b$, הכונה היא לקטע $b - \delta \leq x \leq b$.

הוכחה. משפט זה נובע מהגדרת מושג הרציפות. כי, לפי ההגדרה, אפשר להתאים לכל ε חיובי ($\varepsilon > 0$), נתון כרצוננו) מספר δ ($\delta > 0$) באופן, שאם ישתנה x_0 ב $\pm \delta$ לכל היותר, תהיה ההשתנות המתאימה של $f(x)$ קטנה מ $\pm \varepsilon$. אם נבחר ε חיובי, אבל קטן מ $f(x_0)$, לא תוכל השתנות זו לשנות את הסימן של $f(x)$ בתוך הקטע הקטן שקבענו מסביב ל x_0 . אם נקבע למשל ε חיובי וקטן מ $\frac{f(x_0)}{2}$, נוכל לקבוע δ כך שכל ערכי $f(x)$ בקטע $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ יקיימו את אי-השוויון

$$|f(x_0) - f(x)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

כאן מותר להניח $f(x_0) > f(x)$ (כי, אם $f(x) \geq f(x_0)$ המשפט מובן מאליו). לכן נוכל לכתוב

$$f(x_0) - f(x) < \frac{f(x_0)}{2},$$

ומכאן

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

וכן קל לראות, כי אם $f(x_0)$ שלילי, אפשר לקבוע ε חיובי כזה, ש $f(x)$ ישאר שלילי בקטע $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$. כי במקרה זה יהיה $-f(x_0)$ חיובי וערכי $-f(x)$ חיוביים בקטע הזה (לכן ערכי $f(x)$ יהיו שליליים שם).

משפט (Bolzano). תהא $f(x)$ פונקציה ממשית ורציפה בקטע $a \leq x \leq b$. יהי הערך $f(a)$ שלילי והערך $f(b)$ חיובי; אז יש בקטע $a < x < b$ לפחות נקודה אחת ξ , אשר בה $f(\xi) = 0$.

הוכחה. נחצה את הקטע (a, b) ונציין ב c את נקודת האמצע. בנקודה הזאת יהיה הערך של $f(x)$ חיובי או שלילי או 0. אם הערך הוא 0, אין צורך להמשיך בהוכחה; אך בשני המקרים האחרים נעדין בקטע (c, b) אם $f(c)$ שלילי, או בקטע (a, c) אם $f(c)$ חיובי. אם היו למשל, סימני $f(x)$ שונים זה מזה בקצוות c ו b , נחצה את הקטע (c, b) בנקודה c_1 ושוב נעדין בקטע, אשר בקצותיו שונים סימני $f(x)$ זה מזה (אם $f(c_1)$ שונה מ 0). וכך נמשיך בחלוקה זו בעזרת נקודות $c_2, c_3, \dots$ וכו'. אם לאחר מספר סופי של חלוקות כאלה לא נמצא ערך c_n , המקיים את השוויון $f(c_n) = 0$, תהיה לפנינו סדרה אינסופית של קטעים, הכלואים זה בתוך זה ואשר ארכם יורד ל 0 (כל קטע הוא מחצית הקטע שקדם לו). קטעים אלה קובעים נקודה ξ , משותפת לכל הקטעים. נראה עתה, כי הערך $f(\xi)$ הוא 0. אלו היה $f(\xi)$ חיובי, אפשר היה לרשום מסביב ל ξ קטע קטן למדי, אשר בתוכו יהיו ערכי ה $f(x)$ חיוביים כולם (כמבואר לעיל), ואלו היה $f(\xi)$ שלילי, היינו יכולים לקבוע קטע קטן מסביב ל ξ , אשר בתוכו יהיו ערכי $f(x)$ שליליים כולם. אולם כל קטע מסביב ל ξ מכיל קטעים מקטעי הסדרה ובקצות הקטעים האלה יש ל $f(x)$ ערכים בעלי סימנים שונים. לכן $f(\xi) = 0$.

הערה. משפט זה נכון גם אם נניח, כי $f(a)$ חיובי ו $f(b)$ שלילי.

משפט בולצנו (Bolzano). תהא $f(x)$ פונקציה ממשית ורציפה בקטע $a \leq x \leq b$ ויהי $f(a) = A$ ו $f(b) = B$. יהי A שונה מ B ויהי C ערך, הנמצא בין A ובין B ; אז יש בתוך הקטע $a < x < b$ לפחות נקודה אחת ξ , אשר בה יש ל $f(x)$ הערך C .

