ثلاث وحدات

التحليل

للصفين - الحادي عشر والثاني عشر

אנליזה לכיתות י"א - י"ב

طبعة تجريبية

دائرة تدريس العلوم، معهد وايزمن للعلوم

ثلاث وحدات

التحليل אנליזה

للصفين – الحادي عشر والثاني عشر

طبعة تجريبية

دائرة تدريس العلوم، معهد وايزمن للعلوم

يصدر بمبادرة ومراقبة

المركز الاسرائيلي لتدريس العلوم على اسم عاموس دي شليط

من تأسيس

وزارة المعارف والثقافة، الجامعة العبرية في اورشليم القدس ومعهد وايزمن للعلوم رحوبوت

يمتع منعاً باتاً تكرار، او نسخ، اوتصوير، او تسجيل، او ترجمة، او اختزان في مجمع معلومات، او بث بأية طريقة كانت، الكترونية، او بصرية، او ميكانيكية، أو بأية طريقة اخرى، أي جزء من مادة هذا الكتاب لاستخدامه لأغراض تجارية الا باذن واضح ومكتوب من الناشر

©

حقوق الطبع محفوظة
معهد وايزمن للعلوم
ووزارة المعارف والثقافة

طبع في اسرائيل سنة 2001

تأليف:
نوريت هداس
سارة كيرو

استشارة:
تومي درايفوس

ترجمة:
الياس حايك

مراجعة واعداد:
يوسف خوري
شفيق خليفة

محتويات الكتاب

الفصل الاول: دوال خارج القسمة 7-85

خط التقارب، ما هو؟ 7

عن خطوط التقارب ايضا 12

كسور عشرية صغيرة 15

واحدة من العائلة $f(x)=\frac{1}{x}$ 17

دوال قوى اخرى 33

عمليات جبرية وازاحات 42

ازاحات وانعكاسات اخرى للدالة $y=\frac{1}{x}$ 47

قليلا من "الشد" 53

عن مماس الدالة 68

بحث دوال خارج قسمة اخرى (اختياري) 74

خط بياني ذو ثقب وتبسيط الكسور (اختياري) 79

الفصل الثاني: الدالتان f و $\frac{1}{f}$ 86-140

الدالة المعرفة في قطعة مغلقة 86

وماذا لو كان المجال غير مغلق؟ 98

وماذا لو قطع الخط البياني المحور x ؟ 106

رسم الخط البياني $\frac{1}{f}$ اذا علم قانون f 121

الفصل الثالث: عائلة اخرى من الدوال 141-171

تناظر وتناظر عكسي 141

دالة الجذر 150

عن الجذور ايضا 155

عن الجذور والمشتقة 163

الفصل الرابع: الدالة المركبة ..... 172 - 215

ما هي الدالة المركبة؟ 172

مشتقة الدالة المركبة 185

بحث الدوال المركبة 193

تكامل الدالة المركبة 211

الفصل الخامس: العلاقة بين الخط البياني للدالة والخط البياني للمشتقة 247-216

وتيرة تغير الدالة (من f الى f') 216

من الخط البياني للمشتقة f' الى الخط البياني للدالة f 239

الفصل السادس: حاصل ضرب الدوال 248-274

الخطوط البيانية لحاصل ضرب الدوال 248

مشتقة حاصل ضرب الدوال 256

بحث حاصل ضرب الدوال 261

معادلة المماس 271

الفصل السابع: مسائل نهايات قصوى مختارة 275-305

اجابات 307-371

الى الطلاب

في هذا الكراس، سوف تتعلمون عن عائلات جديدة من الدوال (اضافة لتلك التي عرفتموها سابقا). وسوف تتعرفون الى مفاهيم جديدة لها علاقة بكل عائلة، وتستعملون المفاهيم التي عرفتموها سابقا.

بعض هذه المفاهيم أدرجت في فعاليات بمساعدة الحاسوب او الحاسبة البيانية. فعاليات كهذه كُتبت مرفقة بتعليمات لاحدى البرمجيات *TI-NSpire* او "هندسة في حركة" او *Excel* والتي يمكن ملاءمتها لبرميجات اخرى ايضا.

يتألف كل بند من قسمين، تجدون في القسم الاول منهما الموضوع والمفاهيم الجديدة وتجدون في القسم الثاني تمارين تهدف ارساء قاعدة متينة عن المادة التي درستموها في البند نفسه وفي البنود السابقة.

تفسير الرموز

تمرين "مفتاح" نتعلم منه امراً جديداً

تذكير

عمل ذاتي

تمرين تحضير

تمرين "أصعب قليلا"

مراجعة

فعالية بمساعدة الحاسوب

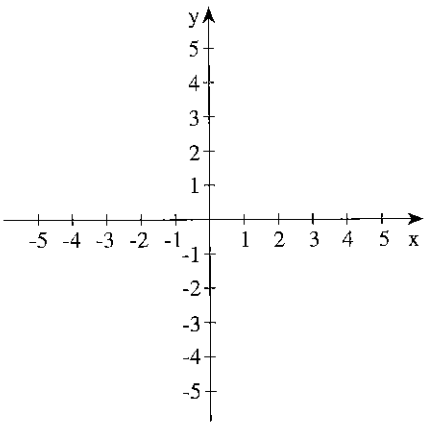
لتفسير المعلم

فعالية بمساعدة الحاسوب
او الحاسبة البيانية

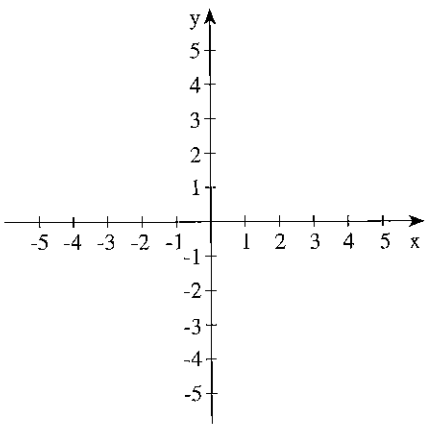
الفصل الاول: دوال خارج القسمة

خط التقارب، ما هو ؟

1. أ) ارسموا خطاً بيانياً لدالة تنازلية لكل x .



ب) حاولوا ان ترسموا خطا بيانيا لدالة تنازلية لكل x ، لكنها لا تقطع المحور x .

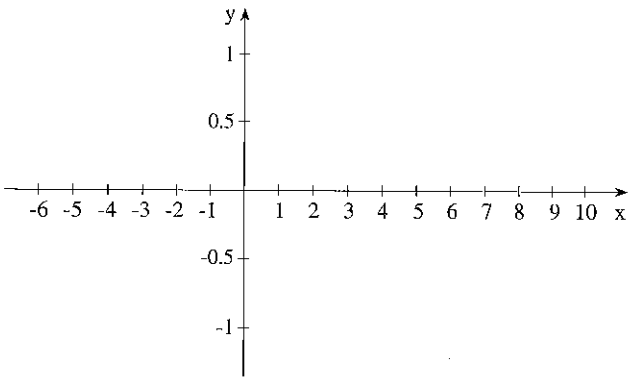


في هذا الفصل، سنتعامل مع دوال ذات خواص من النوع الذي رأيتموه في التمرين وستتعرفون الى صورها الجبرية ايضا.

2. معطاة الدالة $h(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$ المعرّفة في جميع الاعداد

أ) معلوم ان النقط القصوى الوحيدة لها هي $(1\ ,\ 1)$ و $(-2,\ -0.5)$.

عينوا النقطتين في هيئة المحاور.



ب) جدوا نقطة تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور y تم عيّنوها.

جـ) امامكم نقط تنتمي للخط البياني للدالة h. عوضوا واكملوا ثم عيّنوا.

مثال: نجد الاحداثي y للنقطة (,8).

نستعين بالحاسبة لتنفيذ تمرين القسمة. يجب استعمال القوسين والقسمة بدلا من خط الكسر. مثلا عند تعويض 8 بدلا من x ينتج:

$\frac{2 \cdot 8 + 1}{8^2 + 2}$ ونحسبه بالطريقة الاتية:

(	2	x	8	+	1	)	÷	(	8	SHIFT	x^2	+	2	)	=

(-6,) (-3,) (2,)

د) نقطة تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x ، الوحيدة هي $(-0.5, 0)$.

عيّنوها.

هـ) بيّنوا من أي نوع كل واحدة من النقط القصوى.

و) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة (انتبهوا، توجد نقطة تقاطع واحدة مع المحور x ولا توجد نقطة قصوى اخرى).

ز) أشيروا الى الادعاءات الصحيحة وعلّلوا.

اذا كانت النقطة (□,20) على الخط البياني للدالة، فان العدد في المربع:

- يمكن ان يكون سالباً.
- يمكن ان يكون صفرا.
- يمكن ان يكون 0.5.
- يجب ان يكون موجبا.
- أصغر من 0.24.

ح) عوضوا في قانون الدالة واكملوا:

(100,) (150,) (200,)

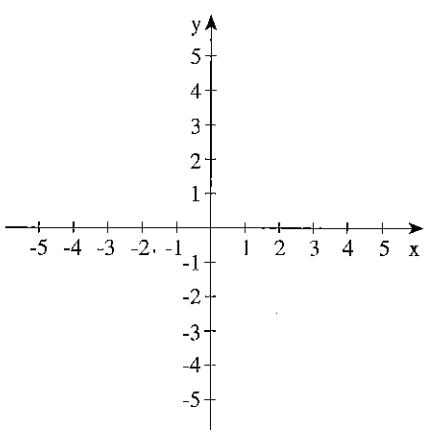
طـ) إن تعوضوا في قانون الدالة عددا كبيرا جدا، ما نوع العدد الناتج (موجب/سالب/صفر)؟

من الصعب الاقتناع انه توجد دوال، خطها البياني يأخذ بالاقتراب من خط حدودي معين كمحور x مثلا، الا اننا سنرى ان ذلك ممكن لدى وقوفنا عن كثب على مثل هذه الدوال.

الخط الحدودي الذي تأخذ الدالة بالاقتراب منه، يدعى خط **التقارب**.

ع.ذ 3. أ) ارسموا المستقيم $y = 3$.

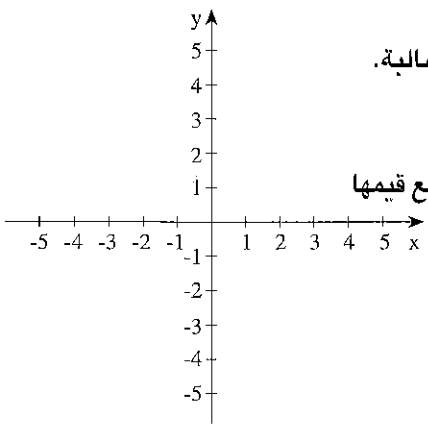
ب) ارسموا خطاً بيانياً لدالة، بحيث يكون المستقيم $y=3$ خط تقارب لها.



4. أ) ارسموا خطاً بيانياً لدالة تحقق:
– (-1, -4) هي نقطة قصوى وحيدة.
– المحور x هو خط تقارب.
ب) بيّنوا نوع النقطة القصوى.
جـ) سجلوا معادلة خطة التقارب.

تمارين

5. أ) ارسموا خطاً بيانياً لدالة تنازلية.
لكل x ، بحيث تكون جميع قيمها سالبة.



ب) ارسموا خطاً بيانياً لدالة
تصاعدية لكل x، بحيث تكون جميع قيمها
سالبة.

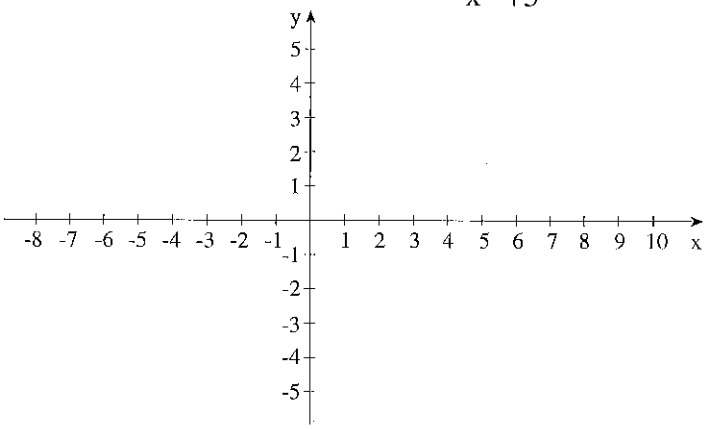
6. ارسموا المستقيم y=-2.

ارسموا خطاً بيانياً لدالة، بحيث يكون المستقيم y=-2 خط تقارب لها.

7. أ) حاولوا رسم خط بياني لدالة لها ثلاث نقط قصوى، بحيث يكون y=-1
خط تقارب لها.

ب) حاولوا رسم خط بياني لدالة لها نقطتان قصويان، بحيث يكون y=-1
خط تقارب لها.

8. معطاة الدالة $y = \frac{3x^2}{x^2 + 3}$



أ) النقطة القصوى الوحيدة هي $(0, 0)$، عيّنوها.

ب) اكملوا احداثيات النقطتين الاتيتين اللتين تنتميان للخط البياني.
(10,) (2,) عينوا النقطتين في هيئة المحاور.

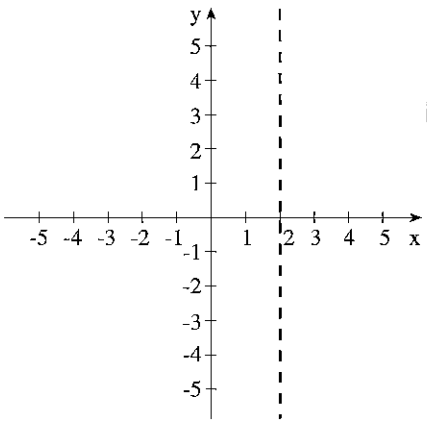
جـ) اكملوا احداثيات النقطتين الاتيتين اللتين تنتميان للخط البياني.
(1000,) (200,) سجلوا اربع منازل عشرية بعد الفاصلة.
ما هي حسب رأيكم، معادلة خط التقارب؟ ارسموا المستقيم.

د) هل الدالة زوجية (متماثلة بالنسبة للمحور y)؟ فسروا.

هـ) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة.

عن خطوط التقارب ايضا

في هذا البند، سنتعامل مع دوال لها خطوط تقارب موازية للمحور y.
هذه الدوال ليست "متصلة" (لا يمكن رسمها بدون رفع القلم عن الصفحة)



1. المستقيم $x=2$ هو خط تقارب لخط بياني لدالة.
ارسموا في ذات هيئة المحاور، خطاً بيانياً لدالة تحقق ما يلي:

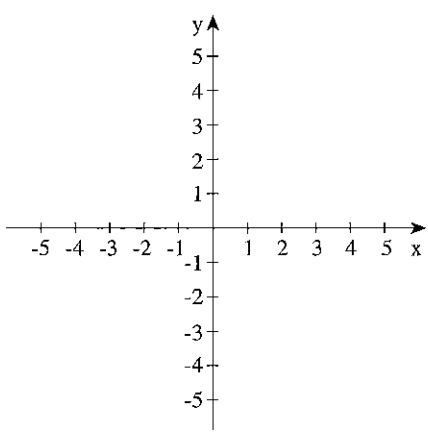
أ) $(4, 1)$, $(-3, -2)$ هما نقطتا نهاية صغرى (عيّنوهما)

ب) الدالة تمر في نقطة الأصل (عيّنوا)

جـ) عندما تقترب قيم x الى 2 ،
فان قيم الدالة تكون كبيرة جدا من جهتي خط التقارب.

خط التقارب الموازي للمحور y هو عبارة عن حاجز.

في البند التالي، ستتعرفون الى قوالب جبرية ملائمة لمثل هذه الدوال.



2. أ) ارسموا خطاً بيانياً لدالة ذات خط تقارب، بحيث يكون لها نقطتا نهاية عظمى ولا يكون لها نقط نهاية صغرى.

ب) ما هي معادلة خط التقارب الذي رسمتموه؟

ع.ذ

3. أ) ارسموا المستقيمين مقطعين
$y = 1$, $x = -1$
ب) ارسموا خطاً بيانياً لدالة، بحيث يكون المتسقيمان المذكوران خطي تقارب لها.

تمارين

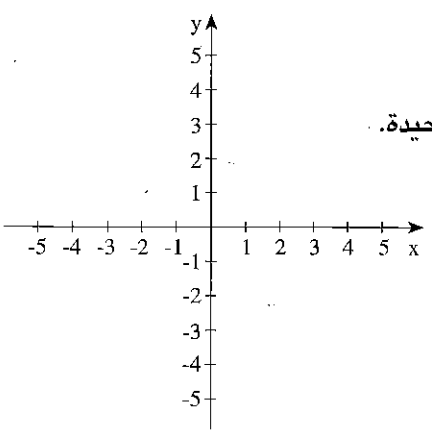
4. أ) ارسموا خطاً بيانياً لدالة لها خط تقارب واحد ونقطتا نهاية صغرى وليس لها نقط نهاية عظمى.

ب) سجلوا معادلة خط التقارب.

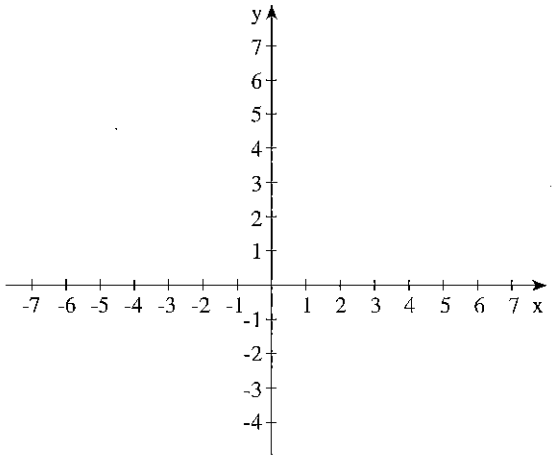
5. أ) ارسموا خطاً بيانياً لدالة لها:
– خط تقارب واحد.
– نقطة نهاية عظمى واحدة.
– نقطة نهاية صغرى واحدة أعلى من النهاية العظمى (يعني قيمة الدالة لها أعلى)
ب) سجلوا مغادلة خط التقارب.

6. أ) ارسموا المستقيمين بشكل مقطع .
$x = 2$, $y = -1$.

ب) ارسموا في ذات هيئة المحاور،
خطا بيانيا لدالة تحقق:
– النقطة (2- ,3) هي نقطة نهاية صغرى وهي النقطة القصوى الوحيدة.
عيّنوا.
– المستقيمان $x = 2$, $y = -1$
هما خطا تقارب لها.



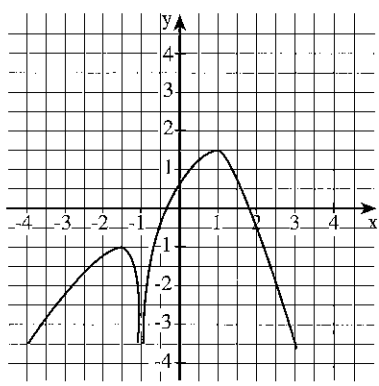
7. ارسموا خطاً بيانياً لدالة تحقق:
أ) المستقيم $x = -1$ هو خط تقارب للخط البياني للدالة، (ارسموه مقطعاً).



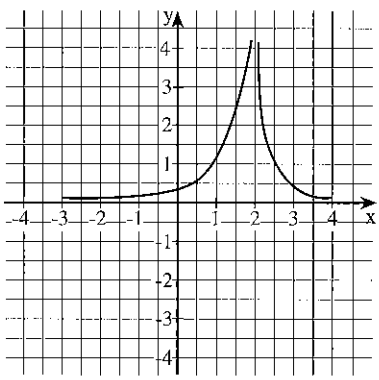
ب) النقطة (2, 3) هي نقطة نهاية عظمى، عيّنوها.
جـ) النقطة (-3 , -4) هي نقطة نهاية صغرى، عيّنوها.
د) نقط التقاطع مع المحورين هي: (5, 0) (-0.5, 0) , (-2, 0) , (-6, 0)
و (0, 1) . عيّنوها ثم اكملوا رسم الخط البياني للدالة.

8. أبرزوا خطوط التقارب (الموازية للمحورين). ثم سجلوا الى جانب كل مستقيم، معادلته.

أ)



ب)



كسور عشرية صغيرة

1. نفّذوا التمارين الآتية بمساعدة الحاسبة، وسجلوا ما ترون في العارض.

مثال : 0.000025^2

استعينوا بسلسلة الضغطات واكملوا المثال:

0.000025	SHIFT	x^2	=

أ) $0.000015^2 =$

ب) $0.0000037^2 =$

تُكتب الكسور العشرية الصغيرة في الحاسبة، على شكل عدد بين 1 و 10 (رقم واحد مختلف عن الصفر الى يسار الفاصلة العشرية). عدد الاصفار قبل هذا الرقم يشمل الصفر الذي قبل الفاصلة، هو أُس مسجّل فوقه.
مثلا 6.25^{-10} هو العدد 0.000000000625 (وله 10 أصفار).
والتفسير لهذه الصورة من الكتابة مرتبط بقوى العدد 10 وبتعريف عملية القوى لأُس سالب. فيما يلي ستتعلمون تفسير هذه الصورة من الكتابة.

2. أ) اكتبوا ككسر عشري بصورته الاعتيادية.

$35^{-03} =$ $\qquad$ $2^{-03} =$ $\qquad$ $8^{-02} =$

ب) لكتابة أعداد كتلك من البند (أ) ، يمكنكم الاستعانة بالضغطة EXP، في الحاسبة .

(i) ---------- $= 4^{-02}$ ، استعينوا بسلسلة الضغطات واكملوا

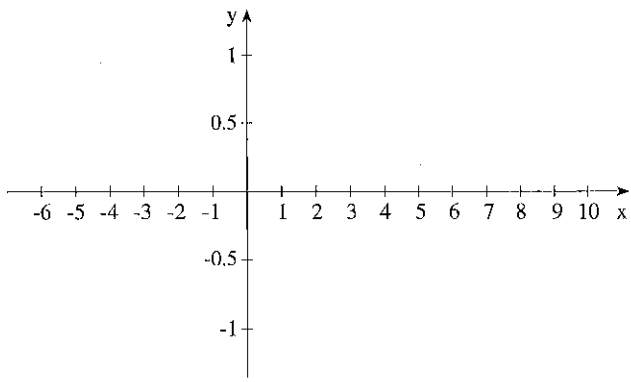
4	Exp	+/-	2	=

انتبهوا: في بعض الحاسبات تبقى على العارض صورة كتابة القوى (بعد الضغط على =)

(ii) استعينوا بـExp لفحص صحة ما كتبتم في البند (أ).

3. معطاة الدالة $f(x)\frac{x}{x^2+1}$

أ) جدوا نقطة تقاطع الدالة مع المحور y ، وعينوها في هيئة المحاور.



ب) معلوم ان النقط القصوى الوحيدة هي:
(1, 0.5) , (-1, -0.5) ، عينوهما في هيئة المحاور.
– بيّنوا نوع النقط القصوى. من أجل ذلك احسبوا وعيّنوا نقطاً اخرى.

جـ) عوضوا واكملوا احداثيات النقط الآتية التي تنتمي للخط البياني للدالة.
(-100,) , (100,) , (1000,) , (10000,)
ما هي معادلة خط التقارب، حسب رأيكم؟

د) اكملوا رسماً تقريبيا للخط البياني للدالة.

واحدة من العائلة، $f(x) = \frac{1}{x}$

1. عندما بدأنا تعلّم موضوع القسمة في المدرسة الابتدائية، فحصنا كل تمرين قسمة بمساعدة الضرب.
اكملوا الاعداد الناقصة في المربعات.

أ) $\square = \frac{12}{3}$ ، الفحص بمساعدة الضرب: $\square \cdot 3 = 12$.

ب) $\square = \frac{8}{4}$ ، الفحص بمساعدة الضرب: $\square \cdot 4 = 8$.

جـ) $\square = \frac{9}{0}$ ، الفحص بمساعدة الضرب: $\square \cdot 0 = 9$.

– هل بامكانكم ايجاد عدد ملائم للمربع في البند (جـ) ؟

لا يوجد عدد هو نتيجة القسمة على صفر. مثلا ، لا يمكن تعويض الصفر في القالب $\frac{1}{x}$

2. سجلوا الى جانب كل قالب، العدد الذي لا يمكن تعويضه فيه.

أ) $\frac{1}{x - 2}$

ب) $\frac{1}{x+ 2}$

جـ) $\frac{3}{2x - 6}$

د) $\frac{4}{3x + 3}$

هـ) $\frac{x - 1}{x}$

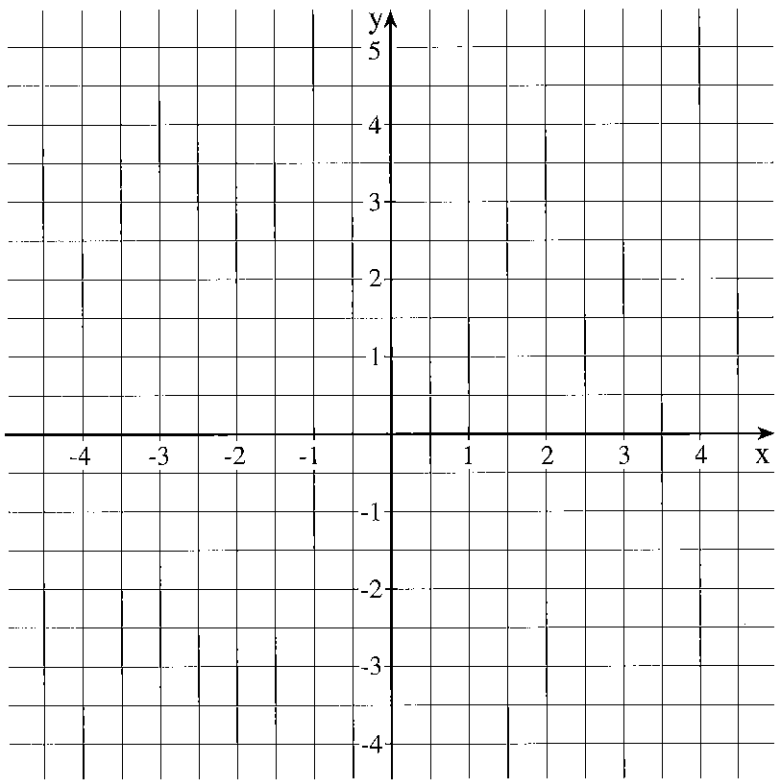
و) $\frac{x}{x - 1}$

3. معطاة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$

أ) اكملوا الجدول وعيّنوا في هيئة المحاور (يمكنكم الاستعانة بالضغطة $\frac{1}{x}$ في الحاسبة)

x	1	2	3	4	5
f(x)					

ب) عوّضوا واكملوا ثم عيّنوا: (0.25,) (0.4,) (0.5,) (0.75,)



جـ) هل توجد للخط البياني للدالة نقط تقاطع مع المحور y؟ فسّروا.

تبين لنا انه ، لا يمكن تعويض x=0 في الدالة f. لذلك فان الدالة غير معرفة في x=0

د) نفحص ماذا يحدث للخط البياني عند الاقتراب من المستقيم $x = 0$.

– اكملوا : (0.1,) (0.01,) (0.001,)

– ماذا يحدث لقيم الدالة y ، ان نعوّض قيما ل x أقرب اكثر واكثر الى الصفر؟

المحور y هو خط تقارب للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$

هـ) افحصوا ماذا يحدث عندما تكبر قيم x .

– عوّضوا واكتبوا ككسر عشري:

(10,) (100,) (1,000,) (10,000,)

– ماذا يحدث للاحداثي y ، عند تعويض قيم كبيرة جدا بدلا من x؟

المحور x هو ايضا خط تقارب للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$

و) اكملوا رسم الخط البياني للدالة في مجال الاعداد الموجبة.

ز) هل توجد للخط البياني للدالة نقط تقاطع مع المحور x؟ فسّروا.

ح) احسبوا وعيّنوا النقط في هيئة المحاور

$f(1) =$ $f(3) =$ $f(0.5) =$ $f(0.25) =$

$f(-1) =$ $f(-3) =$ $f(-0.5) =$ $f(-0.25) =$

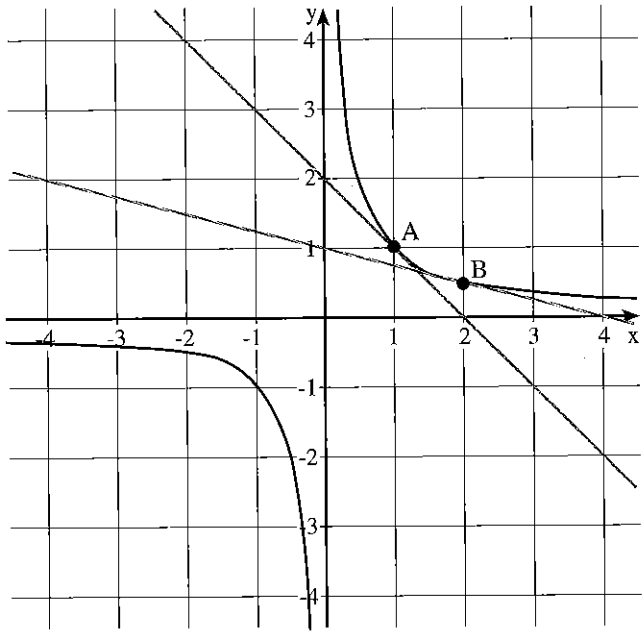
– جدوا نقطاً اخرى احداثياتها متضادة.

– هل الدالة زوجية او فردية او اخرى؟

ط) اقطعوا الورقة الشفافة (i) . (i) هو «فرع» من الخط البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ ضعوه على هيئة المحاور حيث رسمتم سابقا، لينتج الخط البياني في مجال الاعداد السالبة ايضا.

أبعدوا الخط البياني الشفاف واكملوا الرسم في مجال الاعداد السالبة.

4. في الشكل، الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ والمماسان في النقطتين A و B



أ) هل يوجد للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ نقط قصوى؟ (قرروا حسب الرسم البياني)

ب) في اي مجال تكون الدالة تصاعدية، وفي اي مجال تكون تنازلية؟ (قرروا حسب الرسم البياني)

جـ) – اقرأوا وسجلوا ميلي المماسين المرسومين (في النقطتين A و B)

– سجلوا ميلي المماسين بكتابة رياضية.

في النقطة A : _____ = f ' (1)، اكملوا.

في النقطة B : _____ ، اكملوا.

– استعينوا بمستقيم، واقرأوا ميلي المماسين في النقطتين اللتين احداثيهما مسجلان فيما يلي واكملوا:

f ' (-1) = _____ f ' (0.5) = _____

f ' (-2) = _____ f ' (-0.5) = _____

مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ هي $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

د) (i) افحصوا (بواسطة التعويض في مشتقة الدالة المسجلة داخل الاطار) الميول التي قرأتموها في البند (جـ).

(ii) احسبوا ميل المماس في النقطة $(3 \ , \frac{1}{3})$ وارسموا المماس.

(iii) – فسروا بمساعدة المشتقة، لماذا لا توجد نقط قصوى للدالة.

– فسروا بسماعدة المشتقة ، لماذا الدالة تنازلية في كل المجال.

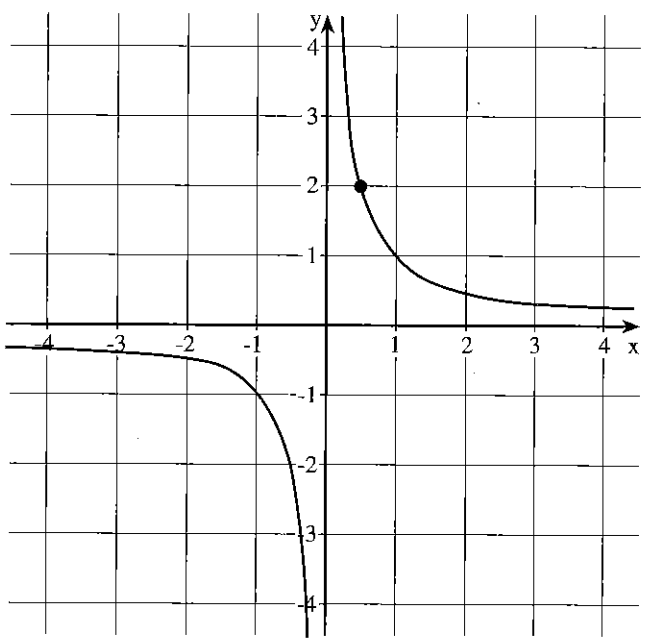
5. أ) أُزيح الخط البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ بمقدار وحدة واحدة الى أعلى.

الى أين تُزاح النقطة المؤشرة؟ عيّنوها في هيئة المحاور.

– في الصفحة الشفافة (أ) تجدون الخط البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ بدون محور x, (ii).

ضعوه على الخط البياني المرسوم ثم أزيحوه بموازاة المحور y بمقدار وحدة واحدة الى أعلى. (استعينوا بالنقطة التي عينتموها) ما هو قانون الدالة المزاحة؟

– عوضوا النقطة التي عينتموها في قانون الدالة الذي سجلتموه وافحصوا.



ب) اجيبوا عن الاسئلة بالنسبة للدالة المزاحة:

(i) ما هي معادلات خطوط التقارب؟

(ii) ما هي نقط تقاطعها مع المحورين؟ عوضوا في قانون الدالة الذي سجلتموه وافحصوا.

(iii) هل الدالة زوجية او فردية او اخرى؟

جـ) مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ هي: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

ما هي مشتقة الدالة المزاحة $g(x) = \frac{1}{x} + 1$?

د) عوضوا في المشتقة وجدوا ميل الدالة المعطاة والمزاحة عندما $x=2$.

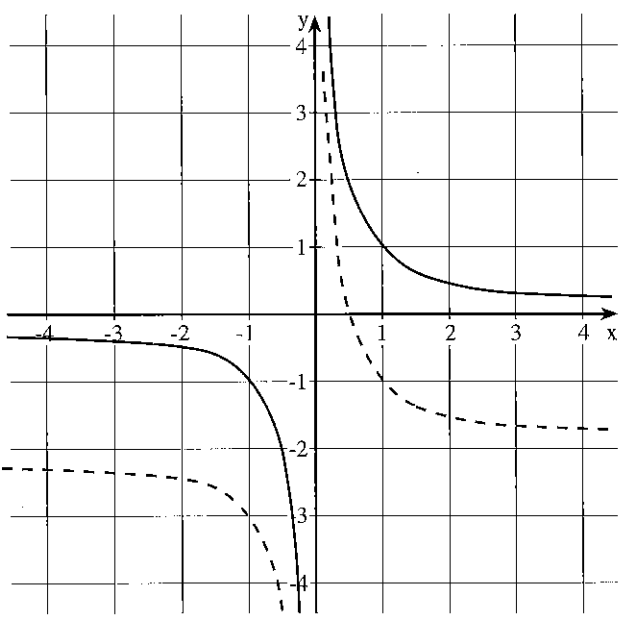
فسروا بمساعدة الخط البياني، لماذايكون للدالتين $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x} + 1$ نفس المشتقة.

6. الخطان البيانيان للدالتين $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x} - 2$ مرسومان في الشكل.

أ) ناظروا لكل دالة خطها البياني (سجلوا على الشكل الى جانب كل فرع).

ب) جدوا ميل المماس لكل دالة منهما في النقطة $x=1$.

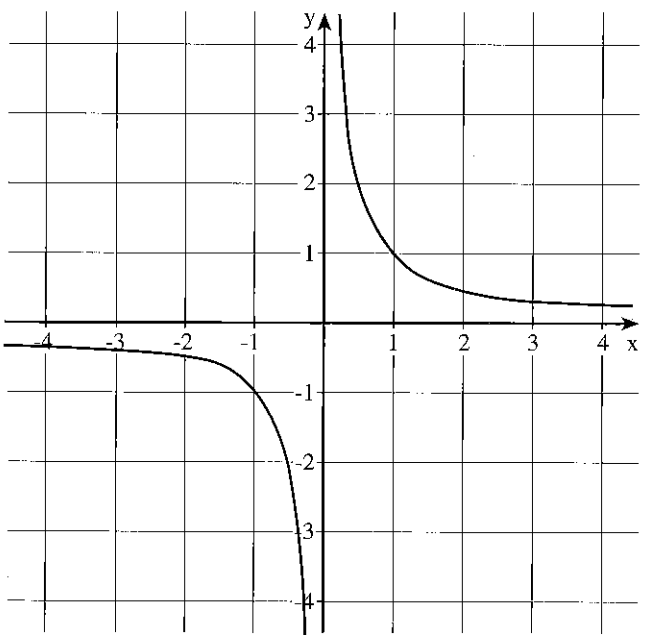
جـ) ارسموا المماسين بشكل تقريبي، ثم سجلوا الوضع المتبادل بينهما.



7. أ) اشتقوا: $y = \frac{1}{x} - 4$, $y = 5 + \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 3$

ب) اكتبوا دالة اخرى مشتقتها هي: $y' = -\frac{1}{x^2}$

8. أ) ضعوا الخط البياني الشفاف $y = \frac{1}{x}$ بدون المحور y (iii) ، على الخط البياني المرسوم ونفذوا انعكاسا عن المحور x . ما هو قانون الدالة الناتجة؟



ب) سجلوا احداثيات نقطة واقعة على الخط البياني للدالة الناتجة. عوضوا في قانون الدالة الذي وجدتموه وافحصوا.

جـ) اجيبوا عن الاسئلة الآتية بالنسبة للدالة التي نتجت من الانعكاس.

(i) ما هي معادلات خطوط التقارب لخط الدالة البياني؟

(ii) ما هي نقط تقاطعها مع المحورين؟

(iii) ما هي مجالات تصاعد وتنازل الدالة؟

(iv) هل الدالة زوجية أو فردية أو أخرى؟

د) مشتقة الدالة $y = \frac{1}{x}$ هي ، $y' = -\frac{1}{x^2}$ لذلك فان مشتقة

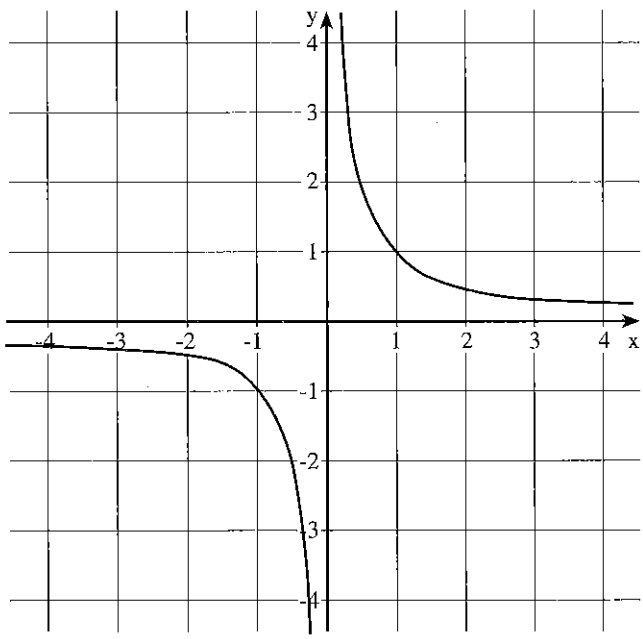
الدالة $y = -\frac{1}{x}$ هي $y' = \frac{1}{x^2}$. فسروا.

فسروا بسماعدة المشتقة، لماذا الدالة $y = -\frac{1}{x}$ تصاعدية في كل المجال.

هـ) اشتقوا: $y = \frac{1}{x} + 3$, $y = 4 - \frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x} - 2$

و) اكتبوا دالة اخرى مشتقتها هي $y' = \frac{1}{x^2}$

9. ضعوا الخط البياني الشفاف (ii) بحيث يبيّن الدالة $y = -\frac{1}{x} + 1$



أ) ما هي نقط تقاطع الدالة مع المحورين؟

ب) اكتبوا معادلات خطوط التقارب.

10. حلوا المعادلات الاتية:

مثال: $\frac{1}{x} - 9x = 0 \;/ +9x$

$$9x = \frac{1}{x} \;/ .x$$

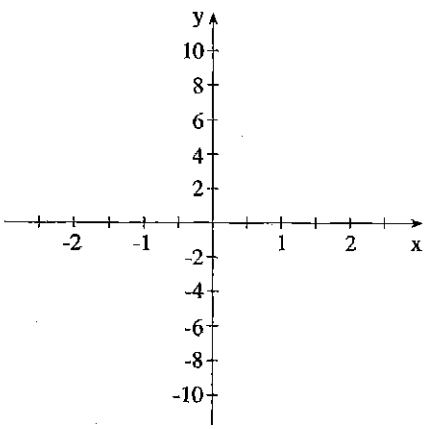
$$9x^2 = 1 / :9$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{1}{3} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{1}{3}$$

أ) $x - \frac{1}{x} = 0$ ب) $-\frac{1}{x^2} + 4 = 0$ جـ) $4x + \frac{1}{x} = 0$ د) $4x - \frac{1}{x} = 0$ هـ) $9 - \frac{1}{x^2} = 0$ و) $\frac{3}{x} = x$

11. معطاة الدالة $y = \frac{1}{x} + 4x$



أ) لأية قيمة x
الدالة غير معرّفة؟

ب) (I) جدوا مشتقة
الدالة.

(ii) جدوا نقطاً مشبوهة
وعيّنوها في هيئة المحاور.

(iii) اكملوا:

(-1,) (-0.25,) (0.25,) (1,)

(iv) من أي نوع النقط المشبوهة؟

جـ) (i) في الجدول أدناه، تجدون الاحداثي x لنقط قريبة من نقطة عدم التعريف.
اكملوا الجدول:

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
y			غير معرفة		

(ii) بيّنوا ماذا يحدث لقيم الدالة، عندما نعوض قيم x أقرب وأقرب الى الصفر.

(iii) سجلوا معادلة خط التقارب.

د) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة.

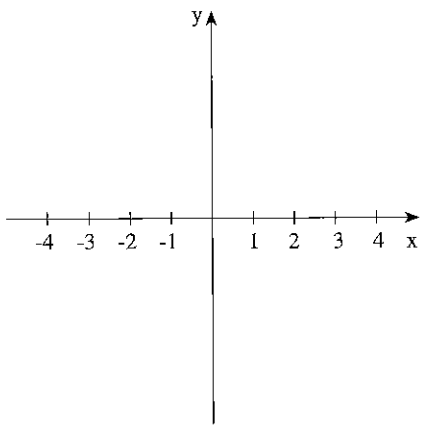
في الدوال غير المتصلة التي لها خط تقارب عمودي، يجب فحص النقط عن الجهتين بجوار كل نقطة مشبوهة. النقط المفحوصة، يجب ان تكون عن جهتي النقطة المشبوهة وعن ذات الجهة من خط التقارب.

ع.د

12. معطاة الدالة $y = -\frac{1}{x} - x + 2$

أ) لأية قيمة x الدالة غير معرفة؟

ب) – جدوا نقط قصوى.
(من أجل ذلك، جدوا المشتقة
ثم جدوا نقطاً مشبوهة ونقطاً
عن جهتي كل نقطة مشبوهة)
– سجلوا نوع النقط المشبوهة
(نهاية صغرى / نهاية عظمى).
هيئة المحاور، أُعدت
لمساعدتكم في القرار حول نوع
النقط القصوى.



13. بيّنوا ان للدالة $y = \frac{1}{x} - 4x + 1$ لا توجد نقط قصوى.

14. معطاة الدالة $f(x) = \frac{1}{x} - 2x^2$ (ارسموا اولا هيئة محاور)

أ) لأية قيمة x الدالة غير معرّفة؟

ب) جدوا نقط التقاطع مع المحور x . اقرأوا الحل اولاً ثم اكملوا:

$$\frac{1}{x} - 2x^2 = 0 \;/\; +2x^2$$

$$\frac{1}{x} = 2x^2 \;/\; .x$$

$$2x^3 = _____$$

$$x^3 = \frac{1}{2}$$

كي تجدوا x ، استعينوا بالضغطات الآتية:

0.5	SHIFT	$x^{\frac{1}{y}}$	3	=

_____ = x (قربوا الى منزلتين عشريتين بعد الفاصلة)

اكملوا: (_____ ، _____) هي نقطة تقاطع الدالة f مع المحور x.
عينوها في هيئة المحاور.

جـ) - جدوا نقطة قصوى.
(من أجل ذلك: جدوا المشتقة وجدوا نقطة مشبوهة، ثم جدوا نقطاً عن جهتي النقطة المشبوهة. عينوا النقط التي وجدتموها في هيئة المحاور)
- سجلوا نوع النقطة القصوى.

د) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة.

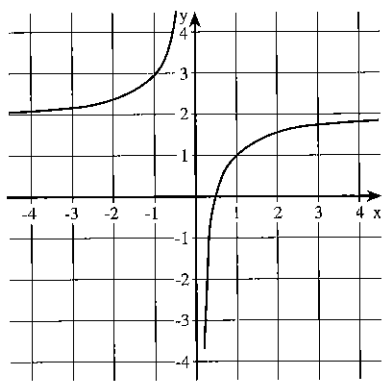
تمارين

15. أ) سجلوا الى جانب كل خط بياني، القانون الملائم.
للفحص، اقرأوا نقطة عن الخط البياني، ثم عوضوا في قانون الدالة الذي سجلتموه.

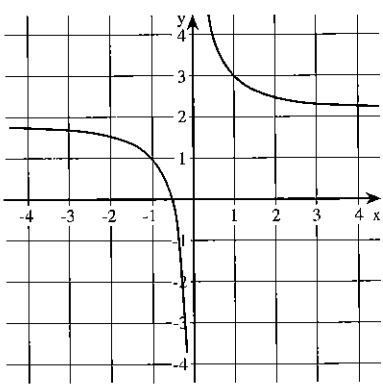
$$f(x) = \frac{1}{x} - 2 \qquad h(x) = -\frac{1}{x} + 2$$

$$g(x) = \frac{1}{x} + 2 \qquad m(x) = -\frac{1}{x} - 2$$

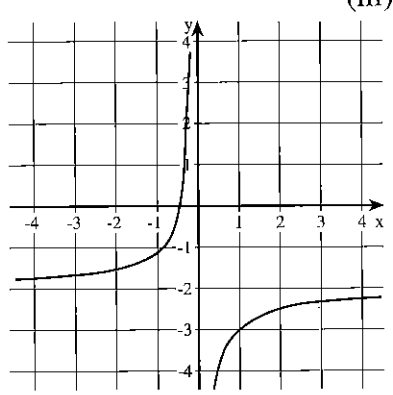
(i)



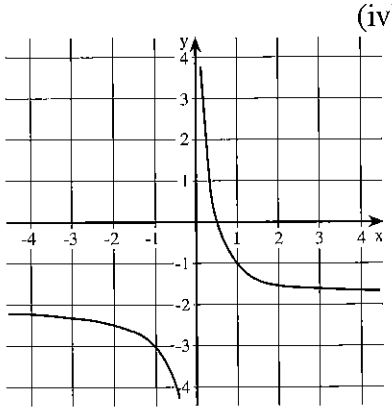
(ii)



(iii)

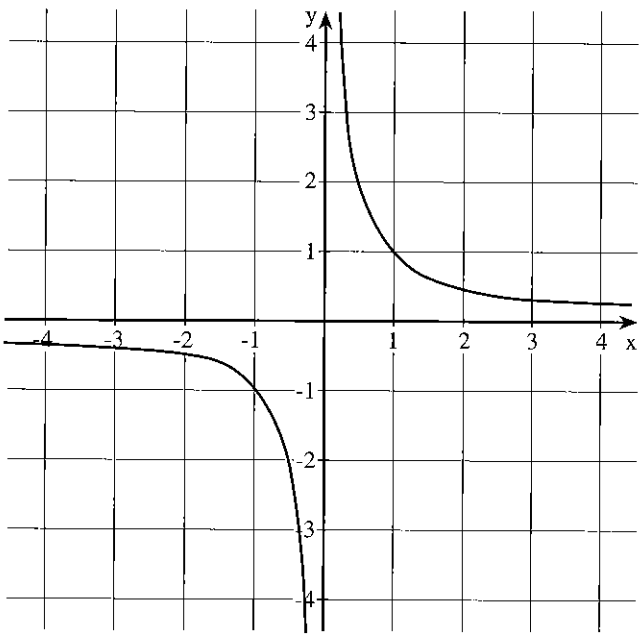


(iv)



ب) لأي من الدوال يوجد مماس ميله $-\frac{1}{4}$؟ فسروا.

16. أ) ضعوا الخط البياني الشفاف $y = \frac{1}{x}$ (ii) بدون المحور x ، على الخط البياني المرسوم ونفذوا انعكاسا عن المحور x ، ثم ازيحوه بموازاة المحور y بمقدار 3 وحدات الى أعلى.



ب) – ما هو قانون الدالة الناتجة؟
– سجلوا احداثيات نقطة واقعة على الخط البياني للدالة الناتجة. عوضوا في قانون الدالة الذي سجلتموه وافحصوا صحة هذا القانون.
جـ) – ما هي معادلات خطوط التقارب للخط البياني للدالة الناتجة؟
د) – ما هي احداثيات نقط تقاطع هذه الدالة مع المحورين؟

17. لكل بند، ارسموا خطاً بيانياً لدالة تحقق:

أ) – (1,2) و (-1,2) هما نقطتا نهاية صغرى.
– المحور y هو خط تقارب لها.
ب) – (1,2) هي نقطة نهاية صغرى ، (-1,2) هي نقطة نهاية عظمى.
– $(-\frac{1}{2}, 0)$ هي نقطة تقاطع مع المحور x.
– المحور y هو خط تقارب لها.
– المحور x هو خط تقارب لها

جـ) - $(2,0)$ هي نقطة التقاطع الوحيدة مع المحور x.
- ليس لها نقط قصوى.
- المحور y هو خط تقارب لها.

18. في هذا التمرين، سوف نتعامل بأعداد موجبة فقط.

أ) احسبوا مجموع العدد 4 مع مقلوبة.

ب) احسبوا مجموع العدد $\frac{1}{3}$ مع مقلوبه.

جـ) جدوا عددا آخر بحيث يكون مجموعه مع مقلوبه مساوياً للمجموع الناتج في البند (ب).