הוכחה. להוכחת המשפט הזה נעדין בפונקציה

$$F(x) = f(x) - C.$$

הפונקציה $F(x)$ ממשית ורציפה אף היא בקטע $a \leq x \leq b$. בין אם $A < C < B$ ובין אם $A > C > B$, יהיו הערכים $F(a)$ ו $F(b)$ בעלי סימנים שונים. לכן קיים (לפי המשפט הקודם) לפחות ערך אחד ξ ($a < \xi < b$), אשר בו $F(\xi) = 0$. מכאן $F(\xi) = f(\xi) - C = 0$, כלומר, $f(\xi) = C$.

הערה. אפשר להביע את תכן המשפט הזה במלים אלה: אם הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $a \leq x \leq b$, ומקבלת את הערך A בראשית הקטע ואת הערך B בקצהו השני, אין היא יכולה בצאתה מן הערך A להגיע אל הערך B מבלי שתעבור דרך כל הערכים שבין A ובין B פעם אחת לפחות.

תרגילים

(ע"א). חשב (בדיוק עד $\frac{1}{100}$) בעזרת השטה ששמשה להוכחת משפט בולצנו שרש ממשי של

$$p(x) = 3x^3 - x^2 - 11x - 7,$$

הנמצא בקטע $2 \leq x \leq 3$.

(ע"ב). מצא קטעים שבהם יש לפולינומים

$$p(x) = x^2 - 2x - 5,$$

$$q(x) = 2x^2 - x^3 - 1,$$

$$r(x) = x^3 + x - 10$$

שרש אחד לפחות.

(ע"ג). הוכח, כי לכל משואה מן המעלה השלישית בעל

מקדמים ממשיים בלבד יש לפחות שרש ממשי אחד.

ד. 4. שרשים של פולינומים בעלי מקדמים ממשיים.

משפט בולצנו אפשר להסיק כמה מסקנות חשובות. אחת

מהן תנוסח במשפט הבא:

משפט. אם $p(x)$ פולינום ממעלה אי-זוגית בעל

מקדמים ממשיים, אזי יש ל $p(x)$ לפחות נקודת אפס

ממשית אחת.

הוכחה. יהי

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0, \quad (1.4.ד)$$

ו n מספר טבעי אי-זוגי. נוכל לכתוב

$$p(x) = a_nx^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right). \quad (2.4.ד)$$

כאשר x מקיים את אי-השוויון *

$$|x| \geq 1 + (n+1) \max_{0 \leq k < n} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| > 1, \quad (3.4.ד)$$

אז עבור כל k ($0 \leq k < n$) קיים

$$|x|^{n-k} \geq |x| > (n+1) \cdot \left| \frac{a_k}{a_n} \right|.$$

* $\max_{0 \leq k < n} c_k$ מציינ את הערך של המספר הגדול ביותר מקבוצת המספרים

$c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$.

כלומר, עבור כל k , ($0 \leq k < n$) ועבור כל x המקיים (ד. 3.4) קיים

$$(4.4.ד) \quad \left| \frac{a_k}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-k}} \right| < \frac{1}{n+1};$$

ולכן בתנאי (ד. 3.4) קיים גם אי-השוויון

$$\frac{p(x)}{a_nx^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_k}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-k}} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}$$

(ד. 5.4)

$$\geq 1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} \right| - \dots - \left| \frac{a_k}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-k}} \right| - \dots - \left| \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right|$$

$$\geq 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \dots - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} > 0.$$

כלומר, עבור ערכים x המקיימים את (ד. 3.4) נכון

$$(6.4.ד) \quad \frac{p(x)}{a_nx^n} > 0.$$

מאי-השוויון האחרון מתברר, כי עבור ערכים x חיוביים המקיימים

$$x \geq 1 + (n+1) \max_{0 \leq k < n} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$$

סימנו של $p(x)$ הוא כסימן המקדם a_n ; וכאשר x שלילי ומקיים (ד. 3.4), כלומר,

$$x \leq - \left(1 + (n+1) \max_{0 \leq k < n} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \right),$$

סימנו של $p(x)$ הפוך לגבי סימן המקדם a_n (כי n אי-זוגי ו x^n הוא מספר שלילי). לפי משפט בולצנו, יש איפוא ל $p(x)$ שרש ממשי בקטע

$$-\left(1 + (n+1) \max_{0 \leq k < n} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \right) \leq x \leq 1 + (n+1) \max_{0 \leq k < n} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$$

והמשפט הוכח.