د) حاولوا ايجاد عدد بحيث يكون مجموعه مع مقلوبه أصغر من المجاميع الناتجة في البنود أ حتى جـ.

هـ) نستعين بدالة وبخط بياني كي نجد العدد الذي مجموعه مع مقلوبه أصغر ما يمكن.

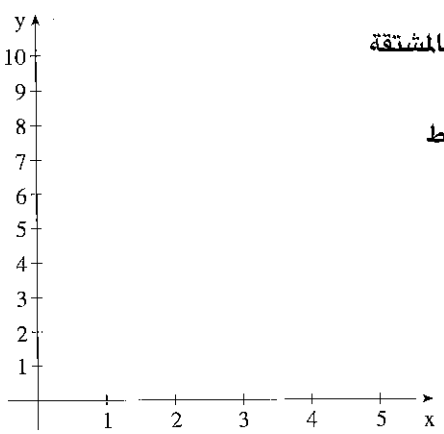
(i) ارمزوا الى العدد بالحرف x $(x > 0)$ وسجلوا دالة (بمساعدة x) تناظر بين العدد ومجموعه مع مقلوبه.

(ii) اكملوا احداثيات النقط وعينوها في هيئة المحاور

$(4\ ,\ \ )$ $\quad$ $(\frac{1}{3}\ ,\ \ )$ $\quad$ $(3\ ,\ \ )$

(iii) جدوا العدد الذي يعطي أقل مجموع (استعينوا بالمشتقة وايجاد نقط مشبوهة)

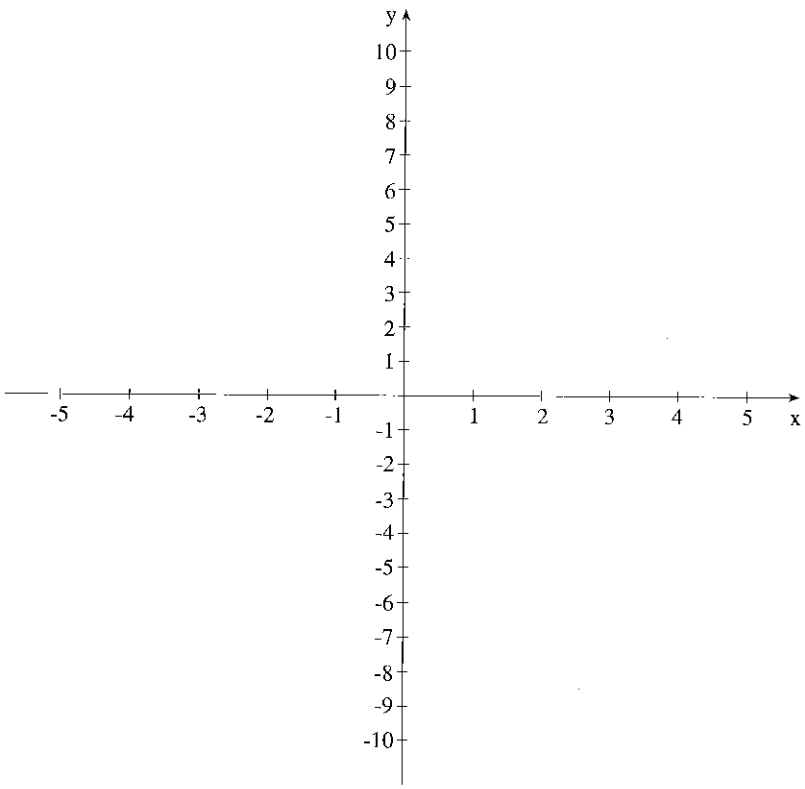
(iv) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة.



19. في هذا التمرين، سنبحث الدالة الناتجة من تمرين 18: $y = x + \frac{1}{x}$ ،
دون التقيّد بالاعداد الموجبة فقط.

أ) مجال تعريف الدالة هو $x \neq 0$. فسروا.
(من المتبع كتابة مجال التعريف بدلا من كتابة قيم x التي فيها الدالة غير معرفة).

ب) (i) جدوا مشتقة الدالة.
(ii) جدوا نقطاً مشبوهة وعيّنوها في هيئة المحاور.
(iii) اكملوا: (2,) (0.5,) (-0.5,) (-2,)
(iv) من أي نوع النقط المشبوهة؟



جـ) (i) اكملوا في الجدول، احداثيات نقط قريبة من نقطة عدم التعريف

x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
y			غير معرفة		

(ii) بيّنوا ماذا يحدث لقيم الدالة، عند تعويض قيم x أقرب وأقرب الى الصفر.

(iii) سجلوا معادلة خط التقارب الموازي للمحور y.

د) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة.

20. بيّنوا ان للدالة $f(x) = x - \frac{1}{x}$ لا توجد نقط قصوى.

21. ابحثوا الدالة $y = \frac{1}{x} + x^2$ حسب الخطوات الآتية:

أ) سجلوا مجال التعريف.

ب) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.

جـ) جدوا نقطاً قصوى.

د) اكتبوا معادلة خط التقارب.

هـ) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة.

دوال قوى أخرى

في كتاب " مدخل للتحليل" عالجنا دوال القوى:

$y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ وهكذا.

هنا ايضا، سنعالج دوال قوى اخرى: $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^4}$

فعالية حاسوب - بواسطة البرمجية *GNJN'* x.

اذا رغبتم عدم تنفيذ فعالية الحاسوب، انتقلوا الى صفحة 37.

1. **أمامكم مجموعة من دوال القوى:**

$y = x^2$, $y = x^6$, $y = x^7$, $y = x^9$

$y = x^{10}$, $y = x^4$, $y = x^3$

أ) **صنفوا الدوال الى مجموعتين: دوال زوجية ودوال فردية. سجلوهما في الجدول:**

دوال زوجية	دوال فردية

ب) **ارسموا بمساعدة الحاسوب، مجموعة الدوال الزوجية في نفس هيئة المحاور.**

جـ) **غيّروا التدريج الى** $-3 \le x \le 3$
$-9 \le y \le 9$

اضغطوا ALT ▫ (سوية) **وسجلوا حدودا ملائمة. اضغطوا** F10 **للمصادقة على التغييرات.**

د) **اكتبوا ثلاث ميزات مشتركة للدوال الزوجية التي رسمتموها في البند (ب).**

نظفوا العارض واختاروا تدريجاً ملائماً

هـ) ارسموا بمساعدة الحاسوب، مجموعة الدوال الفردية.

و) اكتبوا ثلاث ميزات مشتركة للدوال الفردية التي رسمتموها في البند (2)

2. نظفوا العارض.

نوسّع مجموعة دوال القوى المسجلة في التمرين 1.

أ) ارسموا بمساعدة الحاسوب، الدوال الآتية وصنفوها الى مجموعتين.

$$y = \frac{1}{x^4} \ , \ y = \frac{1}{x^3} \ , \ y = \frac{1}{x^2} \ , \ y = \frac{1}{x^5}$$

ب) سجلوهما في الجدول:

المجموعة I	المجموعة II

جـ) نظفوا العارض.

- ارسموا بمساعدة الحاسوب، الدوال التي سجلتموها في المجموعة I.
- ارسموا دالة اخرى تنتمي للمجموعة I.

د) نظفوا العارض.

- ارسموا بمساعدة الحاسوب، الدوال التي سجلتموها في المجموعة II.
- ارسموا دالة اخرى تنتمي للمجموعة II.

هـ) - اكتبوا ميزتين تبيّنان الفرق بين المجموعتين.
- اكتبوا ميزتين مشتركتين للمجموعتين.

في الدوال من الصورة $y = x^n$ و $y = \frac{1}{x^n}$ (n طبيعي):

عندما يكون n زوجيا فان الدوال زوجية، وعندما يكون n فرديا فان الدوال فردية

3. أ) ارسموا بمساعدة الحاسوب، الخط البياني للدالة $y = \frac{1}{x^2}$.

ب) ارسموا بمساعدة الحاسوب، الخط البياني للدالة التي تنتج من ازاحة الدالة في البند (أ) وحدتين الى أعلى.

جـ) ما الفرق بين الدالتين؟

د) – اكتبوا معادلات خطوط التقارب للدالتين اللتين رسمتموهما.
– ما هي معادلة خط التقارب المشترك.

4. تظفوا العارض.

أ) ارسموا بمساعدة الحاسوب، المستقيم الذي معادلته $y = -4$.

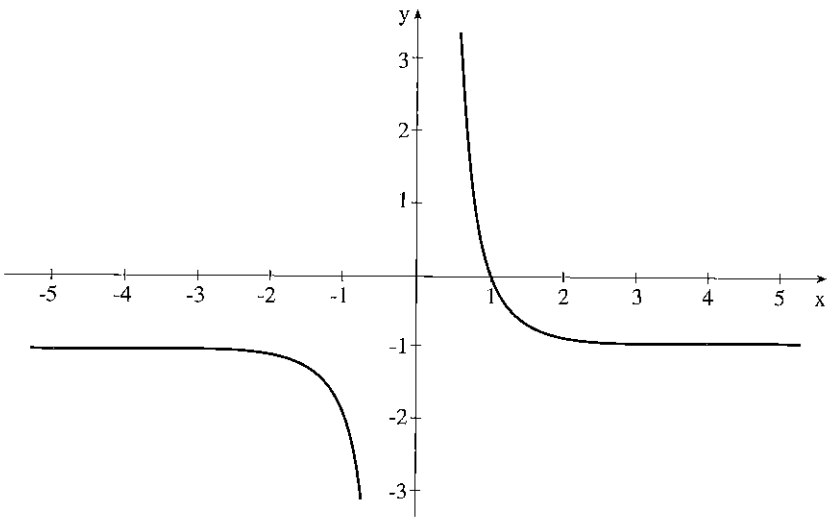
ب) ارسموا بمساعدة الحاسوب، ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x^2}$ بحيث يكون المتسقيم الذي رسمتموه خط تقارب لها (اكتبوا القانون ايضا في دفاتركم).

جـ) اكتبوا 3 ميزات تبيّن الفرق بين الدالتين ($y = \frac{1}{x^2}$ والدالة المزاحة).

5. أ) ارسموا بمساعدة الحاسوب، الخط البياني للدالة $y = \frac{1}{x^3}$.

ب) الخط البياني الذي أمامكم، يبيّن دالة ناتجة عن ازاحة الدالة $y = \frac{1}{x^3}$ بموازاة المحور y.

"انسخوا" في الحاسوب. (اكتبوا قانون الدالة ايضا في دفاتركم)



جـ) سجلوا احداثيات نقطة تقاطع الدالة المزاحة مع المحور x .
سجلوا معادلات خطوط التقارب للدالة المزاحة.

6. أ) ارسموا بمساعدة الحاسوب، المستقيم $y = 3$.

ب) ارسموا بمساعدة الحاسوب، ثلاثة خطوط بيانية ناتجة من ازاحة دوال قوى مختلفة، بحيث يكون المستقيم $y = 3$ خط تقارب لها.
(اكتبوا في دفاتركم ايضا، القوانين الملائمة)

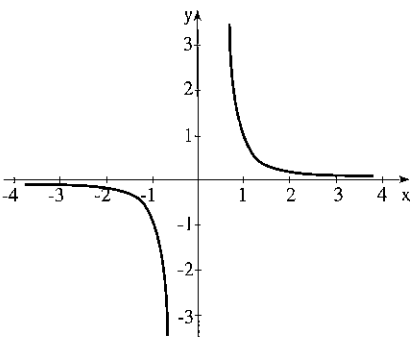
لقد انهيتم فعالية الحاسوب – انتقلوا الى صفحة 39.

دوال قوى اخرى - بدون الحاسوب

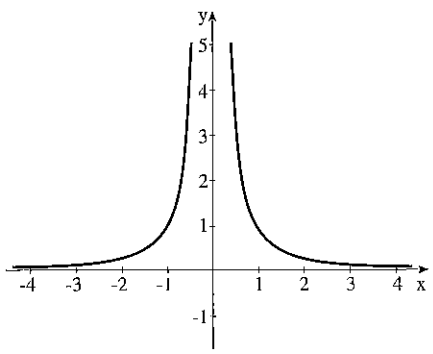
7. امامكم الخطان البيانيان للدالتين $y = \frac{1}{x^2}$ و $y = \frac{1}{x^3}$.

أ) حاولوا التعرف على الخط البياني الذي يلائم كل دالة منهما – علّلوا.

(ii)



(i)



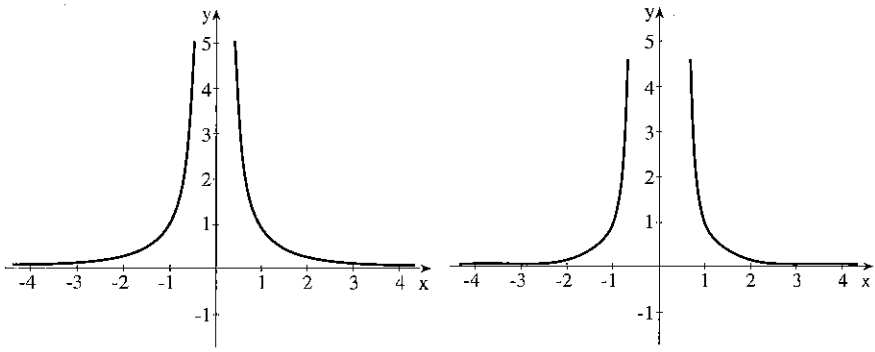
ب) عوضوا في كل واحدة من الدالتين، القيم المسجلة عن اليمين واكملوا الجدول.

$y = \frac{1}{x^3}$	$y = \frac{1}{x^2}$	
		$x = -2$
		$x = 0.5$

جـ) افحصوا تخمينكم من البند (أ).

ع.ذ 8. أمامكم الخطان البيانيان للدالتين $y = \frac{1}{x^2}$ و $y = \frac{1}{x^4}$

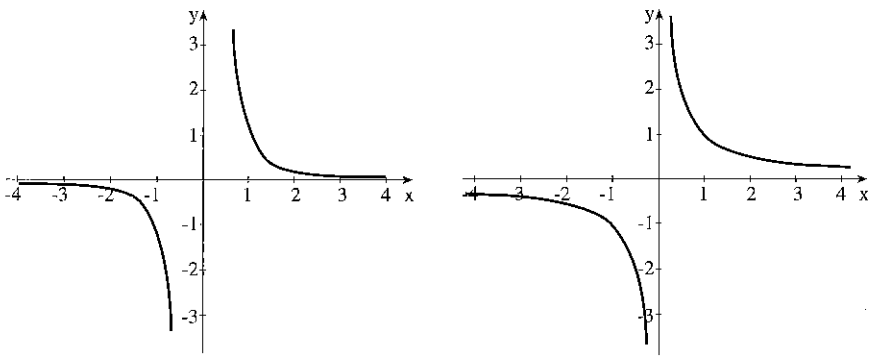
أ) حاولوا التعرف على الخط البياني الذي يلائم كل دالة منهما.



ب) عوضوا في كل دالة منهما $x = 2$ وافحصوا تخمينكم.

ع.ذ 9. أمامكم الخطان البيانيان للدالتين $y = \frac{1}{x^3}$ و $y = \frac{1}{x}$

أ) حاولوا التعرف على الخط البياني الذي يلائم كل دالة منهما.



ب) عوضوا في كل دالة منهما $x = 2$ وافحصوا تخمينكم.

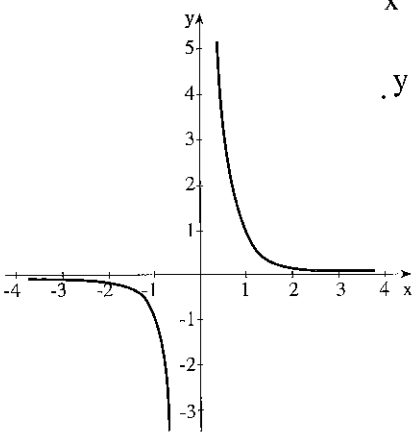
في الدوال من الصورة $y = x^n$ و $y = \frac{1}{x^n}$ (n طبيعي):

عندما يكون n زوجيا فان الدوال زوجية، وعندما يكون n فرديا فان الدوال فردية.

ع.ذ 10. بيّنوا أياً من الدوال الآتية زوجية وأيها فردية.

أ) $y = \frac{1}{x^2}$ ب) $y = \frac{1}{x^3}$ جـ) $y = \frac{1}{x^4}$

د) $y = \frac{1}{x^5}$ هـ) $y = \frac{1}{x}$ و) $y = \frac{1}{x^{10}}$



11. في الشكل، الخط البياني للدالة $y = \frac{1}{x^3}$.

أ) ارسموا في نفس هيئة المحاور،

الخط البياني للدالة $y = \frac{1}{x^3} + 1$.

ب) ارسموا معادلة خط التقارب للدالة

$y = \frac{1}{x^3} + 1$.

جـ) سجلوا احداثيات نقط التقاطع مع المحورين للدالة $y = \frac{1}{x^3} + 1$.

ع.ذ 12. أ) ارسموا المستقيم $y = 3$.

ب) ارسموا بالتقريب دالة قوة بحيث يكون المستقيم $y = 3$ خط تقارب لها.
اكتبوا القانون.

تمارين

13. (i) بعض الدوال الآتية، تأخذ قيما موجبة فقط. أشيروا اليها.

أ) $y = \frac{1}{x^2}$ ب) $y = \frac{1}{x^3}$ جـ) $y = -\frac{1}{x^4}$

د) $y = \frac{1}{x^5}$ هـ) $y = \frac{1}{x^6}$ و) $y = \frac{1}{x}$

ز) $y = x^3$ ح) $y = x$ ط) $y = -\frac{1}{x^2}$

(ii) هل توجد دوال، من بين الدوال التي في البند (i) ، جميع قيمها سالبة؟ اذا كان نعم – أيها؟

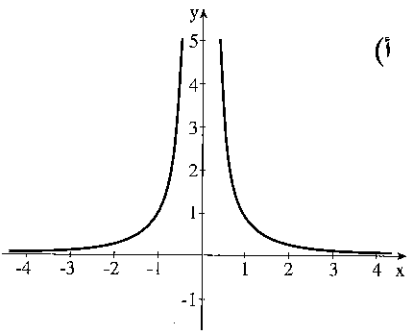
14. الخطوط البيانية هي للدوال الاتية:

$y = x^2$ (i) $\quad y = x^3$ (iii) $\quad y = \frac{1}{x}$ (v)

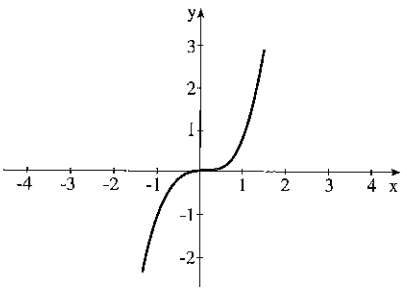
$y = \frac{1}{x^2}$ (ii) $\quad y = \frac{1}{x^3}$ (iv) $\quad y = x^4$ (vi)

اكتبوا قانوناً الى جانب كل خط بياني. عوضوا في القانون الذي سجلتموه الاحداثي x لأية نقطة كانت ، وافحصوا اذا كانت هذه النقطة واقعة عليه.

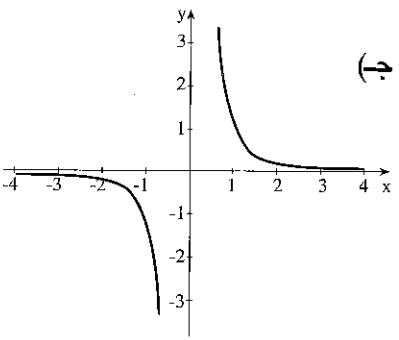
أ)



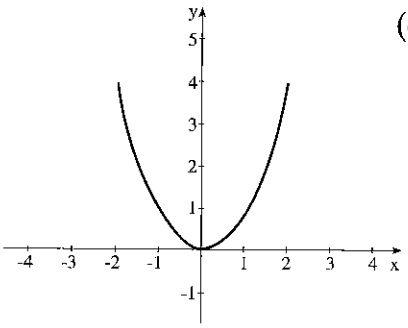
ب)



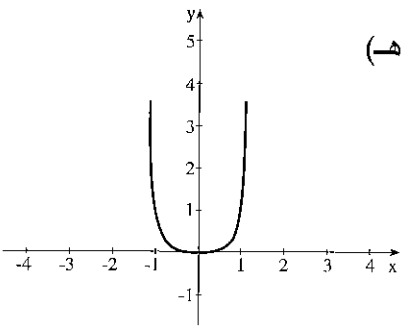
جـ)



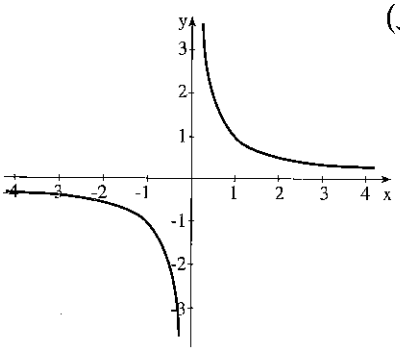
د)



هـ)

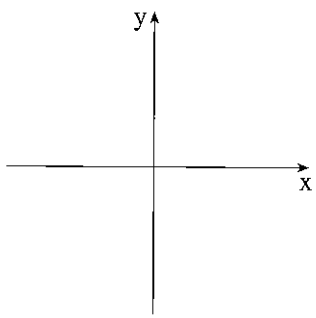


و)



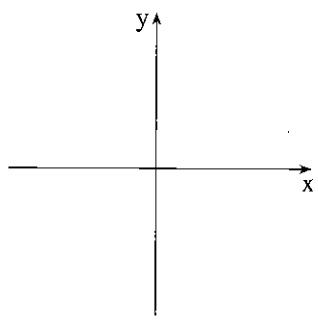
15. أ) ارسموا بالتقريب، الخط البياني للدالة

$y = x^4$.



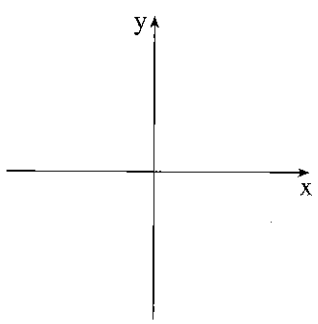
ب) ارسموا بالتقريب، الخط البياني للدالة

$$y = \frac{1}{x^4}$$



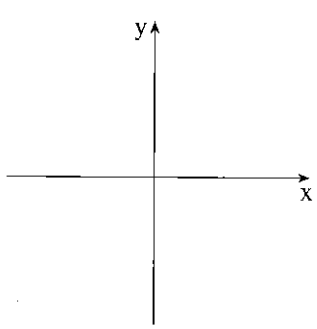
جـ) ارسموا بالتقريب، الخط البياني للدالة

$$y = x^7$$



د) ارسموا بالتقريب، الخط البياني للدالة

$$y = \frac{1}{x^7}$$



عمليات جبرية وازاحات

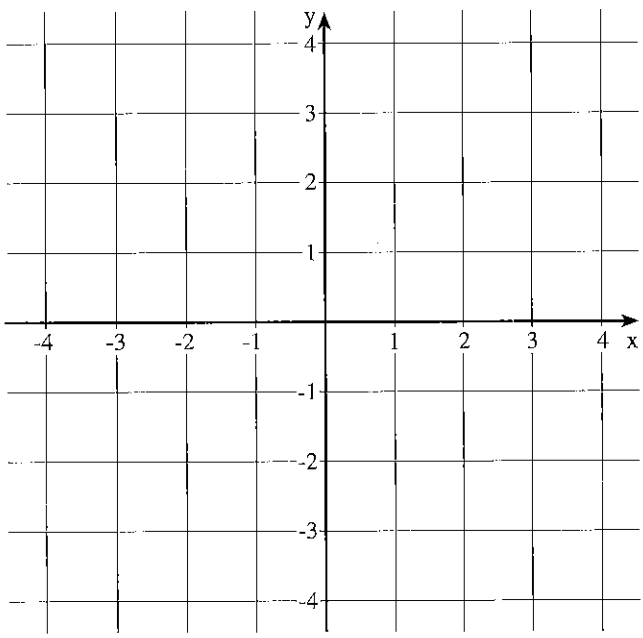
1. معطاة الدالة: $y = \frac{1+x}{x}$

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) اكملوا الجدول.

x	-3	-2	-1	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5	1	2	3
y						غير معرفة					

ارسموا الخط البياني للدالة.



الخط البياني الناتج هو ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$. أية ازاحة؟

اكتبوا القانون حسب الازاحة ـــــ = y .

في التمرين (3)، سترون ان هذه بالفعل هي الدالة المعطاة.

2. اكتبوا كحاصل ضرب ثم اضربوا .

انتبهوا: خط الكسر يبيّن عملية قسمة، لكنّ له وظيفة القوسين ايضاً

أمثلة:

$$\frac{4x+2}{2} = \frac{1}{2}(4x+2) = 2x+1$$

$$\frac{4x+1}{x} = \frac{1}{x}(4x+1) = 4+\frac{1}{x}$$

أ) $\frac{6x+8}{2} =$ ( )

ب) $\frac{3x+1}{x} =$ ( )

جـ) $\frac{1-2x}{x} =$ ( )

د) $\frac{3x-1}{x} =$ ( )

3. في التمرين (١) ، تعاملتم مع الدالة $y = \frac{1+x}{x}$

أ) اكتبوا كحاصل ضرب ثم اضربوا

$$y = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x}(\quad)$$

فسروا العلاقة بين النتيجة التي حصلتم عليها والخط البياني في التمرين 1.

ب) اكتبوا الى جانب كل دالة من التمرين 2 ، هل هي ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$

أو ازاحة للدالة $y = -\frac{1}{x}$ أو ازاحة لأية دالة اخرى.

4. اعملوا حسب المثال، لتبينوا كيف أزيحت الدالة $y = \frac{1}{x}$.

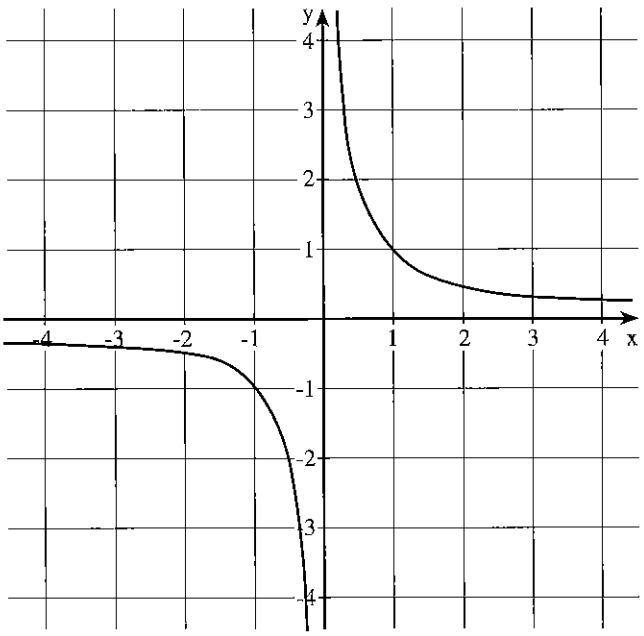
ثم بعد ذلك، ضعوا الخط البياني الشفاف للدالة $y = \frac{1}{x}$ (ii) على الخط البياني المرسوم ونفذوا الازاحة المطلوبة.

مثال: $y = \frac{1 + 5x}{x} = \frac{1}{x}(1 + 5x) = \frac{1}{x} + 5$

ازاحة 5 وحدات الى أعلى.

أ) $y = \frac{1 + 3x}{x}$ جـ) $y = \frac{1 - 2x}{x}$

ب) $y = \frac{2x + 1}{x}$ د) $y = \frac{1 - x}{x}$



5. معطاة الدالة $y = \frac{1 + x^2}{x}$

أ) بينوا أنه لا توجد للدالة نقط تقاطع مع المحورين.

ب) اكتبوا كمجموع (سجلوا كحاصل ضرب ثم اضربوا). اشتقوا وجدوا نقطا قصوى وبينوا نوعها (نهاية عظمى / نهاية صغرى).

تمارين

6. صلوا بخط، كل زوج من القوالب المتطابقة.

$\frac{3}{x} + 2$	$\frac{2 + 3x}{x}$
$-\frac{3}{x} + 2$	$\frac{3 + 2x}{x}$
$\frac{2}{x} + 3$	$\frac{3x - 2}{x}$
$-\frac{2}{x} + 3$	$\frac{2x - 3}{x}$

7. (i) اكتبوا كحاصل ضرب ثم اضربوا:

مثال: $y = \frac{6x + 4}{5} = \frac{1}{5}(6x + 4) = 1.2x + 0.8$

أ) $y = \frac{4 - 4x}{8} =$

ب) $y = \frac{4x - 1}{x} =$

جـ) $y = \frac{4 + 6x}{4x} =$

د) $y = \frac{5x + 5}{5} =$

هـ) $y = \frac{5x - 1}{x} =$

و) $y = \frac{1 - x}{x} =$

(ii) اكتبوا الى جانب كل دالة، هل هي دالة خطية او ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$ أو ازاحة للدالة $y = -\frac{1}{x}$.

8. جدوا نقطاً قصوى للدالة $\frac{1 - 2x^3}{x}$

(من الجدير، الاستعانة بهيئة محاور لتحديد نوع النقط القصوى).

9. ابحثوا الدالة $y = \frac{1 - 4x^2}{x}$ حسب الخطوات الآتية:

(ارسموا اولا هيئة محاور)

أ) جدوا مجال التعريف.

ب) جدوا نقط تقاطع الدالة مع المحورين.

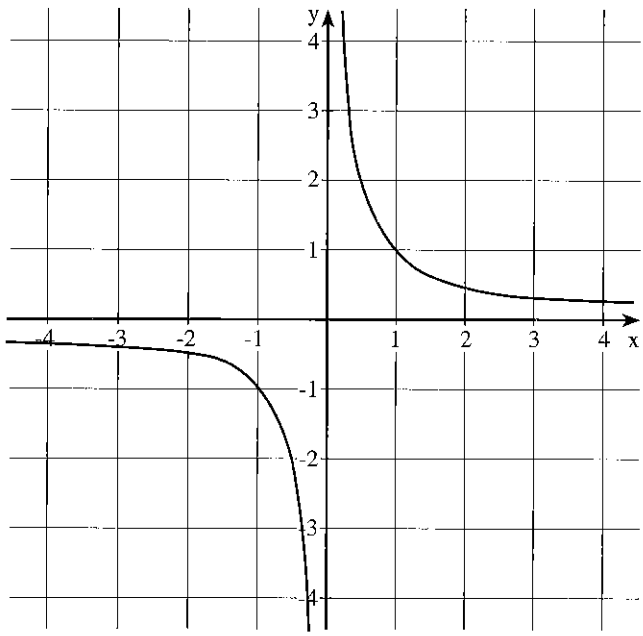
جـ) جدوا نقطاً قصوى.

د) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.

هـ) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل.

ازاحات وانعكاسات أخرى $y = \frac{1}{x}$

1. أ) ضعوا الخط البياني الشفاف $y = \frac{1}{x}$ بدون المحور y (iii) على الخط البياني المرسوم، ثم ازيحوه وحدتين الى اليمين (بموازاة المحور x).



الدالة الناتجة هي $g(x) = \frac{1}{x - 2}$

ب) في أية قيمة لx يكون المقام صفرا؟
اكملوا: الدالة غير معرّفة عندما يكون _____ .

جـ) ما هي معادلات خطوط التقارب للخط البياني للدالة g ؟

د) ما هي نقطة تقاطع الخط البياني للدالة g مع المحور y؟

2. معطاة الدالة $y = \frac{1}{x+3}$.

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) – اكملوا في الجدول، احداثيات نقط حول نقطة عدم التعريف، ثم عينوها في هيئة المحاور أدناه.

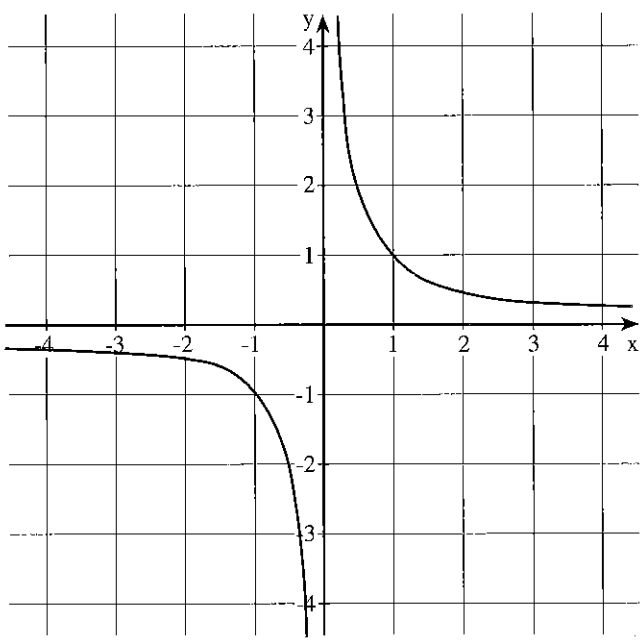
x	-3.5	-3.1	-3	-2.9	-2.5
y			غير معرفة		

– بيّنوا ماذا يحدث لقيم الدالة. بجوار نقطة عدم التعريف.

– ما هي معادلة خط التقارب الموازي للمحور y ؟

جـ) احسبوا نقطاً اخرى وعينوها في هيئة المحاور.

(-4,) (-2,) (-1,) (1,) (2,)



د) ضعوا الخط البياني الشفاف للدالة $y = \frac{1}{x}$ بدون المحور y (iii)، على الخط البياني المرسوم، وازيحوه بحيث ينتج الخط البياني للدالة المعطاة. أية ازاحة نفذتم؟

ع.ذ 3. ما هو مجال تعريف كل واحدة من الدوال؟

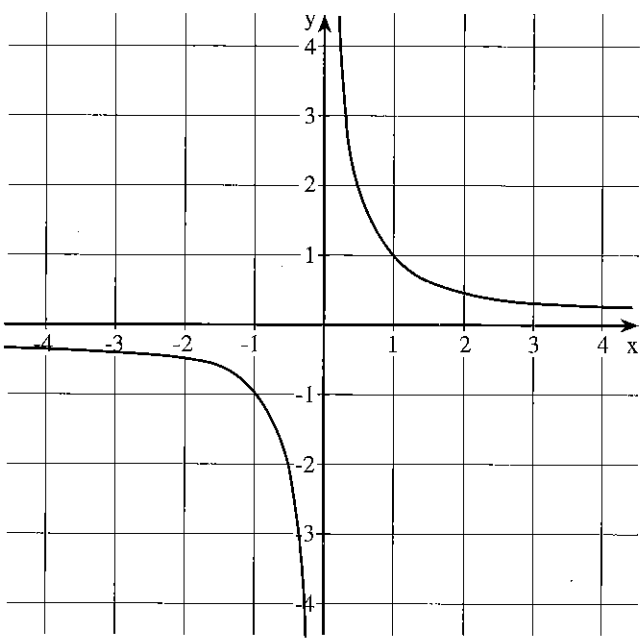
أ) $y = \frac{x}{x-4}$ ب) $y = \frac{x+1}{2x-4}$ جـ) $y = \frac{2}{x+1}$ د) $y = \frac{x-1}{2x-1}$

تمارين

4. (i) اكتبوا الى جانب كل دالة، في أية قيمة ل x هي غير معرّفة.

(ii) ضعوا الخط البياني الشفاف للدالة $y = \frac{1}{x}$ بدون المحور y (iii) بحيث يبيّن الدالة. أية ازاحة نفذتم؟

أ) $y = \frac{1}{x-1}$ ب) $y = \frac{1}{x+2}$



5. ما هو مجال التعريف لكل دالة؟

أ) $y = \frac{1}{2x + 2}$

ب) $y = \frac{1}{x + 1}$

جـ) $y = \frac{4}{3x + 6}$

د) $y = \frac{1}{3x - 6}$

هـ) $y = \frac{3x + 1}{x}$

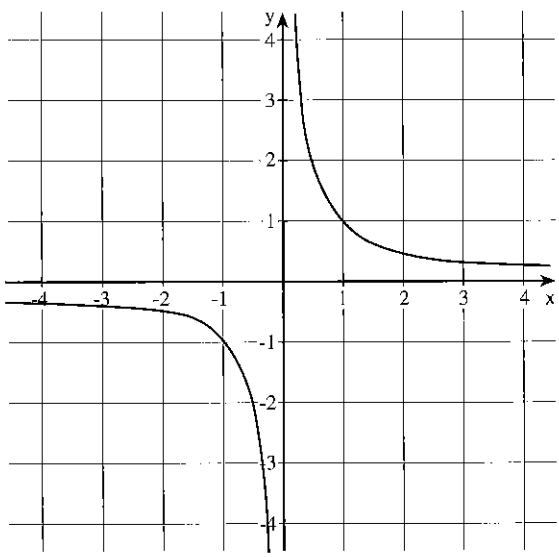
و) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$

6. في كل بند، ضعوا الخط البياني الشفاف على الخط البياني المرسوم ($y = \frac{1}{x}$).
نفذوا التعليمات ثم اكتبوا قانون الدالة الناتجة.

أ) ازاحة الخط البياني بموازاة المحور x بمقدار وحدتين الى اليمين (الخط البياني الشفافiii).

ب) ازاحة الخط البياني بموازاة المحور y بمقدار وحدة واحدة الى أعلى (الخط البياني الشفاف ii).

جـ) ازاحة الخط البياني بمقدار وحدتين الى اليمين ووحدة واحدة الى أعلى (بموازاة المحورين)



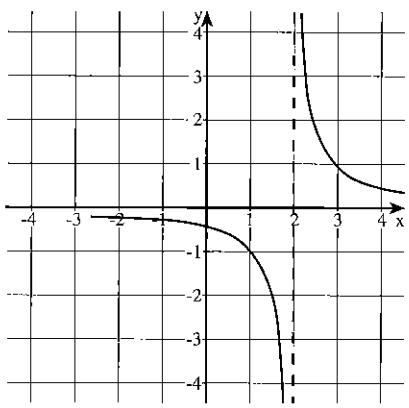
7. – ما هو مجال التعريف لكل دالة؟

$$y = \frac{1}{x+2} \quad \text{(i)} \qquad y = \frac{1}{x-2} \quad \text{(iii)}$$

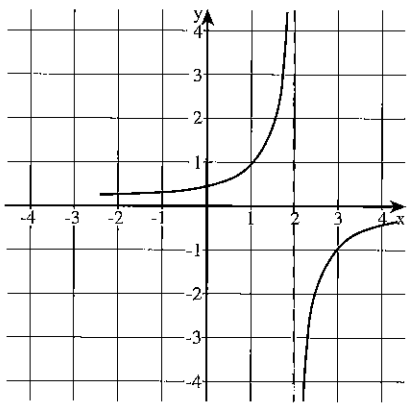
$$y = -\frac{1}{x+2} \quad \text{(ii)} \qquad y = -\frac{1}{x-2} \quad \text{(iv)}$$

– ناظروا قانوناً للخط البياني.

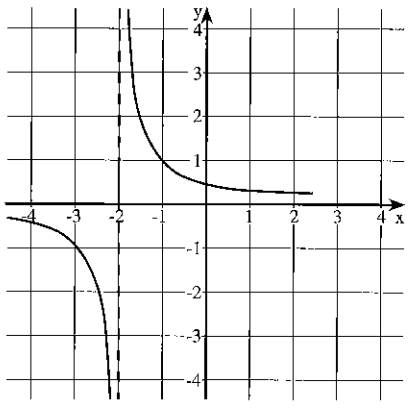
أ)



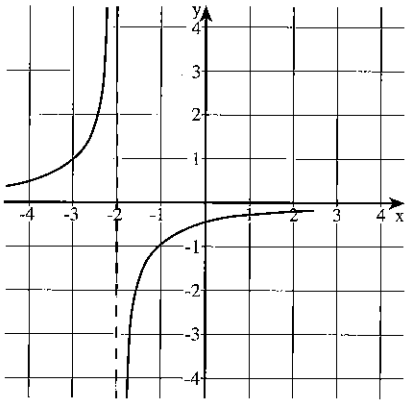
ب)



جـ)



د)



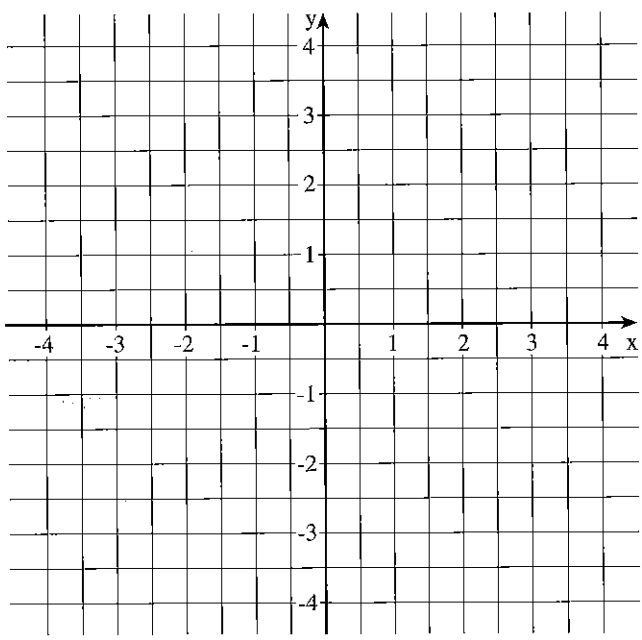
8. معطاة الدالة $y = \frac{1}{x+2} - 1$

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) الخط البياني للدالة ينتج من ازاحة الخط البياني للدالة $y = \frac{1}{x}$.

(i) صفوا الازاحة بالكلمات.

(ii) ارسموا في هيئة المحاور التي أمامكم، الخط البياني للدالة (يمكنكم الاستعانة بصفحة شفافة)



جـ) سجّلوا احداثيات نقط تقاطع الخط البياني للدالة مع المحورين.

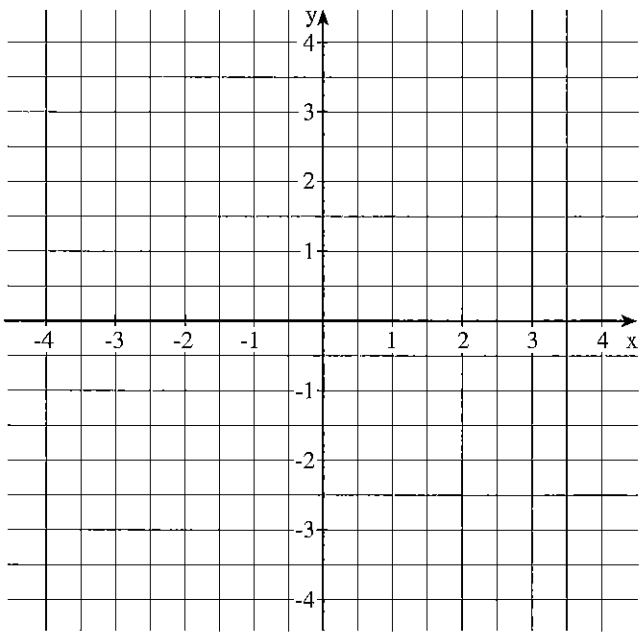
د) ما هي معادلات خطوط التقارب للدالة المعطاة؟

قليلا من "الشّد"

1. معطاة الدالة $y = \frac{2}{x}$

أ) اكملوا الجدول، ثم عيّنوا النقط وارسموا الخط البياني للدالة.

x	-4	-2	-1	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	1	2	4
y						غير معرفة					



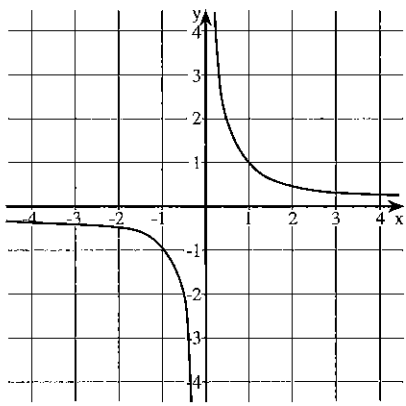
ب) من أجل المقارنة، ضعوا الخط البياني الشفاف (ii) بحيث يبيّن الدالة $y = \frac{1}{x}$. سجلوا بماذا يتشابه مع الخط البياني المرسوم وبماذا يختلف عنه.

2. في كل بند، مرسوم الخط البياني للدالة $y=\frac{1}{x}$ ، ولكن مسجل قانون لدالة اخرى.

- اكملوا احداثيات النقط وعيّنوها.
- اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة المسجلة.

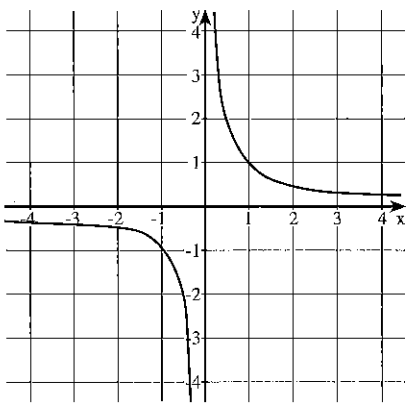
أ) $y=\frac{3}{x}$

(3,) (1,) (0.75,)
(-3,) (-1,) (-0.75,)



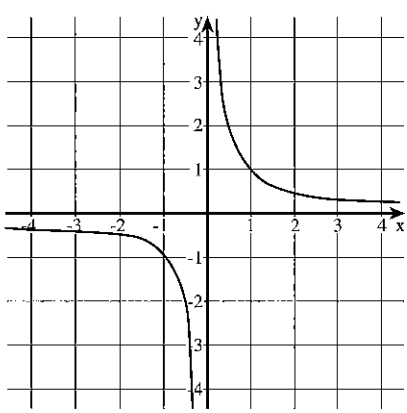
ب) $y=\frac{0.5}{x}$

(2,) (1,) (0.5,)
(-2,) (-1,) (-0.5,)



جـ) $y=-\frac{2}{x}$

(4,) (2,) (1,) (0.5,)
(-4,) (-2,) (-1,) (-0.5,)



3. أ) بدلا من ان تكتبوا $y = \frac{3}{x}$ يمكنكم ان تكتبوا $y = 3 \cdot \frac{1}{x}$.

ما هي مشتقة هذه الدالة؟

ب) اشتقوا: $y = \frac{2}{x}$ ، $y = \frac{2.5}{x}$ ، $y = -\frac{3}{x}$

4. معطاة الدالة $y = \frac{4}{x}$.

أ) اكتبوا مشتقة الدالة.

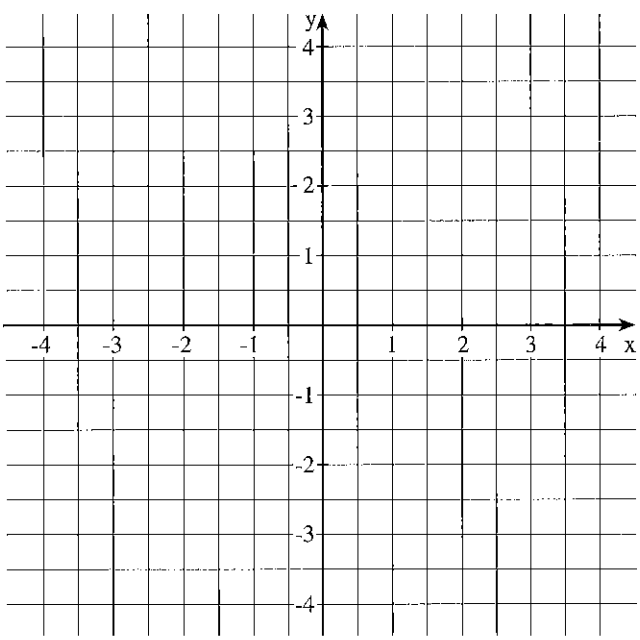
ب) هل يوجد لهذه الدالة نقط قصوى؟

جـ) هل الدالة تصاعدية؟ تنازلية؟ علّلوا.

د) اكملوا الجدول، ثم عينوا النقط في هيئة المحاور واكملوا رسماً تقريبياً للدالة.

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4
y					غير معرفة				

هـ) ما هي معادلات خطوط التقارب؟



5. اشتقوا

مثال: الدالة $y = \frac{3}{x} + 3x$ المشتقة $y' = -\frac{3}{x^2} + 3$

أ) $y = \frac{4}{x} + 5x$

ب) $y = \frac{7}{x} + 3x^2$

جـ) $y = \frac{6}{x} + x$

د) $y = -\frac{3}{x} + 2x$

هـ) $y = \frac{4}{x} - x + 2$

و) $y = -\frac{1}{x} + 6x^2 + 6$

6. حلّوا المعادلات الآتية:

أ) $\frac{36}{x} = x$

ب) $\frac{4}{x^2} - 1 = 0$

جـ) $\frac{1}{x^2} + 1 = 0$

د) $\frac{8}{x^2} - x = 0$

هـ) $\frac{8}{x^2} + x = 0$

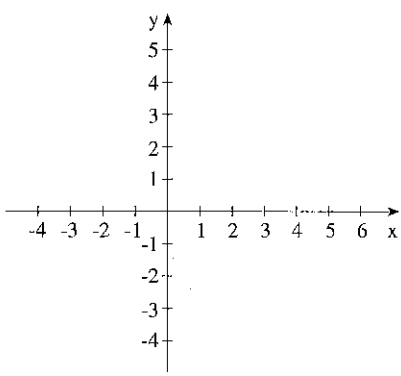
و) $\frac{2}{x^2} - 4 = 0$

(قرّبوا الى منزلتين عشريتين بعدالفاصلة)

7. معطاة الدالة $y = \frac{4}{x} - x$.

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) احسبوا قيماً للدالة بجوار نقطة عدم التعريف وسجلوا في الجدول



x	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5
y			غير معرفة		

- صفوا سلوك الدالة بجوار نقطة عدم التعريف.

جـ) جدوا نقط تقاطع الخط البياني للدالة مع المحورين (إن وُجدت) وعيّنوها.