נוכיח עתה עוד תכונה חשובה של הפולינומים בעלי מקדמים ממשיים.

משפט. אם $p(x)$ פולינום בעל מקדמים ממשיים ו α שרש מרוכב (לא ממשי) שלו, אז גם המספר $\bar{\alpha}$ (המספר הצמוד ל α) הוא שרש של הפולינום.

הוכחה. לפי הנחת המשפט, אם

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1,$$

הרי

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0.$$

אם נציב ב $p(x)$ במקום x את המספר $\bar{\alpha}$, נקבל (ר' פרק א' ע' 25), את המספר הצמוד למספר $p(x)$ (בגלל ממשות המקדמים a_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ הגורמת לכך שהם צמודים לעצמם). לכן נקבל

$$\begin{aligned} p(\bar{\alpha}) &= a_0 + a_1\bar{\alpha} + \dots + a_n\bar{\alpha}^n = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \dots + \bar{a}_n\bar{\alpha}^n \\ &= \overline{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0, \end{aligned}$$

ובזאת הוכח המשפט.

מן המשפט האחרון אפשר עוד להסיק את המסקנה הבאה:

משפט. אם יש לפולינום בעל מקדמים ממשיים שרשים מרוכבים לא ממשיים, מספר השרשים האלה

* לפי המשפט: המספר הצמוד למספר z , המתואר כבטוי אלגברי של מספרים טרוכבים, שווה למספר המתקבל אם יחליפו בבטוי המתאר את z את כל המספרים במספרים הצמודים להם. נסה להוכיח משפט זה!

תמיד זוגי והם מופיעים זוגות זוגות של שרשים צמודים.

תרגילים

מצא קטעים המכילים לפחות שרש ממשי אחד של הפולינומים הבאים:

$$4x^5 - 5x^2 - 6x - 1. \quad (\text{ע"ד})$$

$$105x^3 - 90x^2 + 100x - 95. \quad (\text{ע"ה})$$

$$6x^5 - 5x^4 - 4x^2 - 3x - 2. \quad (\text{ע"ו})$$

$$x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 + x - 1. \quad (\text{ע"ז})$$

$$8x^7 - 2x + 1. \quad (\text{ע"ח})$$

מצא שרשים נוספים על הרשומים בתרגילים הבאים:

$$p(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5; \quad \alpha = 1 - 2i. \quad (\text{ע"ט})$$

$$q(x) = x^3 - x^2 - 17x + 65; \quad \alpha = 3 + 2i. \quad (\text{פ'})$$

$$r(x) = x^4 - 4x^3 + 16x^2 - 24x + 20; \quad (\text{פ"א})$$

$$\alpha_1 = 1 + i; \quad \alpha_2 = 1 - 3i.$$

(פ"ב). הוכח, כי לפולינום

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

אשר בו n זוגי, כל המקדמים ממשיים ו $a_0 < 0$, יש לפחות שרש חיובי אחד ושרש שלילי אחד.

ד. 5. מושג החסם התחתון והמינימום. תהי $f(z)$ פונקציה ממשית מוגדרת בתחום T (ממשי או מרוכב). אם קיים מספר קבוע k כזה, שיהיה

$$f(z) \geq k$$

לכל ערכי z בתחום T , אז תקרא $f(z)$ חסומה מלרע בתחום הנתון. המספר k הוא "חסם מלרע" של $f(z)$ בתחום הנתון. מובן מאליו, כי כל מספר קטן מ k יהיה גם הוא חסם מלרע; לכן אין טעם לשאלה, מה הוא החסם מלרע הקטן ביותר. לעומת זאת יכול להמצא מספר k^* כזה, שכל מספר גדול ממנו לא יהיה חסם מלרע. כלומר, בכל ערכי z , השייכים ל T , קיים אי-השוויון

$$f(z) \geq k^*,$$

אולם, בהנתן מספר חיובי ε כל-שהוא, אפשר למצוא בתחום הנתון לפחות ערך אחד z_1 , אשר עבורו יהיה

$$f(z_1) < k^* + \varepsilon.$$

k^* כזה הוא החסם מלרע הגדול ביותר; הוא נקרא בשם "חסם תחתון" של $f(z)$ בתחום הנתון.