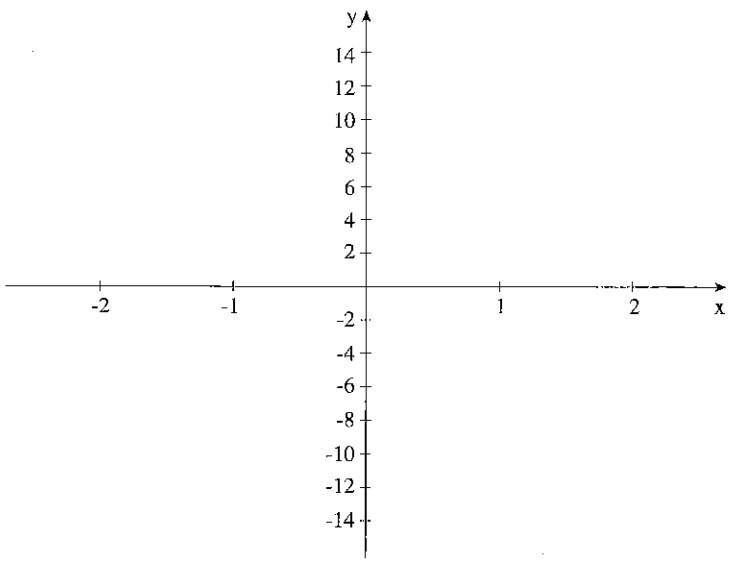
د) جدوا مشتقة الدالة، وفسّروا لماذا لا توجد نقط مشبوهة.
هـ) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة. (احسبوا نقطاً اخرى اذا لزم الامر)
و) ما هي معادلة خط التقارب؟
ز) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل للدالة.

8. معطاة الدالة $y = \frac{4}{x} + 4x$.

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟
ب – احسبوا قيماً للدالة بجوار نقطة عدم التعريف وسجلوا في الجدول.

x	-0.5	-0.01	0	0.01	0.5
y			غير معرفة		

– صفوا سلوك الدالة بجوار نقطة عدم التعريف.
جـ) جدوا نقط تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x (إن وُجدت كهذه)
د) – اكملوا الاحداثي y لكل من النقط المشبوهة للدالة:
(-1,) (1,) . وعيّنوا في هيئة المحاور
– بيّنوا نوع النقط المشبوهة بمساعدة نقط بجوارها.



هـ) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة.

9. **اكتبوا على شكل مجموع، ثم اشتقوا.**

مثال: $y = \frac{4 + 3x^2}{x} \Leftarrow y = \frac{4}{x} + 3x$

$$y' = -\frac{4}{x^2} + 3$$

أ) $y = \frac{2 - 3x}{x}$

ب) $y = \frac{6 + 2x^2 - x}{x}$

جـ) $y = \frac{4x - 2}{x}$

د) $y = \frac{6x^3 + 2}{x}$

10. **حلّوا المعادلات.**

أ) $\frac{4x + 2}{x} = 0$

ب) $\frac{4 - x^2}{x} = 0$

جـ) $\frac{9 + x^2}{x} = 0$

د) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x} = 0$

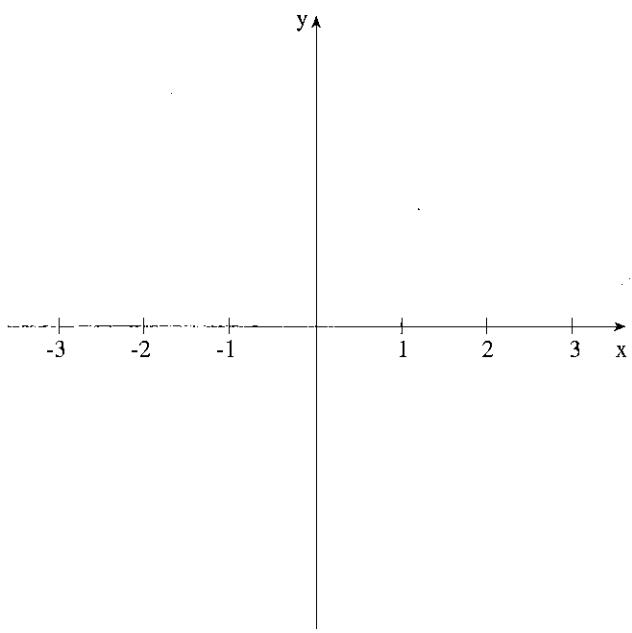
11. ابحثوا الدالة $y = \frac{2 + 2x^2}{x}$ حسب الخطوات الاتية:

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.

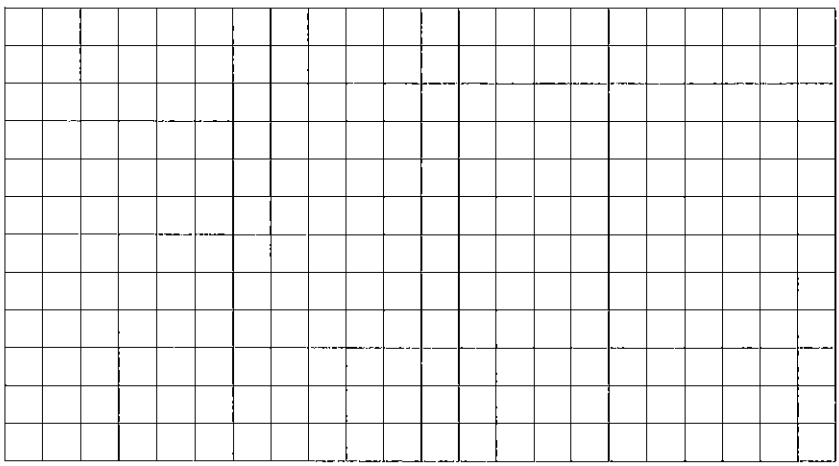
جـ) جدوا النقط القصوى.

د) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.



12. في هذا التمرين، سنبحث محيطات المستطيلات التي مساحتها 36 وحدة مربعة.

أ) ارسموا ثلاثة مستطيلات مساحة كل واحد منها 36 وحدة مربعة، وسجلوا فوق كل مستطيل مقدار محيطه (كل تربيعة هي وحدة مربعة واحدة)



ب) طول أحد اضلاع المستطيل وحدتان. احسبوا طول الضلع الاخر فيه، ومحيطه (سجلوا الاطوال على الشكل).

جـ) ارمزوا الى أحد الاضلاع بالحرف x .
عبّروا عن طول الضلع الاخر وعن محيط المستطيل k بواسطة x (سجلوا على الشكل).

د) جدوا لأية قيمة x ، يكون محيط المستطيل أصغر ما يمكن. ارسموا المستطيل واحسبوا محيطه.

13. مساحة مستطيل هي 18سم^2.

أ) ما هو طول الضلع الاخر للمستطيل، اذا كان طول احد أضلاعه 2سم؟ 4سم؟

ب) x متغير يمثل طول احد اضلاع مستطيل. عبّروا عن طول الضلع الاخر y كدالة لـ x.

جـ) الخط البياني المرسوم هو للدالة التي سجلتموها في البند (ب).

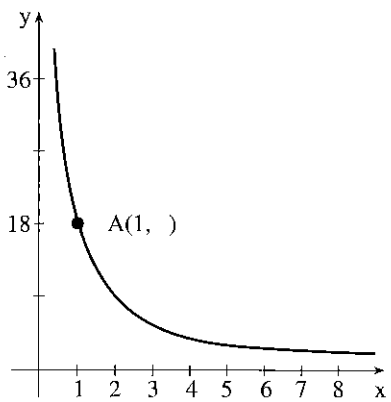
(i) اكملوا احداثيات النقطة A(1,).

(ii) أنزلوا من النقطة A عموداً على المحور y. ماذا يمثل طول هذا العمود؟

(iii) أنزلوا من النقطة A عموداً على المحور x. ماذا يمثل طول هذا العمود؟

(iv) ما هي مساحة المستطيل الناتج؟

(v) احسبوا محيط المستطيل.

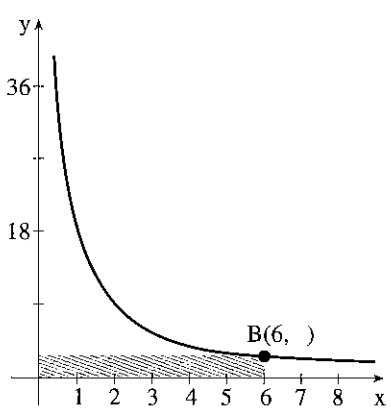


د) (i) اكملوا احداثيات النقطة B(6,).

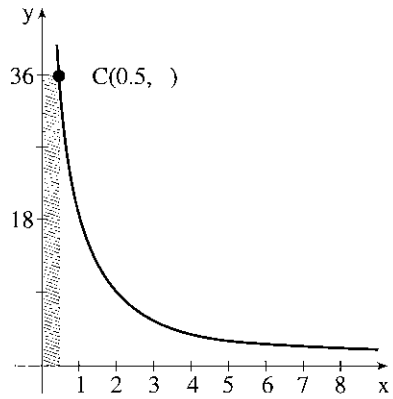
(ii) سجلوا على الشكل أطوال المستطيل المرسوم.

(iii) ما هي مساحته؟

(iv) ما هو محيطه؟



هـ) – ما هي مساحة المستطيل المرسوم؟
– ما هو محيط المستطيل المرسوم؟



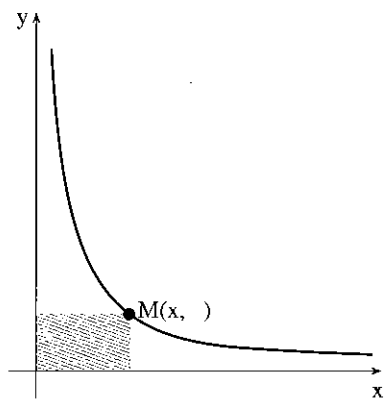
و) (i) اكملوا احداثيات النقطة M(x,)

(ii) سجلوا على الشكل أطوال اضلاع المستطيل (بمساعدة x).

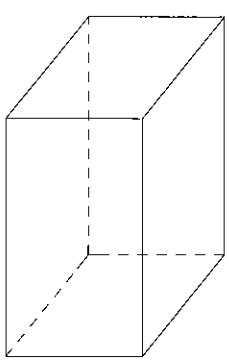
(iii) عبّروا عن محيط المستطيل كدالة ل x.

(iv) جدوا قيمة x التي يكون فيها المحيط أصغر ما يمكن. على أي مستطيل حصلتم؟

(V) ما هو أصغر محيط ممكن؟



14. حجم صندوق مربع القاعدة هو 216سم^3.



أ) – احسبوا ارتفاع الصندوق، اذا كان طول ضلع القاعدة 2سم.
– احسبوا مساحة السطوح.

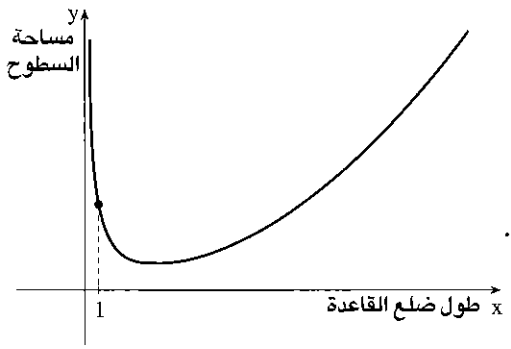
ب) – احسبوا ارتفاع الصندوق، اذا كان طول ضلع القاعدة 3سم.

جـ) x متغير يمثل طول ضلع قاعدة الصندوق.
– عبروا عن ارتفاع الصندوق بمساعدة x.
– عبروا عن مساحة سطوح الصندوق كدالة لـ x.

د) الخط البياني المرسوم هو للدالة التي سجلتموها في البند (جـ).

- ما هو ارتفاع الصندوق الذي يظهر احداثه x في الشكل؟
- ما هي مساحة سطوح هذا الصندوق؟

عيّنوا هذا على المحور y.



هـ) - جدوا قيمة x التي تكون فيها مساحة السطوح أصغر ما يمكن.
- عيّنوا (بالتقريب) نقطة ملائمة على الخط البياني.

تمارين

15. صلوا بخط كل زوج من القوالب المتطابقة.

$\frac{4}{x}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x}$
$\frac{1}{5x}$	$0.4 \cdot \frac{1}{x}$
$\frac{5}{x}$	$4 \cdot \frac{1}{x}$
$\frac{1}{4x}$	$5 \cdot \frac{1}{x}$
$\frac{0.4}{x}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x}$

16. كي تشتقوا بمنتهى السهولة، سجلوا كحاصل ضرب ثم اشتقوا.

مثال: $y = \frac{2}{3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x}$

$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2}$

سجلوا كحاصل ضرب واشتقوا.

أ) $y = \frac{3}{x}$ جـ) $y = \frac{1}{2x}$ هـ) $y = \frac{0.8}{x}$

ب) $y = \frac{2.3}{x}$ د) $y = \frac{3}{4x}$ و) $y = -\frac{2}{3x}$

17. اشتقوا كل واحدة من الدوال الآتية.

أ) $y = -\frac{5}{x} + 1$ جـ) $y = -\frac{4}{x} + 2x^2$

ب) $y = \frac{1}{2x} + 3x$ د) $y = \frac{6}{x} + x$

18. سجلوا كمجموع ثم اشتقوا.

أ) $y = \frac{7 + 2x}{x}$ جـ) $y = \frac{4 - 6x^2}{5}$

ب) $y = \frac{3x^2 - 6}{x}$ د) $y = \frac{4 + 4x + 6x^2}{x}$

19. حلوا المعادلات الآتية:

أ) $x - \frac{1}{x} = 0$ جـ) $x + \frac{1}{x} = 0$

ب) $\frac{4}{x^2} - 1 = 0$ د) $\frac{4}{x^2} + 1 = 0$

20. معطاة الدالة $y = \frac{4}{x} + x$.

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) احسبوا قيماً للدالة بجوار نقطة عدم التعريف، وسجلوها في الجدول.

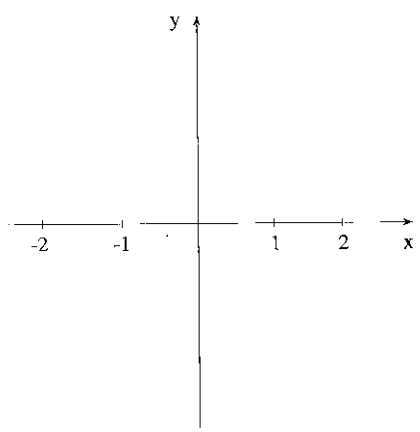
x	-0.5	-0.1	0	0.1	0.5
y			غير معرفة		

صفوا سلوك الدالة بجوار نقطة عدم التعريف.

جـ) اكملوا بحث الدالة.

(نقط التقاطع مع المحورين، نقطة قصوى، رسم تقريبي ومعادلة خط التقارب)

21. معطاة الدالة $y = \frac{1 + 9x^2}{x}$.



أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) سجلوا كمجموع واشتقوا، ثم جدوا نقطاً قصوى.
هيئة المحاور، أُعدت لمساعدتكم في القرار حول نوع النقط القصوى.

22. معطاة الدالة $y = \frac{4 + 2x^3}{x}$.

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) سجلوا كمجموع وجدوا نقطا قصوى.

23. أ) فسروا لماذا لا توجد نقط قصوى للدالة $y = \frac{3 - 2x^2}{x}$.

ب) فسروا لماذا تكون الدالة تنازلية في المجال $x > 0$ وفي المجال $x < 0$.

24. ابحثوا الدالة $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x}$ حسب الخطوات الاتية:

أ) سجلوا مجال تعريف الدالة.

ب) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.

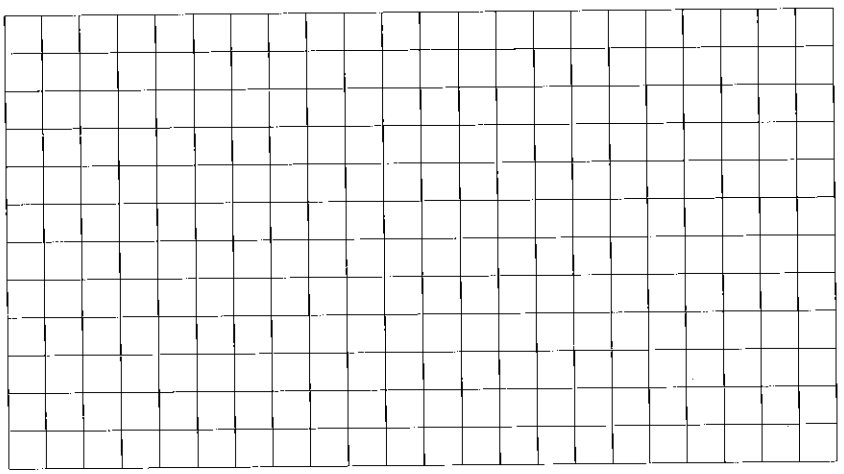
جـ) جدوا نقطا قصوى (دققوا حتى منزلتين عشريتين بعد الفاصلة).

د) ارسموا شكلا تقريبيا.

هـ) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل.

25 من أملاكه، يريد مزارع تخصيص قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها 120م^2، مع امكانية انتاج قطع ذات محيطات مختلفة.

أ) ارسموا ثلاث قطع كهذه واحسبوا محيط كل منها.
(ضلع كل تربيعة يمثل 10م)



ب) حاولوا ايجاد أطوال قطعة مساحتها 120م^2، بحيث يكون محيطها اصغر من محيط اي قطعة من الثلاث التي رسمتم.

جـ) x متغير يمثل طول احد اضلاع القطعة المستطيلة التي مساحتها 120م^2.
عبروا عن محيطها (بمساعدة x).

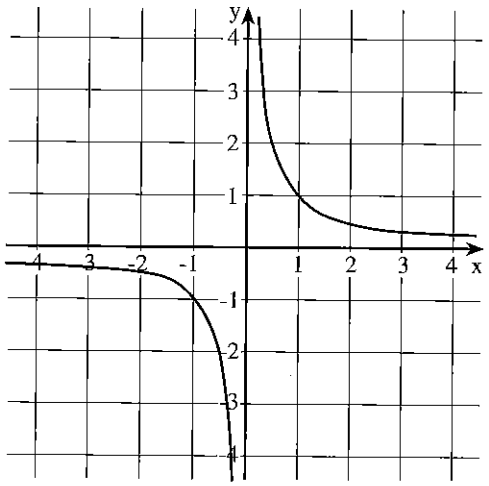
د) للتوفير في تكاليف بناء السور حولها، جدوا أطوال قطعة الارض التي لها أصغر محيط.

عن مماس الدالة

1. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.

مشتقة الدالة هي

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$



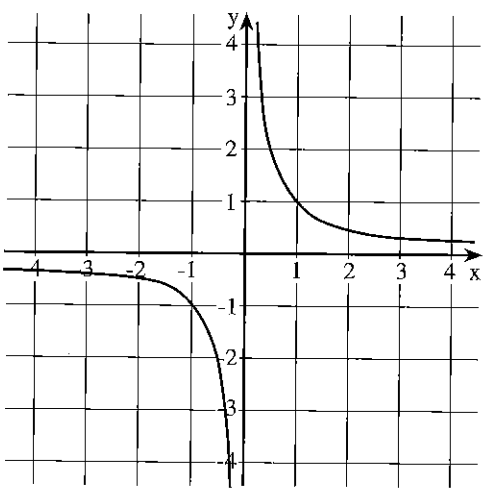
أ) – احسبوا $f'(1)$.
– ارسموا المماس في النقطة $(1, 1)$.
– سجلوا معادلة المماس في هذه النقطة.

ب) للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ يوجد مماس آخر له نفس الميل، ارسموه.
– سجلوا احداثيات نقطة التماس.
– سجلوا معادلة هذا المماس.

جـ) ماذا يمكنكم القول عن المماسين؟

2. أ) ارسموا مماسا للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ في النقطة $(-2, -\frac{1}{2})$ سجلوا ميله بالتقريب.

ب) بمساعدة الدالة المشتقة، جدوا ميل المماس في النقطة $x = -2$.
قارنوا مع نتيجة البند (أ).



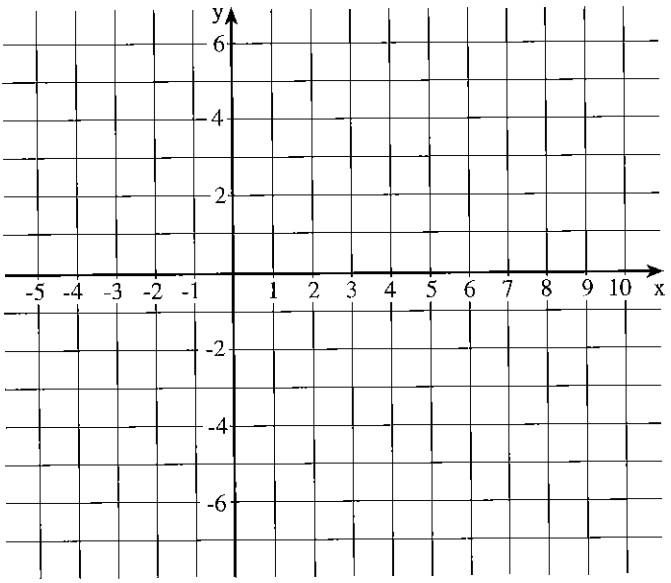
3. في كل واحد من البنود، سجلوا معادلة لمستقيم ميله معطى ويمر في النقطة المعطاة. ارسموا للفحص.

أ) الميل 2 والنقطة (0,3).

ب) الميل 2- والنقطة (2- ,1).

جـ) الميل $-\frac{1}{2}$ والنقطة (4, 3).

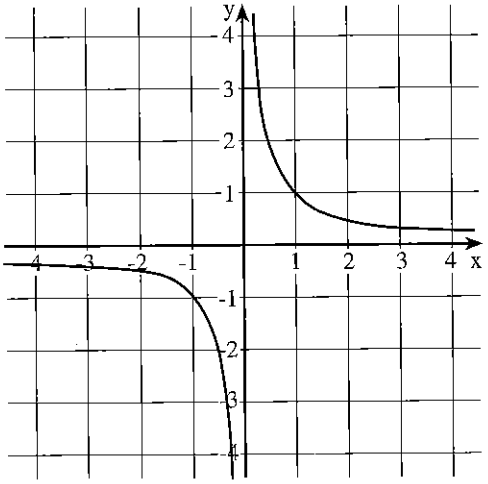
د) الميل 3 ، والنقطة (2,2).



4. أ) احسبوا ميل مماس الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ في النقطة $x = 2$.

ب) سجلوا معادلة مماس الدالة في النقطة $A(2, \frac{1}{2})$.

– ارسموا المماس.

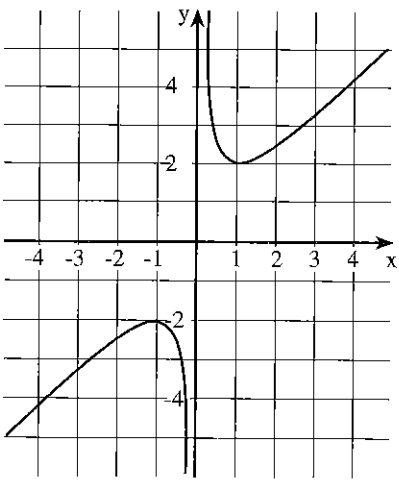


جـ) في نفس هيئة المحاور، ارسموا الخط البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{x} + 2$.

د) احسبوا $g'(2)$. سجلوا معادلة مماس هذه الدالة في النقطة $(2, 2\frac{1}{2})$ ، ثم ارسموا المماس نفسه.

هـ) ماذا يمكنكم القول عن المماسين المرسومين.

5. الخط البياني أمامكم هو للدالة $f(x) = \frac{1}{x} + x$



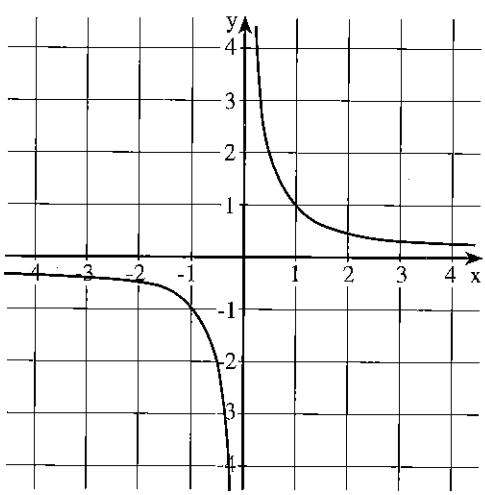
أ) اكملوا احداثيات النقطة $A(2, \quad)$ الواقعة على الخط البياني للدالة.

ب) احسبوا ميل مماس الدالة في النقطة A.

جـ) سجلوا معادلة هذا المماس، ثم ارسموا المماس نفسه.

د) اكملوا احداثيات النقطة $B(-1, \quad)$ وجدوا معادلة المماس في النقطة B، ثم ارسموا المماس نفسه.

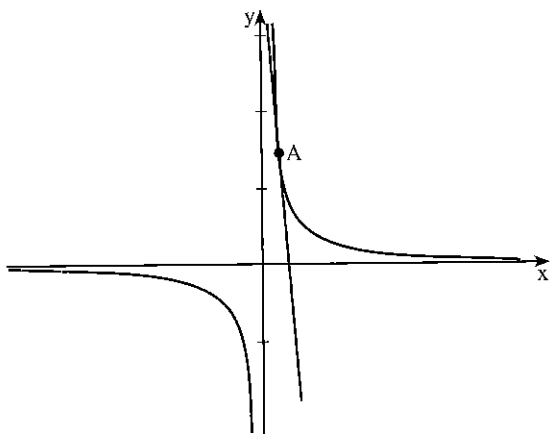
6. معطاة الدالة $y = \frac{1}{x}$



أ) ارسموا مماسين للدالة بحيث يكون ميلهما $-\frac{1}{4}$.

ب) سجلوا نقطتي التماس بواسطة التعويض في مشتقة الدالة.

جـ) أمامكم رسم تقريبي للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$، ولمماسها في النقطة A الذي ميله 4-.



(i) جدوا الاحداثي x للنقطة A .

(ii) هل يوجد مماس آخر ميله 4- ؟ اذا كان نعم – سجلوا احداثيات نقطة التماس.

ع.ذ 7. معطاة الدالة $y = \frac{1}{x}$.

أ) جدوا النقط التي يكون فيها ميل الدالة 9- .

ب) جدوا النقط التي يكون فيها ميل الدالة $-\frac{1}{9}$.

جـ) جدوا النقط التي يكون فيها ميل الدالة $-\frac{1}{5}$.

د) فسروا لماذا لا يمكن ان يوجد مماس للدالة ميله 2 .

تمارين

8. جدوا معادلة المماس لكل واحدة من الدوال الاتية، في النقطة المعطاة.

أ) $y = \frac{1}{x} - 3$ $(-1, -4)$

ب) $y = \frac{1}{x} + 5$ $(\frac{1}{3}, 8)$

جـ) $y = \frac{2}{x} + 3x$ $(4, 12\frac{1}{2})$

د) $y = \frac{x + 4}{x}$ $(4, 2)$

هـ) $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{x}$ $(1, -4)$

9. جدوا معادلة مماس الدالة $y = \frac{4}{x} - 4x$ في النقطة $x = 1$.

10. معطاة الدالة $f(x) = \frac{2}{x}$.

أ) جدوا النقط التي يكون فيها ميل الدالة 18- (توجد نقطتان)
ب) جدوا معادلة مماس الدالة في كل واحدة من النقطتين اللتين وجدتم في البند (أ).

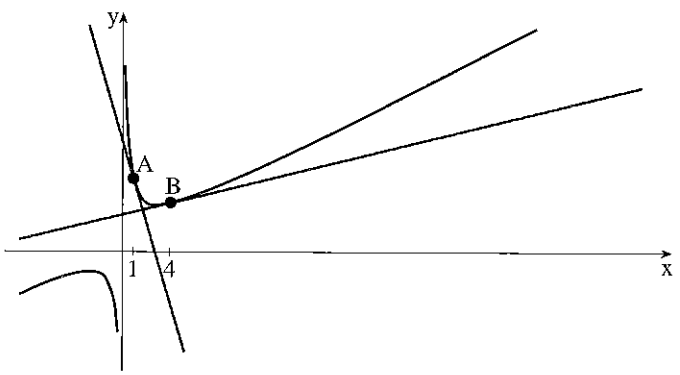
11. معطاة الدالة $y = 2x + \frac{1}{x}$.

أ) جد نقطاً يكون فيها ميل الدالة 2- .

ب) جدوا معادلة مماس الدالة في كل واحدة من النقط التي وجدتم في البند (أ).

12. معطاة الدالة $y = -\frac{3}{x} - 16x^3$. جدوا الاحداثي x للنقط التي تكون فيها قيمة المشتقة صفرا.

13. أمامكم الخط البياني للدالة $y = \frac{1}{2}x + \frac{4}{x} + 1$ ولمماسين لها في النقطتين A وَB .



أ) جدوا معادلتي المماسين في النقطتين A وَ B .

ب) جدوا نقطة تقاطع هذين المماسين.

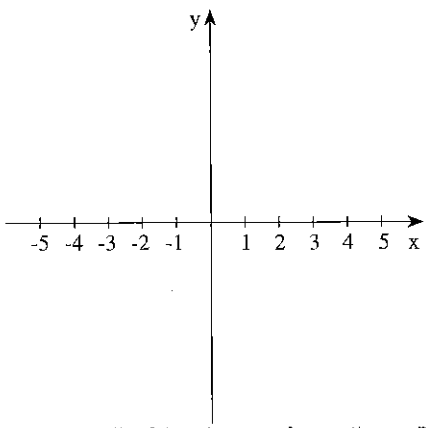
بحث دوال خارج قسمة أخرى (اختياري)

1. معطاة الدالة $y = \frac{x^2}{x-1}$.

أ) في أية قيمة ل x الدالة غير معرّفة؟ ارسموا "حاجزا" على شكل مستقيم مقطّع. سجلوا مجال التعريف.

ب) جدوا نقط تقاطع الخط البياني للدالة مع المحورين، وعيّنوها في هيئة المحاور.

جـ) مشتقة الدالة هي: $y' = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.



جدوا نقطاً مشبوهة وعينوها.
اكملوا احداثيات النقط الآتية.
عيّنوها وحددوا نوع النقط المشبوهة.

(-1,) (0.5,)
(1.5,) (3,)

د) – احسبوا احداثيات نقط حول نقطة عدم التعريف وسجلوها في الجدول.

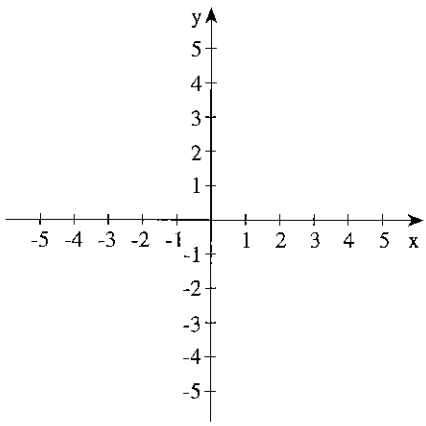
x	0.9	0.99	1	1.01	1.1
y			غير معرفة		

– صفوا سلوك الدالة بجوار نقطة عدم التعريف.
– ما هي معادلة خط التقارب؟

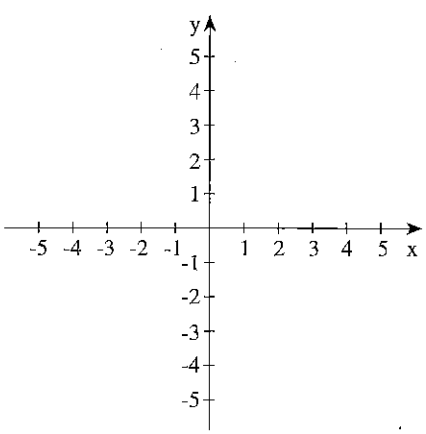
هـ) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة.

ع.ذ 2. ارسموا رسماً تقريبياً، حسب الخواص المسجلة في كل بند.

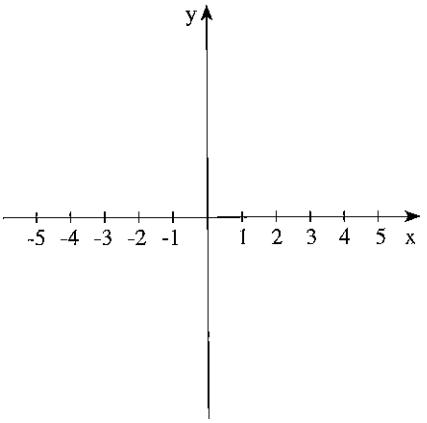
أ) $x = -1$ هو خط تقارب للخط البياني للدالة (ارسموا مستقيما مقطعا) النقطة $(0,3)$ هي نقطة نهاية **صغرى**، والنقطة $(-1, -2)$ هي نقطة نهاية **عظمى**.



ب) $x = -1$ هو خط تقارب للخط البياني للدالة (ارسموا مستقيما مقطعا) النقطتان (0.3) وَ $(-1, -2)$ هما نقطتا نهاية صغرى.



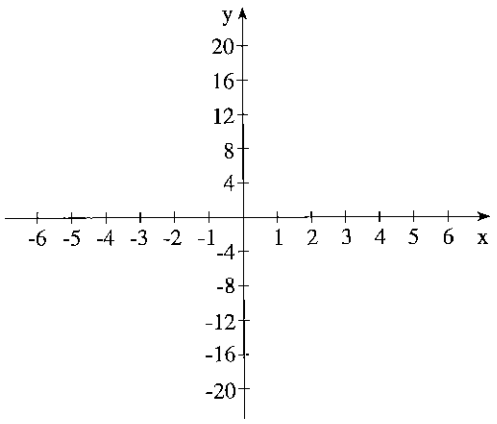
3. للدالة $y = \frac{x^2}{x+1}$.



يوجد خط تقارب في $x = -1$
ارسموا مستقيماً مقطعاً.
النقطتان (0.0) وَ(-2,-4)
هما نقطتان مشبوهتان. عيّنوهما ثم
جدوا نقطاً عن جانبي كل نقطة
مشبوهة. عيّنوها في هيئة المحاور
وحددوا نوع النقط المشبوهة.

4. معطاة الدالة

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$



أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟
(ارسموا "حاجزا" على
شكل مستقيم مقطع).

ب) مشتقة الدالة هي:

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2}$$

جدوا نقطاً مشبوهة وعيّنوها في هيئة المحاور.
احسبوا نقطاً عن جانبي كل نقطة مشبوهة. عيّنوها في هيئة المحاور ثم حددوا نوع النقط المشبوهة.

جـ) اختاروا قيماً ل x عن جانبي نقطة عدم التعريف. احسبوا قيم الدالة وسجلوا في الجدول.

x					
f(x)			غير معرفة		

ما هي معادلة خط التقارب؟

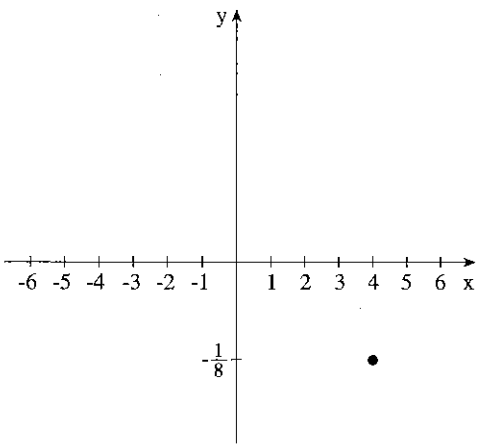
د) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة

تمارين

5. معطاة الدالة $y = \frac{2-x}{x^2}$.

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) جدوا نقط تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x وعيّنوها في هيئة المحاور.



جـ) النقطة "المشبوهة" $(4, -\frac{1}{8})$ معينة في هيئة المحاور.

اكملوا الجدول وعيّنوا بالتقريب، النقط في هيئة المحاور.

x	-4	-2	-1	-0.5		0.5	2	4	5
y					غير معرفة				

د) اكملوا الرسم التقريبي وحددوا نوع النقط المشبوهة.

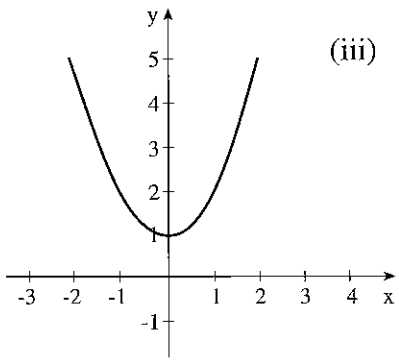
هـ) اكتبوا معادلات خطوط التقارب

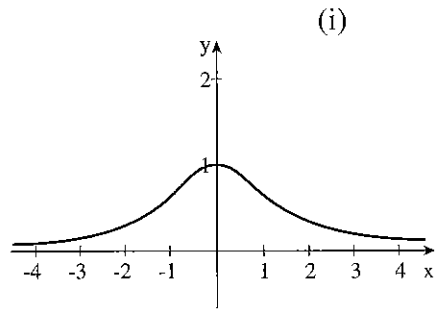
6. أ) حددوا بالنسبة لكل واحدة من الدوال الاتية، هل هي خطية او تربيعية او ذات تقارب.

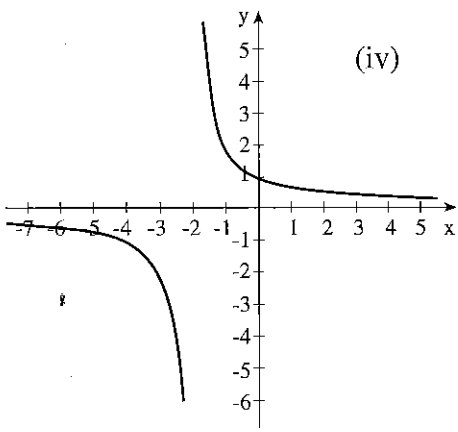
$$f(x) = \frac{2x^2 + 2}{2} \qquad h(x) = \frac{x + 2}{2}$$

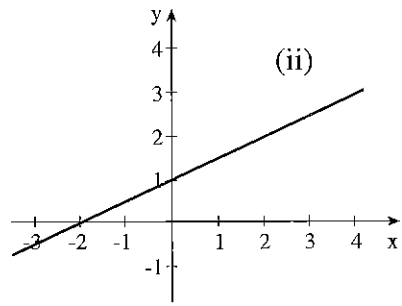
$$g(x) = \frac{2}{x^2 + 2} \qquad m(x) = \frac{2}{x + 2}$$

ب) لكل دالة من الدوال السابقة، يلائم واحد من الخطوط البيانية الآتية. ناظروا لكل دالة خطها البياني.









خط بياني ذو ثقب وتبسيط الكسور (اختياري)

1. معطاة الدالة $y = \frac{x^2 + 2x}{x}$.

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

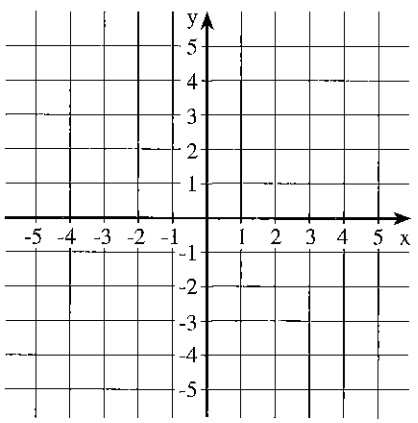
ب) اكملوا احداثيات النقط الواقعة حول $x = 0$.

(-0.1,) (-0.01,) (0.01,) (0.1,)

– بيّنوا ماذا يحدث لقيم الدالة، ان نعوّض قيماً ل x أقرب واقرب للصفر.

جـ) اكملوا الجدول وعينوا النقط في هيئة المحاور.

x	-3	-1	-1	-0.5		0.5	1	2	3
y					غير معرف				



حاولوا اكمال رسم تقريبي للخط البياني للدالة. ما شكله حسب رأيكم؟

د) نكتب قانون الدالة بشكل آخر. نُخرج x كعامل مشترك في البسط

$y = \frac{x(x + 2)}{x}$. نبسط ونكتب القانون الناتج $y =$.

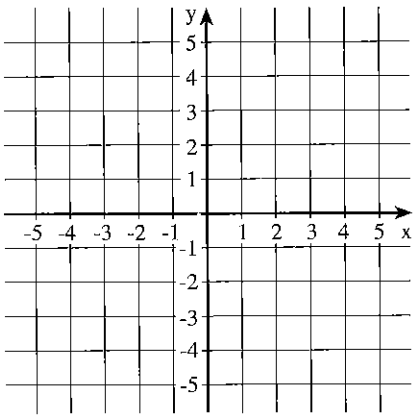
الرسم البياني الملائم للدالة الناتجة هو خط مستقيم.

ضعوا في هيئة المحاور مستقيما ملائما.

في الواقع، الرسم البياني للدالة الاصلية مطابق تماما للرسم البياني للدالة الناتجة في كل نقطة، ما عدا في نقطة عدم التعريف.

وهذا يعني ان الرسم البياني هو "مستقيم ذو ثقب". ما هي حسب رأيكم "احداثيات الثقب"؟ عينوا "الثقب" في هيئة المحاور علي شكل دائرة فارغة.

2. معطاة الدالة $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$.



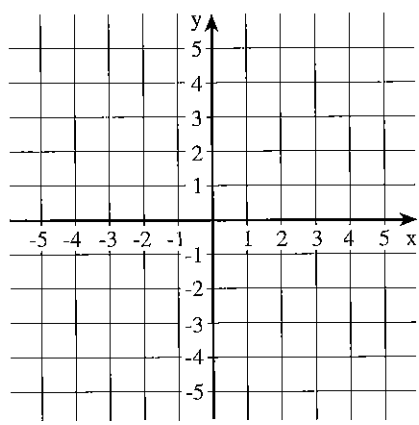
أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

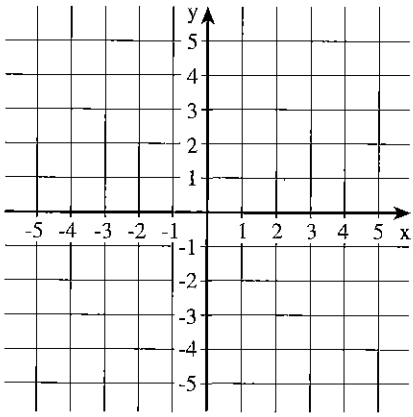
ب) اخرجوا عاملا مشتركا وبسّطوا، ثم سجلوا قانون الدالة الناتجة وارسموا

جـ) بماذا يختلف الخط البياني للدالة "المبسطة" عن الخط البياني للدالة الاصلية؟ عوضوا وافحصوا.

في الدالة "المبسطة"	في الدالة الاصلية
(3,)	(3,)
(1.1,)	(1.1,)
(1,)	(1, لا يوجد)

د) ارسموا الخط البياني للدالة الاصلية.



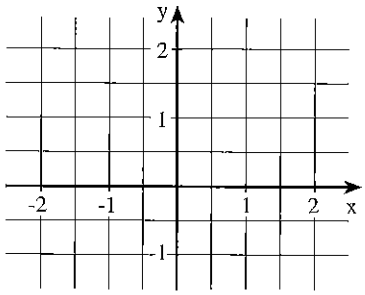


ع.ذ 3. معطاة الدالة $y = \frac{-2x^2 + x}{x}$.

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) اخرجوا عاملا مشتركا وبسّطوا، ثم سجلوا قانون الدالة الناتجة وارسموا خطها البياني.

جـ) بماذا يختلف الخط البياني للدالة الناتجة عن الخط البياني للدالة المعطاة؟ صححوا الخط البياني بحيث يلائم الدالة المعطاة.



ع.ذ 4. معطاة الدالة $y = \frac{x^3 + x^2}{x}$.

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) اخرجوا عاملا مشتركا وبسّطوا.

جـ) جدوا مشتقة الدالة "المبسطة".
جدوا نقطة مشبوهة وعينوها في هيئة المحاور.
احسبوا قيماً لنقط عن جانبي النقطة المشبوهة وعينوها.
ما نوع النقطة المشبوهة؟

د) اكملوا رسما تقريبيا للخط البياني للدالة "المبسطة".

هـ) ما هي قيمة الدالة "المبسطة" في نقطة عدم التعريف المذكورة أعلاه $(0, \quad)$؟
عينوها في هيئة المحاور كدائرة فارغة **وصححوا** بحيث ينتج الخط البياني للدالة الإصلية.

تمارين

5. i) الى جانب كل دالة، سجلوا مجال تعريفها وبسّطوا.

مثال: $y = \frac{5x^2}{2x} = \frac{5x}{2}$ ، $x \neq 0$

أ) $y = \frac{10x^3}{2x^2}$

ب) $y = \frac{-(x+7)}{x+7}$

جـ) $y = \frac{5x(x-2)}{x-2}$

د) $y = \frac{x+5}{(x+5)^2}$

هـ) $y = \frac{x+3}{x+3}$

و) $y = \frac{x^2(x+2)}{x^2}$

ii) الخط البياني لخمس من الدوال السابقة من البند (i) هو خط مستقيم "ذو ثقب". بيّنوا هذه الدوال.

6. اخرجوا عاملا مشتركا.

مثال: $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$

أ) $3x^3 - 6x^2 =$

ب) $3x^2 - 2x =$

جـ) $5 + 5x =$

د) $-x^2 + x =$

هـ) $x + x^3 + x^2 =$

و) $-x^3 + x^2 + x =$

ز) $5x^2 - 15x^3 =$

ح) $7x + 10x^2 =$

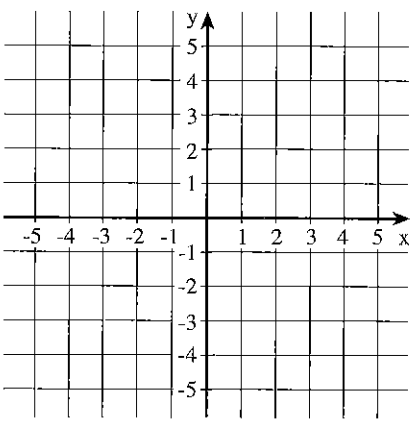
7. سجلوا مجال تعريف كل دالة. بسطوا واختزلوا (اذا أمكن).

مثال: $y = \frac{3x-3}{2x-2} = \frac{3(x-1)}{2(x-1)} = \frac{3}{2}$ ، $x \neq 1$

أ) $y = \frac{5x-5}{2x-2}$ ب) $y = \frac{11x^2+11x}{x+1}$ جـ) $y = \frac{x^2+3x}{2x+6}$

د) $y = \frac{2x+x^2}{4x+2}$ هـ) $y = \frac{3x^2+6x}{2x+4}$ و) $y = \frac{5x^3-10x^2}{3x-6}$

8. معطاة الدالة $y = \frac{3x^2+2x}{x}$



أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) اخرجوا عاملاً مشتركا وبسطوا ثم سجلوا قانون الدالة الناتجة وارسموا خطها البياني.

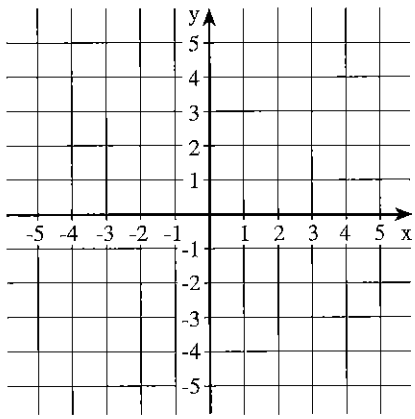
جـ) بماذا يختلف الخط البياني للدالة المبسطة عن الخط البياني للدالة الاصلية؟ **صححوا** الخط البياني بحيث يلائم الدالة المعطاة.

د) عوضوا: في الدالة الاصلية (1,) في الدالة "المبسطة" (1,)

9. معطاة الدالة $y = \frac{3x^2 - 3x}{x - 1}$

أ) في أية قيمة ل x الدالة غير معرّفة.

ب) بسّطوا قانون الدالة.
سجلوا قيمة الدالة "المبسطة" في نقطة عدم التعريف (,1) ثم
ارسموا خطها البياني.



جـ) بماذا يختلف الخط البياني للدالة المبسطة عن الخط البياني للدالة الاصلية؟
صححوا الخط البياني بحيث يلائم الدالة الاصلية.

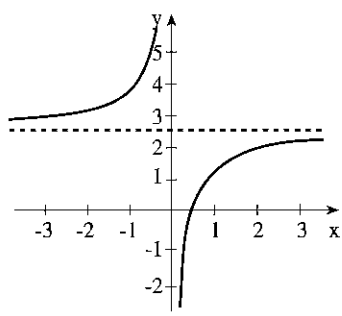
10. أ) سجلوا مجال تعريف كل دالة.
بسطوا واختزلوا (ان أمكن).

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x} \qquad h(x) = \frac{2x - 1}{x}$$

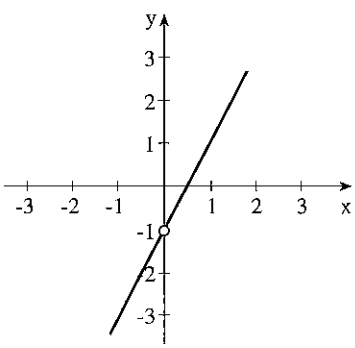
$$g(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} \qquad m(x) = \frac{x}{x - 2}$$

ب) ناظروا لكل دالة خطها البياني.

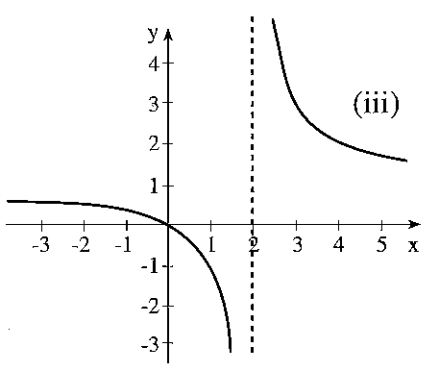
(i)



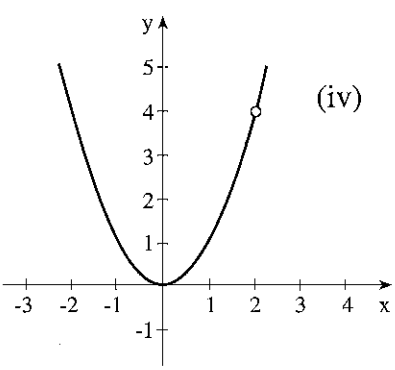
(ii)



(iii)



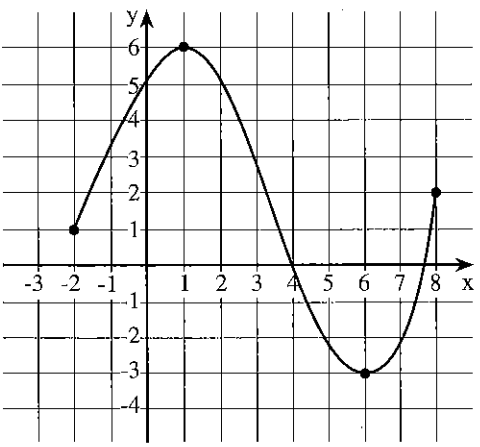
(iv)



الفصل الثاني: الدالتان f وَ $\frac{1}{f}$

الدالة المعرّفة في قطعة مغلقة

1. الخط البياني المرسوم هو للدالة f المعرّفة في مجال قطعة مغلقة من $x = -2$ حتى $x = 8$ $(-2 \leq x \leq 8)$.



أ) سجلوا المجالات التي فيها تكون الدالة تصاعدية.

ب) سجلوا مجالا تكون فيه الدالة تنازلية.

لم نتعامل حتى الان، مع مجال هو قطعة مغلقة. لذلك لم يكن للخط البياني **نقط طرف**.

تعاملنا فقط مع نقط قصوى، حيث تحدثنا عن انتقال من تنازل الى تصاعد $\vee$ أو من تصاعد الى تنازل $\wedge$.

في المجال الذي هو قطعة مغلقة، نقط الطرف هي في الواقع نقط قصوى، لانها هي "الاعلى" او "الاوطأ" في جوارها. مثلا النقطة $(1, -2)$ هي نقطة نهاية صغرى، لانه لا توجد في جوارها نقطة اوطأ منها. لذلك في الخط البياني المرسوم توجد أربع فقط قصوى.

جـ) سجلوا كل النقط القصوى الاخرى وبيّنوا من أي نوع هي (نهاية صغرى أو نهاية عظمى)

ع.ذ 2. في كل بند، ارسموا خطا بيانيا حسب الخواص المسجلة.

أ) الدالة g معرّفة في القطعة المغلقة $-6 \le x \le 4$ (من $x = -6$ حتى $x = 4$)
ولها نقطتا نهاية صغرى ونقطتا نهاية عظمى.

ب) الدالة f معرّفة في القطعة المغلقة $-2 \le x \le 5$ (من $x = -2$ حتى $x = 5$)
ونقطتا طرفيها هما نقطتا نهاية صغرى.

عندما توجد اكثر من نقطة قصوى واحدة من نفس النوع، يمكن ان نسأل: أية نقطة نهاية صغرى هي "الاوطأ" او أية نقطة نهاية عظمى هي "الأعلى"؟
(من المفهوم طبعا، انه لا توجد دائما دالة كهذه)

3. أ) ارسموا خطا بيانيا للدالة h حسب الخواص المسجلة.

- h معرفة في القطعة المغلقة $-2 \le x \le 7$ (من $x = -2$ حتى $x = 7$)
- النقط القصوى الوحيدة لها هي:
$(-2, 1)$ و $(7,1)$ هما نقطتا نهاية صغرى.
$(-2, 6)$ و $(4,4)$ هما نقطتا نهاية عظمى.

ب) أي من نقطتي النهاية الصغرى للدالة h هي "الاوطأ"؟

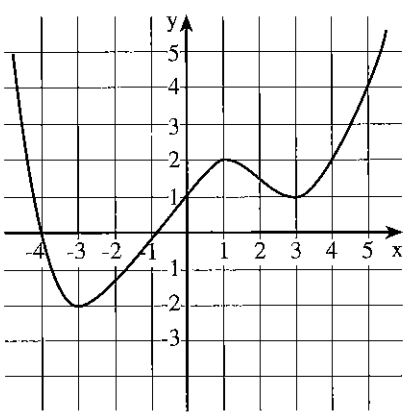
نقطة النهاية الصغرى "الاوطأ" و تدعى نقطة النهاية **الصغرى المطلقة**.
نقط النهاية العظمى "الاعلى"، تدعى نقطة النهاية **العظمى المطلقة**.

جـ) سجلوا احداثيات نقطة النهاية العظمى المطلقة للدالة h.

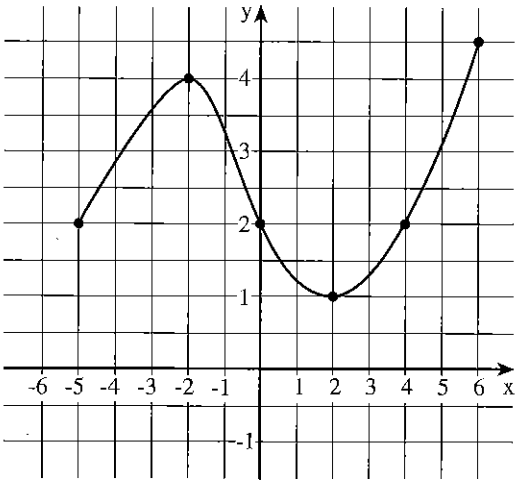
ع.ذ 4. الخط البياني المرسوم هو للدالة g المعرّفة لكل x.

أ) سجلوا احداثيات كل النقط القصوى وبينوا نوعها.

ب) سجلوا احداثيات نقطة النهاية الصغرى المطلقة والنهاية العظمى المطلقة.



5. الخط البياني المرسوم هو للدالة f المعرّفة في القطعة المغلقة $-5 \leq x \leq 6$.



أ) سجلوا احداثيات نقطة النهاية العظمى المطلقة، واحداثيات نقطة النهاية الصغرى المطلقة.

في هذا التمرين، نرسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$

ب) نرسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ حسب الخطوات الاتية:

(i) اقرأوا من الخط البياني احداثيات النقط المشددة، ثم اكملوا الجدول كما في المثال.

انتبهوا! لكل زوج من النقط نفس الاحداثي x .

	f	$\frac{1}{f}$
مثال:	(-5, 2)	(-5 , 0.5)
	(-2,)	.
	.	.
	.	.

(ii) عيّنوا في نفس هيئة المحاور (بلون آخر) ، نقط الدالة $\frac{1}{f}$ التي سجلتموها في الجدول.
صلوا هذه النقط بحيث ينتج خط متصل.

جـ) (i) سجلوا احداثيات النقطة المشتركة ل f و $\frac{1}{f}$

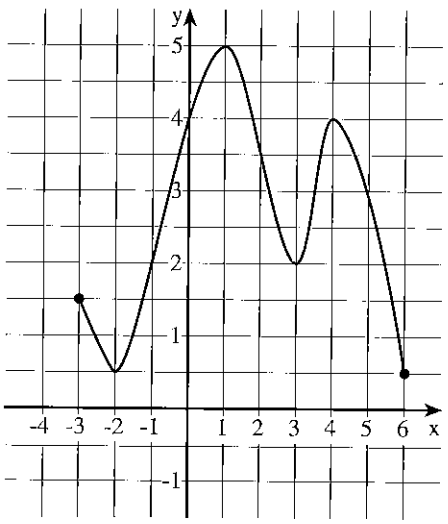
(ii) جميع قيم الدالة f موجبة في مجال تعريفها. ماذا يمكنكم ان تقولوا عن قيم الدالة $\frac{1}{f}$؟

(iiI) ماذا يحدث للدالة $\frac{1}{f}$ عندما تكون f تنازلية؟

(iv) سجلوا احداثيات النقط القصوى الاربع للدالة $\frac{1}{f}$ وبيّنوا نوعها وافحصوا هل هي نهايات مطلقة.

6. الخط البياني المرسوم هو للدالة f المعرفة في القطعة المغلقة

$-3 \le x \le 6$



أ) في العمودين الايمنين من الجدول، سجلوا النقط القصوى (يشمل الطرفين) للدالة f .سجلوا نوع كل نقطة في الجدول وقرروا أياً منها هي نقط نهايات مطلقة.

النوع	$\frac{1}{f}$	f	النوع

ب) – احسبوا وسجلوا في الجدول، احداثيات النقط القصوى للدالة $\frac{1}{f}$ وبيّنوا نوعها ايضا.

– عينوا هذه النقط (بلون آخر) في نفس هيئة المحاور.

جـ) عيّنوا نقطا اخرى من $\frac{1}{f}$ (استعينوا بنقط اخرى على f) واكملوا الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

د) (i) شددوا النقط المشتركة بين الخطين البيانيين للدالتين f و $\frac{1}{f}$.

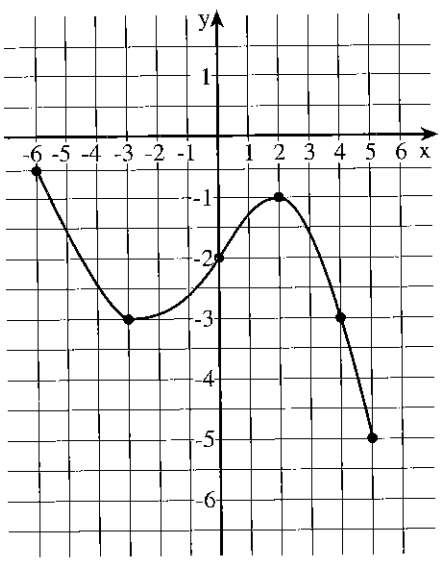
(ii) ما هو المشترك لجميع هذه النقط؟

هـ) في اي مجالات تكون الدالة f تصاعدية؟ ماذا يحدث للدالة $\frac{1}{f}$ في هذه المجالات؟

و) ماذا يمكنكم ان تقولوا عن f و $\frac{1}{f}$ من وجهة الايجابية / السلبية؟

ع.ذ

7. الخط البياني المرسوم هو للدالة g المعرفة في القطعة المغلقة $-6 \le x \le 5$



أ) – سجلوا في الجدول، النقط القصوى (يشمل الطرفين) للدالة g.

– سجلوا في الجدول، نوع كل واحدة من النقط القصوى. سجلوا ايضا، اذا كانت نقطة نهاية صغرى مطلقة او نهاية عظمى مطلقة

النوع	$\frac{1}{g}$	g	النوع

ب) احسبوا وسجلوا في الجدول، احداثيات النقط القصوى للدالة $\frac{1}{g}$ ، وبيّنوا نوعها.

عيّنوا النقط (بلون آخر) في نفس هيئة المحاور.

جـ) عيّنوا نقطا اخرى للدالة $\frac{1}{g}$ (استعينوا بالنقط المشددة الواقعة على الدالة g)، ثم اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{g}$.

د) (i) شددوا النقط المشتركة بين الدالتين g و $\frac{1}{g}$.

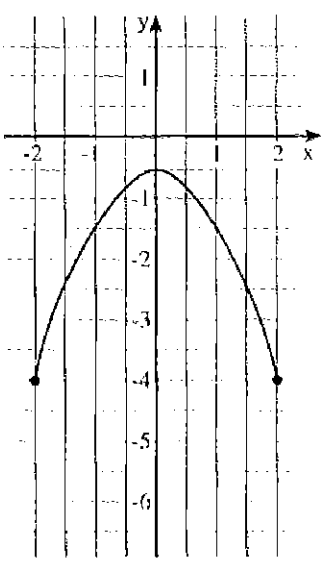
(ii) سجلوا احداثياتها.

(iii) ما هو المشترك لجميع هذه النقط؟

هـ) في أي مجالات تكون الدالة g تنازلية؟ ماذا يحدث للدالة $\frac{1}{g}$ في هذه المجالات؟

و) ماذا يمكنكم ان تقولوا عن g و $\frac{1}{g}$ من وجهة الايجابية / السلبية؟

ع.ذ 8 الخط البياني المرسوم هو للدالة f المعرّفة في القطعة المغلقة $-2 \leq x \leq 2$.



أ) شددوا على الخط البياني، النقط المشتركة بين الدالتين f و $\frac{1}{f}$.

ب) - سجلوا النقط القصوى للدالة f.

- سجلوا النقط القصوى للدالة $\frac{1}{f}$

وعيّنوها في نفس هيئة المحاور.

جـ) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

د) ما هي احداثيات نقطة النهاية الصغرى المطلقة للدالة $\frac{1}{f}$؟

9. f هي دالة (متصلة) معرّفة في قطعة مغلقة وجميع قيمها موجبة، أو جميع قيمها سالبة.

أكملوا ملخصاً لخواص الدالة $\frac{1}{f}$ بالمقارنة مع خواص الدالة f (كما رأينا حتى الآن)

– اذا كان مقابل قيمة معينة لِ x يوجد للدالة f نقطة نهاية صغرى (ليست واقعة على المحور x)، فأن مقابل نفس قيمة x يوجد للدالة $\frac{1}{f}$ --------.

– اذا كان مقابل قيمة معينة لِ x يوجد للدالة f نقطة نهاية عظمى (ليست واقعة على المحور x)، فأن مقابل نفس قيمة x يوجد للدالة $\frac{1}{f}$ --------.

– مجالات التصاعد للدالة f هي مجالات -------- للدالة $\frac{1}{f}$.

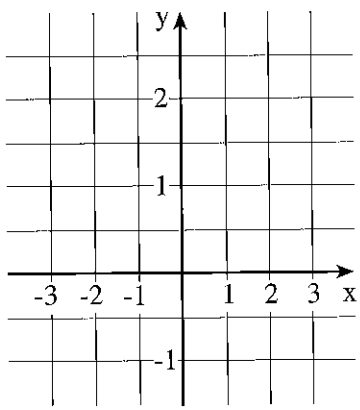
– مجالات التنازل للدالة f هي مجالات -------- للدالة $\frac{1}{f}$.

– في المجال حيث f موجبة، تكون $\frac{1}{f}$ --------.

– في المجال حيث f سالبة، تكون $\frac{1}{f}$ --------.

– اذا كان للدالتين f و $\frac{1}{f}$ نقط مشتركة، فأن الأحداثي y لها --------

10. أ) أرسموا الخط البياني للدالة f التي تحقق الخواص الآتية.
(يمكنكم الاستعانة بهيئة المحاور التي أمامكم)



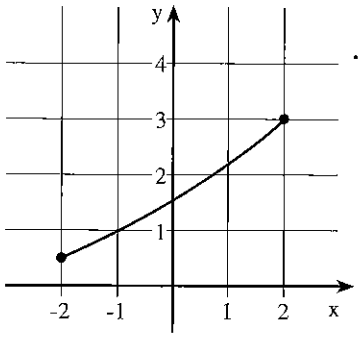
(i) المجال هو القطعة من $x = -1$ حتى $x=3$
(ii) جميع قيم الدالة موجبة.
(iii) الدالة تصاعدية في المجالين $-1 < x < 1$, $2 < x < 3$
(iv) الدالة تنازلية من $x=1$ حتى $x=2$
(v) للدالة نقط قصوى في $x=1$ وفي $x=2$

ب) سجلوا احداثيات النقط القصوى وبيّنوا نوعها (انتبهوا لنقط الطرفين ايضاً)

جـ) في نفس هيئة المحاور، ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ (من أجل ذلك:
احسبوا وعينوا النقط القصوى للدالة $\frac{1}{f}$. شددوا النقط المشتركة بين f و$\frac{1}{f}$)

د) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل للدالة $\frac{1}{f}$.

11. الخط البياني المرسوم هو للدالة h المعرّفة في القطعة المغلقة $-2 \le x \le 2$ (من $x = -2$ حتى $x = 2$).



أ) سجلوا احداثيات النقط القصوى للدالة $\frac{1}{h}$.

ب) احسبوا وسجلوا النقط القصوى للدالة $\frac{1}{h}$ عيّنوها في نفس هيئة المحاور.

جـ) سجلوا احداثيات النقطة المشتركة بين الدالتين h وَ $\frac{1}{h}$.

د) سجلوا وعيّنوا نقط تقاطع الدالتين h و $\frac{1}{h}$ مع المحور y.

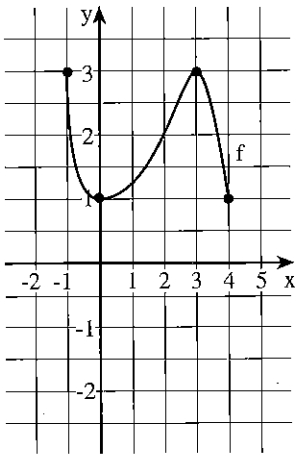
هـ) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{h}$.

و) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل بالنسبة للدالتين h و $\frac{1}{h}$، في مجال التعريف.

ز) سجلوا مجالات الايجابية والسلبية بالنسبة للدالتين h و $\frac{1}{h}$، في مجال التعريف.

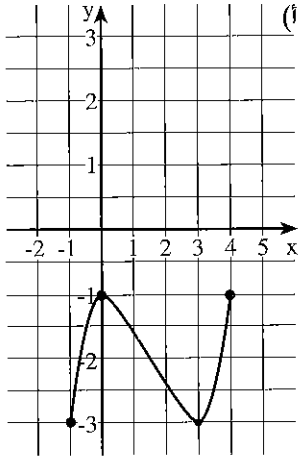
ع.ذ

12. الخط البياني المرسوم هو للدالة f
المعرفة في القطعة المغلقة $-1 \le x \le 4$.

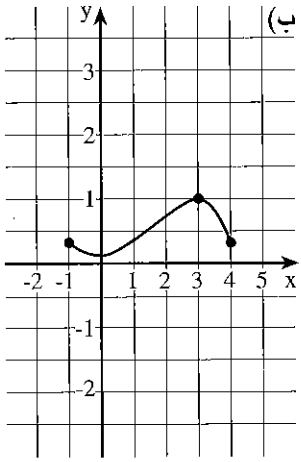


أحد الخطوط البيانية الآتية
هو للدالة $\frac{1}{f}$ ، تعرّف عليه وعلّل .

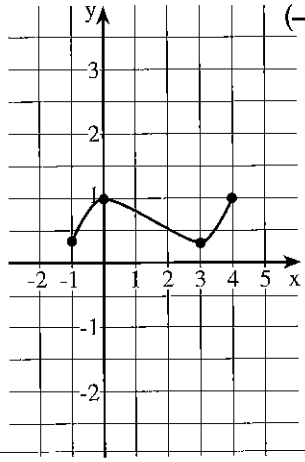
أ)



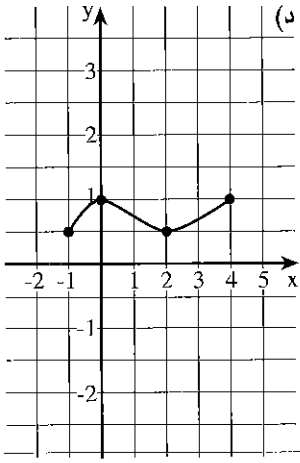
ب)



جـ)

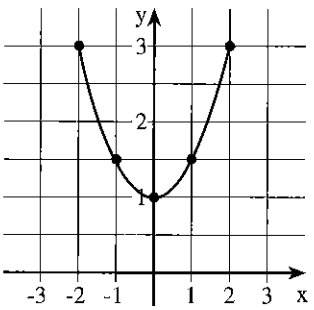


د)



تمارين

13. الخط البياني المرسوم هو للدالة f المعرفة في القطعة المغلقة $-2 \leq x \leq 2$.



أ) اقرأوا من الخط البياني وسجلوا في العمود f، احداثيات النقط المشددة للدالة f

مثال:

	$\frac{1}{f}$	f	
	$(-2, \frac{1}{3})$	(-2, 3)	نهاية عظمى مطلقة

ب) سجلوا في العمود الايمن من الجدول، أي من النقط هي نقطة قصوى للدالة f،
ما نوع كل نقطة قصوى، هل هي نقطة نهاية صغرى مطلقة أو عظمى مطلقة.

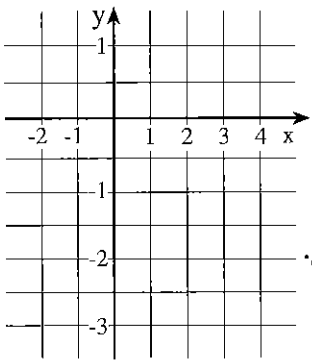
جـ) (i) احسبوا وسجلوا في العمود $\frac{1}{f}$ نقطاً ملائمة للنقط التي سجلتموها في العمود f.

سجلوا في العمود الأيسر، أي من النقط هي نقطة قصوى للدالة $\frac{1}{f}$.
ما نوع كل نقطة قصوى، هل هي نقطة نهاية صغرى مطلقة أو عظمى مطلقة.

(ii) عيّنوا النقط الملائمة للدالة $\frac{1}{f}$ في نفس هيئة المحاور.

(iii) أكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

14) أ) ارسمو الخط البياني للدالة f التي تحقق الخواص الآتية
(يمكنكم الاستعانة بهيئة المحاور المرسومة)



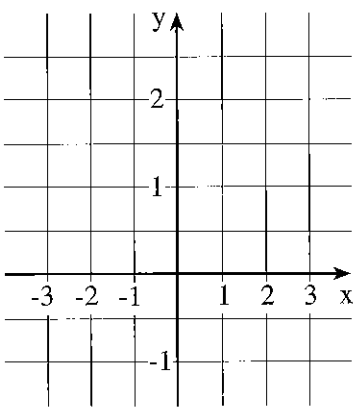
(i) f معرّفة في القطعة المغلقة
$-2 \le x \le 4$.
(ii) جميع قيم الدالة سالبة.
(iii) عندما $x = -2$ يوجد للدالة نهاية عظمى مطلقة.
وعندما $x = 4$ يوجد للدالة نهاية عظمى.
(iv) الدالة تنازلية من $x = -2$ حتى $x = 0$

والدالة تصاعدية من $x = 0$ حتى $x = 4$

ب) سجلوا احداثيات كل واحدة من النقط القصوى وبيّنوا نوعها.

جـ) في نفس هيئة المحاور، ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ (من أجل ذلك، عيّنوا النقط القصوى أولاً وشددوا النقط المشتركة بين الدالتين f و $\frac{1}{f}$).

15.أ) ارسموا الخط البياني للدالة f التي تحقق الخواص الآتية
(يمكنكم الاستعانة بهيئة المحاور المرسومة)

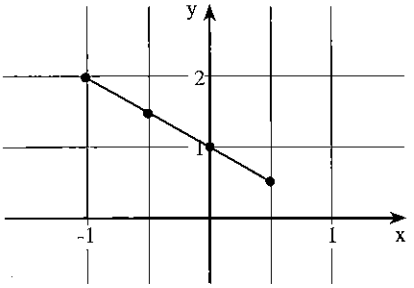


(I) هي معرّفة في القطعة المغلقة $-3 \le x \le 2$.
(II) توجد لها نقطتان قصويان فقط.
(III) جميع قيمها موجبة.

ب) سجلوا احداثيات جميع النقط القصوى للدالتين f و $\frac{1}{f}$

جـ) في نفس هيئة المحاور، ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

16. أ) أمامك الدالة الخطية g المعرّفة في القطعة المغلقة $-1 \le x \le 0.5$. اقرأوا من الخط البياني وسجلوا احداثيات النقط المشددة التي على الخط البياني للدالة g.



ب) احسبوا وسجلوا احداثيات النقط الملائمة للدالة $\frac{1}{g}$، تم عيّنوها في نفس هيئة المحاور.

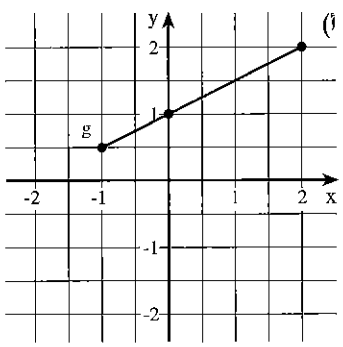
جـ) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{g}$.

د) هل $\frac{1}{g}$ هي دالة خطية أيضاً؟

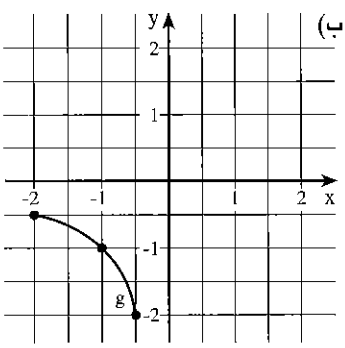
هـ) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل بالنسبة للدالتين g وَ $\frac{1}{g}$.

17. في كل بند، مرسوم الخط البياني للدالة g. في نفس هيئة المحاور، ارسموا شكلاً تقريبياً للدالة $\frac{1}{g}$ (يمكنكم الاستعانة بالنقط المشددة)

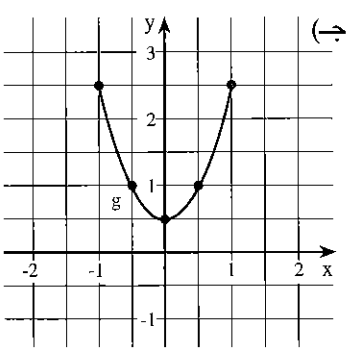
أ)



ب)

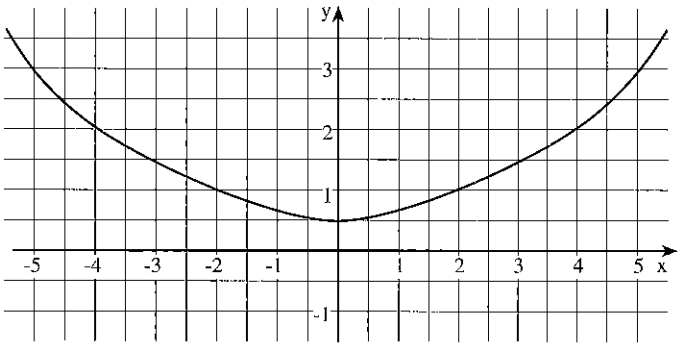


جـ)



وماذا لو كان المجال غير مغلق؟

1. أ) سجلوا وعيّنوا في هيئة المحاور المرسوم فيها الخط البياني للدالة f، النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{f}$.



ب) شددوا النقط المشتركة بين الدالتين f و $\frac{1}{f}$.

جـ) سجلوا وعيّنوا في نفس هيئة المحاور، نقطتين اخريين عن يمين النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{f}$ (استعينوا بنقط الدالة f).

د) النقطتان (6,4) وَ (7,6) تقعان على الخط البياني للدالة f.

(نقطتان خارج هيئة المحاور المرسومة)

سجلوا احداثيات نقطتين ملائمتين للدالة $\frac{1}{f}$.

هـ)(i) الدالة f متماثلة بالنسبة للمحور y.

عيّنوا عن يسار المحور y، نقطاً متماثلة مع تلك التي عينتم في البند (جـ).

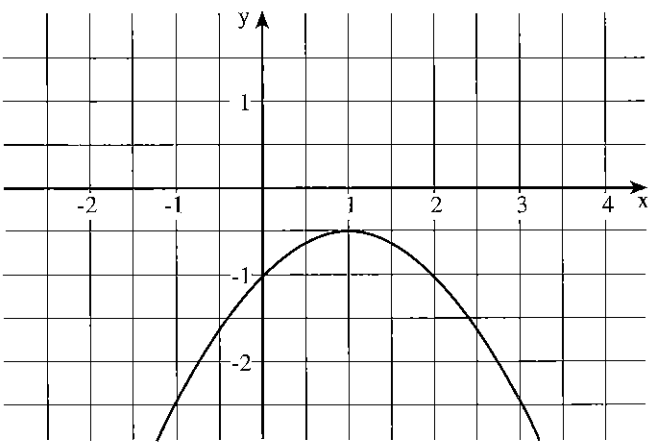
(ii) هل القيم ملائمة للدالة $\frac{1}{f}$ ؟

(iii) حاولوا أن تفسروا، لماذا لكل زوج من النقط المتماثلة للدالة f يكون زوج النقط الملائمة للدالة $\frac{1}{f}$ متماثلة أيضاً.

و) أكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

عندما تكون الدالة f معرّفة لكل x وهي موجبة ومعرّفة لقيم x كبيرة جدا او صغيرة جدا، وتكون بالنسبة لقيم x هذه قيم f كبيرة جدا، فان القيم الملائمة للدالة $\frac{1}{f}$ تكون صغيرة جدا وقريبة من 0 ويكون المحور x خط تقارب لها.

ع.ذ 2. أ) سجلوا وعيّنوا في هيئة المحاور المرسوم فيها الخط البياني للدالة f ، النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{f}$.



ب) شددوا النقط المشتركة بين الدالتين.

جـ) سجلوا وعيّنوا نقطة عن يمين ونقطة اخرى عن يسار النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{f}$.

د) النقطتان (5- ,4) و (5- , 2-) تقعان على الخط البياني للدالة f.

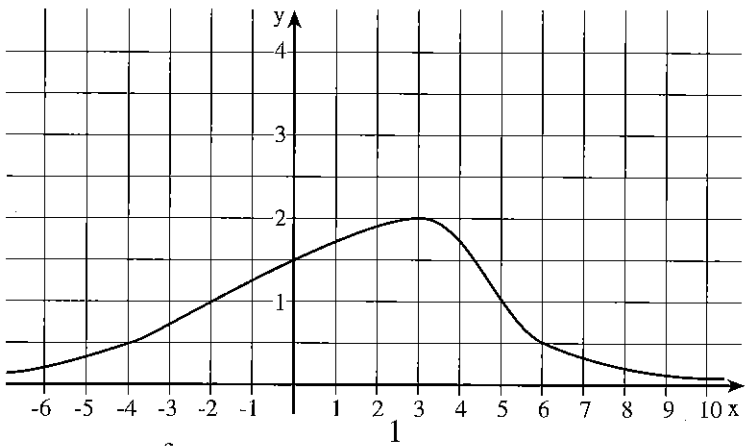
سجلوا احداثيات نقطتين ملائمتين للدالة $\frac{1}{f}$ وعينوهما في هيئة المحاور.

هـ) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

و) فسروا لماذا يكون المحور x خط تقارب للدالة $\frac{1}{f}$.

نبحث ماذا يحدث للدالة $\frac{1}{f}$ عندما يكون المحور x خط تقارب أفقياً للدالة f.

3. الخط البياني المرسوم هو للدالة f بحيث يكون المحور x خط تقارب لها.



أ) ماذا يمكن القول عن قيم الدالة $\frac{1}{f}$ ، الملائمة لقيم الدالة f القريبة من الصفر؟ فسّروا.

ب) سجلوا وعيّنوا في هيئة المحاور المرسوم فيها الخط البياني للدالة f، النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{f}$.

جـ) سجلوا وشددوا النقط المشتركة بين الدالتين.

د) في الجدول مسجل احداثيات نقط تقع على الخط البياني للدالة f.

سجلوا في الجدول، احداثيات النقط الملائمة لها الواقعة على الدالة $\frac{1}{f}$ وعيّنوها في هيئة المحاور.

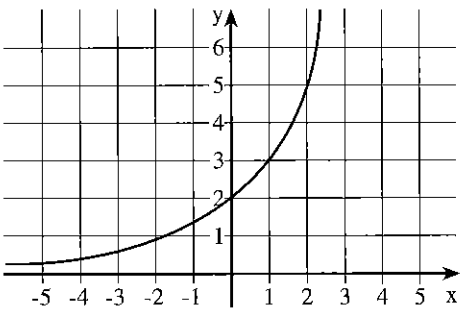
f	$\frac{1}{f}$
$(-6 , \frac{1}{4})$	
$(-3 , \frac{3}{4})$	
$(6 , \frac{1}{2})$	
$(8 , \frac{1}{4})$	

هـ) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

و) صفوا بالكلمات، ماذا يحدث لقيم الدالة $\frac{1}{f}$ عندما تكون قيم x كبيرة أو صغيرة جداً.

ز) سجلوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $\frac{1}{f}$.

ع.ذ 4. المحور x هوخط تقارب للدالة f المرسومة.



أ) النقطتان (5,12) وَ (-5,0.2) تقعان على الخط البياني للدالة f.
اكملوا احداثيات نقط ملائمة للدالة $\frac{1}{f}$.
عيّنوها في نفس هيئة المحاور.

ب) سجلوا وعيّنوا احداثيات نقطة تقاطع الدالة $\frac{1}{f}$ مع المحور y.

جـ) شددوا النقطة المشتركة بين الدالتين.

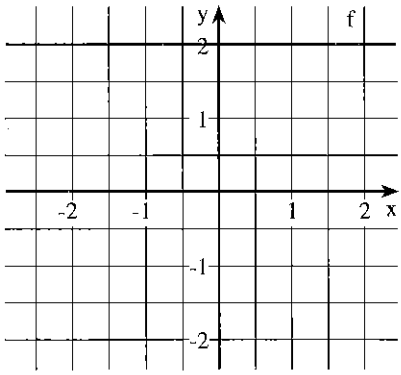
د) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

هـ) هل للدالة $\frac{1}{f}$ يوجد خط تقارب؟ اذا كان نعم- سجلوا معادلته.

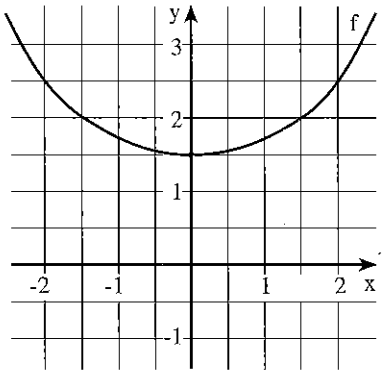
ع.ذ 5. ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ في نفس هيئة المحاور المرسوم فيها

الخط البياني للدالة f

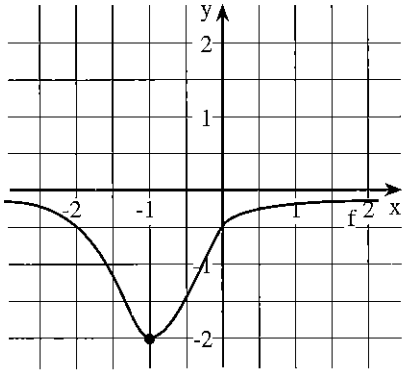
أ)



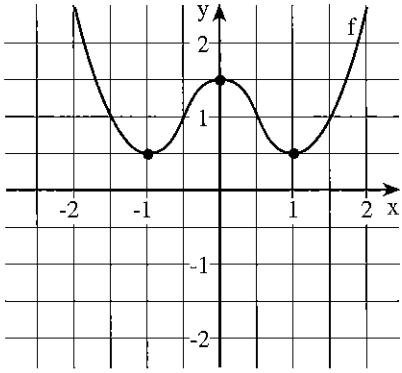
ب)



جـ)

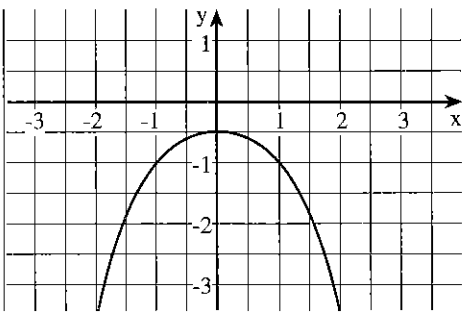


د)



تمارين

6. أ) سجلوا وعيّنوا في هيئة المحاور المرسوم فيها الخط البياني للدالة f، النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{f}$.



ب) شددوا النقط المشتركة بين الدالتين f وَ $\frac{1}{f}$.

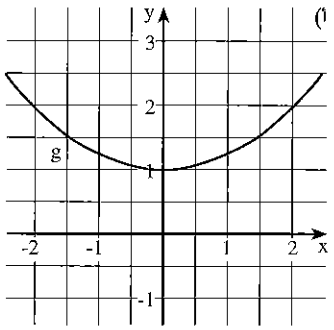
جـ) النقطتان (2,-6) وَ (3,-10) تقعان على الخط البياني للدالة f.
سجلوا وعيّنوا بالتقريب وفي نفس هيئة المحاور، نقطاً ملائمة للدالة $\frac{1}{f}$.

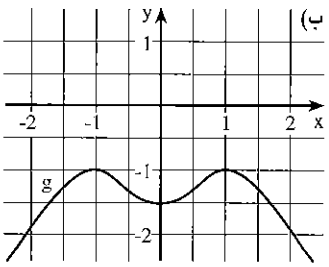
د) الدالة f متماثلة بالنسبة للمحور y. عيّنوا نقطاً متماثلة للدالة $\frac{1}{f}$.
لتلك النقط التي عينتم في البند (جـ)، هل القيم ملائمة للدالة $\frac{1}{f}$.

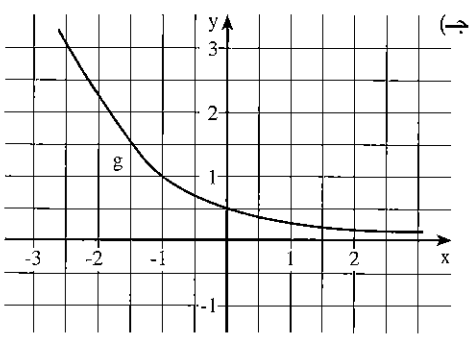
هـ) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

و) النقطة (-5,-30) تقع على الخط البياني للدالة f.
(i) اكملوا احداثيات النقطة الملائمة الواقعة على الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.
(ii) هل للدالة $\frac{1}{f}$ توجد نقط تقاطع مع المحور x؟ اذا كان نعم سجلوا احداثياتها.
(iii) هل للدالة $\frac{1}{f}$ يوجد خط تقارب؟ اذا كان نعم – سجلوا معادلته.

7. في كل هيئة محاور مرسوم الخط البياني للدالة g.







بالنسبة لكل دالة :

أ) سجلوا اذا كان للدالة نقط قصوى. اذا كان نعم- سجلوا نوعها وأي منها نهاية صغرى مطلقة أو عظمى مطلقة.

ب) ارسموا شكلاً تقريبياً للدالة $\frac{1}{g}$ في نفس هيئة المحاور المرسوم فيها الخط البياني للدالة g.

جـ) سجلوا بالنسبة لكل دالة رسمتموها ($\frac{1}{g}$) ، هل لها نقطة نهاية صغرى مطلقة أو عظمى مطلقة. اذا كان نعم- ما نوعها.

د) سجلوا معادلة خط التقارب ان وُجد.

8. أ) ارسموا خطاً بيانياً لدالة f تحقق الخواص الآتية :

(i) f معرّفة لكل x.

(ii) خطها البياني يمر في النقطتين (2,0.5-) وَ (2,0.5)

(iii) قيم الدالة موجبة.

(iv) المحور x هو خط تقارب.

(v) للدالة نقطة قصوى واحدة في x=-1.

(vi) الدالة تصاعدية في المجال x< -1

(vii) الدالة تنازلية في المجال x>-1

ب) سجلوا خواص الدالة $\frac{1}{f}$ ذات الصلة بالخواص المسلجة في البنود (i) حتى (vii)

جـ) سجلوا وعيّنوا في نفس هيئة المحاور، نقط الدالة $\frac{1}{f}$ الملائمة لتلك التي عينتموها في البند (أ i).

شددوا النقط المشتركة بين الدالتين f وَ $\frac{1}{f}$.

أكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ حسب الخواص التي سجلتم.

وماذا لو قطع الخط البياني المحور x؟

تعاملنا حتى الآن، مع خط بياني كله فوق المحور x، أو كله تحت المحور x.
في هذا البند سنفحص ماذا يحدث للخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ عندما توجد للدالة f نقط تقاطع مع المحور x. وسنقوم برسم $\frac{1}{f}$ في هيئة محاور منفردة.

1. في الصفحة الى اليسار، تجدون الخط البياني للدالة f المعرّفة في القطعة المغلقة $-1 \leq x \leq 6$

أ) سجلوا نقطتي الطرفين لكل واحدة من الدالتين f وَ $\frac{1}{f}$

عيّنوا نقطتي الطرفين للدالة $\frac{1}{f}$ في هيئة المحاور الفارغة في اسفل الصفحة الى اليسار.

ب) (I) سجلوا احداثيات نقطة تقاطع الدالة f مع المحور x.

(II) ماذا يحدث للدالة $\frac{1}{f}$ في النقطة الملائمة للنقطة التي سجلتموها؟

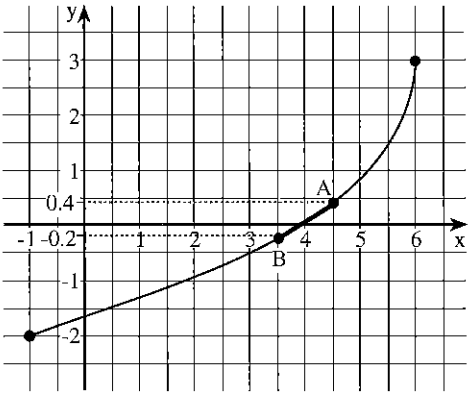
جـ) – سجلوا في جدول، احداثيات النقطتين A وَ B الملائمتين للدالة f وللدالة $\frac{1}{f}$ أيضاً.

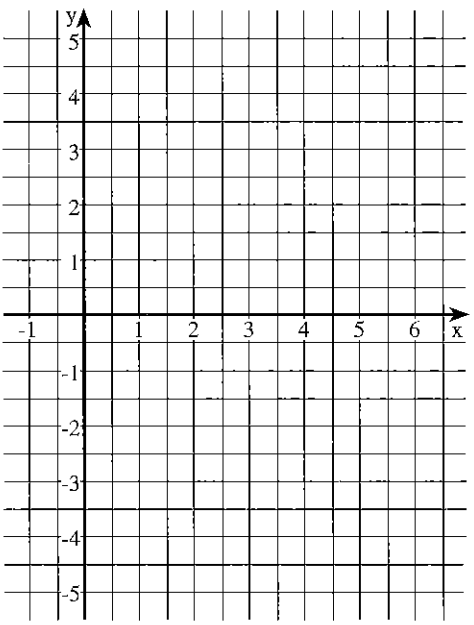
– عينوا هاتين النقطتين بالتقريب، في هيئة المحاور في أسفل الصفحة الى اليسار.

– في الجدول 3 نقط اخرى في جوار نقطة التقاطع مع المحور x.

اكملوا النقط الملائمة للدالة $\frac{1}{f}$ وعيّنوها (ان امكن)، في هيئة المحاور في أسفل الصفحة الى اليسار.

	f	$\frac{1}{f}$
B:		
	(3.8, -0.1)	
	(4,1, 0.1)	
	(4.2, 0.2)	
A:		





- ماذا يحدث للدالة $\frac{1}{f}$ «قليلا قبل» (عن يسار) نقطة تقاطع الدالة f مع المحور x؟
- ماذا يحدث للدالة $\frac{1}{f}$ «قليلا بعد» (عن يمين) نقطة تقاطع الدالة f مع المحور x؟
- ارسموا خط تقارب مناسباً.

د) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ عن يمين وعن يسار خط التقارب.

لقد رأينا ان الدالة $\frac{1}{f}$ ليست معرفة في نقطة تقاطع الدالة f مع المحور x.

لقيمة x هذه يوجد للدالة $\frac{1}{f}$ خط تقارب موازٍ للمحور y.

ع.ذ

2. في الصفحة الى اليسار، تجدون الخط البياني للدالة g المعرّفة في القطعة المغلقة $-2 \leq x \leq 4$

أ) (i) سجلوا نقطة تقاطع الدالة g مع المحور x.

(ii) ماذا يحدث للدالة $\frac{1}{g}$ في النقطة الملائمة؟

(iii) ارسموا في هيئة المحاور الفارغة في اسفل الصفحة الى اليسار، خط تقارب مناسبا يوازي المحور y. سجلوا معادلته.

ب) في الجدول، تجدون احداثيات نقط على الخط البياني للدالة g.

سجلوا في الجدول، النقط الملائمة للدالة $\frac{1}{g}$ وعينوها في هيئة المحاور في أسفل الصفحة الى اليسار.

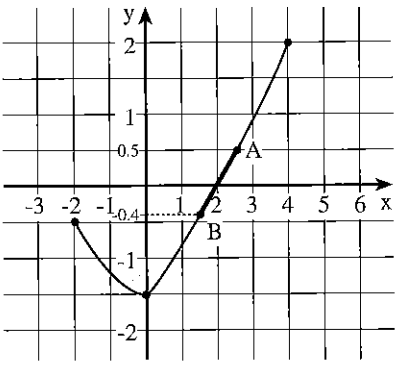
g	$\frac{1}{g}$
B:	
(1.8, -0.25)	
(1.9, -0.2)	
(2.1, 0.2)	
(2.2, 0.4)	
A:	

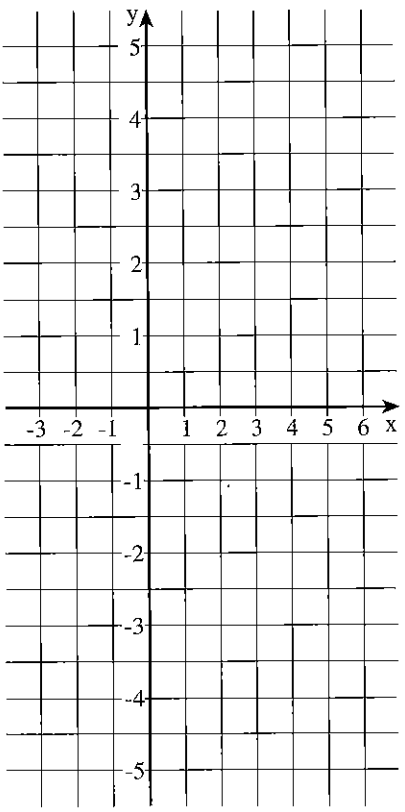
جـ) سجلوا النقط القصوى للدالة g (يشمل طرفي المجال)

احسبوا النقط القصوى الملائمة للدالة $\frac{1}{g}$.

بيّنوا من أي نوع هي، وعينوها في هيئة المحاور في اسفل الصفحة الى اليسار.

د) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{g}$.


y
2
1
0.5
A
-3 -2 -1 -0.4 1 2 3 4 5 6 x
B
-1
-2


y
5
4
3
2
1
-3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 x
-1
-2
-3
-4
-5

3. في الصفحة الى اليسار، تجدون الخط البياني للدالة f.

أ) في أية قيمة لِ x تكون الدالة $\frac{1}{f}$ غير معرفة؟ ارسموا خطاً فاصلاً في هيئة المحاور في اسفل الصفحة الى اليسار.

ب) سجلوا النقط الملائمة للنقط المشددة وعيّنوها في هيئة المحاور في أسفل الصفحة الى اليسار.

في هذا التمرين ، سنستعين بخواص الدالة كي نرسم الخط البياني عن يمين وعن يسار خط التقارب الموازي للمحور y.

جـ) هل الدالة $\frac{1}{f}$ تصاعدية أم تنازلية عن يسار الخط الفاصل؟

هل هي موجبة أم سالبة عن يسار الخط الفاصل؟

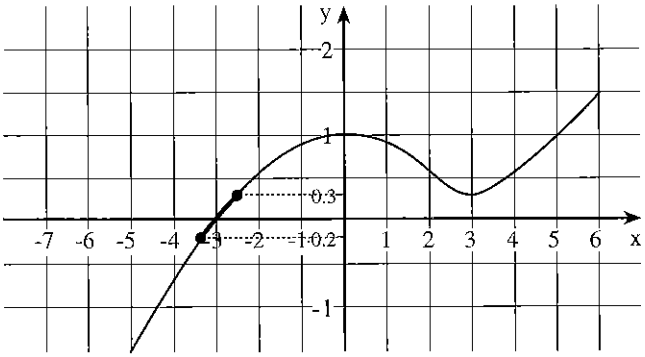
اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ عن يسار الخط الفاصل.

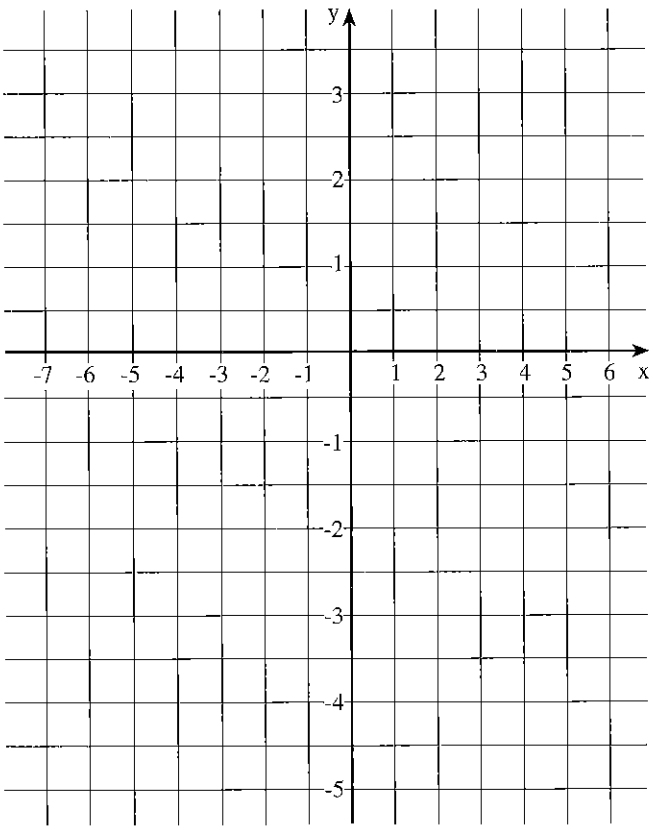
د) سجلوا النقط القصوى للدالة f.

احسبوا وسجلوا وعينوا النقط القصوى للدالة $\frac{1}{f}$ ثم بينوا من أي نوع هي.

هـ) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ عن يمين خط التقارب.

يمكنكم الاستعانة بنقط أخرى (انتبهوا للخط البياني في جانب خط التقارب).


y
2
1
0.3
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -0.2 1 2 3 4 5 6 x
-1


y
3
2
1
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 x
-1
-2
-3
-4
-5

ع.ذ 4. في الصفحة الى اليسار، تجدون الخط البياني للدالة h.

أ) في أية قيمة لِ x تكون الدالة $\frac{1}{h}$ غير معرفة؟ ارسموا خطوطاً فاصلة في هيئة المحاور الفارغة في أسفل الصفحة الى اليسار.

ب) سجلوا احداثيات نقط الدالة $\frac{1}{h}$ الملائمة للنقط المشددة وعينوها في هيئة المحاور في أسفل الصفحة الى اليسار.

جـ) (i) هل الدالة $\frac{1}{h}$ تصاعدية أم تنازلية عن يسار $x = -2$ ؟

(ii) هل الدالة $\frac{1}{h}$ موجبة أم سالبة عن يسار $x = -2$ ؟

(iii) اكملوا رسم الخط البياني عن يسار $x = -2$.