משפט. לכל פונקציה ממשית $f(z)$ (של משתנה מרוכב z) מוגדרת וחסומה מלרע בתחום נתון T יש חסם תחתון שם.

הוכחה. אפשר לחלק את כל המספרים הממשיים לשתי כתות. לכתה א' יהיו שייכים כל המספרים שהם חסם מלרע לפונקציה $f(z)$ בתחום הנתון, ולכתה ב' שייכים כל המספרים האחרים. בחלוקה כזאת מתקיימות שלש התכונות של חתך (ר' עמ' 14). חתך זה קובע מספר ממשי k^* , ונוכית, כי מספר זה הוא חסם תחתון של $f(z)$. די להוכיח, כי הוא חסם מלרע; כי אז הוא יהיה כמובן החסם מלרע הגדול ביותר (כל מספר גדול ממנו שייך לכתה ב' ולכן איננו חסם מלרע).

ואמנם, אם נניח, כי k^* איננו חסם מלרע, אז יש בתחום T לפחות ערך אחד z_1 , אשר בו $f(z_1) < k^*$. שום מספר מן המספרים הממשיים שבין $f(z_1)$ ובין k^* אינו חסם מלרע (כי כולם גדולים מ $f(z_1)$). כל המספרים האלה חייבים איפוא להמצא בכתה ב'; אולם הם קטנים מ k^* ונמצאים לפיכך בכתה א' (כיון ש k^* היא נקודת החתך). לכן מוכרח k^* להיות חסם מלרע; הוא החסם התחתון המבוקש.

המושג "חסם תחתון" קשור למעשה בקבוצה כל-שהיא של ערכים ממשיים. אם חסומה הקבוצה מלרע, קיים חסם תחתון לקבוצה; אולם הערך המשמש חסם תחתון אינו חייב להיות שייך לקבוצה.

דוגמה: לקבוצת המספרים $\frac{n+1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) יש חסם

תחתון. הוא המספר 1; אך מספר זה אינו שייך לקבוצה. אם החסם התחתון של קבוצה נתונה שייך לקבוצה, אז הוא הערך הקטן ביותר או המינימום של הקבוצה.

הערה. בדרך דומה לכל האמור בדבר החסם התחתון אפשר להגדיר את המושגים "חסם מלעיל" ו"חסם עליון" ולהוכיח

משפט: לכל פונקציה ממשית $f(z)$ מוגדרת וחסומה מלעיל בתחום נתון יש חסם עליון שם.

פונקציה ממשית $f(z)$ חסומה מלעיל ומלרע בתחום T נקראת "חסומה" בתחום הנתון; לכל פונקציה כזאת יש גם חסם תחתון וגם חסם עליון שם.

גם החסם העליון של קבוצת מספרים ממשיים אינו חייב להיות שייך לקבוצה. ואם הוא שייך לקבוצה, אז הוא מהווה את המכסימום של הקבוצה.

אין אנו מביאים כאן את פרטי ההגדרות וההוכחות האלה, כי אין לנו ענין בהן בהמשך הדברים.

נשוב עתה אל הפונקציה הממשית $f(z)$ המוגדרת בתחום D (ממשי או מרוכב). נוכיח כי, אם פונקציה כזאת רציפה בתחום סגור, אז היא חסומה מלמעלה ויש לה ערך מינימום שם. אך בטרם ננסה ונוכיח משפטים אלה, נדייק ונקבע למה אנו מתכוונים במושג „תחום סגור D “. אם התחום ממשי, הכוונה היא לקטע עם שני קצותיו; כלומר לכל הערכים x המקיימים את אי-השוויונות $a \leq x \leq b$, $(a < b)$. ואם התחום מרוכב, הכוונה היא לחלק מן המישור יחד עם השפה המקיפה אותו, והשפה היא קו רציף סגור (שאינו חותך את עצמו). דוגמה פשוטה לתחום כזה היא: עיגול יחד עם המעגל המשמש לו שפה.

כדאי שהקורא יברר לעצמו שכל תחום סגור מכיל את כל נקודות ההצטברות של נקודות התחום, כיון שתכונה זו של התחומים הסגורים תהא דרושה לנו בהוכחות המשפטים הבאים.