د) (i) هل الدالة $\frac{1}{h}$ تصاعدية أم تنازلية عن يمين $x = 3$؟

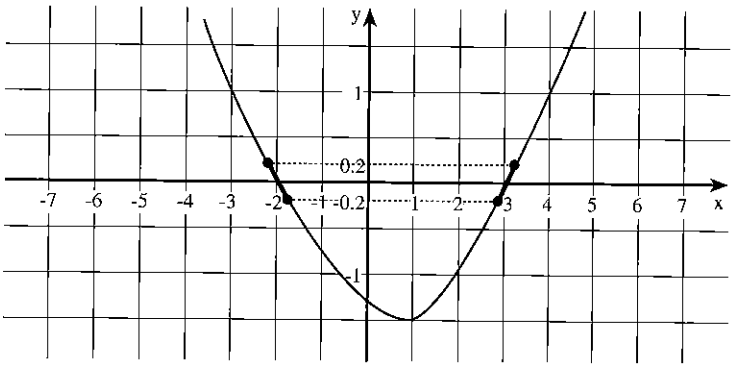
(ii) هل الدالة $\frac{1}{h}$ موجبة أم سالبة عن يمين $x = 3$؟

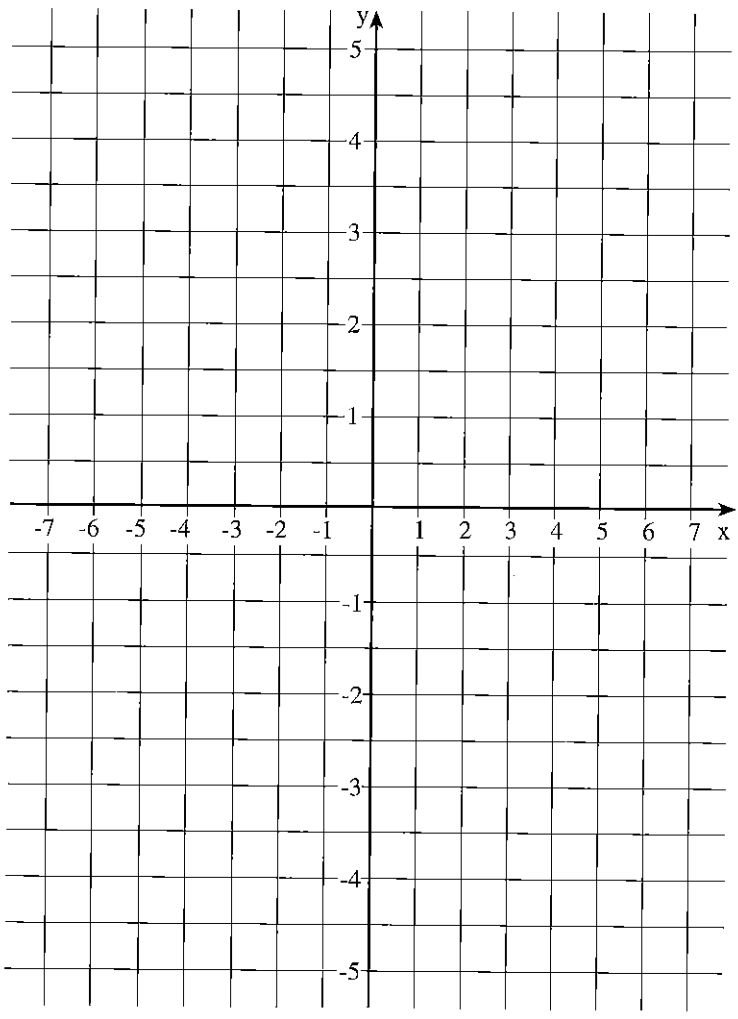
(iii) اكملوا رسم الخط البياني عن يمين $x = 3$.

هـ) سجلوا وعينوا النقط القصوى للدالة $\frac{1}{h}$ ثم بينوا من أي نوع هي.

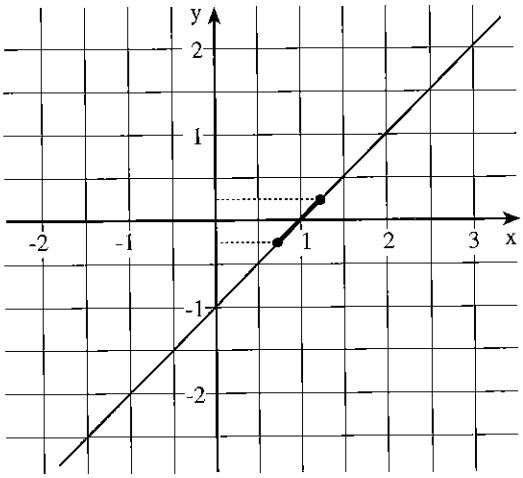
و) سجلوا وعينوا احداثيات النقط المشتركة بين الدالتين h وَ$\frac{1}{h}$.

ز) اكملوا رسم الخط البياني بين خطي التقارب الموازيين للمحور y.


y
1
0.2
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0.2 1 2 3 4 5 6 7 x
-1

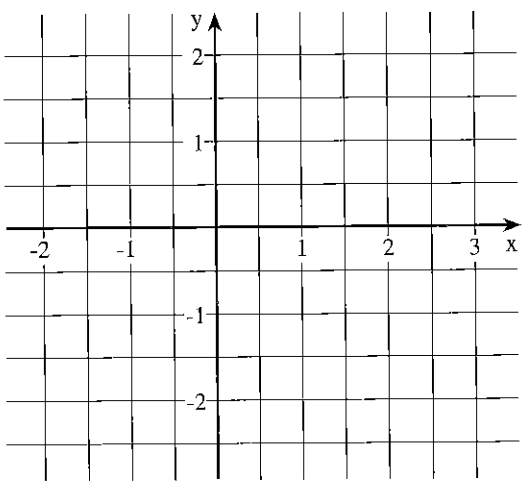

y
5
4
3
2
1
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 x
-1
-2
-3
-4
-5

ع.ذ 5. أمامكم الخط البياني للدالة g.



أ) في أية قيمة لِ x تكون الدالة $\frac{1}{g}$ غير معرفة؟

ارسموا خطاً فاصلاً في هيئة المحاور الفارغة.

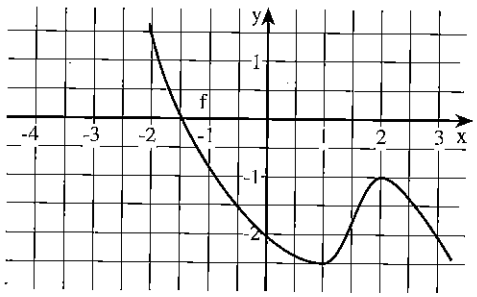


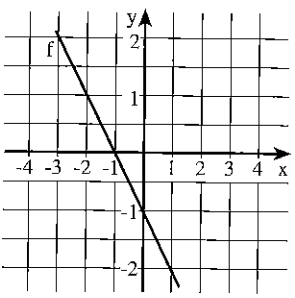
ب) (i) سجلوا احداثيات نقط الدالة $\frac{1}{g}$ الملائمة للنقط المشددة.

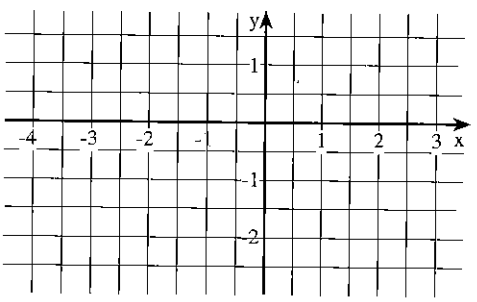
(ii) سجلوا وعينوا النقط المشتركة بين الدالتين g و $\frac{1}{g}$.

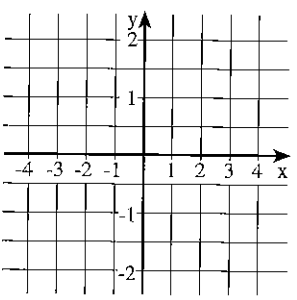
جـ) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{g}$.

ع.ذ 6. اعتماداً على الخط البياني للدالة f، ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ في هيئة المحاور الفارغة تحته.









تمارين

7. في الصفحة التالية ، تجدون الخط البياني للدالة g.

أ) في أية قيمة لِ x تكون الدالة $\frac{1}{g}$ غير معرفة؟

ارسموا خطاً فاصلاً في هيئة المحاور الفارغة.

ب) سجلوا احداثيات نقط الدالة $\frac{1}{g}$ الملائمة للنقط المشددة (على الخط البياني للدالة g) . عينوا هذه النقط بالتقريب، في هيئة المحاور في أسفل الصفحة الى اليسار.

جـ) هل الدالة $\frac{1}{g}$ تصاعدية أم تنازلية عن يسار الخط الفاصل؟

هل هي موجبة أم سالبة عن يسار الخط الفاصل؟

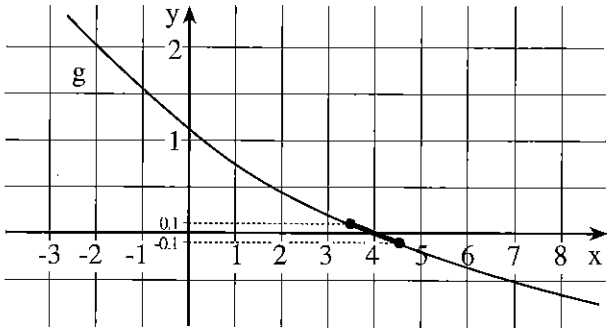
اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{g}$ عن يسار الخط الفاصل.

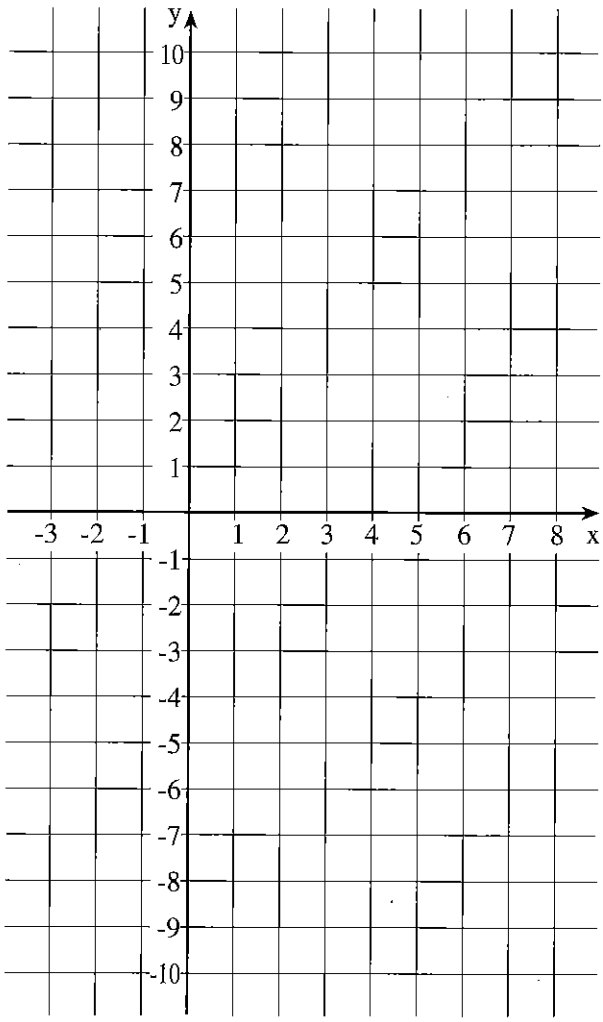
(انتبهوا، الخط الفاصل هو خط تقارب).

د) هل الدالة $\frac{1}{g}$ تصاعدية أم تنازلية عن يمين الخط الفاصل؟

هل هي موجبة أم سالبة عن يمين الخط الفاصل؟

اكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{g}$ عن يمين الخط الفاصل.


y
2
g
1
0,1
-0,1
-3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 x


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 x
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10

8. في الصفحة التالية ، تجدون الخط البياني للدالة h.

أ) سجلوا احداثيات نقطة تقاطع الخط البياني للدالة h مع المحور x.

ب) في أية قيمة لِ x تكون الدالة $\frac{1}{h}$ غير معرفة؟

ارسموا خطوطاً فاصلة في هيئة المحاور الفارغة.

جـ) (i) سجلوا وعينوا النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{h}$ ثم بينوا من أي نوع هي.

(ii) أكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني بين الخطين الفاصلين.

د) (i) احسبوا احداثيات نقط عن يسار خط التقارب الايسر.

(ii) هل الدالة $\frac{1}{h}$ تصاعدية أم تنازلية عن يسارخط التقارب الأيسر؟

(iii) هل هي موجبة أم سالبة في هذا المجال؟

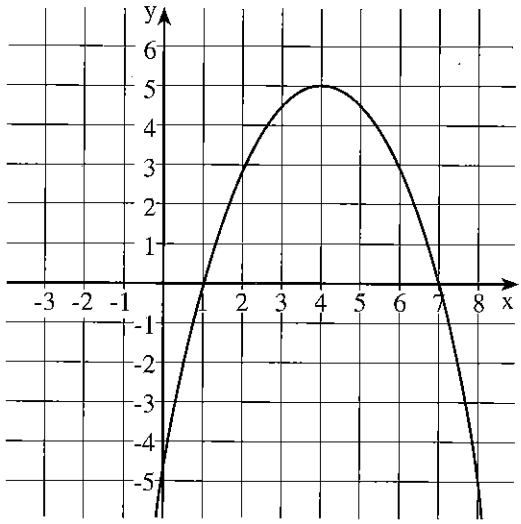
(iv) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني في هذا المجال.

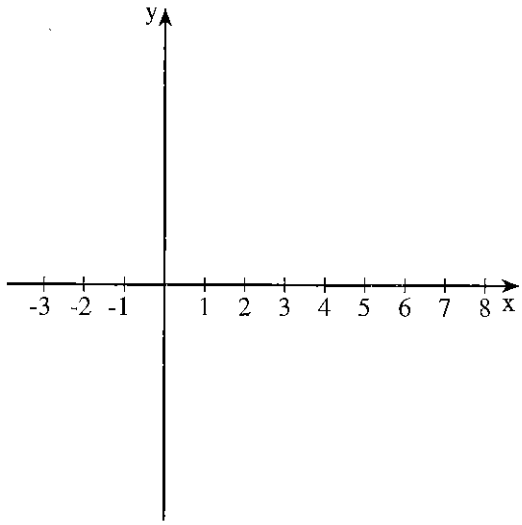
هـ) (i) احسبوا احدائيات نقط عن يمين خط التقارب الايمن.

(ii) هل الدالة $\frac{1}{h}$ تصاعدية أم تنازلية عن يمين خط التقارب الأيمن؟

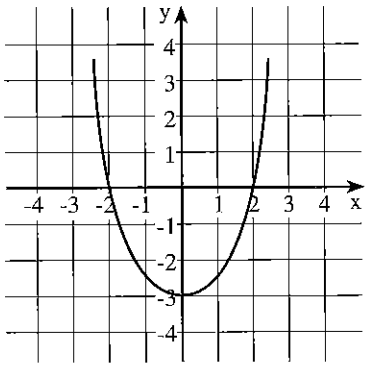
(iii) هل هي موجبة أم سالبة في هذا المجال؟

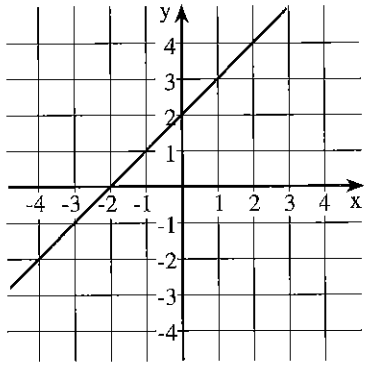
(iv) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني في هذا المجال.

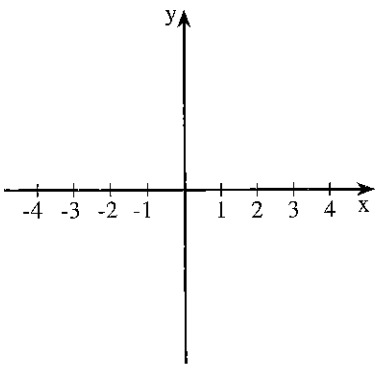

y
6
5
4
3
2
1
-3 -2 -1
1 2 3 4 5 6 7 8 x
-1
-2
-3
-4
-5

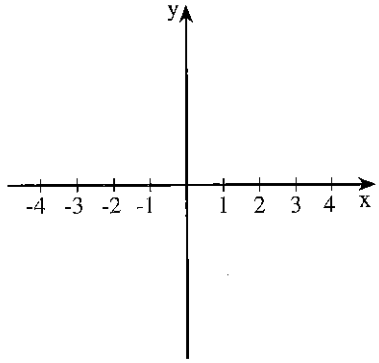

y
-3 -2 -1
1 2 3 4 5 6 7 8 x

9. اعتماداً على الخط البياني للدالة g، ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{g}$ في هيئة المحاور الفارغة.









رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ اذا علم قانون f

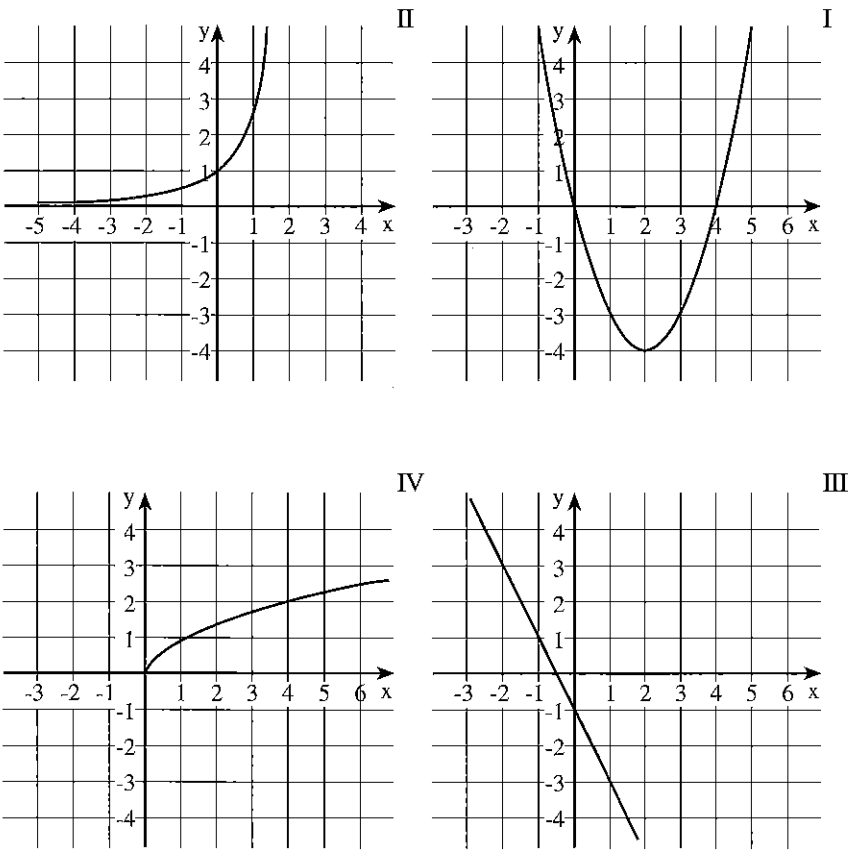
في هذا البند، سنرسم الخط البياني للدالة f اذا علم قانونها الامر الذي يساعدنا في رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

ع.ذ

1. لائموا قانوناً لكل خط بياني

أ) $y = e^x$ جـ. $y = \sqrt{x}$

ب) $y = -2x - 1$ د. $y = x^2 - 4x$



اذا كنتم لا تنفذون فعالية الحاسوب، انتقلوا الى صفحة 128.

فعالية حاسوب (التمارين 2-7) بمساعدة البرمجية מתמטי x.

2. أ) ارسموا الدالة $f(x) = x^2+2$ والدالة $\frac{1}{f}$.

سجلوا القانون $f(x) = x^2+2$ واضغطوا على F2 للرسم.

سجلوا $1/f(x)$ واضغطوا على F2 للرسم.

ب) لخّصوا خواص الدالتين.

(i) سجلوا النقطة القصوى وبينوا نوعها،

للدالة f:

للدالة $\frac{1}{f}$:

(ii) سجلوا في الجدول لكل مجال، اذا كانت الدالة تصاعدية أو تنازلية.

المجال	f	$\frac{1}{f}$
$x > 0$		
$x < 0$		

(iii) هل الدالة f موجبة أم سالبة؟

هل الدالة $\frac{1}{f}$ موجبة أم سالبة؟

جـ) غيروا التدريجات بحيث تظهر الدالة $\frac{1}{f}$ فقط على العارض.

امشوا على الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ من $x=0$ بالاتجاه الموجب للمحور x وصفوا ماذا يحدث لقيم الدالة $\frac{1}{f}$.

اضغطوا ALT (معاً) وغيروا التدريجات. اضغطو F10 لتنفيذ التغيير.

اضغطوا F7.

3. أ) ارسموا في الحاسوب، الخطين البيانين للدالتين $g(x)= x^2+4x+4$ و $\frac{1}{g}$ (في الحاسوب نسجل $1/g(x)$.)

ب) لماذا يوجد للدالة $\frac{1}{g}$ خط تقارب عمودي؟

جـ) لماذا يوجد للدالة $\frac{1}{g}$ خط تقارب أفقي؟

د) لخّصوا خواص الدالتين في الجدول.

	g	$\frac{1}{g}$
نقطة قصوى		
مجال التصاعد		
مجال التنازل		
نقطة التقاطع مع المحور y		
نقطة التقاطع مع المحور x		
معادلة خط التقارب العمودي		
معادلة خط التقارب الأفقي		

هـ) سجلوا النقط المشتركة بين الدالتين وفسروا لماذا تكون هي النقط المشتركة الوحيدة.

4. أ) ارسموا في الحاسوب، الخطين البيانيين للدالتين $h(x) = 2x - 5$ وَ $\frac{1}{h}$ (في الحاسوب نسجل $1/h(x)$.)

ب) سجلوا النقط المشتركة بين الدالتين

جـ) لخّصوا خواص الدالتين

	h	$\frac{1}{h}$
نقطة التقاطع مع المحور x		
معادلة خط التقارب العمودي		
مجال التصاعد		
مجال التنازل		

5. ارسموا في الحاسوب، الخطين البيانيين للدالتين $f(x) = x^2 - x - 2$ و $\frac{1}{f}$.

أ) سجلوا نقط تقاطع الدالة f مع المحور x.

ماذا يحدث للدالة $\frac{1}{f}$ في هذه النقط؟ كيف يظهر هذا في الرسم البياني؟ فسروا.

ب) سجلوا مجالات تكون فيها الدالة f موجبة.

ماذا يمكنكم أن تقولوا عن الدالة $\frac{1}{f}$ في المجالات؟ فسّروا.

سجلوا مجالاً تكون فيه f سالبة.

ماذا يمكنكم أن تقولوا عن الدالة $\frac{1}{f}$ في هذا المجال؟ فسّروا

جـ) ما هو المشترك للنقطة القصوى للدالتين f و $\frac{1}{f}$؟

بماذا تختلفان؟

د) (i) سجلوا مجالاً تكون فيه الدالة f تصاعدية.

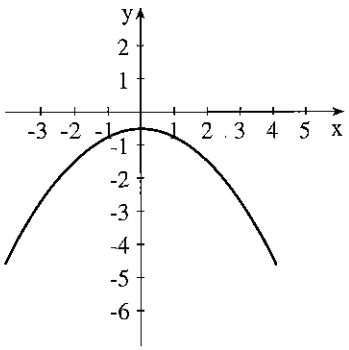
هل الدالة $\frac{1}{f}$ تصاعدية أم تنازلية في هذا المجال؟

(ii) سجلوا مجالاً تكون فيه الدالة $\frac{1}{f}$ تنازلية.

هل الدالة $\frac{1}{f}$ تصاعدية أم تنازلية في هذا المجال؟

هـ) امشوا على أحد الخطين البيانيين وسجلوا النقط المشتركة للدالتين.
فسروا لماذا فقط، النقط التي تحقق $f(x) = 1$ أو $f(x) = -1$
يمكن أن تكون مشتركة بين الدالتين.

6. أمامكم الخط البياني للدالة f.



أ) اكملوا جدول الدالة $\frac{1}{f}$.

	$\frac{1}{f}$
نقطة قصوى	
مجال التصاعد	
مجال التنازل	
معادلة خط التقارب الافقي	

ب) ارسموا $\frac{1}{f}$ في نفس هيئة المحاور.

جـ) معطى أن $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}$ ارسموا في الحاسوب f وَ $\frac{1}{f}$.

د) افحصوا هل الخط البياني المرسوم على العارض، للدالة $\frac{1}{f}$ يشبه الخط البياني الذي رسمتموه في البند (ب).

هـ) سجلوا الاحداثي y لنقط تقاطع الخطين البيانيين (يمكنكم السير على الخطين البيانيين)

7. في الصفحة الى اليسار، تجدون الخط البياني للدالة f.

أ) أكملوا جدول الدالة $\frac{1}{f}$.

	$\frac{1}{f}$
نقطة قصوى	
مجال التصاعد مجال التنازل	
نقطة التقاطع مع المحور y	
نقطة التقاطع مع المحور x	
معادلات خطوط التقارب العمودية	
معادلة خط التقارب الافقي	

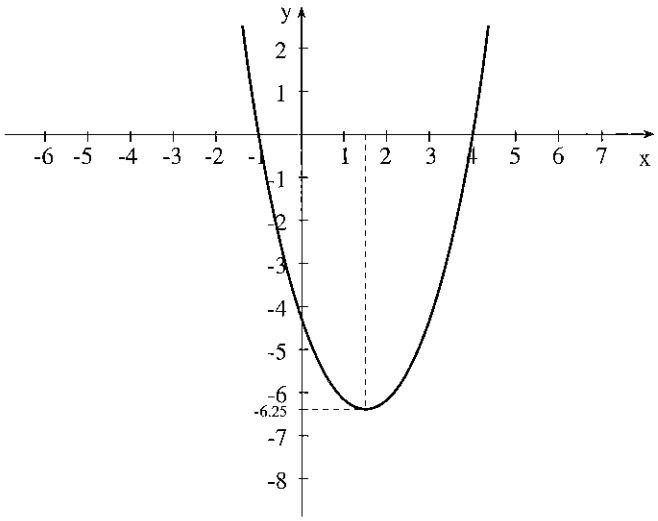
ب) في هيئة المحاور الفارغة، ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ حسب الخواص التي سجلتم.

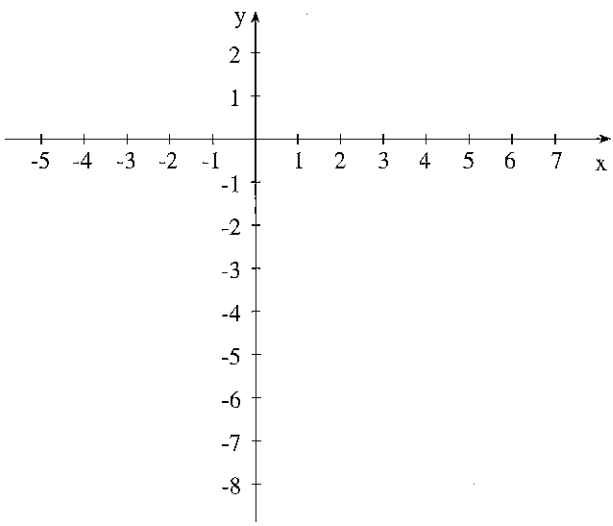
جـ) معطى أيضاً أن : $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

ارسموا في الحاسوب ، الخطين البيانيين للدالتين f وَ $\frac{1}{f}$.

افحصوا هل الخط البياني الذي رسمتموه في البند (ب)، يشبه هذا المرسوم على العارض.

د) سجلوا النقط المشتركة بين الخطين البيانيين.

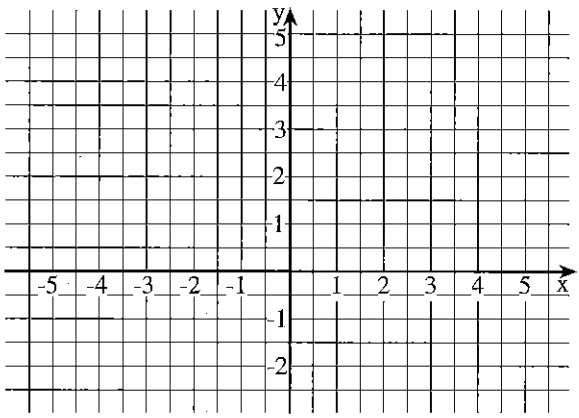

y
x
-6.25


y
x

تُنفذ التمارين الآتية بدون الحاسوب

8. ما هو شكل الخط البياني للدالة $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$

أ) جدوا النقطة القصوى للدالة f وعيّنوها في هيئة المحاور.



ب) أكملوا عمود الدالة f في الجدول وعينوا النقط في هيئة المحاور، ثم أكملوا رسم الخط البياني للدالة f.

$\frac{1}{f}$	f
	(-2,)
	(-1,)
	(1,)
	(2,)

جـ) سجلوا النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{f}$ وعينوها (بلون آخر) في نفس هيئة المحاور.

د) سجلوا في الجدول، نقطاً ملائمة للدالة $\frac{1}{f}$ وعينوها في هيئة المحاور، ثم أكملوا رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ (باللون الذي اخترتموه).

هـ) (i) هل يمكن أن يكون للدالة $\frac{1}{f}$ نقطة تقاطع مع المحور x؟ فسروا.

(ii) هل يوجد للدالة $\frac{1}{f}$ خط تقارب؟ فسروا.

(iii) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$ وأحسبوا قيم الدالة في

$x = -10$ و $x = 10$

و) سجلوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $\frac{1}{f}$.

م 9. ارسموا خطاً بيانياً لكل واحدة من الدوال الآتية، حسب المراحل المسجلة بين القوسين أدناه.

(i) $y = x^2 - 2x - 3$

(ii) $y = -x^2 - x + 6$

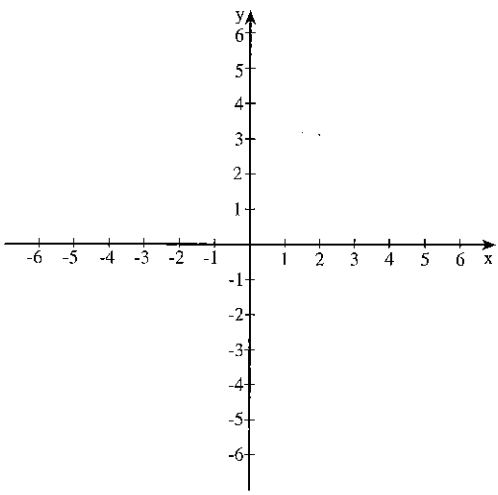
(iii) $y = (x - 2)^2$

(iv) $y = 2x^2 - 6x + 5$

(احسبوا نقط التقاطع مع المحورين إن وجدت، واحسبوا رأس القطع المكافىء واذا لزم الامر، احسبوا نقطاً اخرى).

في التمارين السابقة، عندما كان للدالة $\frac{1}{f}$ خطوط تقارب موازية للمحور y، رسمنا الدالة $\frac{1}{f}$ في هيئة محاور منفردة. فيما يتبع ارسموا حسب رغبتكم، في هيئة محاور منفردة أو في نفس هيئة المحاور بلون آخر.

ع.ذ 10. أ) أرسموا الخط البياني للدالة $f(x) = x^2 - 2x - 3$.



ب) في أية قيم لِ x، تكون الدالة $\frac{1}{f}$ غير معرفة؟

ارسموا خطوطاً فاصلة، في نفس هيئة المحاور أو في هيئة محاور منفردة.

جـ) (i) سجلوا وعينوا النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{f}$.

(ii) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة بين خطي التقارب.

د) (i) هل الدالة $\frac{1}{f}$ موجبة أم سالبة عن يمين خط التقارب $x = 3$؟

(ii) هل هي تصاعدية أم تنازلية في هذا المجال؟

(iii) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة عن يمين خط التقارب $x=3$.

هـ) ارسموا شكلا تقريبياً للخط البياني للدالة عن يسار خط التقارب $x=-1$.

و) (i) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$.

(ii) احسبوا قيم الدالة $\frac{1}{f}$ في $x = -6$ وَ $x = 6$

افحصوا هل النقط تقع تقريباً، على الخط البياني.

ز) كم نقطة مشتركة للخطين البيانيين؟ سجلوا الاحداثي y لها.

ع.ذ 11. أ) أرسموا الخط البياني للدالة $f(x)= x^2+ 6x + 9$.

ب) في أية قيمة لِ x ، تكون الدالة $\frac{1}{f}$ غير معرفة ؟ (ارسموا خطاً فاصلاً).

جـ) (i) هل الدالة $\frac{1}{f}$ تصاعدية أم تنازلية عن يمين الخط الفاصل؟

(ii) هل هي موجبة أم سالبة؟

(iii) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة عن يمين الخط الفاصل.

د) اكملوا رسماً تقريبياً للخط البياني للدالة عن يسار الخط الفاصل.

هـ)سجلوا معادلات خطوط التقارب للدالة $\frac{1}{f}$.

و) كم نقطة مشتركة يوجد للخطين البيانيين؟
سجلوا الاحداثي y لها.

ز) (i) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$.

(ii) احسبوا قيم الدالة $\frac{1}{f}$ في $x = -7$ وَ $x = 4$ افحصوا هل النقط تقع تقريباً، على الخط البياني.

ع.ذ 12. أ) ارسموا المستقيم $f(x) = 2x + 4$

ب) في أية قيمة لِ x، تكون الدالة $\frac{1}{f}$ غير معرفة؟ (ارسموا خطاً فاصلاً).

جـ) (i) لخصوا خواص الدالة $\frac{1}{f}$ عن يسار الخط الفاصل. (أهتموا بالتصاعد والتنازل، بالايجابية والسلبية).

(ii) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة عن يسار الخط الفاصل.

(يمكنكم الاستعانة بنقط أخرى على الخطين البيانيين f وَ $\frac{1}{f}$).

د) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة عن يمين الخط الفاصل.

هـ) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$.

و) هل الدالة $\frac{1}{f}$ خطية؟ فسروا.

13. أ) ارسمو الخط البياني للدالة $f(x) = x$ (اختاروا وحدة تساوي تربيعتين).

ب) على الخط البياني الذي رسمتم، شدّدوا نقطتين تقعان أيضاً على الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

جـ) في أية قيمة لـ x تكون الدالة $\frac{1}{f}$ غير معرّفة؟

د) (i) سجلوا خواص الدالة $\frac{1}{f}$ عن يسار المحور y.

(اهتموا بالتصاعد والتنازل، بالايجابية والسلبية).

(ii) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة عن يسار المحور y.
(يمكنكم الاستعانة بنقط أخرى)

هـ) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة عن يمين المحور y.

و) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$.

14. أ) ارسموا الخط البياني للدالة $f(x) = x^2$

ب) على الخط البياني الذي رسمتم، شددوا نقطتين تقعان أيضاً على الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

جـ) في أية قيمة لـ x تكون الدالة $\frac{1}{f}$ غير معرفة؟

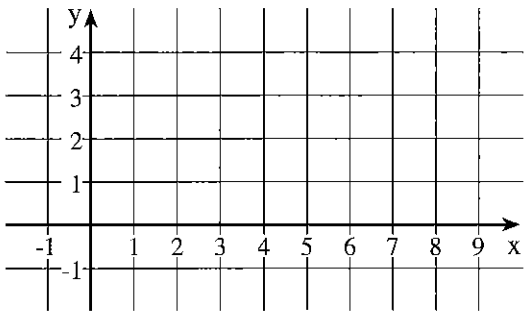
د) (i) هل توجد قيم سالبة للدالة $\frac{1}{f}$ ؟ عللوا.

(ii) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

هـ) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$.

15. أ) اكملوا احداثيات النقط الواقعة على الخط البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وعينوها في هيئة المحاور، ثم أكملوا الخط البياني.

$(4, \ ), (3, \ ), (1, \ ), (0.64 \ ), (0.04, \ ), (0, \ )$



ب) صفوا الدالة f. (أهتموا بمجال التعريف، تصاعد / تنازل، نقط تقاطع مع المحورين، إيجابية / سلبية)

جـ) (i) للنقط المسجلة في البند (أ)، احسبوا نقطاً ملائمة للدالة $\frac{1}{f}$.

(ii) عينوا هذه النقط في هيئة المحاور وأكملوا رسم الخط البياني للدالة.

د) صفوا بالكلمات خواص الدالة $\frac{1}{f}$ (أهتموا بمجال التعريف، تصاعد / تنازل، نقط تقاطع مع المحورين، ايجابية / سلبية، خطوط تقارب).

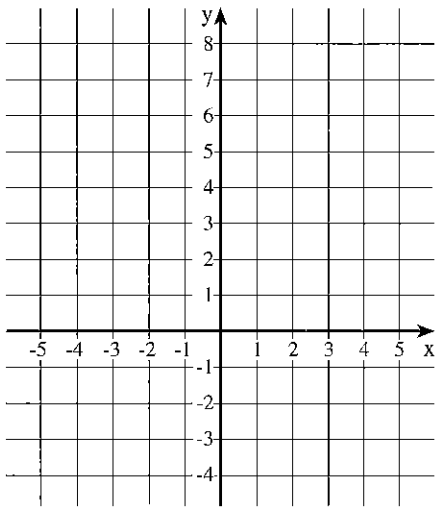
هـ) (i) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$.

(ii) احسبوا قيم الدالة $\frac{1}{f}$ في $x=0.09 \ , \ x=9$

افحصوا هل النقط تقع تقريباً، على الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ التي رسمتم.

16. أ) أكملوا احداثيات النقط الواقعة على الخط البياني للدالة $f(x) = e^x$
ثم ارسموا الخط البياني.

(2,) , (1,) , (0,) , (-2,) , (-5,)



ب) صفوا الدالة f (أهتموا بالتصاعد/ تنازل، نقط قصوى، نقط تقاطع مع المحورين، خطوط تقارب).

جـ) (i) سجلوا خواص الدالة $\frac{1}{f}$ ، أعتماداً على خواص الدالة f.

(آهتموا بالتصاعد/ تنازل، ايجابية/ سلبية، نقط قصوى، نقط تقاطع مع المحورين، خطوط تقارب).

(ii) ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ حسب الخواص التي سجلتم.

د) (i) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$.

(ii) احسبوا قيم الدالة في $x = 5$, $x = 0$, $x = -2$

افحصوا هل النقط تقع تقريباً على الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ التي رسمتم.

ع.ذ 17. أ) ارسموا شكلاً تقريبياً للدالة f التي تحقق الخواص الآتية :

- تقطع المحور y في $y = -4$
- تقطع المحور x في $x = 2$
- تصاعدية حتى $x = 2$ $(x < 2)$
- تنازلية من $x = 2$ $(x > 2)$
- للدالة نقطة قصوى في $x = 2$

ب) سجلوا خواص الدالة $\frac{1}{f}$ ، أهتموا بالأمور الآتية :

- نقطة التقاطع مع المحور y.
- ماذا يحدث عندما $x = 2$؟
- هل الدالة تصاعدية / تنازلية عندما $x < 2$؟

جـ) ارسموا شكلاً تقريبياً للدالة $\frac{1}{f}$ حسب الخواص التي سجلتم.

ع.ذ 18. ارسموا الخط البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ (من أجل ذلك، ارسموا أولاً الدالة $f(x) = x^2 + 1$ واستعينوا بخطها البياني لرسم الخط البياني للدالة g).

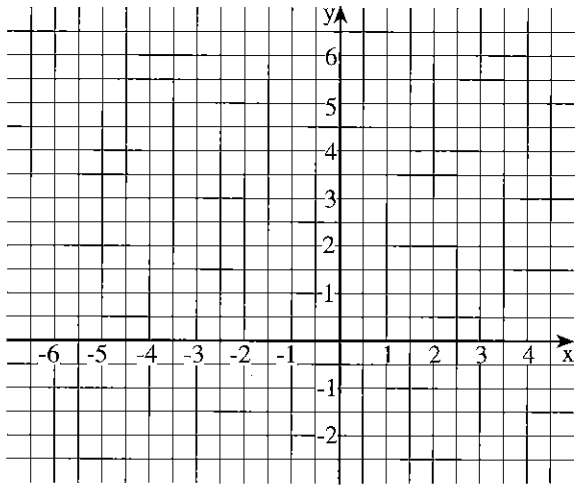
ع.ذ 19. ارسموا الخط البياني للدالة $h(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$ (من أجل ذلك، ارسموا اولاً الدالة $f(x) = x^2 - 4x + 4$ واستعينوا بخطها البياني لرسم الخط البياني للدالة h).

ع.ذ 20. ارسموا الخط البياني للدالة $m(x) = \frac{1}{3x - 6}$ (من أجل ذلك، ارسموا اولاً المستقيم $f(x) = 3x - 6$ واستعينوا بخطه البياني لرسم الخط البياني للدالة m).

تمارين

21. معطاة الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

أ) ارسموا الخط البياني للدالة (جدوا أولاً، نقطة قصوى، نقط تقاطع مع المحورين ونقطاً أخرى)



ب) سجلوا خواص الدالة $\frac{1}{f}$ (أهتموا بالنقطة القصوى، تصاعد / تنازل، ايجابية / سلبية).

جـ) ارسموا بلون مختلف (أو في هيئة محاور منفردة)، الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ (يمكنكم الاستعانة بالنقط).

د) (i) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$.

(ii) احسبوا قيم الدالة في $x = 4$ وَ $x = -6$ افحصوا هل النقط تقع تقريباً على الخط البياني.

هـ) ماذا يحدث لقيم الدالة $\frac{1}{f}$ في قيم لِ x كبيرة جداً؟

22. أ) ارسموا الخط البياني للدالة $f(x) = -x^2$

ب) على الخط البياني الذي رسمتم، عيّنوا نقطتين تقعان أيضاً على الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

جـ) في أية قيمة لِ x، تكون الدالة $\frac{1}{f}$ غير معرفة؟ (ارسموا خطاً فاصلاً).

د) هل يوجد قيم موجبة للدالة $\frac{1}{f}$؟ عللوا.

عينوا نقطاً أخرى وأكملوا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

هـ) سجلوا قانون تناظر الدالة $\frac{1}{f}$.

23. أ) سجلوا نقطة قصوى ونقطاً أخرى تقع على الخط البياني للدالة $g(x) = -x^2 - 2$، ثم ارسموا الخط البياني.

ب) استعينوا بالخط البياني للدالة g وسجلوا للدالة $\frac{1}{g}$:

(i) نقطة قصوى.

(ii) مجالات التصاعد والتنازل.

(iii) مجالات الايجابية والسلبية

جـ) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة $\frac{1}{g}$.

24. أ) احسبوا احداثيات النقطة القصوى ونقط التقاطع مع المحورين ونقط أخرى من الدالة $h(x) = x^2 - x$، ثم ارسموا الخط البياني للدالة.

ب) سجلوا قيماً لِ x فيها $\frac{1}{h}$ غير معرفة (ارسموا أو شددوا خطوطاً فاصلة).

جـ) ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{h}$ حسب المراحل الآتية :

(i) سجلوا وعينوا النقطة القصوى ونقطاً أخرى بين الخطوط الفاصلة.
أكملوا شكلاً تقريبياً للخط البياني في هذا المجال.

(ii) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة $\frac{1}{h}$ عن يسار الخط الفاصل الأيسر (أفحصوا اولا، خواص الدالة $\frac{1}{h}$ في هذا المجال).

(iii) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة $\frac{1}{h}$، ايضا في المجال عن يمين الخط الفاصل الايمن.

د) سجلوا معادلات كل خطوط التقارب للدالة $\frac{1}{h}$.

هـ) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{h}$.

25. أ) ارسموا الخط البياني للدالة $f(x) = x^3$.

ب) على الخط البياني الذي رسمتم، عينوا نقطتين تقعان على الخط البياني للدالة f وعلى الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ ايضا.

جـ) في أية قيمة ل x ، تكون الدالة $\frac{1}{f}$ غير معرفة؟

د) عينوا نقطا ملائمة للدالة $\frac{1}{f}$ عن يمين وعن يسار المحور y.

عينوا نقطا ملائمة للدالة $\frac{1}{f}$ في قيم ل x كبيرة جدا او صغيرة جدا.

هـ) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

و) سجلوا قانون الدالة $\frac{1}{f}$.

ز) ارسموا (بلون آخر) انعكاسا للخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$، عن المحور x.
سجلوا قانون الدالة.

26. ارسموا الخط البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ (ارسموا اولا، الدالة $f(x) = x^2 - 3x - 4$ واستعينوا بخطها البياني لرسم الخط البياني للدالة g).

27. $(-2, 4)$ هي نقطة نهاية عظمى لدالة تربيعية f.
سجلوا احداثيات النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{f}$، وبينوا نوعها.

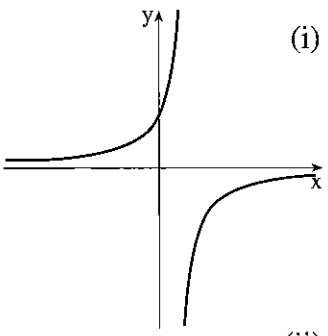
28. أ) جدوا احداثيات النقطة القصوى للدالة $g(x) = x^2 - 12x$ وسجلوا نوعها ايضا.

ب) سجلوا احداثيات النقطة القصوى للدالة $\frac{1}{g}$ وبينوا نوعها.

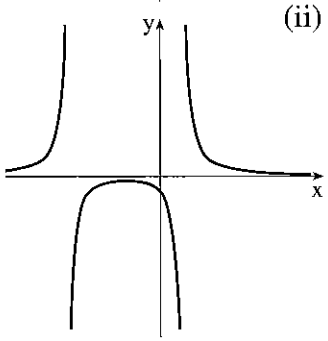
29. ارسموا الخط البياني للدالة $h(x) = \frac{1}{3 - 3x}$ (ارسموا اولا، المستقيم $f(x) = 3 - 3x$ واستعينوا به لرسم الدالة h).

30. ارسموا الخط البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{2 + 2x}$ (ارسموا اولا، المستقيم $f(x) = 2 + 2x$ واستعينوا به لرسم الدالة g).

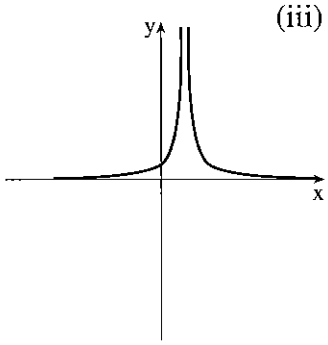
31. لائموا دالة $\frac{1}{f}$ (من العمود الايسر) لكل دالة f (من العمود الايمن)



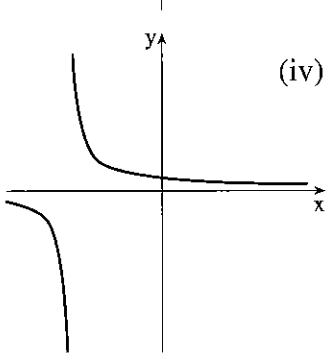
(i)



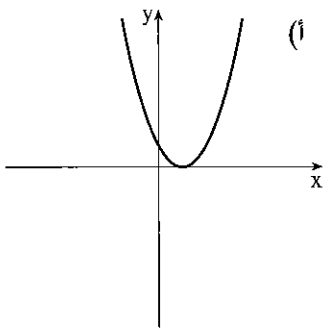
(ii)



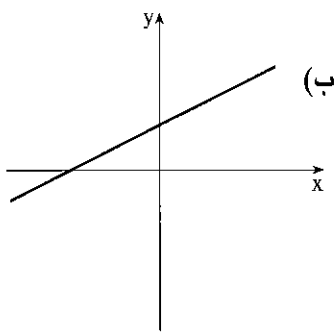
(iii)



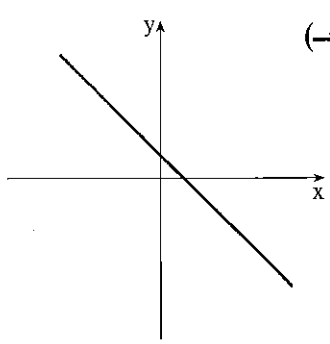
(iv)



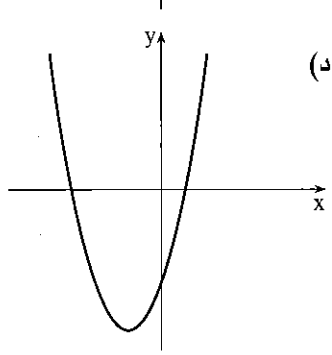
أ)



ب)



جـ)

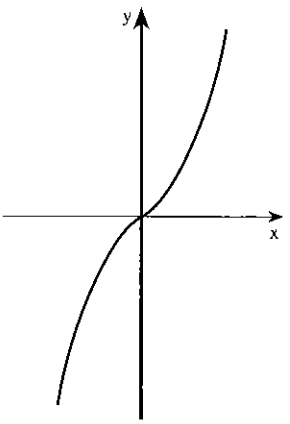


د)

الفصل الثالث: عائلة اخرى من الدوال

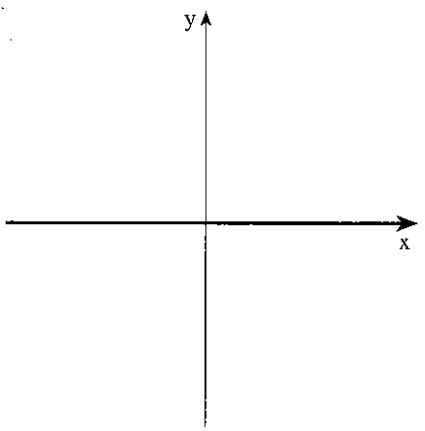
تناظر وتناظر عكسي

1. في الورقة الشفافة (ب)،تجدون خطا بيانيا مشابها للمرسوم هنا (دون تعيين x و y على المحورين).



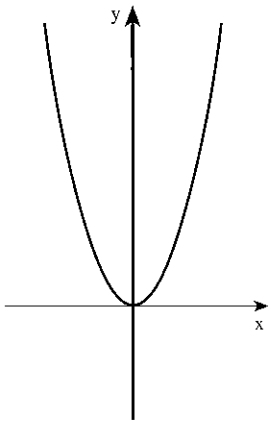
أ) ضعوه على الخط البياني المرسوم هنا، بحيث يكون المحور المشدد محوراً لـ x والمحور غير المشدد محوراً لـ y . (يَعني، بدلوا المحورين احدهما بالآخر وحافظوا على الاتجاهات)

ب) أزيحوا الخط البياني الناتج الى هيئة المحاور الجديدة.

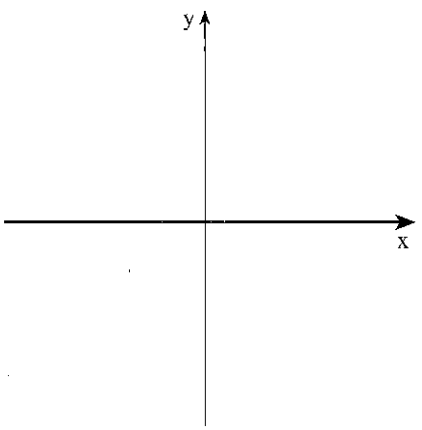


لقد حصلتم على "تناظر عكسي" للتناظر الذي يبيّنه الخط البياني أعلاه.

2. أ) ضعوا الخط البياني الملائم من الورقة الشفافة (ب)، بحيث يكون المحور المشدد محوراً لـ x والمحور غير المشدد محوراً لـ y. (يعني، بدلوا المحورين أحدهما بالاخر وحافظوا على الاتجاهات).

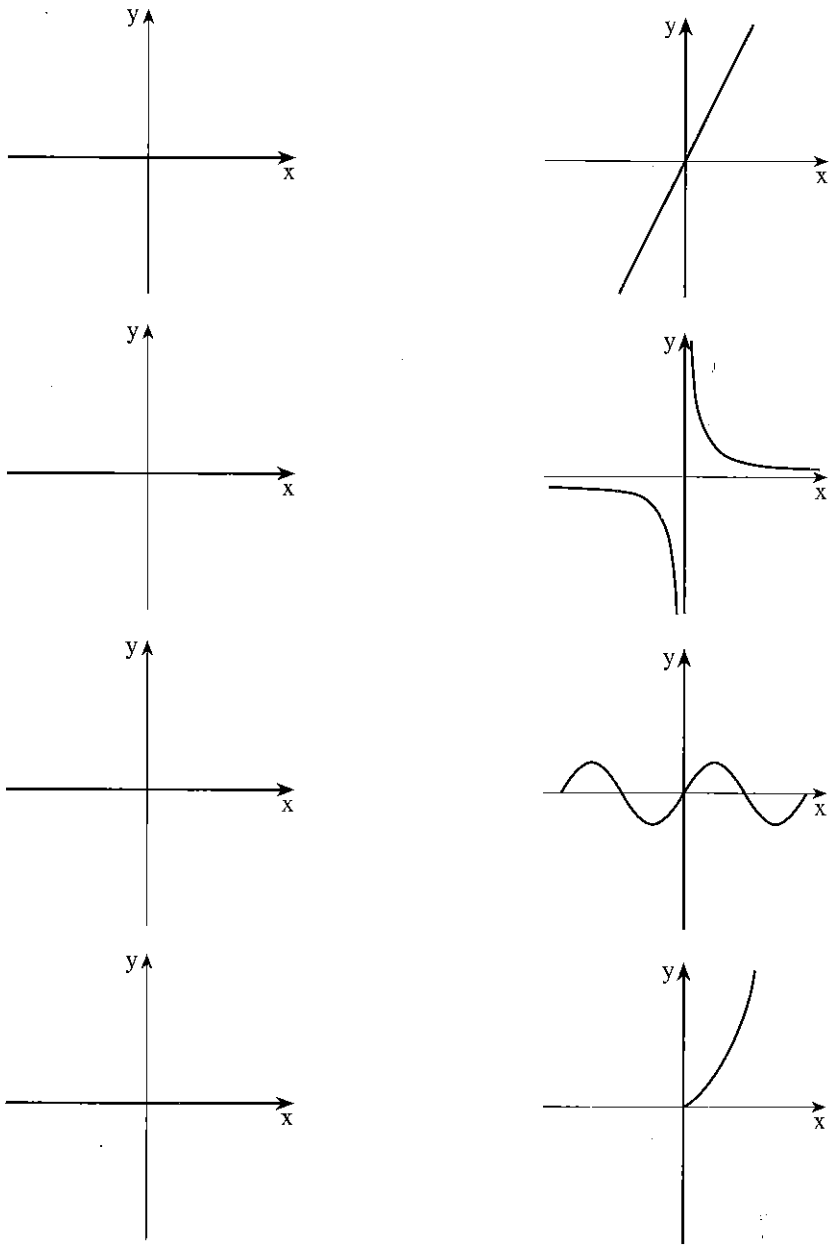


ب) أزيحوا الخط البياني الناتج الى هيئة المحاور الجديدة.



الخط البياني الاصلي والخط البياني الناتج من "تبديل المحورين أحدهما بالآخر" هما خطان بيانيان **لتناظرين عكسيين**، الواحد للآخر.

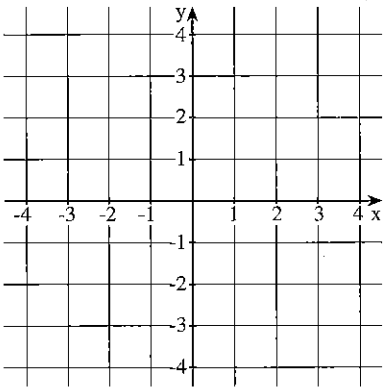
ع.ذ 3. – قصّوا الخط البياني الملائم، من الورقة الشفافة (ب).
– لكل دالة، نفذوا "تناظرا عكسيا" (بواسطة تبديل المحورين)
– ازيحوا الخط البياني الناتج الى هيئة المحاور المجاورة.

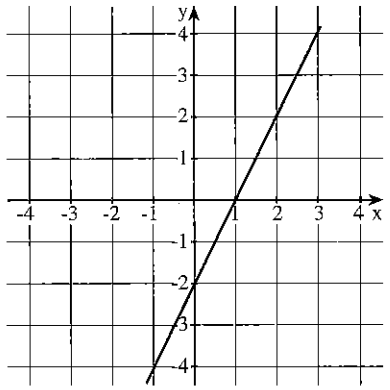


4. أ) في كل بند مما يأتي:

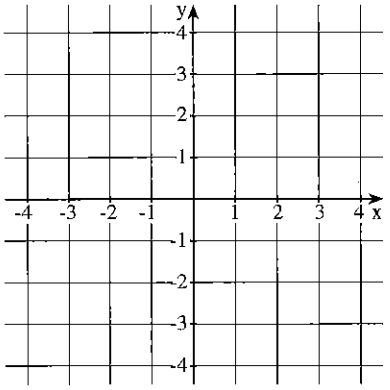
- سجلوا معادلة المستقيم المرسوم.
- قصّوا الخط البياني الملائم، من الورقة الشفافة (جـ) ونفذوا تناظرا معاكسا.
- سجلوا معادلة المستقيم الناتج الجديد.

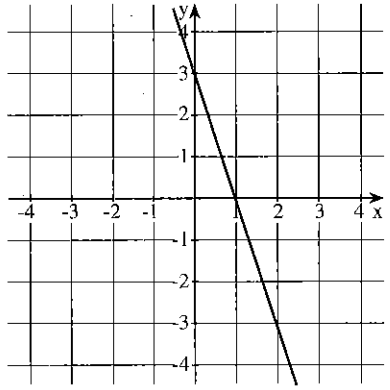
(i)



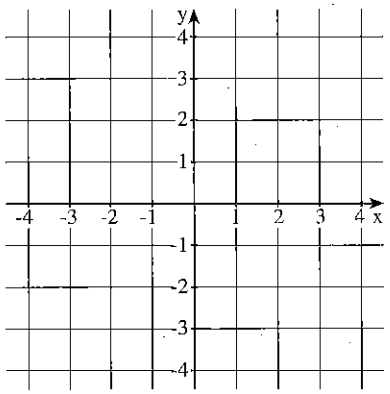


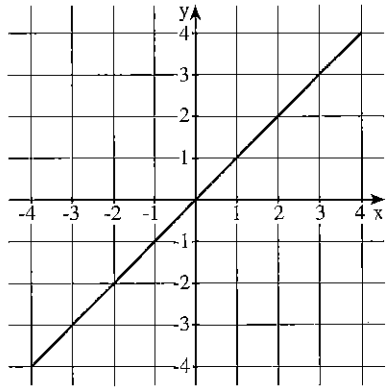
(ii)





(iii)

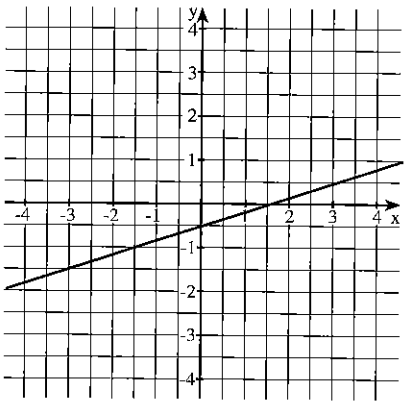


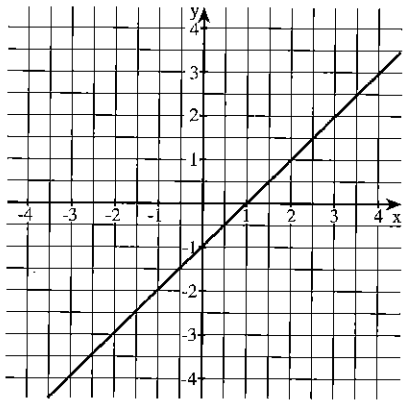


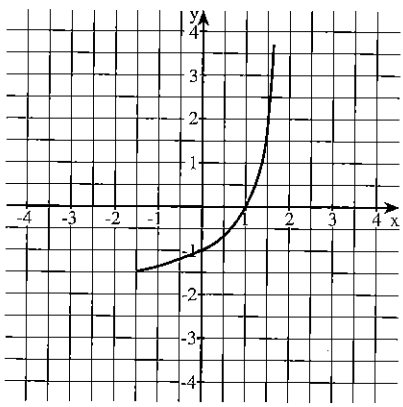
ب) ما هي العلاقة بين الميلين لكل زوج من المستقيمات؟

جـ) ما هي العلاقة بين نقط التقاطع مع المحورين لكل زوج من المستقيمات؟

5. لكل خط بياني، حاولوا ان ترسموا تناظرا معاكسا، في نفس هيئة المحاور. (اقتراح: انسخوا الخط البياني علي ورقة شفافة واستعينوا به).





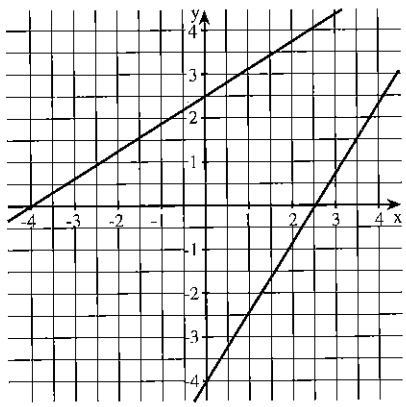


6 في كل هيئة محاور، تجدون خطين بيانيين لتناظرين عكسيين.

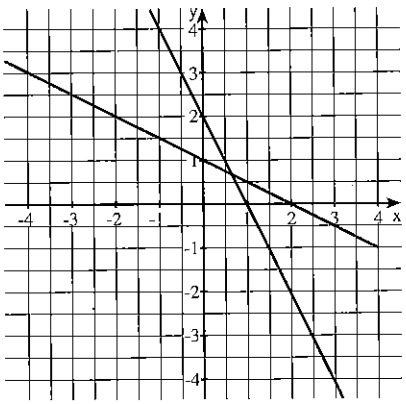
أ) في كل هيئة محاور، حاولوا ان ترسموا مستقيما يمكن استعماله كخط للطي. يعني، يكون المستقيم محور تماثل للتناظرين (المعطى والعكسي له).

ب) ما هي معادلة محور التماثل هذا؟

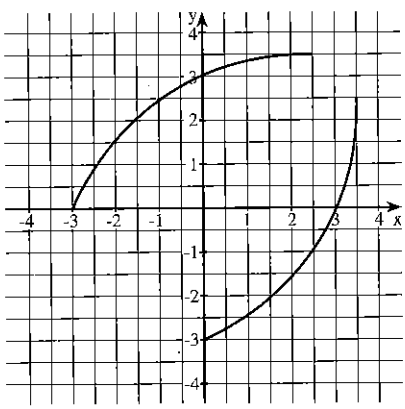
(i)



(ii)



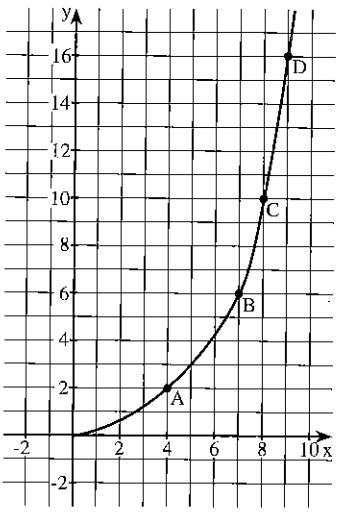
(iii)



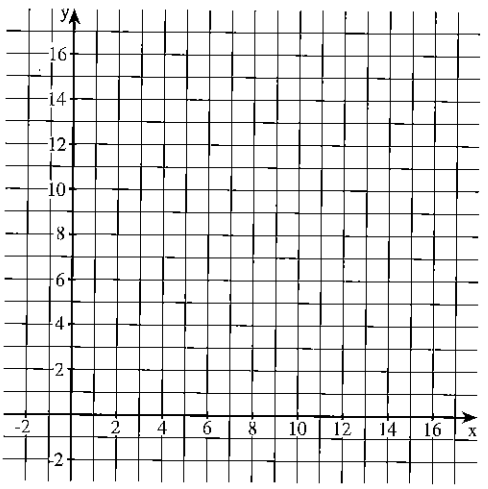
7. أ) ضعوا الخط البياني المشابه للمرسوم، من الورقة الشفافة (جـ) بحيث ينتج تناظر عكسي.

ب) ازيحوا الخط البياني الشفاف الى هيئة المحاور المجاورة

I



II



جـ) من الخطين البيانيين، اقرأوا احداثيات النقط المعينة واكملوا الجدول.

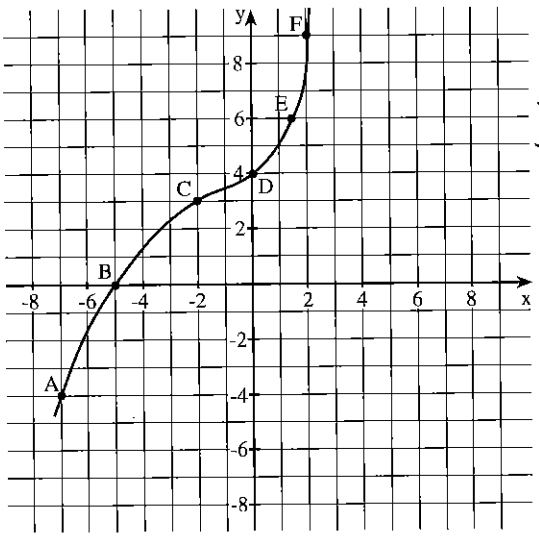
النقطة	I	II
A		
B		
C		
D		

د) ما هي العلاقة بين احداثيات النقطة المعطاة وتلك الناتجة في التناظر العكسي؟

لقد رأيتم انه في التناظرات العكسية، يتبدل المحوران.
لذلك فان احداثيات النقط تتبدل ايضا وينتج خطان بيانيان متماثلان بالنسبة للمستقيم $y = x$.

تمارين

8. أ) اكملوا الجدول:



نقط على الخط البياني المرسوم	نقط على الخط البياني للتناظر العكسي
مثال: A(-7, -4)	(-4, -7)
B(,)	
C(,)	
D(,)	
E(,)	
F(,)	

ب) عينوا نقط التناظر العكسي في هيئة المحاور، واكملوا الخط البياني له.

جـ) ارسموا الخط البياني للمستقيم $y = x$. هل الخطان البيانيان (للتناظر والتناظر العكسي له) متماثلان بالنسبة لهذا المستقيم ؟

9. معطاة الدالة $y = -3x + 4$

أ) اكملوا احداثيات نقط على الخط البياني للدالة $y = -3x + 4$.

(-1,) , (0,) , (1,) , (3,)

ب) اكملوا احداثيات نقط على الخط البياني للتناظر العكسي .

(,) , (,) , (,) , (3,)

10. معطاة الدالة $y = 3x$.

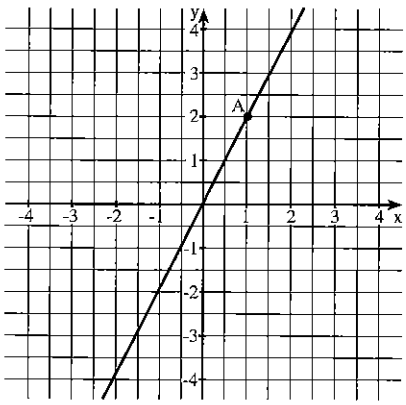
أ) حاولوا ان تخمنوا قانون التناظر العكسي.

ب) عوضوا في المعادلة $y = 3x$ واكملوا النقط.

(-1,) , (0,) , (2,)

جـ) بدلوا احداثيات النقط. عوضوا وافحصوا المعادلة التي سجلتم في البند (أ).

11. أمامكم الخط البياني للدالة $y = 2x$.



أ) أي من القوانين الآتية يُلائم التناظر العكسي للدالة $y = 2x$؟

(i $y = -\frac{1}{2}x$

(ii $y = \frac{1}{2}x$

(iii $y = -2x$

(iv $y = \frac{1}{2}x + 2$

ب) ارسموا في هيئة المحاور، التناظر العكسي الذي اخترتموه في البند (أ)، ثم افحصوا هل هو التناظر العكسي بالفعل.

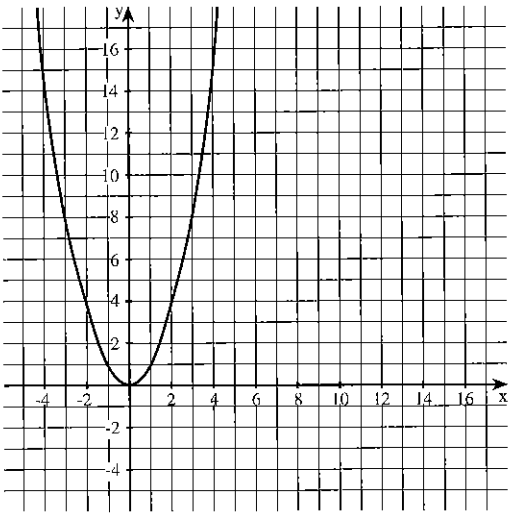
جـ) سجلوا احداثيات النقطة A .
سجلوا احداثيات (نقطة ملائمة لها على الخط البياني للتناظر العكسي، ثم افحصوا هل هي تقع بالفعل على الخط البياني الذي رسمتم.

دالة الجذر

1. أ) من الورقة الشفافة (جـ)، قصّوا الخط البياني للدالة $f(x) = x^2$

ب) نفذوا تناظرا عكسيا.

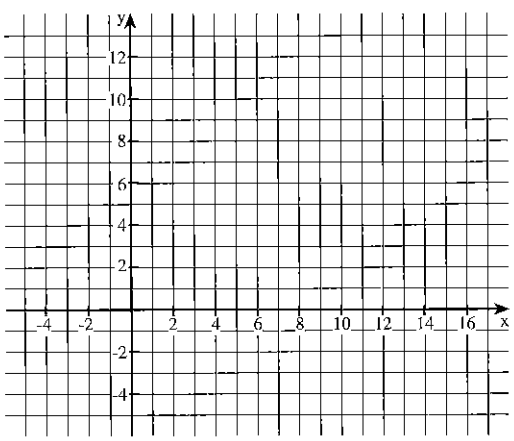
جـ) ضعوا الخط البياني الناتج على هيئة المحاور أدناه.



د) اعتمادا على الخط البياني الناتج من التناظر العكسي، سجلوا:

– نقطتين الاحداثي x لهما 4.

– نقطتين الاحداثي x لهما 6.



من الان فصاعدا، نهتم فقط بفرع واحد من الخط البياني الناتج. في المرحلة الاولى، نهتم بالفرع حيث $y \geq 0$. في هذه الحالة يكون التناظر العكسي دالة ايضا.

هـ) اكملوا احداثيات النقط.

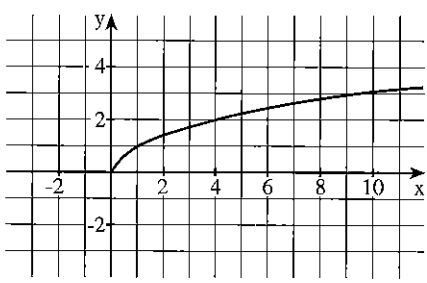
دالة أصلية $f(x) = x^2$	دالة عكسية (g)
(0,)	(, 0)
(1,)	(, 1)
(2,)	(, 2)
(3,)	(, 3)

و) – حاولوا ايجاد الاحداثي y لنقط اضافية على الدالة g.

(144,) (100,) (25,)

– صفوا بالكلمات، العلاقة بين الاحداثي x والاحداثي y لنقطة تقع على الخط البياني للدالة g .

ع.ذ 2. الخط البياني المرسوم هو للدالة $g(x) = \sqrt{x}$.
(اقرأوا: الجذر التربيعي ل x.)



أ) اقرأوا من الخط البياني بالتقريب، ثم اكملوا.

$\sqrt{10}$ = _____ $\sqrt{6}$ = _____ $\sqrt{3}$ = _____

من الصعب التدقيق في تحديد الجذر التربيعي، حسب الخط البياني.
من أجل التدقيق اكثر، يمكن الاستعانة بالحاسبة.

3. استعينوا بالحاسبة واحسبوا.

مثال: كي تحسبوا $\sqrt{121}$ ، استعينوا بسلسلة الضغطات:

121	√
11	

أ) $\sqrt{256}$ ب) $\sqrt{1024}$ جـ) $\sqrt{5}$

د) $\sqrt{0.05}$ هـ) $\sqrt{0}$ و) $\sqrt{2.25}$

4. أ) حاولوا ان تحسبوا $\sqrt{-9}$.
فسروا ما نتج في الحاسبة، بمساعدة الخط البياني.

ب) أي من التعابير الاتية، لا معنى له؟

i) $\sqrt{-81}$ ii) $-\sqrt{100}$ iii) $\sqrt{-4}$

جـ) أية اعداد يمكن تعويضها في الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ ؟

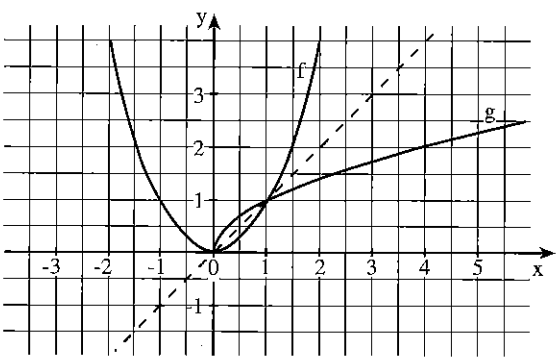
5. أ) استعينوا بالحاسبة في ايجاد الجذور. احسبوا في كل سطر، من اليمين الى اليسار.

$\sqrt{0.6} =$, $\sqrt{0.5} =$, $\sqrt{0.4} =$, $\sqrt{0.25} =$, $\sqrt{0.16} =$

$\sqrt{1} =$, $\sqrt{0.99} =$, $\sqrt{0.9} =$, $\sqrt{0.8} =$, $\sqrt{0.7} =$

$\sqrt{3} =$, $\sqrt{2} =$, $\sqrt{1.1} =$, $\sqrt{1.01} =$

6. الخطوط البيانية المرسومة هي للدوال $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$.



أ) في أي مجال، يكون الخط البياني للدالة g فوق الخط البياني للدالة f؟

ب) استعينوا بالحسابات من التمرين 5 وفسروا، لماذا في المجال الذي ذكرتم في البند (أ)، يكون الخط البياني للدالة g فوق المستقيم $y = x$.

جـ) فسروا، لماذا في المجال الذي ذكرتم في البند (أ)، يكون الخط البياني للدالة f تحت المستقيم $y=x$.

تمارين

7. أي من التعابير الاتية، لا معنى له؟

$\sqrt{-9}$ ، $\sqrt{(-3)^2}$ ، $\sqrt{-3^2}$ ، $\sqrt{0}$ ، $\sqrt{(-5)^3}$ ،

$-\sqrt{16}$ ، $-\sqrt{-16}$ ، $-\sqrt{(-4)^2}$ ، $-\sqrt{-4^2}$ ، $-\sqrt{0}$ ،

8. احسبوا (اذا امكن).

أ) $\sqrt{2} + 2 =$ د) $2 \cdot \sqrt{2} =$ ز) $\sqrt{2+3} =$

ب) $\sqrt{25+64} =$ هـ) $2 - \sqrt{2} =$ ح) $3 - 4\sqrt{2} =$

جـ) $\sqrt{3-4} =$ و) $3 \cdot \sqrt{5} \cdot 7 =$ ط) $-\sqrt{4 \cdot 5 - 15} =$

9. معطاة الدالة $g(x) = \sqrt{x}$.

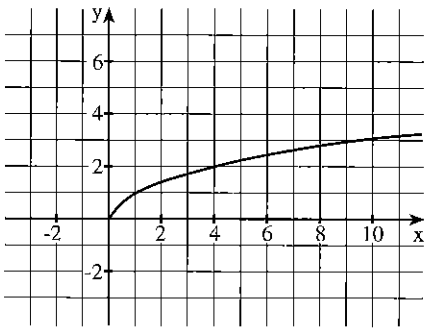
احسبوا (اذا امكن).

أ) $g(9) =$ ب) $g(0) =$ جـ) $g(0.25) =$

د) $g(10) =$ هـ) $g(-4) =$ و) $g(125) =$

عن الجذور ايضا

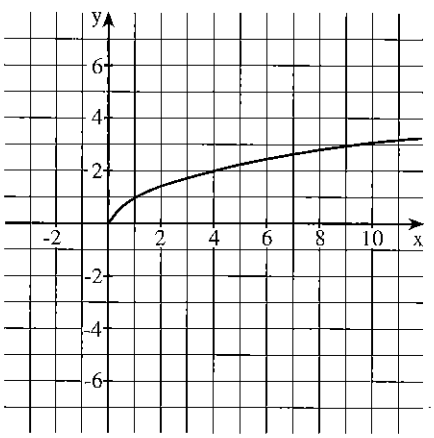
1. أ) ضعوا الخط البياني الملائم من الصفحة الشفافة (جـ)، بحيث ينطبق على الخط البياني المرسوم.



ب) ازيحوا وحدتين الى أعلى بموازاة المحور y.
ما هو قانون الدالة الناتجة؟

جـ) من الخط البياني الناتج ، اقرأوا احداثيات نقطة واحدة، ثم افحصوا بواسطة التعويض في القانون الذي سجلتم.

2. أ) ضعوا الخط البياني الملائم من الصفحة الشفافة (جـ)، بحيث ينطبق على الخط البياني المرسوم.



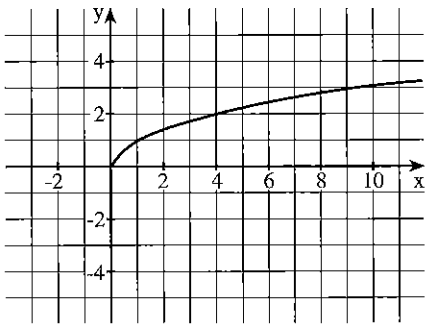
ب) أزيحوا 3 وحدات الى أسفل بموازاة المحور y.
ما هو قانون الدالة الناتجة؟

جـ) من الخط البياني الناتج، اقرأوا احداثيات نقطة واحدة، ثم افحصوا بواسطة التعويض في القانون الذي سجلتم.

د) سجلوا نقطة على الخط البياني الناتج، بحيث يكون الاحداثي y لها أصغر ما يمكن.

هـ) سجلوا احداثيات نقطة تقاطع الخط البياني للدالة الناتجة مع المحور x، ثم افحصوا بواسطة التعويض في القانون الذي سجلتم.

3. أ) ضعوا الخط البياني الملائم من الصفحة الشفافة (جـ)، بحيث ينطبق علي الخط البياني المرسوم.



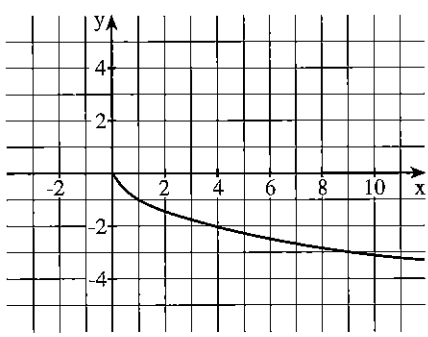
ب) نفذوا انعكاسا للخط البياني عن المحور x.
ما هو قانون الدالة الناتجة؟

جـ) من الخط البياني الناتج، اقرأوا احداثيات نقطة واحدة، ثم افحصوا بواسطة التعويض في القانون الذي سجلتم.

د) في أية قيم لـ x ، تكون الدالة الناتجة معرّفة؟

4. الخط البياني المرسوم هو للدالة $y = -\sqrt{x}$.

أ) ضعوا الخط البياني الملائم من الصفحة الشفافة (جـ)، بحيث ينطبق على الخط البياني المرسوم.



ب) ازيحوا الخط البياني الناتج وحدة واحدة الى أعلى بموازاة المحور y.
ما هو قانون الدالة الناتجة؟

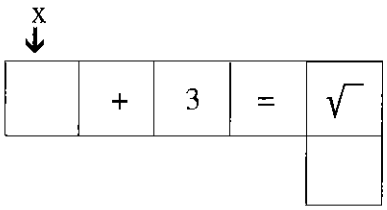
جـ)من الخط البياني الناتج، اقرأوا احداثيات نقطة واحدة، ثم افحصوا بواسطة التعويض في القانون الذي سجلتم.

د) سجلوا احداثيات نقط تقاطع الخط البياني للدالة الناتجة مع المحورين. افحصوا بواسطة التعويض في القانون.

هـ) في أية قيم ل x، تكون الدالة الناتجة معرّفة؟

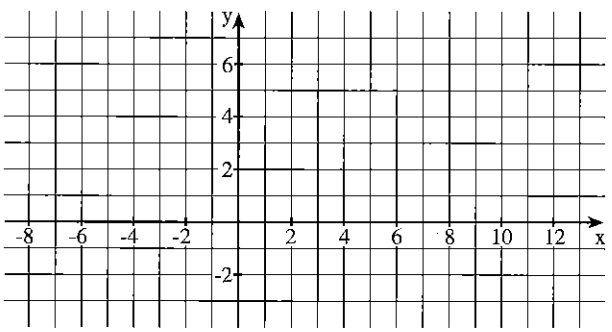
5. معطاة الدالة $y = \sqrt{x + 3}$

أ) استعينوا بالحاسبة وبسلسلة الضغطات، لتكملوا الجدول



x	-1	2	5	6	10	12
y						

ب) عينوا النقط في هيئة المحاور.



جـ) عوضوا $x = -3$ ، ماذا نتج؟
عوضوا $x = -4$ ، ماذا نتج؟

اكملوا شكلا تقريبياً للخط البياني للدالة.

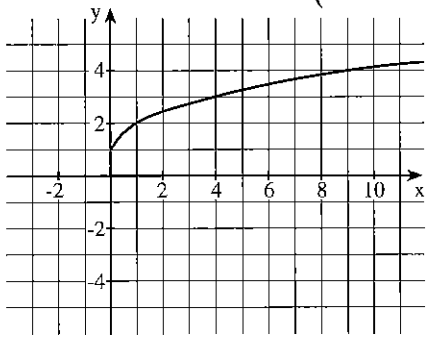
د) في أية قيم ل x، تكون الدالة معرّفة؟

هـ) الدالة الناتجة هي ازاحة الدالة $y = \sqrt{x}$.فسّروا هذه الازاحة . (يمكنكم الاستعانة بالخط البياني الشفاف (جـ))

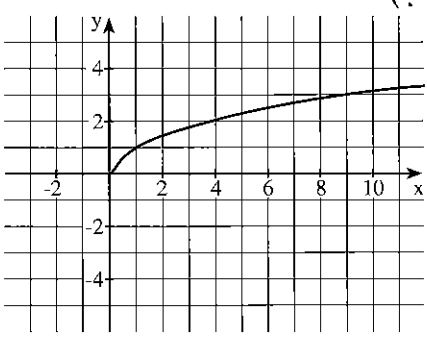
تمارين

6. جميع الخطوط البيانية الاتية هي ازاحات وانعكاسات الخط البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ (أو الخط البياني للدالة نفسها). لكل خط بياني، سجلوا قانون الدالة. افحصوا بواسطة تعويض احداثيات نقطتين في القانون الذي سجلتم.

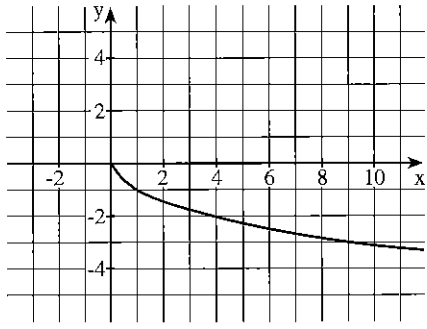
أ)



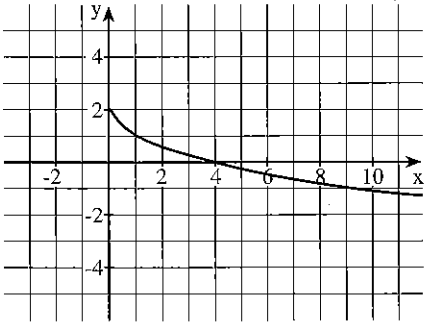
ب)



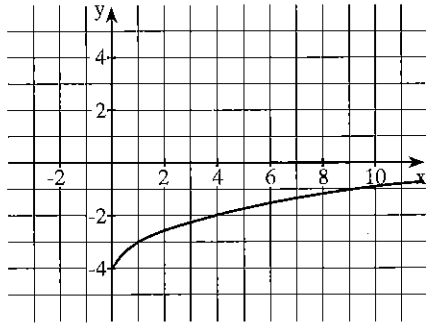
جـ)



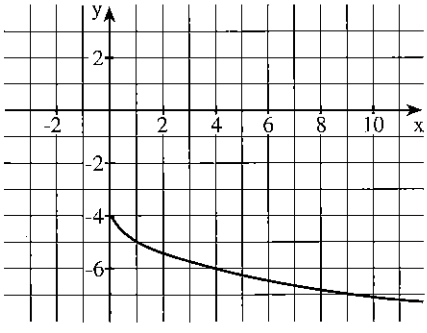
د)



هـ)

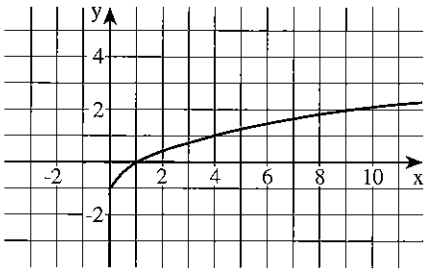


و)



7. الخط البياني هو الدالة $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

أ) من الخط البياني، اكملوا الاحداثي y للنقط الاتية:



(0,) (1,)

(4,) (6,)

افحصوا بواسطة التعويض في قانون الدالة $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

ب) اكملوا حسب الخط البياني، الاحداثي x للنقطة (2,) وافحصوا بواسطة التعويض في قانون الدالة.

جـ) الدالة التي رسمتم هي ازاحة للدالة $y = \sqrt{x}$. ما هي هذه الازاحة؟

8. أ) (i) أزيحوا الخط البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ بموازاة المحور y، بحيث تكون نقطة التقاطع مع المحور y (0,2).

(ii) سجلوا قانون الدالة الناتجة.

(iii) هل الخط البياني يقطع المحور x؟ اذا كان نعم – في أية نقطة؟

ب) (i) أزيحوا الخط البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ بموازاة المحور y ، بحيث تكون نقطة التقاطع مع المحور y (0, -4).

(ii) سجلوا قانون الدالة الناتجة.

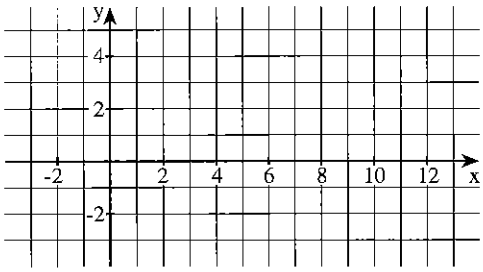
(iii) هل الخط البياني يقطع المحور x ؟ اذا كان نعم – في أية نقطة؟

جـ) (i) أزيحوا الخط البياني للدالة $y = -\sqrt{x}$ بموازاة المحور y ، بحيث تكون نقطة التقاطع مع المحور y (0, -6).

(ii) سجلوا قانون الدالة الناتجة.

9. معطاة الدالة $f(x) = \sqrt{x-2}$.

أ) عوّضوا واكملوا ثم عيّنوا.



(2,) (3,)

(6,) (11,)

ب) جدوا ان امكن، الاحداثي y وعيّنوا النقط في هيئة المحاور.

(0,) (2.25,) (5,) (9,)

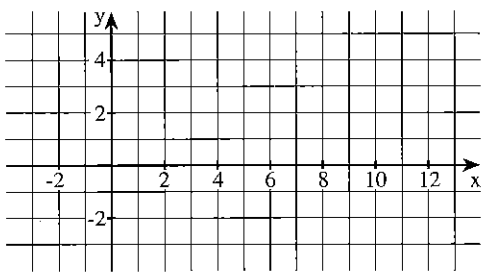
اكملوا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة.

جـ) الدالة الناتجة هي ازاحة الدالة $y = \sqrt{x}$. ما هي هذه الازاحة؟

د) في أية قيم ل x ، تكون الدالة معرّفة؟

10. معطاة الدالة $g(x) = \sqrt{x+1}$.

أ) جدوا احداثيات نقط تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x ، ثم عيّنوها في هيئة المحاور.



ب) جدوا احداثيات نقط تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور y وعيّنوها.

جـ) جدوا ان امكن، الاحداثي y وعيّنوا في هيئة المحاور.

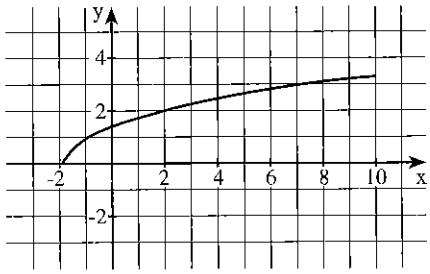
(-2,) (2,) (3,) (5,) (8,)

د) اكملوا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة.

هـ) الخط البياني هو ازاحة الدالة $y = \sqrt{x}$. ما هي هذه الازاحة؟

و) في أية قيم ل x ، تكون الدالة معرّفة؟

11. أ) أي قانون يلائم الخط البياني المرسوم؟ علّلوا.



(i $y = \sqrt{x - 2}$

(ii $y = \sqrt{x} - 2$

(iii $y = \sqrt{x + 2}$

ب) سجلوا القانون الملائم: $y =$

واكملوا (,2-) (,2)

افحصوا هل النقطتان تقعان في الواقع، على الخط البياني للدالة.

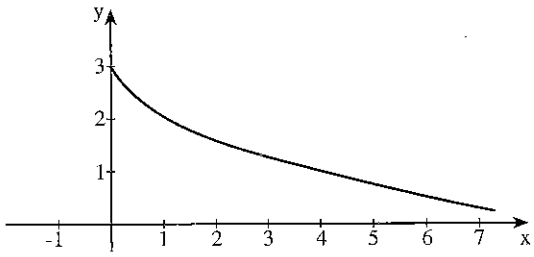
12. الخط البياني المرسوم هو للدالة $y = -\sqrt{x} + 3$

أ) عوضوا واكملوا.

(,4) (,5)

(,7) (,8.5)

هل المحور x هو خط تقارب؟



ب) عوضوا واكملوا: (,16) (,10) (,9)

افحصوا اجابتكم عن البند (أ).

13. لائموا قانونا لكل خط بياني.

أ) $y = \sqrt{x} + 3$

ب) $y = -\sqrt{x} + 3$

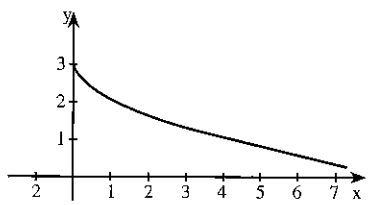
جـ) $y = \sqrt{x} - 3$

د) $y = -\sqrt{x} - 3$

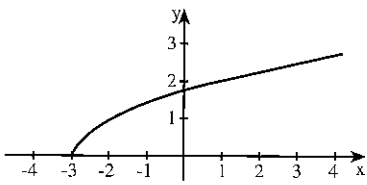
هـ) $y = \sqrt{x+3}$

و) $y = \sqrt{x-3}$

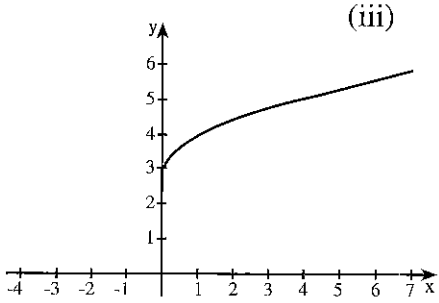
(i)



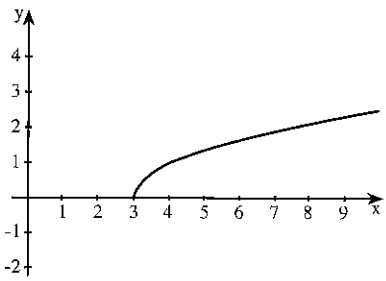
(ii)



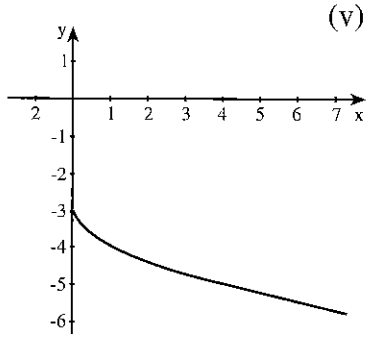
(iii)



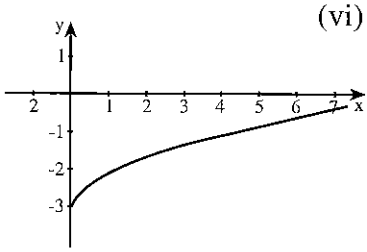
(iv)



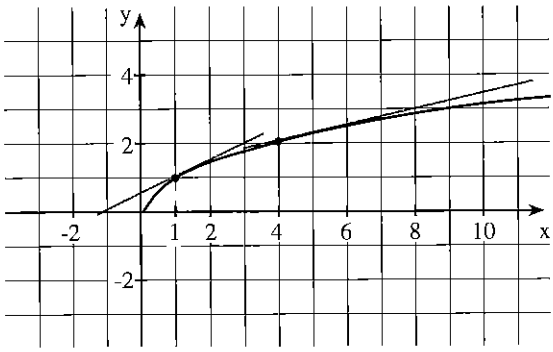
(v)



(vi)



عن الجذور والمشتقة



1. مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ومماسان لها.

أ) اقرأوا ميلي المماسين واكملوا:

$f'(1) =$ _____ $f'(4) =$ _____

ب) أضيفوا > او <

$f'(8)$ ☐ $f'(10)$

$f'(80)$ ☐ $f'(100)$

جـ)صفوا وتيرة تغير ميل المماسات كلما يكبر x .

د) مشتقة الدالة هي: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

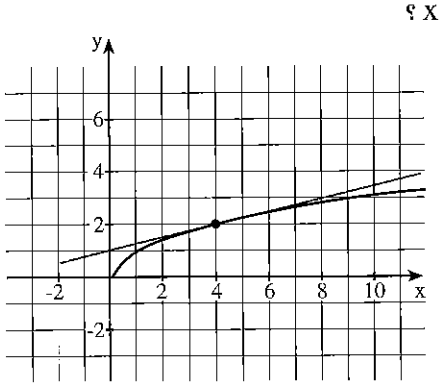
فسروا بمساعدة المشتقة:

لماذا تكون الدالة تصاعدية لكل x في مجال تعريفها ؟

لماذا لا يوجد نقط قصوى للدالة عندما $x > 0$ ؟

2. مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ومماس لها في النقطة $x = 4$.

أ) ما هو ميل المماس في النقطة $x = 4$ ؟



ب) ضعوا الخط البياني الملائم (مع المماس) من الصفحة الشفافة (د) بحيث ينطبق على الخط البياني المرسوم. أزيحوا بحيث ينتج الخط البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x} + 2$.

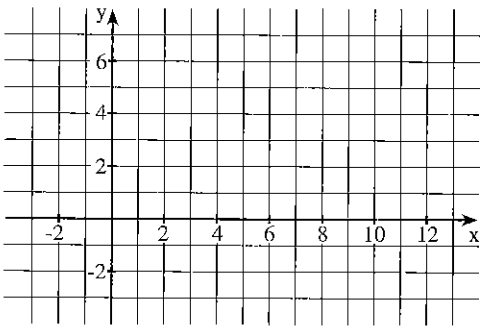
جـ)ما هو ميل مماس الدالة g في النقطة $x = 4$ ؟

د) ماذا يمكنكم القول عن مماسي الدالتين في النقطة $x = 4$ ؟

هـ) جدوا مشتقة الدالة g وحاولوا تفسير اجابتكم عن البندين حـ وَ د بمساعدتها.

و) بماذا تتشابه وبماذا تختلف الدالتان $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x} + 2$ ؟

3. معطاة الدالة
$g(x) = 2\sqrt{x}$



أ) جدوا احداثيات نقطة تقاطع الدالة مع المحور y وعينوها في هيئة المحاور.

ب) في أية قيم ل x ، تكون الدالة معرّفة؟

جـ)اكملوا الجدول وعينوا النقط، ثم ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة.

x	0.25	1	2	3	4	9
g(x)						

د) ضعوا الخط البياني من الصفحة الشفافة (حـ) بحيث يبيّن الدالة $f(x) = \sqrt{x}$. بماذا تتشابه وبماذا تختلف الدالتان؟

هـ) لأي الدالتين f أو g ميل اكبر في النقطة $x = 4$ ؟

و) جدوا مشتقة الدالة $g(x) = 2\sqrt{x}$ وفسروا بمساعدة المشتقة، لماذا تكون الدالة تصاعدية لكل x .

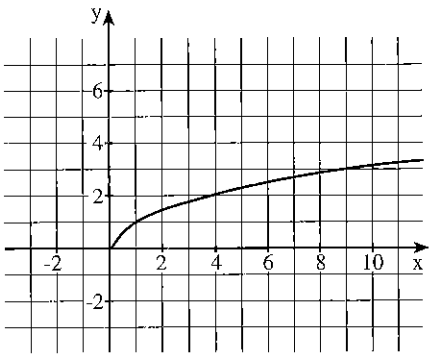
ز) احسبوا $f'(4)$, $g'(4)$ وفسروا اجابتكم عن البند (هـ) .

4. في هيئة المحاور، مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

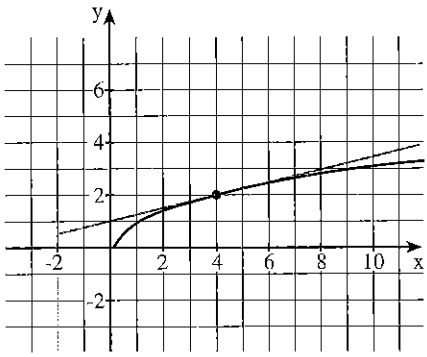
أ) في نفس هيئة المحاور، ارسموا الخط البياني للدالة $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

ب) جدوا مشتقة الدالة $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$ (من المفضل كتابتها هكذا $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$)،

ثم احسبوا ميل الدالة g في النقطة (9,1.5) .



5. مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ومماس لها في النقطة $x = 4$.



أ) اقرأوا وسجلوا معادلة المماس.

ب) (i) بمساعدة المشتقة، احسبوا ميل مماس الدالة في النقطة (4,2) .

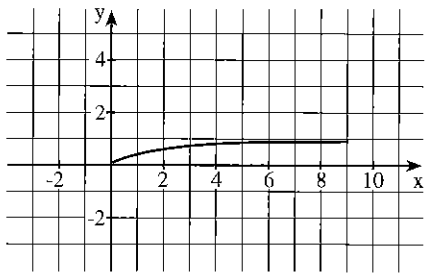
(ii) جدوا معادلة المماس في النقطة (4,2) وافحصوا اجابتكم عن البند (أ).

6. أ) لائموا قانونا الكل خط بياني.