משפט. כל פונקציה $f(z)$, ממשית ורציפה בתחום הסגור D , חסומה שם מלמעלה.

הוכחה. נניח, כי אין $f(z)$ חסומה מלמעלה בתחום D . אז קיימת בתחום D לפחות נקודה אחת z_1 , אשר בה $f(z_1) < -1$. כן קיימת נקודה z_2 , אשר בה $f(z_2) < -2$. וכן לכל מספר טבעי n מתאימה בתחום נקודה z_n , אשר בה $f(z_n) < -n$. סדרת המספרים z_n היא אינסופית וחסומה (כל הנקודות שייכות ל D שהוא תחום חסום). לפיכך קיימת בתוך D או על שפתו לפחות נקודה אחת ξ , שהיא נקודת הצטברות של נקודות z_n . הפונקציה רציפה בנקודה ξ ; לכן לכל ε חיובי, קטן כרצוננו, אפשר להתאים δ ($\delta > 0$) באופן שכל z , המקיים את אי-השוויון $|z - \xi| < \delta$, ואשר עבורו $f(z)$ מוגדר, יקיים את אי-השוויון $|f(z) - f(\xi)| < \varepsilon$; כלומר, בתחום $|z - \xi| < \delta$ אין לפונקציה הממשית $f(z)$ ערכים קטנים מ $\varepsilon - f(\xi)$. אולם התחום $|z - \xi| < \delta$ מכיל בקרבו נקודות z_n רבות לאינסוף (ξ היא נקודת הצטברות!) אשר בהן אין הפונקציה חסומה מלמעלה לפי הנחתנו, ולכן

מוכרחים להמצא בין ערכי $f(z_n)$ אלה ערכים קטנים מ $\varepsilon - f(\xi)$. זו היא סתירה, הנובעת מן ההנחה, כי $f(z)$ אינה חסומה מלמעלה בתחום D .

הערה. משפט זה אינו נכון, אם התחום הנתון אינו סגור. כי הנקודה ξ יכולה להיות אחת מנקודות השפה, אשר בה הפונקציה $f(z)$ יכולה לא להיות מוגדרת או לא להיות רציפה.

משפט. אם $f(z)$ היא פונקציה ממשית ורציפה בתחום סגור D , אז קיימת בתוך התחום או על שפתו לפחות נקודה אחת ξ , אשר בה יש ל $f(z)$ ערך מינימום.

הוכחה. לפי המשפט הקודם קיים מספר, שהוא חסם תחתון לערכי $f(z)$ בתחום D . נציין אותו ב m ונוכיח כי קיימת נקודה ξ בתחום D , שבה $f(\xi) = m$. אם נקבע מספר חיובי ε כל-שהוא, נמצא בתחום הנתון נקודה z_1 , אשר בה $m \leq f(z_1) < m + \varepsilon$; וכן נקודה z_2 , אשר בה $m \leq f(z_2) < m + \frac{\varepsilon}{2}$; וכן לכל מספר טבעי

n נמצא בתחום D נקודה z_n , אשר עבורה $m \leq f(z_n) < m + \frac{\varepsilon}{n}$.

הנקודות z_n מהוות סדרה $\{z_n\}$ אינסופית וחסומה ויש להן בתוך התחום או על שפתו לפחות נקודת הצטברות אחת ξ (אם בין ה z_n מופיע מספר ξ כל-שהוא אינסוף פעמים, נאמר, כי ξ היא נקודת הצטברות של ה z_n האלה). אם נוכיח, כי $f(\xi) = m$, נדע כי $f(z)$ מקבלת בנקודה ξ את הערך השווה לחסם התחתון של ערכיה; כלומר, נוכיח את קיום המינימום. ואמנם, מתוך הסדרה $\{z_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) אפשר לברור סדרה חלקית אינסופית $z_{n_1}, z_{n_2}, z_{n_3}, \dots$, אשר עבורה תהיה ξ נקודת ההצטברות היחידה. ערכי z_{n_k} ($k = 1, 2, 3, \dots$) אלה שואפים איפוא אל ξ . הערכים המתאימים $f(z_{n_k})$ שואפים אל הערך m , כי הם נמצאים בין m לבין $m + \frac{\varepsilon}{n_k}$, ו $\frac{\varepsilon}{n_k}$ שואף ל 0 בגדול ה n_k לאיין-

סוף. לכן נוכל לכתוב

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = m,$$

ו z_{n_k} שואף ל ζ . אולם $f(z)$ רציפה בנקודה ζ , ולכן

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = f(\zeta),$$

כאשר z שואף ל ζ בדרך איזו שהיא, כלומר גם בדרך הסדרה החלקית z_{n_k} . לפיכך

$$f(\zeta) = m.$$

הערה. אפשר להוכיח, כי $f(z)$ חסומה גם מלעיל בתחום הסגור וקיים שם ערך מקסימום; אולם אין לנו ענין בעובדות אלו. הקורא מתבקש להוכיח משפטים אלה כתרגיל.