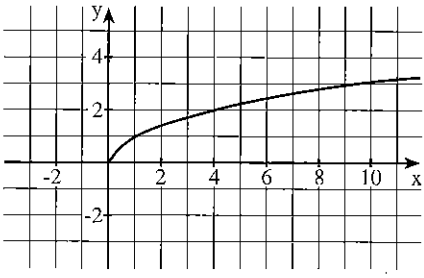
$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $h(x) = \sqrt{x} + 2$

$g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ $\qquad$ $k(x) = 3\sqrt{x}$

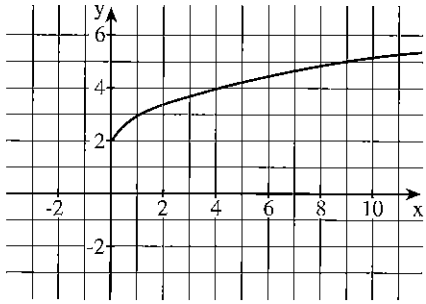
(i)



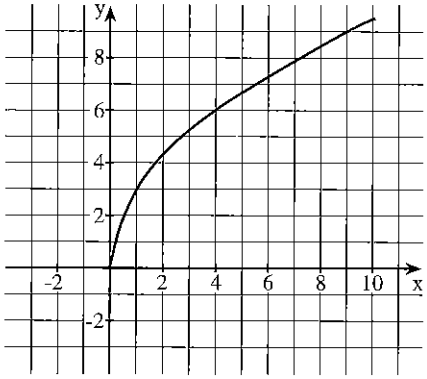
(ii)



(iii)



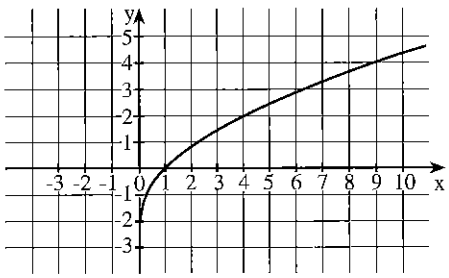
(iv)



ب) لكل واحدة من الدوال، جدوا ميل الدالة في النقطة $x = 4$.

جـ) ارسموا مماسا لكل واحد من الخطوط البيانية في النقطة $x = 4$.

7. الخط البياني المرسوم هو للدالة $y = 2\sqrt{x} - 2$

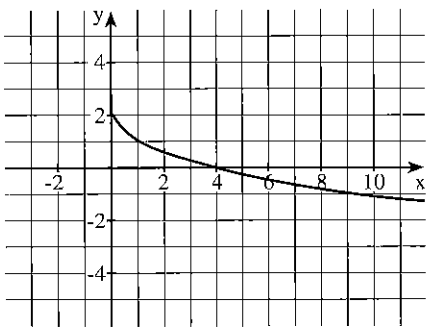


أ) (i) هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في النقطة $x = 9$؟

(ii) ارسموا بالتقريب، مماس الدالة في النقطة $x = 9$.

ب) احسبوا ميل مماس الدالة في النقطة $x = 9$ وافحصوا هل المماس الذي رسمتم ملائم للميل الذي حسبتم.

8. الخط البياني المرسوم هو للدالة $y = -\sqrt{x} + 2$



أ) (i) هل الدالة تصاعدية أم تنازلية في النقطة $x = 9$؟

(ii) ارسموا بالتقريب، مماس الدالة في النقطة $x = 9$.

ب) احسبوا ميل مماس الدالة في النقطة $x = 9$ وافحصوا هل المماس الذي رسمتم ملائم للميل الذي حسبتم.

9. أ) اشتقوا الدوال الاتية:

(i) $y = \sqrt{x} - 2x$ (ii) $y = 4\sqrt{x} - x^2$

(iii) $y = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ (iv) $y = \frac{\sqrt{x}}{3}$

ب) افحصوا كل واحدة من الدوال، هل هي تصاعدية أم تنازلية في النقطة $x = 1$.

10. حلّوا المعادلات الاتية:

مثال:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \;/\; \cdot\sqrt{x}$$

$$1 = 2\sqrt{x} \;/\; \text{تربع الطرفين}$$

$$1 = 4x \;/\; :4$$

$$x = \frac{1}{4}$$

أ) $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} = 0$

جـ) $4\sqrt{x} - x = 0$

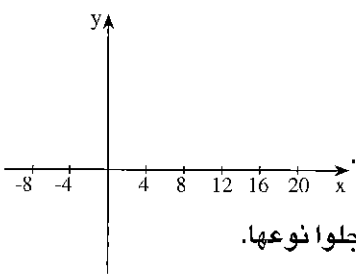
د) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} = 0$

هـ) $\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 = 0$

و) $\frac{1}{\sqrt{x}} - 2x = 0$

(قربوا الى منزلتين عشريتين بعد الفاصلة)

11. معطاة الدالة $y = 4\sqrt{x} - x$.



أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

ب) جدوا نقط التقاطع مع المحورين وعينوها.

جـ) جدوا نقطا قصوى بمساعدة المشتقة وسجلوا نوعها.

د) سجلوا نقطة قصوى اخرى (نقطة طرف) وبينوا نوعها.

هـ) اكملوا رسما تقريبيا للخط البياني للدالة.

و) هل يوجد للدالة نقط نهاية صغرى مطلقة ونهاية عظمى مطلقة؟ اذا كان نعم – سجلوها وبينوا نوعها.

12. ابحثوا الدالة $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ حسب المراحل الاتية:

أ) جدوا مجال تعريف الدالة.

ب) احسبوا نقطة تقاطع الدالة مع المحور y وعينوها.

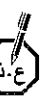
جـ)بينوا ان الخط البياني للدالة يمر في النقطة $(4,0)$ وعينوا هذه النقطة.

د) جدوا نقطا قصوى وعينوها (يشمل نقطة طرف)، ثم سجلوا نوعها.

هـ) اكملوا رسما تقريبيا للخط البياني للدالة.

و) هل يوجد للدالة نقط نهاية صغرى مطلقة ونهاية عظمى مطلقة؟

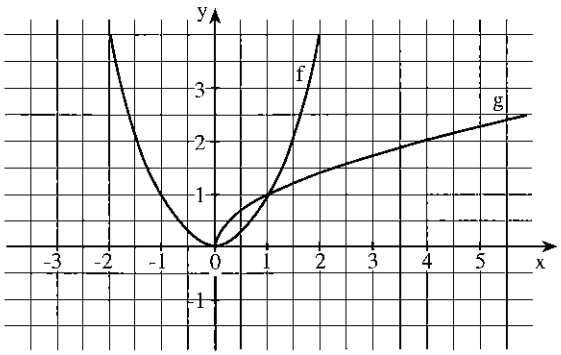
اذا كان نعم – سجلوها وبينوا نوعها.



13. جدوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة $y = x^2 - 4\sqrt{x}$ (جدوا نقطا قصوى اولا).

تمارين

14. الدالتان المرسومتان هما:



$f(x) = x^2$

$g(x) = \sqrt{x}$

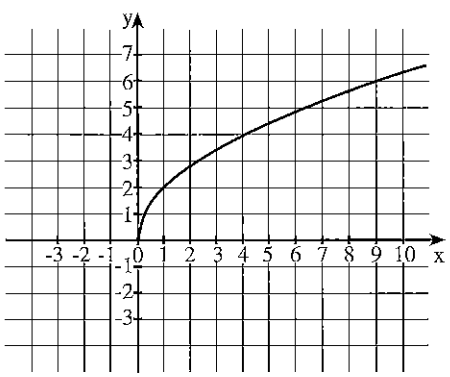
أ) لأي الدالتين يوجد ميل اكبر في النقطة $x = 2$ ؟ فسروا.

ب) احسبوا $f'(2)$ ، $g'(2)$ وافحصوا اجابتكم عن البند (أ).

جـ) لأي الدالتين يوجد ميل اكبر في النقطة $x = \frac{1}{4}$؟ فسروا.

د) احسبوا $f'(\frac{1}{4})$, $g'(\frac{1}{4})$ وافحصوا اجابتكم عن البند (جـ).

15. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = 2\sqrt{x}$.



أ) جدوا ميل الدالة في النقطة $(4,4)$.

ب) جدوا معادلة المماس، ثم ارسموه.

16. اشتقوا:

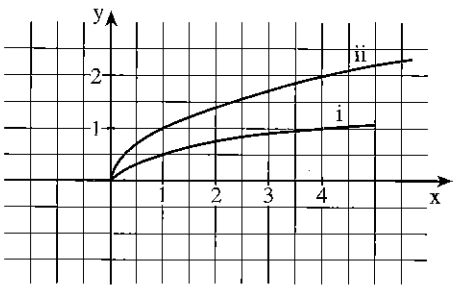
أ) $y = x^2 - 4\sqrt{x} - 1$

ب) $y = 4 - 3x + 2\sqrt{x}$

جـ) $y = \frac{\sqrt{x}}{2} + x$

17. جدوا معادلة مماس الدالة $y = 3\sqrt{x} - 6$ في النقطة $x = 9$.

18. الخطان البيانيان المرسومان هما:



$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

أ) لائموا قانونا لكل خط بياني.

ب) – جدوا معادلتي المماسين للدالتين في النقطة $x = 4$ (ارسموا المماسين بالتقريب).

– هل المماسان متقاطعان؟ اذا كان نعم – جدوا احداثيات نقطة التقاطع.

19. هل الدالة $y = 2x^2 - 6\sqrt{x}$ تصاعدية أم تنازلية في النقطة $x = 4$ ؟

20. جدوا النقطة القصوى للدالة $y = 2x - 2\sqrt{x}$ (انتبهوا لنقطة الطرف ايضا)

21. ابحثوا الدالة $y = x^2 - 4\sqrt{x} + 1$ حسب المراحل الاتية:

أ) جدوا مجال تعريف الدالة.

ب) جدوا النقط القصوى.

جـ) اكملوا احداثيات النقطة (,3) .

د) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة.

هـ) كم نقطة تقاطع للخط البياني للدالة، مع المحور x؟

و) سجلوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة.

الفصل الرابع: الدالة المركبة

ما هي الدالة المركبة؟

سوف نتعلم في هذا البند، عن مصطلح «الدالة المركبة» (يمكن تعلّم هذا الموضوع عن طريق فعالية بالحاسوب بواسطة برنامج Excel أو عن طريق صفحة الكترونية اخرى. اذا كنتم غير قادرين على استعمال برنامج Excel في تعلم هذا البند، انتقلوا الى صفحة 181.

الدالة المركبة – بواسطة برنامج Excel.

1. اقرأوا جميع الامثلة، وبمساعدتها اجيبوا عن السؤال 2 .

مثال أ:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 \\ y = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$$

تعبير صريح لy بواسطة x:

$$y = \frac{1}{3x^2 - 4}$$

مثال ب:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$$

تعبير صريح ل y بواسطة x:

$$y = \sqrt{3x^2 - 4}$$

مثال جـ:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 \\ y = [f(x)]^3 \end{cases}$$

تعبير صريح ل y بواسطة x:

$$y = (3x^2 - 4)^3$$

مثال د:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$$

تعبير صريح ل y بواسطة x:

$$y = e^{3x^2 - 4}$$

2. (i) **بالنسبة لكل واحدة من الدوال ، عبروا عن y بواسطة x.**

أ) $\begin{cases} f(x) = 5x - 2 \\ y = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = 5x - 2 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} f(x) = x - 5 \\ y = [f(x)]^6 \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = 5x^3 - 2 \\ y = [f(x)]^2 \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} f(x) = 6x - 2 \\ y = \dfrac{1}{[f(x)]^2} \end{cases}$

و) $\begin{cases} f(x) = 4 - 2x^2 \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

(ii) – **هل الدالة f التي في البند أ ، معرّفة لكل x؟**

– **هل الدالة $\dfrac{1}{f}$ التي في البند أ، معرّفة لكل x؟ فسروا.**

3. **افتحوا برنامج Excel أو صفحة الكترونية اخرى.**
اذا كان نظام الاعمدة من اليمين الى اليسار، نفذوا الضغطة الموجودة على الشاشة في الطرف الايمن، في السطر الذي فوق «الصفحة».

أ) **نحسب قيم** $y = \dfrac{1}{f(x)}$ **بالنسبة للدالة** $f(x) = x^2 + 3x$

انتبهوا: في هذه الفعالية وفي قسم من التمارين، الصفحة مقسومة الى قسمين: التمارين عن جهة اليمين والتعليمات للتنفيذ عن جهة اليسار.

سجلوا في العمود A قيماً لـ x من العدد -4 حتى العدد 8 .

انقلوا المؤشر الى الخلية الاولى في العمود A ، اضغطوا (تؤشر الخلية) سجلوا -4 وبعد ذلك Enter .

سجلوا في الخلية الثانية في العمود A (مشدد الان).

= a1 + 1

اضغطوا Enter.

انقلوا المؤشر الى الطرف الايمن السفلي للخلية، تؤشر + ، اضغطوا واسحبوا الى اسفل حتى الخلية 13 وحرروا.

سجلوا في العمود B قيم f بالنسبة للقيم التي سجلتم في العمود A.

سجلوا في الخلية الاولى في العمود B

= a1 ^ 2 + 3 * a1

اضغطوا Enter .

انقلوا المؤشر الى الطرف الايمن السفلي للخلية الاولى في العمود B ، تؤشر + ، اضغطوا واسحبوا حتى الخلية 13 .

سجلوا في العمود c قيم الدالة $\frac{1}{f}$ بالنسبة للقيم التي سجلتم في العمود B .

سجلوا في الخلية الاولى في العمود C

= 1/b1

، اسحبوا حتى الخلية 13 .

احسبوا بطريقة مباشرة قيم الدالة $\frac{1}{f}$ بالنسبة للقيم المسجلة في العمود A

سجلوا في الخلية الاولى في العمود D.

= 1 / (a1 ^ 2 + 3 * a1)

واسحبوا حتى الخلية 13.

ب) هل حصلتم في العمود D على قيم كتلك في العمود C؟ فسروا

جـ) (i) عبروا عن الدالة $\frac{1}{f}$ بصورة صريحة بواسطة x: y =

(ii) في أية قيم لـ x ، تكون هذه الدالة غير معرّفة؟

(iii) افحصوا المسجل في الخلايا الملائمة في العمودين (C و D) على شاشة الحاسوب.

4. أ) نحسب قيم $y = [f(x)]^2$ بالنسبة للدالة $f(x) = 2x - 4$

امحوا المسجل في الاعمدة B , C و D .	انقلوا المؤشر الى الخلية الاولى في العمود B ظللوا الاعمدة B , C و D واضغطوا على Delete .

قيم التعويض التي سجلتم في العمود A تبقى لهذا التمرين ايضا.

(i) سجلوا في الخلية الاولى في العمود B ، تعليمات ملائمة ل f(x) بواسطة al ، ثم احسبوا القيم حتى الخلية 13.

(ii) سجلوا في الخلية الاولى في العمود C ، تعليمات ملائمة لحساب $[f(x)]^2$ بمساعدة القيم في العمود B (سجلوا cl بواسطة bl)، ثم احسبوا القيم حتى الخلية 13.

(ii) سجلوا في الخلية الاولى في العمود D ، تعليمات ملائمة لحساب $[f(x)]^2$ بمساعدة القيم في العمود A (سجلوا dl بواسطة al)، ثم احسبوا القيم حتى الخلية 13.

ب) قارنوا بين القيم التي حصلتم عليها في العمود C وفي العمود D .

جـ) عبّروا عن $y = [f(x)]^2$ بصورة صريحة بواسطة x: y = .

5. معطاة الدالة $f(x) = 2x + 5$
بواسطة x ، سجلوا الدوال الاتية بصورة صريحة.

أ) $y = \frac{1}{f(x)}$ ب) $y = \frac{1}{f(x)} + 5$ جـ) $y = \frac{1}{2 \cdot f(x)}$

د) $y = [f(x)]^4$ هـ) $y = \sqrt{f(x)}$ و) $y = e^{f(x)}$

دوال من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$ ، $y = e^{f(x)}$ ، $y = \frac{1}{f(x)}$
$y = [f(x)]^n$ (n عدد طبيعي) وغيرها تدعى الدوال المركبة.
الدالة المعطاة بواسطة تعبير، تظهر فيه دالة اخرى، تدعى **الدالة المركبة**.

في الفصل السابق، رأينا انه يمكن بحث دالة من الصورة $y = \frac{1}{f(x)}$ بدون المشتقة، اعتمادا على بحث f.
كي نبحث دوال مركبة من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$ ، $y = e^{f(x)}$ توجد حاجة احيانا، لاستعمال مشتقتها.
كي نشتق دالة مركبة، علينا تنفيذ عملية عكسية لتلك التي نفذناها في التمارين السابقة، يعني ان نعرضها بواسطة الدالتين اللتين تتألف منهما.

ع.ذ 6. سجلوا الدالتين اللتين تتألف منهما كل واحدة من الدوال المركبة الاتية (انظروا المثال).

مثال: الدالة المركبة $y = e^{2x+5}$

الدالتان التي تتألف منهما: $\begin{cases} f(x) = 2x + 5 \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

أ) $y = \sqrt{2x+1}$

ب) $y = \frac{1}{x^2 - 5x}$

جـ) $y = e^{x^2+2x}$

د) $y = (x^2 + 3x)^4$

هـ) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

و) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$

ز) $y = \frac{1}{3e^x}$

ح) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ع.ذ 7. معطاة الدالة $y = e^{x^2-5x}$

أ) اكملوا تسجيل الدالتين اللتين تتألف منهما:

$f(x) =$

$y =$

ب) نحسب قيم الدالة بمساعدة الحاسوب.

سجلوا في العمود A قيما من 1- حتى 6 بقفزات 0.5 .	سجلوا 1- في الخلية الاولى، وسجلوا = a1 + 0.5 في الخلية الثانية. ثم اضغطوا Enter واسحبوا الى اسفل حتى الخلية 15 .
سجلوا قيم f في العمود B .	سجلوا = a1 ^ 2 – 5 * a1 في الخلية الاولى من العمود B . اسحبوا الي اسفل حتى الخلية 15.
سجلوا قيم الدالة المعطاة في العمود C بمساعدة القيم المسجلة في العمود B .	انقلوا الاشارة الى C1 . انقروا على fx ، من التفاصيل الناتجة اختاروا الرياضيات والمثلثات (عن اليمين)، اختاروا Exp واضغطوا للمصادقة. سجلوا B1 في النافذة واضغطوا للمصادقة. ينتج في C1 : Exp(B1) = (في الطبعة القديمة من Excel اضغطوا على «المرحلة التالية» بدلا من المصادقة) اسحبوا حتى الخلية 15.
سجلوا قانونا في العمود D بحيث يمكنكم ان تحسبوا قيم الدالة المعطاة بمساعدة القيم في العمود A.	انتقلوا الى D1 واضغطوا على fx اختاروا الرياضيات والمثلثات، اختاروا Exp واضغطوا للمصادقة. سجلوا = a1 ^ 2 – 5 * a1 في النافذة واضغطوا للمصادقة. ينتج في D1: = EXP(a1^2 – 5*a1) اسحبوا حتى الخلية 15 .

جـ) قارنوا بين القيم التي حصلتم عليها في العمود C وفي العمود D .

8. معطاة الدالة $y = (2x - 4)^4$. نحسب قيم الدالة بواسطة الحاسوب.

- امحوا المسجل في الاعمدة B , C , D .

أ) سجلوا في الحاسوب، تعليمات ملائمة في العمود B بواسطة a1 لتحصلوا على الدالة المعطاة.

احسبوا قيماً حتى الخلية 15.

ب) (i) سجلوا الدالة $y = (2x - 4)^4$ بواسطة الدالتين اللتين تتركب منهما

$f(x) =$

$y =$

(ii) احسبوا قيم f بواسطة الحاسوب. من اجل ذلك، سجلوا في الخلية الاولى من العمود C تعليمات ملائمة لتحصلوا على f. احسبوا قيماً حتى الخلية 15.

(iii) سجلوا في الخلية الاولى من العمود D تعليمات ملائمة لتحصلوا على الدالة المعطاة، بمساعدة القيم في العمود C.

جـ) افحصوا هل حصلتم على نفس القيم في العمودين B و D .

9. معطاة الدالة $y = \sqrt{2x - 2}$.

- امحوا المسجل في الاعمدة B , C , D .

أ) احسبوا قيم الدالة بواسطة الحاسوب.

من أجل ان تحصلوا على $\sqrt{}$ ، اضغطوا fx واختاروا الرياضيات والمثلثات.

اختاروا SQRT واضغطوا للمصادقة.

سجلوا $2 * a1 - 2$ في النافذة واضغطوا للمصادقة.

ينتج في الخلية B1: $= SQRT (2 * a1 - 2)$

ب) (i) سجلوا الدالة $y = \sqrt{2x - 2}$ بواسطة دالتين

$f(x) =$

$y =$

(ii) احسبوا بواسطة بواسطة الحاسوب، قيم f في العمود C .

(iii) سجلوا في الخلية الاولى من العمود D تعليمات ملائمة لتحصلوا على الدالة المعطاة، بمساعدة القيم في العمود C.

جـ) افحصوا هل حصلتم علي نفس القيم في العمودين B و D .

د) (i) ماذا يحدث لقيم الدالة بالنسبة لقيم سالبةل$f(x) = 2x - 2$ ؟

(ii) ما هو مجال تعريف الدالة $y = \sqrt{2x - 2}$ ؟

اذا تعلتم هذا البند بواسطة برنامج Excel ، انتقلوا الى صفحة 184 .

الدالة المركبة - بدون حاسوب

1. اقرأوا جميع الامثلة، وبمساعدتها أجيبوا عن السؤال2 .

مثال أ:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 \\ y = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$$

تعبير صريح ل y بواسطة x:

$$y = \frac{1}{3x^2 - 4}$$

مثال ب:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$$

تعبير صريح ل y بواسطة x:

$$y = \sqrt{3x^2 - 4}$$

مثال جـ:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 \\ y = [f(x)]^3 \end{cases}$$

تعبير صريح ل y بواسطة x:

$$y = (3x^2 - 4)^3$$

مثال د:

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 4 \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$$

تعبير صريح ل y بواسطة x:

$$y = e^{3x^2 - 4}$$

2. (i) بالنسبة لكل واحدة من الدوال، عبروا عن y بواسطة x.

أ)
$$\begin{cases} f(x) = 5x - 2 \\ y = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} f(x) = 5x - 2 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$$

جـ)
$$\begin{cases} f(x) = x - 5 \\ y = [f(x)]^6 \end{cases}$$

د)
$$\begin{cases} f(x) = 5x^3 - 2 \\ y = [f(x)]^2 \end{cases}$$

هـ)
$$\begin{cases} f(x) = 6x - 2 \\ y = \dfrac{1}{[f(x)]^2} \end{cases}$$

و)
$$\begin{cases} f(x) = 4 - 2x^2 \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$$

(ii) – هل الدالة f التي في البند أ، معرّفة لكل x؟

– هل الدالة $\frac{1}{f}$ التي في البند أ، معرّفة لكل x؟ فسروا.

3. معطاة الدالة $f(x) = x^2 + 1$.

أ) اكملوا السطر الثاني من الجدول.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	10
f								
$\frac{1}{f}$								

ب) اكملوا السطر الثالث من الجدول – استعينوا بالقيم التي سجلتموها في السطر الثاني.

جـ) (i) عبروا عن y بشكل صريح، بواسطة x.

(ii) عوضوا $x = 3$ في التعبير الذي حصلتم عليه واحسبوا، ثم قارنوا مع المسجل في الجدول.

4. معطاة الدالة $f(x) = 2x + 5$

بواسطة x، سجلوا الدوال الاتية بصورة صريحة

أ) $y = \frac{1}{f(x)}$ د) $y = [f(x)]^2$

ب) $y = \frac{1}{f(x)} + 5$ هـ) $y = \sqrt{f(x)}$

جـ) $y = \frac{1}{2 \cdot f(x)}$ و) $y = e^{f(x)}$

دوال من الصورة $y=\sqrt{f(x)}$ ، $y = e^{f(x)}$ ، $y = \frac{1}{f(x)}$
$y = [f(x)]^n$ (n عدد طبيعي) وغيرها تدعى الدوال المركبة.
الدالة المعطاة بواسطة تعبير، تظهر فيه دالة اخرى، تدعى الدالة المركبة.

في الفصل السابق، رأينا انه يمكن بحث دالة من الصورة $y = \frac{1}{f(x)}$ بدون المشتقة، اعتمادا علي بحث f.

كي نبحث دوال مركبة من الصورة $y= \sqrt{f(x)}$ ، $y = e^{f(x)}$
توجد حاجة احيانا، لاستعمال مشتقتها.
كي نشتق دالة مركبة، علينا تنفيذ عملية عكسية لتلك التي نفذناها في التمارين السابقة، يعني ان نعرضها بواسطة الدالتين اللتين تتألف منهما.

ع.ذ 5. سجلوا الدالتين اللتين تتألف منهما كل واحدة من الدوال المركبة الاتية (انظروا المثال).

مثال: الدالة المركبة $y = e^{2x + 5}$

الدالتان اللتان تتألف منهما: $\begin{cases} f(x) = 2x + 5 \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

أ) $y = \sqrt{2x + 1}$ هـ) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

ب) $y = \frac{1}{x^2 - 5x}$ و) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$

جـ) $y = e^{x^2 + 2x}$ ز) $y = \frac{1}{3e^x}$

د) $y = (x^2 + 3x)^4$ ح) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

تمارين

6. معطاة الدالة $f(x) = 3x^2 - 2$
بواسطة x ، سجلوا الدوال الاتية بصورة صريحة.

أ) $y = \sqrt{f(x)}$

ب) $y = \sqrt{f(x)} + 3$

جـ) $y = \frac{1}{f(x)}$

هـ) $y = e^{f(x)}$

و) $y = 3 \cdot e^{f(x)}$

ز) $y = e^{3 \cdot f(x)}$

7. سجلوا الدالتين اللتين تتألف منهما كل واحدة من الدوال الاتية:

أ) $y = \frac{1}{4 - 2x^2}$

ب) $y = \sqrt{4 - 2x}$

جـ) $y = e^{x^2 + 2x}$

هـ) $y = e^{-x}$

و) $y = (1 - 4x)^2$

ز) $y = (6 - x)^4$

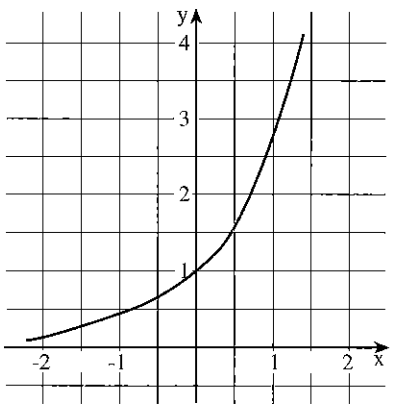
مشتقة الدالة المركبة

في الفصل السابق، تعرفتم الى دوال مركبة من الصورة:

$e^{f(x)}$ $\quad \sqrt{f(x)}$ $\quad 1/f(x)$ $\quad [f(x)]^n$ (n عدد طبيعي) وغيرها

في هذا الفصل، سوف تتعلمون ايجاد المشتقة لمثل هذه الدوال، وسوف ترون كيفية استعمال المشتقة في بحث دوال مركبة، وفي ايجاد معادلة مماس أو حل مسائل نهايات قصوى

1. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = e^x$.



أ) اكملوا:

$f(1) =$

$f(0) =$

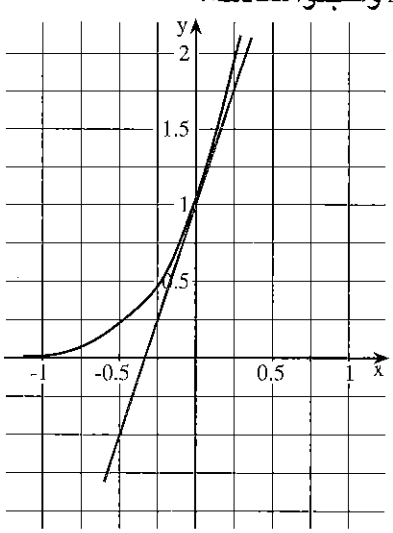
$f(-1) =$

مشتقة الدالة f هي:

$f'(x) = e^x$

ب) (i) اكملوا $f'(0)$

(ii) ارسموا المماس في النقطة $x = 0$ وسجلوا معادلته.



2. الخط البياني المرسوم هو للدالة $g(x)=e^{3x}$ ومماسها في النقطة $(0,1)$

أ) ما هو ميل المماس في النقطة $x = 0$؟

ب) مشتقة الدالة g هي:
$g'(x) = 3e^{3x}$
احسبوا ميل الدالة في النقطة $(0,1)$ وقارنوا مع ما حصلتم عليه في البند (أ).

3. معطاة الدالة $y = (x^2 + 3)^2$.

أ) سجلوا الدالتين اللتين تتركب منهما.

$f(x) =$

$y =$

ب) مشتقة الدالة هي: $y' = \underbrace{2(x^2 + 3)} \cdot 2x$

استعينوا باشارة القوسين (_____) وفسروا كيف تم تنفيذ المشتقة.

افحصوا ايضا، هل في التمرين 2 بند (ب) ثم تنفيذ المشتقة بنفس الطريقة.

جـ) (i) للفحص: فكوا القوسن في الدالة $y = (x^2 + 3)^2$ واشتقوا

(ii) بسطوا المشتقة المسجلة في البند (ب) ، ثم قارنوا مع ما سجلتم في (i).

لاشتقاق دالة مركبة من دالتين، يجب اشتقاق الدالتين ثم ضرب المشتقتين الواحدة في الاخرى.

مثال: نشتق الدالة المركبة $y = (3x - 4x^2)^7$

حتى الان، فصلنا الدالة الى دالتين:

$f(x) = 3x - 4x^2$

$y = [f(x)]^7$

بدلا من الفصل الى دالتين، نضع الدالة f في اطار

$$y = \left(\boxed{3x - 4x^2}\right)^7$$

$$y' = 7 \cdot \left(\boxed{3x - 4x^2}\right)^6 \cdot (3 - 8x)$$

4. أ) معطاة الدالة $y = \left(\boxed{5x - 2}\right)^6$.

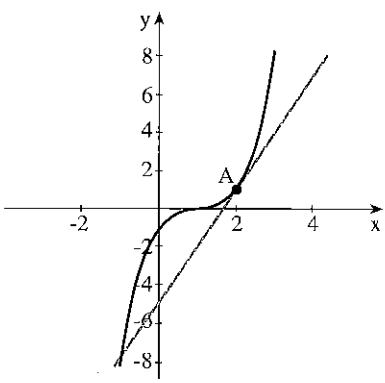
فسروا لماذا $y' = 30(5x - 2)^5$

ب) ضعوا الدالة $f(x)$ في اطار من الصورة $y = (f(x))^n$ ، ثم اشتقوا.

$y = (1 + x)^5$ (iii) $y = (4 - 2x)^3$ (i)

$y = (2x - x^2)^2$ (iv) $y = (3 + 2x^2)^3$ (ii)

5. مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = (x - 1)^3$ ومماس لها في النقطة $A(2,1)$



أ) (i) اشتقوا الدالة f واحسبوا ميل المماس في النقطة A.

(ii) افحصوا اجابتكم، هل حقا تلائم ميل المماس المرسوم.

ب) سجلوا معادلة المماس.

6. جدوا معادلة مماس الدالة $y = (2 - x^2)^3$ في النقطة $x = -2$.

في التمارين 10 - 7 سنعالج دوال مركبة من الصورة $y = e^{f(x)}$

7. **لاشتقاق دالة مركبة من الصورة $e^{f(x)}$ ، ضعوا $f(x)$ في اطار بالشكل التالي $e^{\boxed{f(x)}}$ ثم اشتقوا.**

مثال: $y = e^{\boxed{x^2+3x}}$ **المشتقة هي** $y' = e^{\boxed{x^2+3x}} \cdot (2x+3)$.

أ) $y = e^{5x}$

ب) $y = e^{-2x+5}$

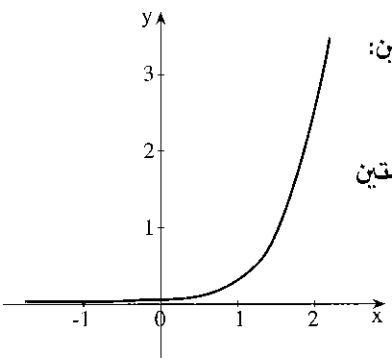
جـ) $y = e^{-x^2}$

د) $y = 3e^{0.5x}$

هـ) $y = e^{x} + e^{-x}$

و) $y = 2e^{3x} - 4e^{-3x}$

8. **مرسوم الخط البياني للدالة** $y = e^{2x-3}$



أ) **جدوا الاحداثي y لكل واحدة من النقطتين:**
$A(0.5, \quad)$ $B(2, \quad)$
الواقعتين على الخط البياني للدالة.

ب) **اشتقوا وجدوا ميلي المماسين في النقطتين A و B.**

جـ) **في أي النقطتين يكون الميل اكبر؟**

د) **افحصوا حسب الرسم البياني اذا كانت اجابتكم منطقية.**

9. **معطاة الدالة:** $y = -2\,e^{x^2-1}$

أ) **جدوا الاحداثي y للنقطة** $A(1, \quad)$ **الواقعة على الخط البياني للدالة.**

ب) **احسبوا ميل الدالة في النقطة A.**

جـ) **جدوا معادلة المماس في النقطة A.**

10. **معطاة الدالة** $y = e^{2x} - 4x$.

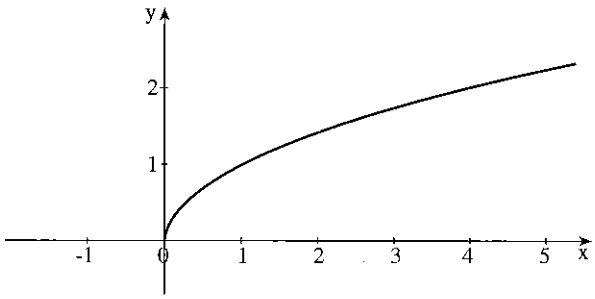
جدوا معادلة مماس الدالة في النقطة $x = 0$.

في التمارين 15 - 11 سنعالج دوال مركبة من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$

ع.ذ

11. **مرسوم الخط البياني للدالة:**

$h(x) = \sqrt{x}$



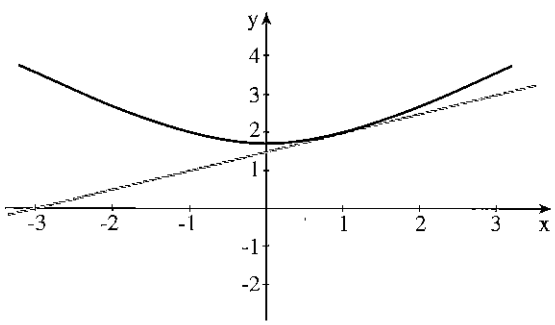
مشتقة الدالة h هي:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

أ) اكملوا: $h(4) =$ $h'(4) =$

ب) ارسموا مماس الدالة في النقطة $x = 4$ وجدوا معادلته.

12. **مرسوم الخط البياني للدالة** $g(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ **ومماس لها في النقطة** $(1,2)$.



أ) حاولوا ايجاد مشتقة الدالة g حسب القاعدة التي سجلتموها بخصوص اشتقاق دالة مركبة، $g'(x) =$

ب) اكملوا $g'(1) =$

هل العدد الذي حصلتم عليه يلائم ميل مماس الدالة المرسوم في النقطة $(1,2)$؟

13. ضعوا الدالة $f(x)$ في اطار من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$ ، ثم اشتقوا.

مثال: $y = \sqrt{\boxed{x^2 + 3x}}$.

المشتقة: $y' = \frac{1}{2\sqrt{\boxed{x^2+3x}}} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{\boxed{x^2+3x}}}$

أ) $y = \sqrt{3x - 5}$ جـ) $y = \sqrt{2x + 3}$

ب) $y = \sqrt{7x - x^2}$ د) $y = \sqrt{x^2 - x}$

14. أ) جدوا مشتقة الدالة $g(x) = \sqrt{x^3 - 4}$.

ب) احسبوا $g'(2)$.

جـ) جدوا معادلة المماس في النقطة $(2,2)$.

15. جدوا معادلة مماس الدالة $y = \sqrt{x - 8}$ في النقطة $x = 9$ (من أجل ذلك، جدوا ميل المماس والاحداثي y للنقطة).

في الفصل الثاني، بحثنا الدالة $\frac{1}{f}$ بمساعدة الدالة f دون اشتقاق. احيانا توجد حاجة للاستعانة بمشتقة الدالة $\frac{1}{f}$.

رأينا في هذا الفصل، ان الدالة من الصورة $\frac{1}{f}$ هي دالة مركبة وبناء على ذلك، يمكننا ايجاد مشتقتها كما وجدنا مشتقة الدالة المركبة.

16. كل واحدة من الدوال الاتية هي من الصورة $y = \frac{1}{f(x)}$. ضعوا الدالة $f(x)$ في اطار واشتقوا (كما في المثال).

مثال: $y = \frac{2}{\boxed{x^2 + x}}$ $\quad y' = -\frac{2 \cdot (2x + 1)}{(\boxed{x^2 + x})^2}$

أ) $y = \frac{1}{2x - 5}$ $\quad$ ب) $y = \frac{3}{x^2 + 1}$ $\quad$ جـ) $y = \frac{2}{3x}$

د) $y = \frac{1}{3x + 4}$ $\quad$ هـ) $y = \frac{5}{x^2}$ $\quad$ و) $y = -\frac{2}{x^3}$

17. معطاة الدالة $y = \frac{1}{x^2 - 3x}$

أ) جدوا الاحداثي y للنقطة $A(1, \quad)$.

ب) جدوا ميل الدالة في النقطة A .

جـ) جدوا معادلة المماس في النقطة A .

تمارين

18. اشتقوا الدوال الاتية:

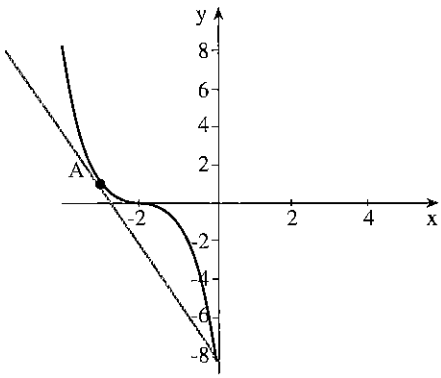
أ) $y = e^{4x^2 - 2x}$ $\quad$ ب) $y = 2e^{-2x} + 3e^{4x}$ $\quad$ جـ) $y = \sqrt{4 - x} + x^3 - 5$

د) $y = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{4 - x^2}$ $\quad$ هـ) $y = \frac{3}{4 - x^2}$ $\quad$ و) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{3 + 2x}$

ز) $y = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2} + 3x$ $\quad$ ح) $y = \frac{4 - x}{2} + \frac{\sqrt{9 - x}}{3}$

19. مرسوم الخط البياني للدالة
$y = -(x + 2)^3$,

ومماس لها في النقطة A(-3,1)



أ) اشتقوا الدالة واحسبوا ميل المماس في النقطة A.

ب) افحصوا، هل حقا اجابتكم تلائم ميل المماس المرسوم.

20. في كل بند، معطاة دالة والاحداثي x لنقطة على خطها البياني.
جدوا معادلة مماس الدالة في نفس النقطة.

أ) $y = e^{-2x} - e^{2x}$, $x = 0$

ب) $y = \sqrt{x^2 + 7}$, $x = -3$

جـ) $y = \frac{1}{8 - 4x^2}$, $x = 1$

د) $y = (6 - x)^4$, $x = 5$

بحث الدوال المركبة

1. أ) أي من الدوال المسجلة الاتية، معرّفة لكل x؟

$f(x) = \sqrt{x}$

$p(x) = \dfrac{2x^2}{(3-x)(4+x)}$

$g(x) = (3+2x)^4$

$n(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$

$h(x) = \sqrt[4]{4-x}$

$l(x) = e^{5-2x}$

$m(x) = \dfrac{3}{x-6}$

$q(x) = \sqrt{x^4+2}$

ب) أي من الدوال المذكورة أعلاه، معرفة لكل الاعداد ما عدا قيمة واحدة؟

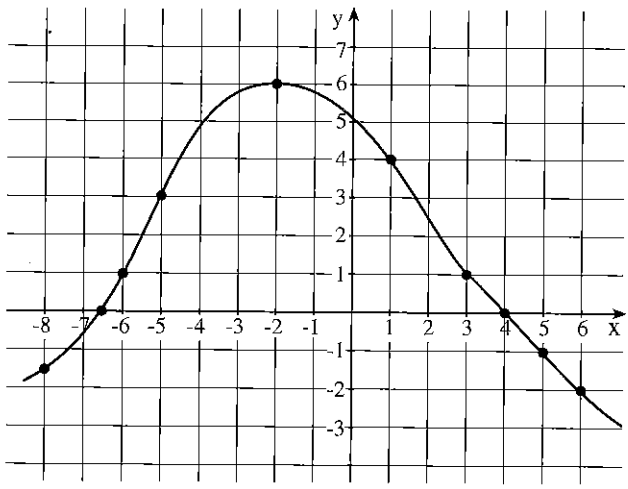
جـ) أي من الدوال المذكورة أعلاه، معرفة لكل الاعداد ما عدا قيمتين؟

د) سجلوا الدوال المتبقية (تلك التي لم تسجلوها في البندين السابقين). لكل دالة منها، سجلوا على الاقل ثلاثة اعداد لا تكون فيها الدالة معرفة.

خلال العمل، سنعالج دوال من الصورة $y = \sqrt[4]{f(x)}$ حيث اغلبها لا تكون معرفة لكل x . في التمارين، يوجد ايضا بحث لدوال مركبة اخرى.

2. الخط البياني المرسوم هو للدالة f.

$g(x) = \sqrt{f(x)}$



أ) لكل واحدة من النقط المعينة، اقرأوا قيمة f. واذا امكن، احسبوا قيم g ثم عينوها في نفس هيئة المحاور.

ب) سجلوا نقطا مشتركة بين الدالتين f و g.

جـ) اكملوا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة g.

د) افحصوا في المجال بين $x = 3$ و $x = 4$ ، هل يكون الخط البياني للدالة g فوق الخط البياني للدالة f أم تحته؟ عدّلوا الخط البياني اذا لزم الامر.

هـ) لوّنوا على المحور x ، المجال المشترك للدالتين f و g .

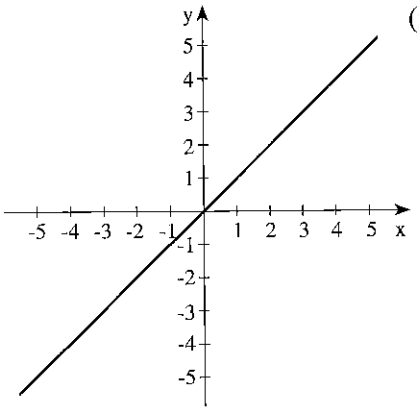
كي نعرف مجال التعريف للدالة $g(x) = \sqrt{f(x)}$ ، علينا ايجاد المجال الذي تكون فيه f موجبة او صفرا.

3. أ) الدوال المرسومة هي دوال خطية.

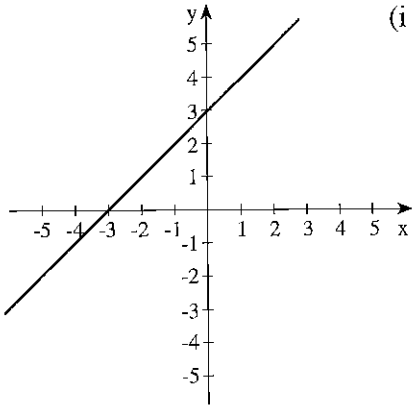
– شددوا جزءا من الخط البياني، حيث الدالة موجبة او صفر .

– سجلوا المجال الملائم.

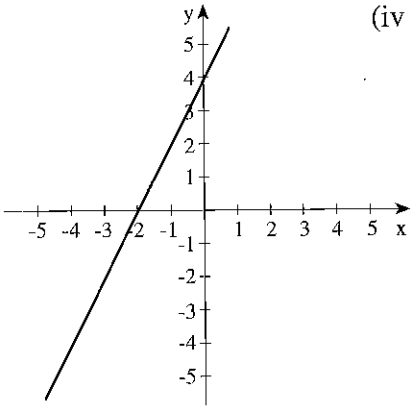
(ii



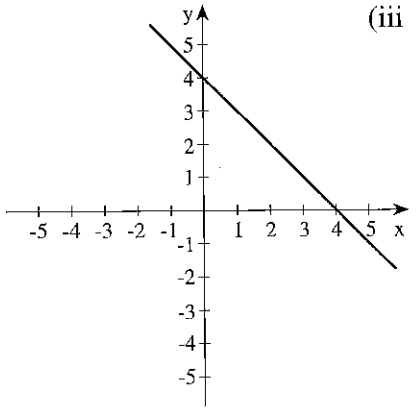
(i



(iv



(iii



ب) معطاة أربع دوال من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$. حيث f تبين واحدا من المستقيمات المرسومة في البند (أ).

– ناظروا لكل دالة من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$ ، المستقيم f من البند (أ)

$$g(x) = \sqrt{4 - x} \qquad h(x) = \sqrt{2x + 4}$$

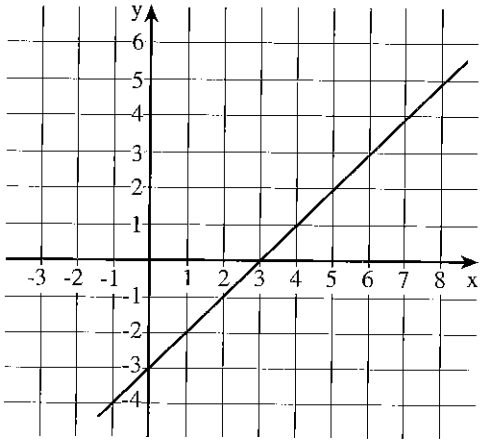
$$m(x) = \sqrt{x} \qquad n(x) = \sqrt{x + 3}$$

– سجلوا مجال تعريف كل واحدة من الدوال.

4. معطاة الدالة $g(x) = \sqrt{x-3}$

أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟
(يمكنكم الاستعانة بالخط البياني للدالة الخطية المرسومة).

ب) جدوا مشتقة الدالة g، وفسروا لماذا لا تكون المشتقة صفرا.



جـ) للدالةg توجد نقطة قصوى واحدة. سجلوا احداثياتها ثم عيّنوها في هيئة المحاور.

د) اكملوا وعينوا في نفس هيئة المحاور، نقطا اخرى على الخط البياني للدالة g.
(3.5,) , (4 ,) , (7,) , (8,).

هـ) اكملوا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة.
(يمكنكم حساب نقط اخرى).

5. ابحثوا الدالة $y = \sqrt{3x-9}$ حسب الخطوات الاتية:

أ) جدوا مجال التعريف.

ب) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.

جـ) جدوا النقط القصوى.

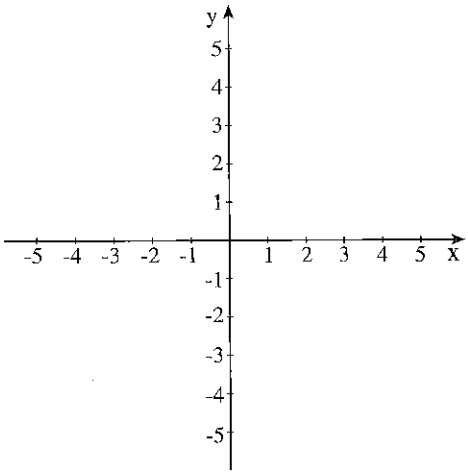
د) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة (احسبوا وعينوا نقطا اخرى).

هـ) ارسموا المستقيم $f(x) = 3x - 9$ في نفس هيئة المحاور ايضا.

في التمارين الاتية، سنعالج دوال مركبة من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$ ، عندما تكون f دالة تربيعية.

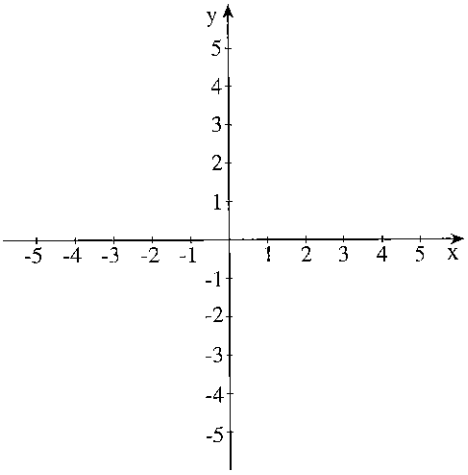
6. معطاة الدالة $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

أ) ارسموا شكلا تقريبيا للدالة $f(x) = x^2 - 4$.
(جدوا نقط التقاطع مع المحورين ونقطة النهاية الصغرى).



ب) سجلوا المجالات حيث f موجبة او صفر.

جـ) استعينوا بالبند (ب) وسجلوا مجال تعريف الدالة g.

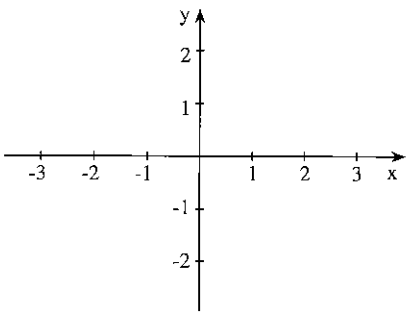


د) استمروا في بحث الدالة g وارسموا شكلا تقريبيا لها، في هيئة المحاور أمامكم.

7. معطاة الدالة $h(x) = \sqrt{0.5x^2 - 2}$

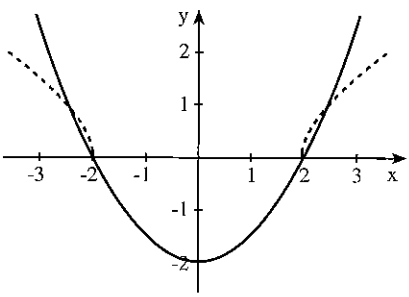
أ) ما هو مجال تعريف الدالة؟

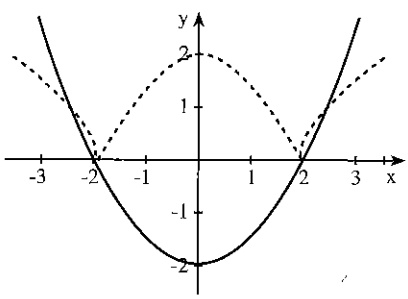
(من أجل ذلك، ارسموا شكلا تقريبيا للدالة $f(x) = 0.5x^2 - 2$)

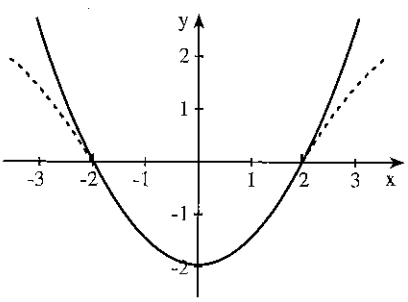


ب) في كل واحدة من هيئات المحاور، مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = 0.5x^2 - 2$ والخط البياني لدالة اخرى (خط متقطع).