ד. 6. המשפט היסודי של האלגברה.

יש הוכחות רבות ושונות ל"משפט היסודי של האלגברה" ונביא כאן אחת מהן המבוססת על משפט המינימום (משפט חשוב כשהוא לעצמו).

משפט המינימום לפולינומים. אם $p(z)$ פולינום ממעלה גדולה או שווה ל 1 ו R מספר חיובי כל-שהוא, אז

(א) קיים מספר מרוכב α , $|\alpha| \leq R$, כך שעבור כל המספרים המרוכבים z , המקיימים

$$|z| \leq R,$$

קיים אי-השוויון

$$|p(\alpha)| \leq |p(z)|.$$

(כלומר, יש נקודה α שבה הערך המוחלט של $p(z)$ הוא ערך מינימום בעגול המספרים המרוכבים $|z| \leq R$).

(ב) אם α זה מקיים את אי-השוויון

$$|\alpha| < R,$$

אזי

$$p(\alpha) = 0.$$

(כלומר אין $|p(z)|$ יכול לקבל את ערך המינימום שלו בנקודה פנימית של העגול אלא אם-כן מינימום זה הוא אפס. לשון אחר: אם $p(z) \neq 0$ בכל התחום $|z| < R$, יקבל $|p(z)|$ את ערך המינימום שלו על שפת התחום).

הוכחה. (א). ראינו (בהערה בסוף הסעיף ד. 2), כי $|p(z)|$ היא פונקציה רציפה בכל נקודה z במישור. לפיכך היא רציפה בתחום הסגור $|z| \leq R$. לכן קיימת (לפי המשפט בעמוד 105) בתוך התחום הזה או על שפתו נקודה α , אשר בה יש לפונקציה $|p(z)|$ ערך מינימום.

(ב). נניח, כי $p(z)$ פולינום ממעלה גדולה או שווה ל 1 ו α מספר בעל התכונות הבאות:

$$(ד. 6. 1) \quad 0 \leq |\alpha| < R,$$

$$(ד. 6. 2) \quad p(\alpha) \neq 0,$$

$$(ד. 6. 3) \quad |p(\alpha)| \leq |p(z)|$$

עבור כל המספרים z המקיימים את אי-השוויון

$$(ד. 6. 4) \quad |z| \leq R.$$

לפי משפט טיילור, אם n היא מעלת הפולינום $p(z)$, $n \geq 1$, אז

$$p(z) = p(\alpha) + \frac{p'(\alpha)}{1!}(z-\alpha) + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n.$$

ולפחות אחד המספרים

$$(ד. 6. 5) \quad \frac{p'(\alpha)}{1!}, \frac{p''(\alpha)}{2!}, \dots, \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}$$

שונה מאפס. נניח, כי k הוא המספר הטבעי הקטן ביותר שעבורו

$$\frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} \neq 0.$$

אזי נוסחת טיילור הנ"ל תכתב:

$$p(z) = p(\alpha) + \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k + \frac{p^{(k+r)}(\alpha)}{(k+1)!}(z-\alpha)^{k+r} + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n. \quad (6.6.6)$$

נטפל עתה במספר המרוכב (השונה מאפס)

$$-\frac{p^{(k)}(\alpha)}{k! \cdot p(\alpha)}$$

ונכתוב אותו בצורה

$$\varrho \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (\varrho > 0),$$

מקום שם ϱ הערך המוחלט ו φ הארגומנט שלו. נעיין במספרים בעלי הצורה

$$(7.6.7) \quad z = \alpha + r \left[\cos \left(-\frac{\varphi}{k} \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{k} \right) \right],$$

מקום שם r מספר חיובי כל-שהוא שיקבע להלן. עבור המספרים המיוחדים האלה קיים

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{p(\alpha)} &= 1 + \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k! p(\alpha)}(z-\alpha)^k + \frac{p^{(k+r)}(\alpha)}{(k+1)! p(\alpha)}(z-\alpha)^{k+r} + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n! p(\alpha)}(z-\alpha)^n \\ &= 1 - \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi) r^k [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] \\ &\quad + \frac{p^{(k+r)}(\alpha)}{(k+1)! p(\alpha)} r^{k+r} \left[\cos \left(-\frac{\varphi}{k} (k+1) \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{k} (k+1) \right) \right] \\ &\quad + \dots + \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n! p(\alpha)} r^n \left[\cos \left(-\frac{\varphi}{k} n \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{k} n \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \varrho r^k + \\ &\quad + r^{k+r} \left\{ \frac{p^{(k+r)}(\alpha)}{(k+1)! p(\alpha)} \left[\cos \left(-\frac{\varphi}{k} (k+1) \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{k} (k+1) \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. \dots + r^{n-k-r} \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n! p(\alpha)} \left[\cos \left(-\frac{\varphi}{k} n \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{k} n \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

אם r קטן למדי, באופן שיקיים את אי-השוויון

$$(8.6.7) \quad r^k \varrho < 1,$$

נקבל (כיון שהערך המוחלט של $\cos \theta + i \sin \theta$ עבור כל קשת θ הוא 1):

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(z)}{p(\alpha)} \right| &\leq |1 - r^k \cdot \varrho| + r^{k+r} \left(\left| \frac{p^{(k+r)}(\alpha)}{(k+1)! p(\alpha)} \right| + \dots + r^{n-k-r} \cdot \left| \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n! p(\alpha)} \right| \right) \\ &\leq 1 - r^k \left[\varrho - r \left(\left| \frac{p^{(k+r)}(\alpha)}{(k+1)! p(\alpha)} \right| + \left| \frac{p^{(k+2)}(\alpha)}{(k+2)! p(\alpha)} \right| \cdot R + \dots + \left| \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n! p(\alpha)} \right| R^{n-k-r} \right) \right]. \end{aligned}$$

אם נבחר עתה את r כך, שיקיים גם את שני התנאים (שאינם סותרים את התנאי (8.6.7)):

$$(9.6.7) \quad 0 < r < R - |\alpha|$$

(אין תנאי זה אלא בטוי לדרישה, כי העגול ברדיוס r סביב α ימצא בתוך העגול $|z| \leq R$).

$$(10.6.7) \quad r < \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{1}{\left| \frac{p^{(k+r)}(\alpha)}{(k+1)! p(\alpha)} \right| + \dots + \left| \frac{p^{(n)}(\alpha)}{n! p(\alpha)} \right| R^{n-k-r}},$$

* להבנת התנאי הזה מתבקש הקורא לשרטט מעגל בעל רדיוס R

ומרכזו ב O . בתוך העגול הזה נקבע נקודה α ומסביבה כמרכז נשרטט מעגל בעל רדיוס $R - |\alpha|$.

אזי, עבור מספרים $z = \alpha + r \left[\cos \left(-\frac{\varphi}{k} \right) + i \sin \left(-\frac{\varphi}{k} \right) \right]$

אלה, יהיה

$$\left| \frac{p(z)}{p(\alpha)} \right| \leq 1 - r^k \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 1 - r^k \cdot \frac{1}{2} < 1.$$

ולכן יהיה

$$|p(z)| < |p(\alpha)|,$$

בנוסף להנחתנו היסודית, כי עבור המספרים z בעגול $|z| \leq R$ קיים

$$|p(\alpha)| \leq |p(z)|.$$

לכן היתה ההנחה

$$p(\alpha) \neq 0 \quad (2.6.2)$$

מוטעית וקיים

$$p(\alpha) = 0.$$

בזאת הוכח המשפט.

עתה נוכל להוכיח את

המשפט היסודי של האלגברה:

לכל משואה אלגברית $p(z) = 0$ ממעלה גדולה

או שווה ל-1 יש לפחות שרש אחד.

הוכחה. מותר להניח, כי $p(\alpha) \neq 0$ (אם $p(\alpha) = 0$, המשפט

קיים מאליו). יהא

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad n \geq 1, \quad a_n \neq 0.$$

או

$$|p(z)| = |a_n z^n| \cdot \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n} \right|$$

$$\geq |a_n z^n| \cdot \left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} \right| + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n} \right)$$

$$\geq |a_n z^n| \left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} \right| - \dots - \left| \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n} \right| \right).$$

אם z מקיים את אי-השוויון

$$(11.6.1) \quad |z| > 2 \operatorname{Max} \left\{ 1, \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right\},$$

הרי קיים במיוחד

$$|z| > 2 \left| \frac{a_0}{a_n} \right|, \quad |z|^n > |z|, \quad |z| > 2,$$

ולכן

$$|p(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n \cdot \left[1 - \frac{1}{|z|} \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right) \right]$$

$$> |a_n| \cdot 2 \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \right] = |a_0|.$$

נעניין עתה במעגל (במישור המספרים המרוכבים)

$$(12.6.1) \quad |z| = 1 + 2 \operatorname{Max} \left\{ 1, \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right\}.$$

ערכי z על המעגל הזה מקיימים את (ד.6.11) ולכן יהיה עבורם

$$|p(z)| > |a_0|.$$

אבל בנקודה $z = 0$ קיים

$$|p(0)| = |a_0|;$$

כלומר בנקודה $z = 0$ שהיא בפנים המעגל (ד.6.12) מצאנו ערך $|p(0)|$, שהוא קטן מכל ערכי $|p(z)|$ על המעגל. לפיכך יתקבל ערך המינימום של $|p(z)|$ לגבי העגול הסגור, אשר שפתו היא המעגל (ד.6.12), בנקודה פנימית α של העגול הזה. לפי משפט המינימום

לפולינומים (בעמוד 106) יהיה איפוא עבור α זה $p(\alpha) = 0$ והמשפט הוכח.

נוכיח עתה משפט חשוב הנובע מן המשפט היסודי של האלגברה. משפט. לכל פולינום ממעלה n גדולה או שווה ל-1 יש בדיוק n שרשים (נקודות אפס) שונים או שווים זה לזה. הוכחה. יהא $p(z)$ פולינום ממעלה n , $n \geq 1$. לפי המשפט היסודי של האלגברה יש ל $p(z)$ לפחות שרש אחד, ונציין אותו ב α_1 . לפי המשפט הראשון של הסעיף (ב.4) קיים פולינום $p_1(z)$ מן המעלה $n-1$ בדיוק, באופן שיהיה

$$p(z) = (z - \alpha_1) p_1(z). \quad (ד.6.13)$$

אם n היה 1 גמרנו את הוכחת המשפט. אם $n > 1$, הרי $n-1 \geq 1$ ולכן יש ל $p_1(z)$ לפחות נקודת אפס אחת, α_2 . לכן קיים פולינום $p_2(z)$ מן המעלה $n-2$, באופן שיהיה

$$p(z) = (z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \cdot p_2(z). \quad (ד.6.14)$$

אם n היה 2 גמרנו את הוכחת המשפט. אם $n > 2$, אזי $n-2 \geq 1$ ואפשר להמשיך בדרך זו n פעמים, כך שנקבל לבסוף (כאשר $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ מספרים מתאימים)

$$p(z) = (z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n) \cdot \beta, \quad (ד.6.15)$$

ו n המספרים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ הם השרשים של $p(z)$. אין ל $p(z)$ שרשים נוספים כפי שראינו בסעיף (ב.4).

אם אחדים מבין α שווים זה לזה, יהיו אלה שרשים מסדר גבוה מ-1. אם $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ הם השרשים השונים ביניהם ואם הסדר של α_1 הוא m_1 , של α_2 הוא m_2 , ..., של α_k הוא m_k , אזי קיים $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ ונוכל לכתוב

$$p(z) = \beta \cdot (z - \alpha_1)^{m_1} \cdot (z - \alpha_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (z - \alpha_k)^{m_k}.$$

הקורא מתבקש לתקן:

עמוד	שורה	במקום	נא לכתוב
20	8 מלמטה	$0 + 0i$	$0 + 0i$
23	12 "	$a = b = 0$	$a = b = 0$
63	3 מלמעלה	$\frac{p'(x)}{1!} (x - \alpha)$	$\frac{p'(\alpha)}{1!} (x - \alpha)$
63	9 "	$\frac{p''(x)}{2!} (x - \alpha)^2$	$\frac{p''(\alpha)}{2!} (x - \alpha)^2$
70	2 מלמטה	Ta taglia	Tartaglia