أي من الخطوط (المتقطعة) يلائم الدالة المعطاة؟ فسّروا.







جـ) (i) عوّضوا:

$f(1) =$ $f(2) =$ $f(2.3) =$ $f(3) =$

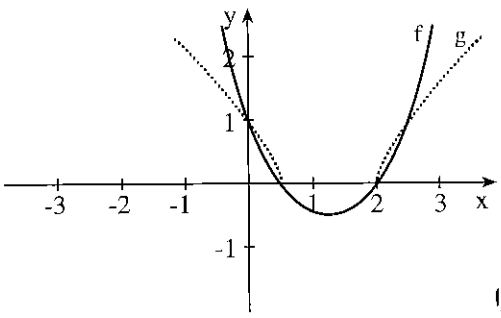
$h(1) =$ $h(2) =$ $h(2.3) =$ $h(3) =$

(ii) افحصوا اجابتكم عن البند(ب)

ع.ذ 8. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:

$f(x) = x^2 - 2.5x + 1$

$g(x) = \sqrt{x^2 - 2.5x + 1}$



أ) استعينوا بالشكل، وسجلوا احداثيات النقط المشتركة.
(عوضوا في قانوني الدالتين، وافحصوا اجاباتكم)

ب) (i) متى يكون الخط البياني للدالة g فوق الخط البياني للدالة f ؟ $(g(x)>f(x))$
– اهتموا بقيم الدالتين.
(ii) متى يكون الخط البياني للدالة g تحت الخط البياني للدالة f ؟ اهتموا بقيم الدالتين.

في التمارين الاخيرة، عرفتم دالة من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$ عندما f دالة تربيعية. استعملوا الخط البياني للدالة التربيعية، كي ترسموا الخط البياني للدالة $y = \sqrt{f(x)}$. يمكن بحث دوال كهذه بمساعدة المشتقة ايضا.

9. معطاة الدالة $f(x) = \sqrt{(4-x)^2 + x^2}$

أ) فسروا لماذا تكون الدالة معرفة لكل x.

ب) جدوا المشتقة. ساوها صفرا وجدوا النقط القصوى.
سجلوا نوع النقط القصوى ايضا.

جـ) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة.

في التمارين الاتية، يمكنكم ان تبحثوا حسب رغبتكم (بمساعدة الخط البياني للدالة التربيعية الملائمة او بواسطة المشتقة).

10. معطاة الدالة $g(x) = \sqrt{4x - x^2}$

أ) ارسموا شكلا تقريبيا للقطع المكافىء $f(x) = 4x - x^2$ (يكفي ايجاد نقط تقاطع القطع المكافىء مع المحور x ، ثم تحديد نوع النقطة القصوى والرسم بعد ذلك).

ب) ما هو مجال تعريف الدالة g؟

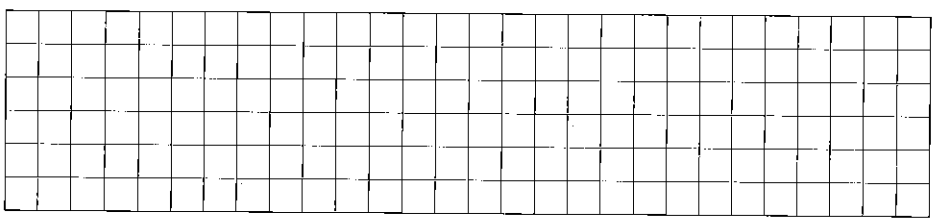
جـ) جدوا نقط تقاطع الدالة g مع المحورين.

د) جدوا النقط القصوى للدالة g (يشمل الطرفين)

هـ) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة g .

11. أ) (i) ارسموا 3 مثلثات قائمة الزاوية، يحث يكون مجموع الضلعين القائمين في كل مثلث، مساويا 4.

(ii) سجلوا طولي الضلعين القائمين، ثم احسبوا طول الوتر في كل مثلث (استعينوا بنظرية فيثاغورس)



(iii) حاولوا رسم مثلث قائم الزاوية آخر (فيه ايضا مجموع الضلعين القائمين يساوي 4)، بحيث يكون وتره أقصر من الوتر في المثلثات التي رسمتم في البند (i).

ب) (i) ارمزوا الى احد الضلعين القائمين بالحرف x ، وسجلوا طول الوتر كدالة ل x.
ان لم تخطئوا، فانكم تحصلون على القانون المسجل في المسألة 9 .
افحصوا.

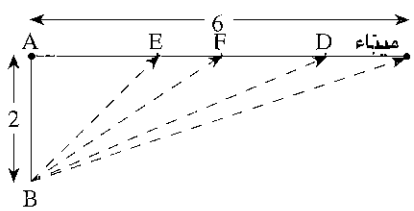
(ii) على الشكل الذي حصلتم عليه في المسألة 9 ، شددوا جزءا من الخط البياني يلائم المسألة..

جـ) (i) لأية قيمة x ، يكون الوتر أقصر ما يمكن؟

(ii) سجلوا أطوال الاضلاع الثلاثة.

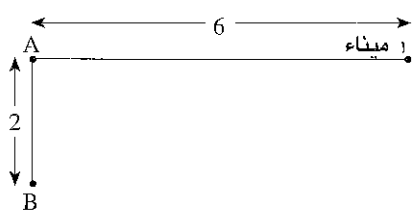
(iii) ما نوع المثلث الذي حصلتم عليه؟

12 أبحر صياد بقاربه. على بُعد 2كم من الشاطىء، سمع بالراديو انه ربح في اللوتو. طبعا، أراد الصياد الوصول الى الميناء بأسرع وقت ممكن. يبعد الميناء 6كم الى الشرق من نقطة على الشاطىء هي الاقرب الى القارب.

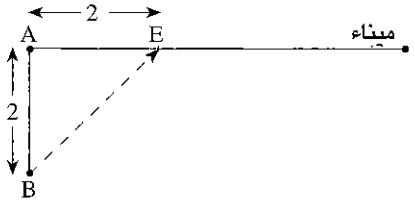


قرر الصياد الابحار بخط مستقيم الى أية نقطة على الشاطىء بسرعة 3كم/س ثم يستمر سيرا على الاقدام بسرعة 4كم/س.
يمكن للصياد ان يختار مسارات مختلفة (انظروا الشكل)

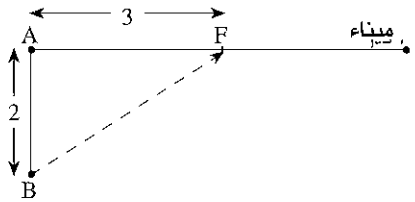
أ) سجلوا المسافات (في الماء وعلى اليابسة) التي يقطعها الصياد لو اختار الوصول عن طريق النقطة A.
احسبوا الزمن الذي يستغرقه الصياد حتى يصل الى الميناء، في هذه الحالة.



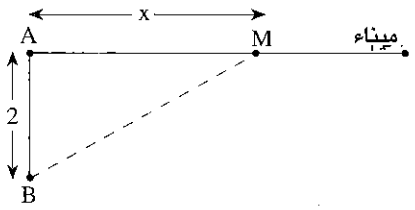
ب) احسبوا المسافات (في الماء وعلى اليابسة) التي يقطعها الصياد لو اختار الوصول عن طريق النقطة E. احسبوا الزمن في هذه الحالة.



جـ) احسبوا الزمن الذي يستغرقه الصياد حتى يصل الميناء عن طريق النقطة F.



د) نرمز بالحرف x الى المسافة عن النقطة A (انظروا الشكل). عبّروا عن BM بمساعدة x، وسجلوا دالة تعبّر عن الزمن الذي يستغرقه الصياد حتى يصل الى الميناء عن طريق النقطة M.



هـ) جدوا قيمة x التي منها يتحقق أقل زمن ممكن. (دققوا حتى منزلتين بعد الفاصلة العشرية).

عينوا بالتقريب، النقطة الملائمة في الشكل.

و) هل المسار الاقصر بالنسبة للزمن، هو ايضا المسار الاقصر بالنسبة لطول المسافة؟ فسّروا.

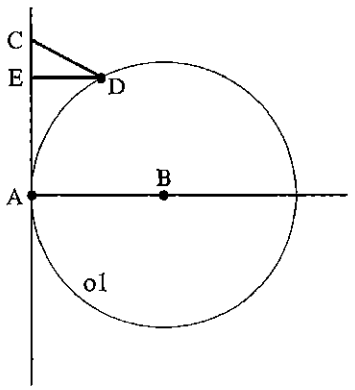
13. في هذه المسألة قسمان.

في القسم الاول، مسألة للبحث بواسطة البرمجية «هندسة في حركة»(הנדסה בתנועה) المتعلقة بالدائرة.

في القسم الثاني، مسألة مشابهة تتعلق بالقطع المكافىء، نبحثها بمساعدة التحليل.

القسم الاول: D نقطة متحركة على الدائرة (انظروا الشكل).

نبحث تغيّر طول القطة DC كدالة لطول القطعةDE.



ارسموا القطعة AB بحيث يكون طولها 3 وحدات.

← ضعوا المؤشر على الشاشة وانقروا. تتعين النقطةA.

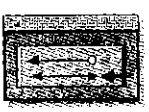
← مستقيم من A طوله 3.

ارسموا دائرة نصف قطرها AB ومركزها B.

←
← دائرة مركزها B ونصف قطرهاAB.

ارسموا عمودا على AB من النقطةA.

←
← عمود على AB من النقطةA .

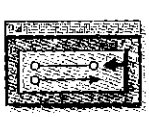

← غيروا العمود على المستقيم، أزيحوا السهم الاحمر.

عينوا نقطةD على الدائرة وارسموا عمودا من النقطةD على AC

← ضعوا الاشارة على الدائرة واضغطوا. تتعين النقطةD.

←
← عمود من النقطةD على المستقيم AC.

عودوا الى رسم القطع



صلوا DC .

قيسوا DC .

ضعوا مقياس الطول على الشاشة وسجلوا DC

قيسوا DE .

ضعوا مقياس الطول على الشاشة وسجلوا DE

ارسموا خطا بيانيا يبين تغيّر DC عندما يتغير DE .

ضعوا هيئة المحاور على الشاشة.

ضعوا الاطار على الشاشة واضغطوا.

سجلوا ماذا يمثل كل محور.

ضعوا المؤشر على السهم الصغير الذي بطرف مقياس الطول ED . اضغطوا وازيحوا حتى السهم الذي يظهر الى جانب المحور الافقي وحرروا.(ED يتسجل الى جانب المحور) اعيدوا بالنسبة لمقياس الطول DC والمحور العمودي.

غيروا وحدات على المحورين

اضغطوا مرتين على احد المحورين.
يظهر على الشاشة:

وحدات على المحورين
المحور الافقي من 0 حتى 8
المحور العمودي من 0 حتى 8

ارسموا الخط البياني: جرّوا D.

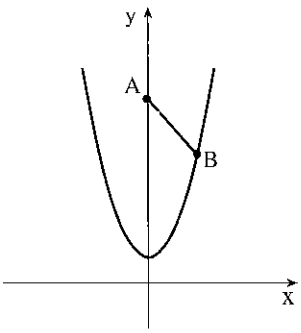
ازيحوا D، يُرسم الخط البياني.

لأية قيمة لـ DE يكون طول DC أصغر ما يمكن؟

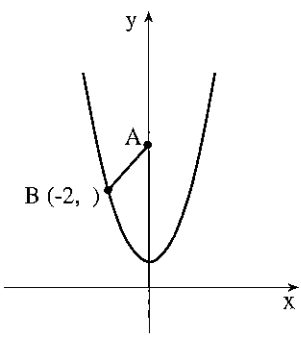
حاولوا تفسير شكل الخط البياني الناتج.

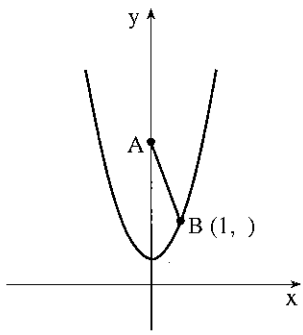
القسم الثاني:

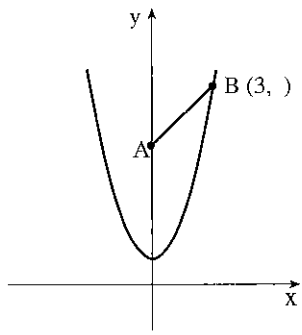
أ) أمامكم الخط البياني للدالة $f(x) = x^2 + 2$
احداثيات A : (0,8)



(i) اكملوا احداثيات B ، واحسبوا طول AB في كل شكل.

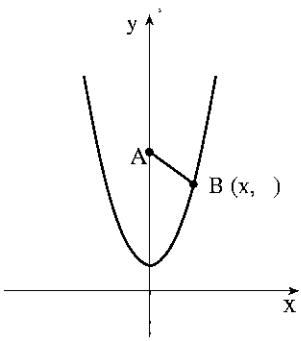




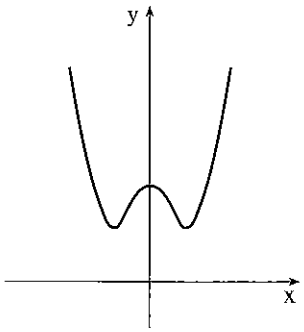


(ii) عبّروا عن طول AB بمساعدة
الاحداثي الاول للنقطة B.

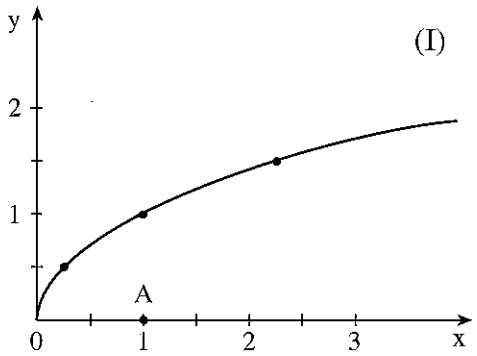
(iii) احسبوا وجدوا لأية قيمة x ، يكون
البعد AB أصغر ما يمكن.



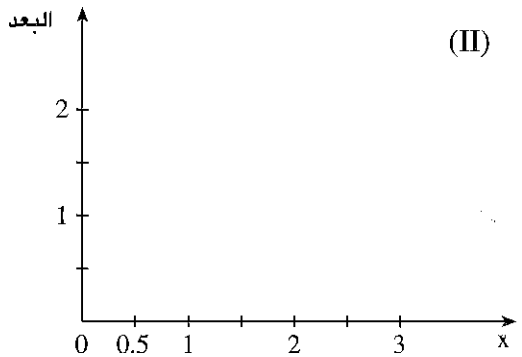
ب) الخط البياني المرسوم هو للدالة g ويبيّن طول AB كدالة ل x. سجلوا على المحورين، القيم الملائمة التي وجدتم في البند (أ) iii .



14. أمامكم الخط البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.



أ) احسبوا بُعد كل واحدة من النقطة المعينة على الخط البياني(I) ، عن النقطة A(1,0).
عينوا النقط الملائمة لكل واحد من الابعاد التي حصلتم عليها، في هيئة المحاور الفارغة(II) التي أمامكم.



هل حسب رأيكم، يوجد لدالة البعد عن النقطة A قيمة عظمى أو قيمة صغرى؟
اذا كان نعم – أين بالتقريب، تقع النقطة الملائمة على الخط البياني للدالة f.

ب) (i) سجلوا دالة تبين بعد نقطة عامة $(x, \sqrt{x})$ على الخط البياني للدالة f، عن النقطة A(1,0).

(ii) ما هي النقطة التي تقع علي أقصر بعد عن النقطة A؟

(iii) عينوا النقطة التي حصلتم عليها، في هيئة المحاور ii (من البند أ) واكملوا رسم الخط البياني.

تمارين

15. ابحثوا الدالة $y = (3 + x)^4$ حسب الخطوات الاتية:

أ) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.

ب) جدوا النقط القصوى.

جـ) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة.

د) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل.

16. ابحثوا الدالة $y = (2x - 1)^3$ حسب الخطوات الاتية:

أ) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.

ب) جدوا النقط القصوى.

جـ) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة.

د) سجلوا مجالا تكون فيه الدالة سالبة $(f(x) < 0)$.

17. (i) ابحثوا الدالة $y = e^{-x^2 + 2x}$ حسب الخطوات المسجلة في المسألة 15.

(ii) فسّروا لماذا لا يقطع الخط البياني، محور x .

18. ابحثوا الدالة $y = e^{x+1}$ حسب الخطوات المسجلة في المسألة 15 .

19. لكل واحدة من الدوال الخطية الاتية، سجلوا المجال الذي تكون فيه الدالة موجبة او صفرا. (يمكن الاستعانة برسم المستقيم الملائم).

أ) $y = x$ جـ) $y = 2x + 8$

ب) $y = -x + 12$ د) $y = -2x + 5$

20. لكل واحدة من الدوال التربيعية الاتية، سجلوا المجال الذي تكون فيه الدالة موجبة او صفرا. تجدر الاستعانة بشكل تقريبي للقطع المكافىء الملائم.

أ) $y = x^2 - 9$ د) $y = -x^2 + 6x$

ب) $y = 2x^2 + 6x$ هـ) $y = x^2 - 4x - 5$

جـ) $y = x^2 + 1$ و) $y = x^2 + 3x + 4$

21. ابحثوا الدوال من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$ التي امامكم، حسب الخطوات الاتية:

(i) جدوا مجال تعريف الدالة (المجال حيث f موجبة او صفر).

(ii) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.

(iii) جدوا النقط القصوى (يشمل الطرفين)

(iv) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للدالة.

(v) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل.

أ) $g(x) = \sqrt{4x - 12}$

ب) $m(x) = \sqrt{8x - x^2}$

جـ) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

22. أ) ارسموا الخط البياني للدالة $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ (جدوا اولا: مجال التعريف ونقط التقاطع مع المحورين والنقط القصوى).

ب) ارسموا في نفس هيئة المحاور، الخط البياني للدالة $-g(x)$.

جـ) ما هو مجال تعريف الدالة $-g(x)$ ؟

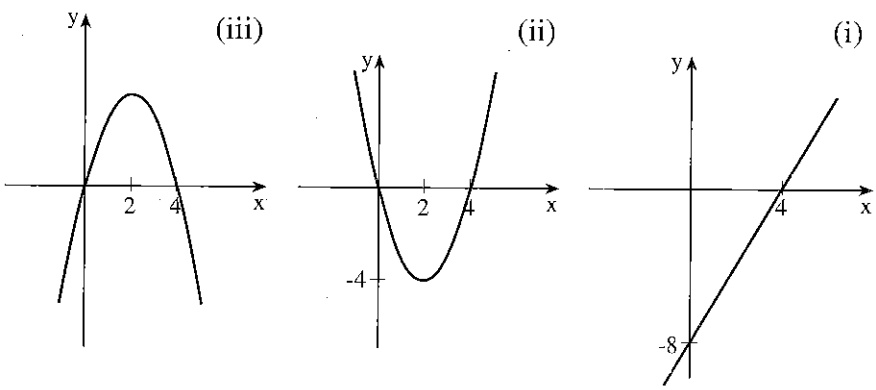
23. مسجلة قوانين دوال من الصورة $y = \sqrt{f(x)}$، ومرسومة الخطوط البيانية لـ f.

أ) ناظروا الخط البياني f ، الى قانون الدالة $y = \sqrt{f(x)}$.

$g(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ $\qquad$ $m(x) = -\sqrt{x^2 - 4x}$

$h(x) = \sqrt{4x - x^2}$ $\qquad$ $v(x) = -\sqrt{2x - 8}$

$n(x) = \sqrt{2x - 8}$ $\qquad$ $k(x) = -\sqrt{4x - x^2}$



ب) سجلوا مجال تعريف كل دالة.

24. معطاة مستطيلات، محيط كل واحد منها 20سم.

أ) طول أحد أضلاع المستطيل هو 7سم. احسبوا طول قطر المستطيل.

ب) ارسموا مستطيلين مختلفين عن ذلك المذكور في البند (أ)، واحسبوا قطر كل واحد منهما.

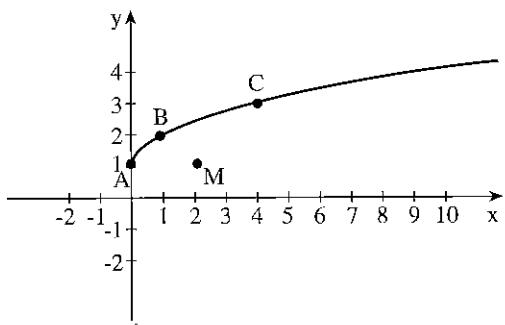
جـ) حاولوا ايجاد مستطيل قطره أطول من قطر كل مستطيل، من البندين أ و ب.

د) ارمزوا الى أحد الاضلاع بالحرف x.

(i) سجلوا دالة تناظر ل x ، طول قطر المستطيل.

(ii) جدوا قيمة x التي تحقق اصغر قطر ممكن للمستطيل.

25. مرسوم الخط البياني للدالة $y = \sqrt{x} + 1$ ، ومعينة النقطة $M(2,1)$



أ) احسبوا بعد كل واحدة من النقط A,B,C عن النقطة M.

ب) سجلوا دالة تبين بُعد نقطة على الخط البياني للدالة عن النقطة M.

جـ) جدوا النقطة التي تقع على أقصر بُعد من النقطة M .

تكامل الدالة المركبة

اذا لم تتعلموا عن التكامل بعد، اتركوا هذا البند لانه يظهر في كراس التكامل ايضا.

1. اشتقوا الدوال الاتية:

أ) $y = e^{2x+3}$ جـ) $y = e^{-2x+1}$

ب) $y = e^{3x}$ د) $y = e^{-x}$

كل واحدة من الدوال التي في التمرين هي دالة مركبة من الصورة $y = e^{f(x)}$، حيث f هي **دالة خطية**، ولذلك فان f' ثابتة (يعني عدداً). لدالة مركبة مثل هذه، يمكننا ايجاد التكامل.

2. أ) $\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$

اشتقوا وافحصوا: $(\frac{e^{2x}}{2} + c)' =$

ب) $\int 3e^{4x-1}\,dx = \frac{3e^{4x-1}}{4} + c$

اشتقوا وافحصوا: $(\frac{3 \cdot e^{4x-1}}{4})' =$

جـ) **جدوا** $\int e^{-x+2}\,dx$

اشتقوا النتيجة التي حصلتم عليها وافحصوا.

3. جدوا التكامل:

أ) $\int e^{4x}dx$ ب) $\int e^{3+2x}\,dx$ جـ) $\int 3e^{-x+1}\,dx$

د) $\int 2e^{2x+3}\,dx$ هـ) $\int -4e^{-x+2}dx$ و) $\int (2e^{-2x+1}+2x)dx$

4. اشتقوا الدوال الاتية:

أ) $y=(2x+3)^4$ ب) $y=(5x-1)^3$ جـ) $y=(3-x)^5$ د) $y=(2-3x)^2$

كل واحدة من الدوال التي في التمرين (4) هي دالة مركبة من الصورة $y=[f(x)]^n$ ، حيث f هي دالة خطية، ولذلك فان f' ثابتة (يعني عدداً).

5. أ) $\int (2x+4)^3dx=\frac{(2x+4)^4}{4\cdot 2}+c$

اشتقوا وافحصوا.

فسروا سبب القسمة على 2.

ب) جدوا: $\int (5-2x)^4dx$

اشتقوا وافحصوا.

جـ) جدوا: $\int (0.5x+1)^3dx$

اشتقوا وافحصوا.

6. جدوا التكامل:

أ) $\int (3-x)^3 dx$

ب) $\int (4x+1)^4 dx$

جـ) $\int (x+4)^5 dx$

د) $\int (0.1x-2)^3 dx$

د) $\int (x-1)^4 dx$

هـ) $\int (-2x+3)^2 dx$

و) $\int (7-3x)^5 dx$

ح) $\int (3-0.5x)^4 dx$

تذكير: $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ ولذلك: $\int (-\frac{1}{x^2})\, dx = \frac{1}{x} + c$

7. اشتقوا الدوال الاتية:

أ) $y = \frac{1}{2x+4}$

ب) $y = \frac{1}{x+1}$

جـ) $y = \frac{1}{-x+1}$

د) $y = \frac{1}{0.5x-2}$

كل واحدة من الدوال التي في هذا التمرين هي دالة مركبة من الصورة $y = \frac{1}{f(x)}$ ، حيث f هي دالة خطية، ولذلك فان f ` ثابتة (يعني عدداً)

8. أ) $\int -\frac{1}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{2(2x+1)} + c$ اشتقوا وافحصوا.

ب) $\int \frac{1}{(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} + c$ اشتقوا وافحصوا.

9. جدوا التكامل:

أ) $\int -\frac{1}{(3x-2)^2}\,dx$

ب) $\int \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$

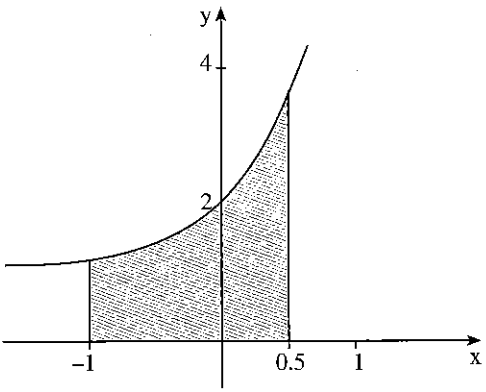
جـ) $\int \frac{1}{(0.5x-3)^2}\,dx$

د) $\int \frac{-2}{(3x+1)^2}\,dx$

هـ) $\int \frac{1}{2\,(2x-1)^2}\,dx$

و) $\int \frac{-1}{(2x)^2}\,dx$

10. الخط البياني المرسوم أمامك هو للدالة $f(x) = e^{2x} + 1$
احسبوا المساحة الملونة

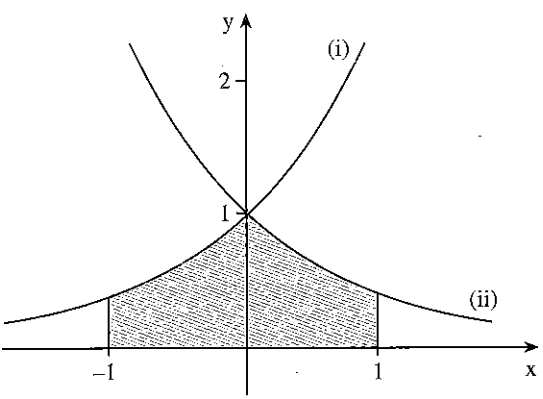


11. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:

$f(x) = e^x$

$g(x) = e^{-x}$

أ) ناظروا لكل دالة، خطها البياني.



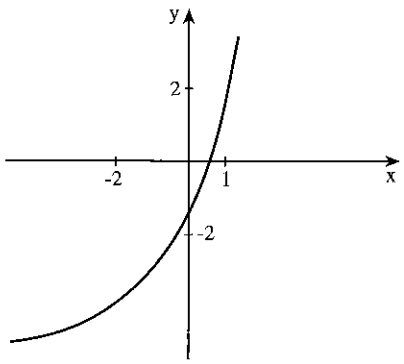
ب) احسبوا المساحة الملونة

تمارين

12. الخط البياني المرسوم هو للدالة: $f(x) = e^{2x} - e$.

أ) جدوا نقطة تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x.

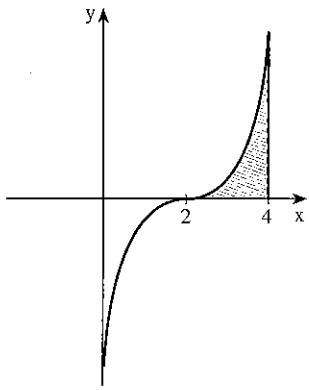
ب) لوّنوا واحسبوا المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والمحور y.



13. مرسوم الخط البياني للدالة:

$f(x) = (0.5\ x - 1)^3$

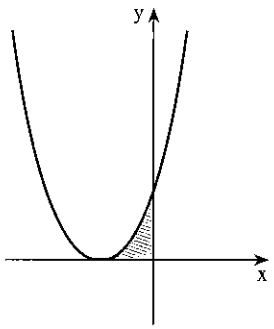
احسبوا المساحة الملونة.



14. مرسوم الخط البياني للدالة:

$f(x) = (\ x + 1)^4$

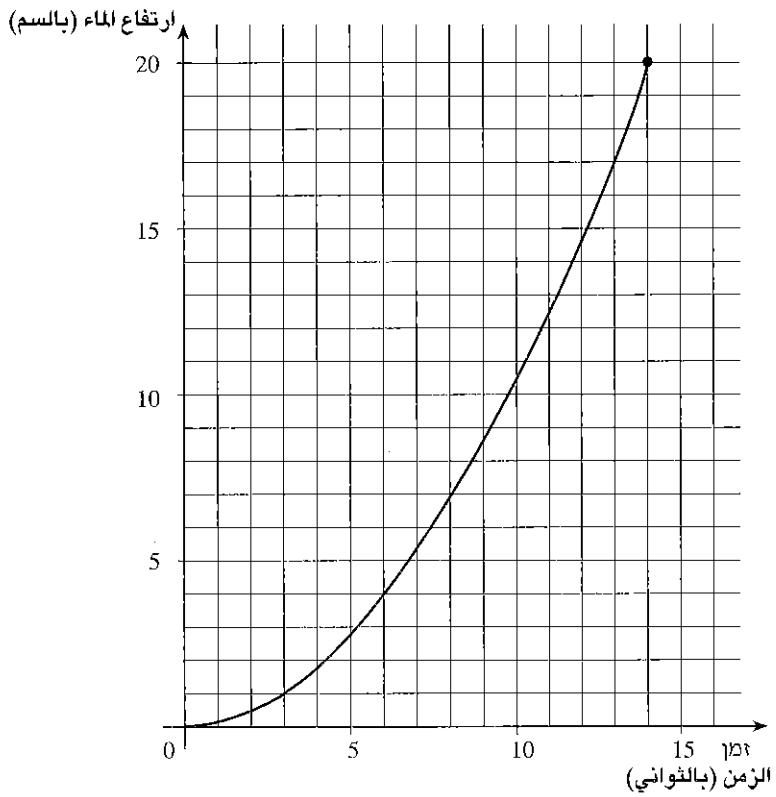
احسبوا المساحة الملونة.



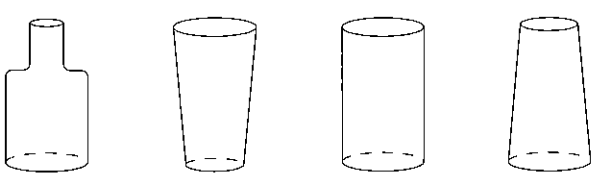
الفصل الخامس: العلاقة بين الخط البياني للدالة

والخط البياني للمشتقة وتيرة تغيّر الدالة(من f الى f')

1. الخط البياني المرسوم، يصف تغيّر ارتفاع الماء في وعاء. (يدخل الماء الى الوعاء بوتيرة ثابتة حتى يمتلىء.



أ) ما هو ارتفاع الماء بعد ٣ ثوان؟ بعد 6 ثوان؟ بعد 13 ثانية؟
ب) اي من الاوعية يلائم الخط البياني المرسوم؟



جـ) (i) ما هو ارتفاع الوعاء؟

(ii) بعد كم ثانية، يصل ارتفاع الماء الى نصف ارتفاع الوعاء؟

(iii) هل الماء يصل الى نصف ارتفاع الوعاء، بعد مرور نصف الزمن اللازم لملئه؟فسروا.

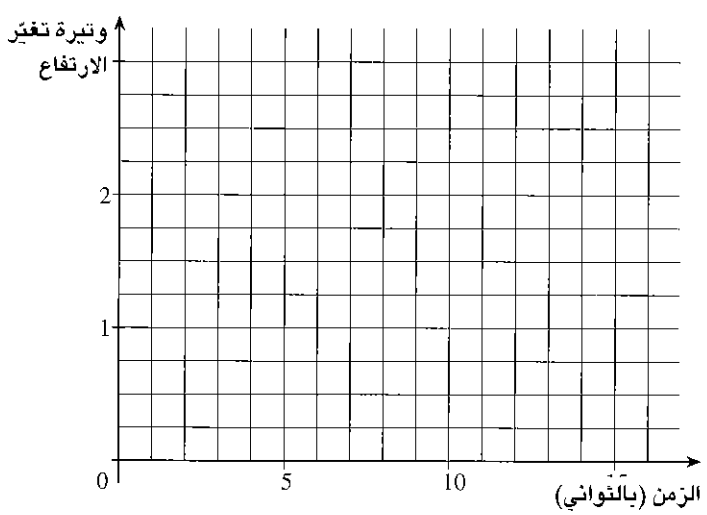
د) (i) كم ارتفع الماء (بالتقريب) خلال الثانية الثالثة؟ خلال الثانية السابعة؟ خلال الثانية الحادية عشرة؟

(ii) صفوا بالكلمات، وتيرة تغيّر ارتفاع الماء في الوعاء.

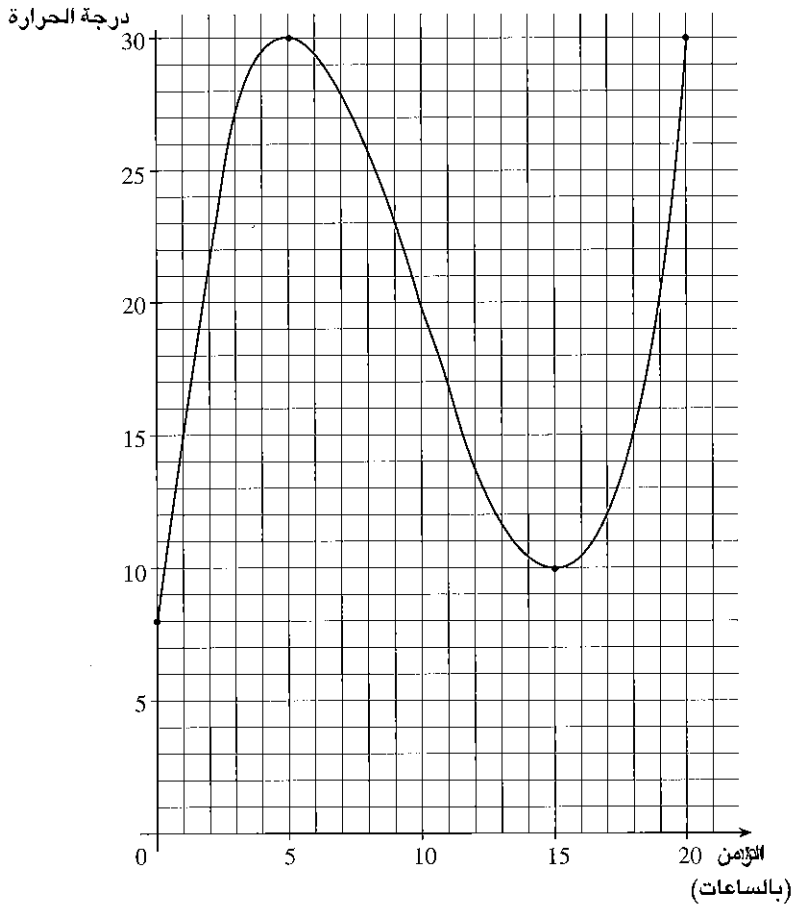
هـ) ضعوا مماسا للخط البياني في نقطة اصل المحورين، "تنزهوا" معه على طول الخط البياني للدالة من اليسار الى اليمين واكملوا الجدول

الزمن من بدء القياس	2	3	5	7	10	12	13
وتيرة تغيّر الارتفاع							

و) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني الذي يصف وتيرة تغيّر ارتفاع الماء في الوعاء.



ع.ذ 2. الخط البياني المرسوم، يصف تغيّر درجة الحرارة خلال 20 ساعة.



أ) بعد كم ساعة من بدء القياس، كانت درجة الحرارة 15 درجة؟
(سجلوا كل الاجابات الملائمة)

ب) بعد كم ساعة من بدء القياس، كانت أعلى درجة حرارة ممكنة؟

جـ) (i) في أي وقت، كانت درجة الحرارة أوطأ ما يمكن؟ (انتبهوا! هذه نقطة طرف).
سجلوا ايضا درجة الحرارة الاوطأ ما يمكن.

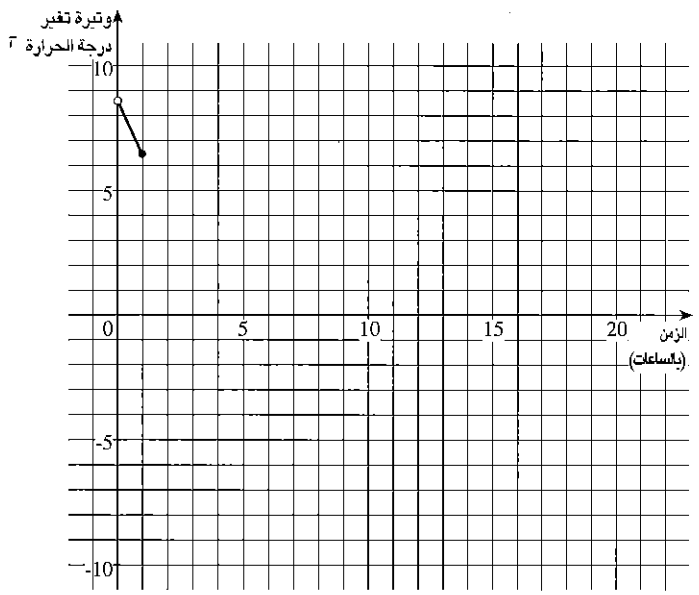
(ii) توجد ايضا نقطة نهاية صغرى اخرى. سجلوا احداثياتها.

د) نَصف تغير درجة الحرارة بالكلمات.
خلاَل 5 ساعات الاولى من بدء القياس، كانت درجة الحرارة ترتفع.
... استمروا في وصف التغيّر

هـ) ضعوا مماسا في نقطة البداية، "تنزهوا" معه على طول الخط البياني للدالة من اليسار الى اليمين واكملوا الجدول.

الزمن (بالساعات)	1	3	4	5	7	10	13	15	18
وتيرة تغيّر درجة الحرارة									

و) (i) ارسموا الخط البياني الذي يصف وتيرة التغيّر.



(ii) كيف يظهر **ارتفاع** درجة الحرارة في الخط البياني للوتيرة؟

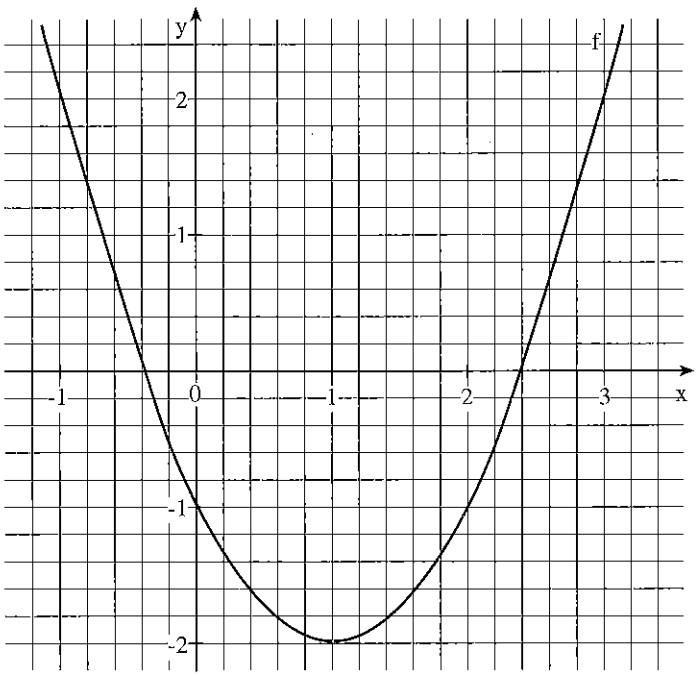
(iii) كيف يظهر **انخفاض** درجة الحرارة في الخط البياني للوتيرة؟

(iv) كيف يظهر الانتقال من **ارتفاع الى انخفاض**، في الخط البياني للوتيرة؟

(v) كيف يظهر الانتقال من **انخفاض الى ارتفاع**، في الخط البياني للوتيرة؟

يمكنكم حل *التمرين 20 في صفحة 234.*

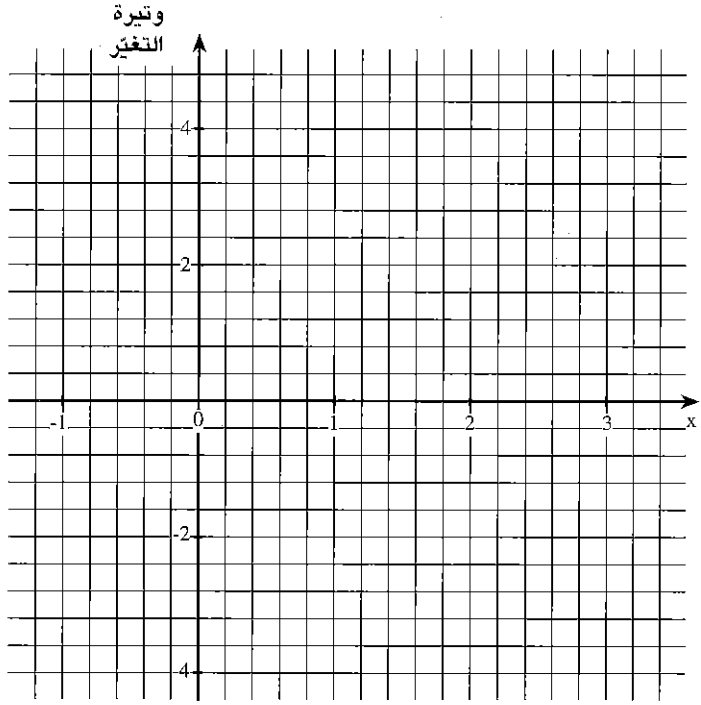
3. أ) نصف التغيّر في الخط البياني المرسوم:
حتّى $x = 1$ الدالة تنازلية.
... استمروا في وصف التغيّر



ب) ضعوا مماسا، "تنزهوا" معه على طول الخط البياني للدالة من اليسار الى اليمين واكملوا الجدول.

x	-1	0	0.5	1	1.5	2	3
وتيرة التغيّر							

جـ) ارسموا في هيئة المحاور (في الصفحة الى اليسار) خطا بيانيا يصف وتيرة تغيّر الدالة الظاهرة في البند (أ).



د) الخط البياني المرسوم في البند (أ)، يصف الدالة: $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

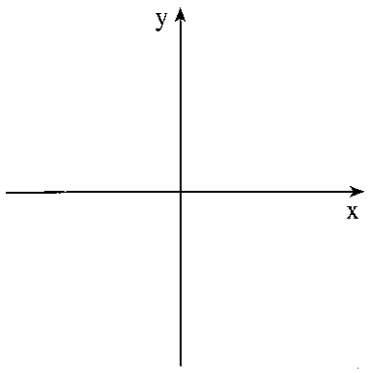
(i) سجلوا مشتقة الدالة.

(ii) هل الخط البياني الذي حصلتم عليه في البند (جـ)، ملائم تقريبا للخط البياني للمشتقة التي سجلتم؟

الخط البياتي لونيرة تغير الدالة f هو الخط البياني للمشتقة f'. اثناء متابعة دراسة البند، سوف نتعلم الانتقال من الخط البياني للدالة f الى الخط البياني للمشتقة f'، حسب خواص f.
للوصول من الخط البياني للدالة الى الخط البياني للمشتقة، يسهل تمييز الدالة بواسطة "تصاعد وتنازل ونقط قصوى" وتمييز المشتقة بواسطة "موجبة وسالبة ونقط صفرية".

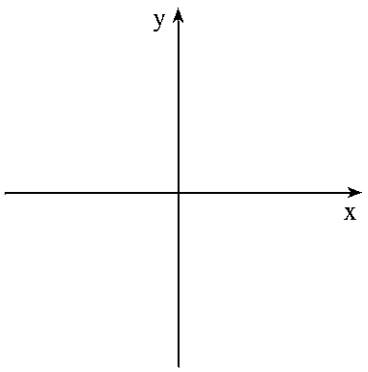
التمرينان 4 , 5 هما تمرينا تحضير لرسم الخط البياني للمشتقة f'، حسب خواص الدالة f.

4. أ) ارسموا دالة، ان "نتحرك" على خطها البياني من اليسار الى اليمين، تكن في البداية **موجبة** حتى تصبح قيمتها **صفرا**، ثم بعد ذلك **سالبة** حتى تصبح قيمتها **صفرا** مرة اخرى، واخيرا **موجبة**.

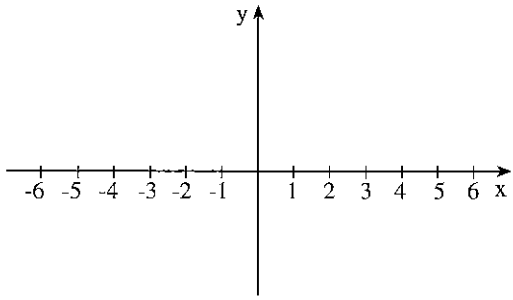


ب) ارسموا دالة، ان "نتحرك" على خطها البياني من اليسار الى اليمين تكن:

موجبة ← صفرا ← موجبة ← صفرا ← موجبة



5. ارسموا في هيئة المحاور (في الصفحة التالية) دالة تحقق:
الدالة موجبة عندما تكون قيم x أصغر من 3-.
قيمة الدالة **صفر** عندما $x = -3$.
الدالة موجبة مرة اخرى، عندما تكون قيم x بين $x = -3$ و $x = 2$.
قيمة الدالة **صفر** عندما $x = 2$.
الدالة سالبة عندما تكون قيم x اكبر من 2 .



عند متابعة هذا البند، يجب تنفيذ العمل بمساعدة الحاسوب (التمارين11-6).
وان كنتم لا تستعينون بالحاسوب، انتقلوا الى صفحة230 .

العمل في الحاسوب بمساعدة البرمجية *ONFIN* x

6. أ) (i) ارسموا بمساعدة الحاسوب، الخط البياني للدالة:

$f(x) = 0.5\ (x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x)$

في المجال $-5 \le x \le 5$

$-10 \le y \le 10$

سجلوا الدالة واضغطوا F2 للرسم.

اضغطوا ט A L T (معا) وغيروا التدريج.
اضغطوا F10 لتنفيذ التغيير.

(ii) اكملوا أدناه، سطر الاسهم لخواص الدالة f (تصاعد وتنازل ونقط قصوى).

ب) سيروا مع مماس على الخط البياني للدالة من اليسار الى اليمين.

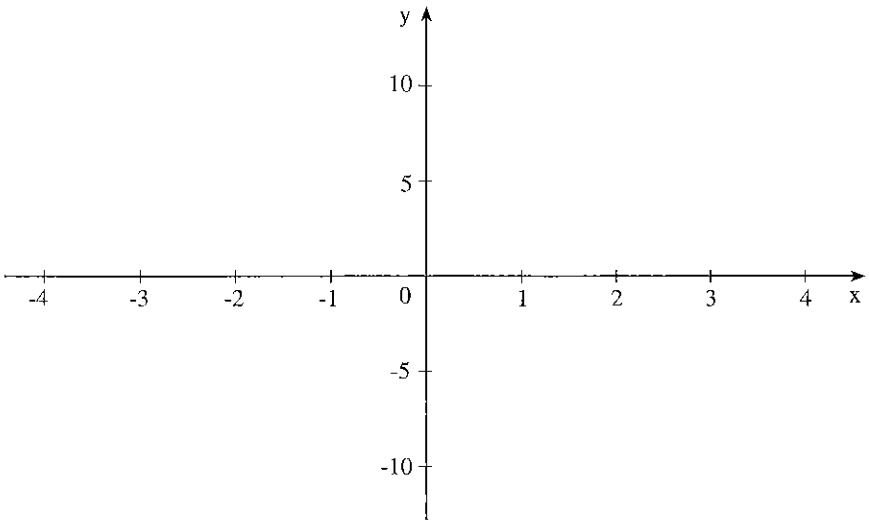
اضغطوا F7 وبعد ذلك מ . أوصلوا الاشارة الى الطرف الايسر من الخط البياني.
صغروا الخطوة الى 0.01 (اضغطوا على ناقص)
اضغطوا ם بجانب النقط القصوى.

اكملوا سطر الاسهم لخواص المشتقة f′ : ميول المماسات (موجبة وسالبة ونقط صفرية).

خواص f: تنازلية حتى $x = -1.56$ → نهاية صغرى في $x = -1.56$ → — → — → — → — → — → —

خواص f′: سالبة حتى $x = -1.56$ → قيمتها صفر في $x = -1.56$ → — → — → — → — → — → —

جـ)ارسموا في هيئة المحاور الفارغة، شكلا تقريبيا للمشتقة f'.
في هيئة المحاور، عيّنوا أولاً النقط التي تكون فيها f' صفرا.



د) اكملوا مشتقة الدالة: $f(x) = 0.5(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x)$

$f'(x) = 0.5\ (4x^3 - \ldots$

هـ) ارسموا الخط البياني للمشتقة f'

ألغوا السير : اضغطوا ESC.
سجلوا في نافذة الدوال (في السطر الثاني)،القانون الذي حصلتم عليه في البند (د) واضغطوا F2 للرسم.

و) سيروا مرة اخرى على الخط البياني للدالة f مع المماس (F7)، وافحصوا العلاقة بين النقط الصفرية للمشتقة وميل المماس المتحرك.

انتبهوا، في كل واحد من التمارين (11-7) اضغطوا $f(x) =$ وليس $y =$

7. أ) (i) ارسموا بمساعدة الحاسوب، الخط البياني للدالة:

$f(x)=0.1.(0.5x-3)^3.(x+2)^2+5$

في المجال $-5 \leq x \leq 10$

$-20 \leq y \leq 20$

سجلوا القانون واضغطوا F2 للرسم. (يجب تسجيل اشارة الضرب).

اضغطوا A L Tס لتغيير التدريج.

اضغطوا F10 لتنفيذ التغيير.

(ii) اكملوا ادناه، سطر الاسهم لخواص الدالة f .

ب) سيروا مع المماس على الخط البياني للدالة (من اليسار الى اليمين).

اضغطوا F7 وبعد ذلك מ.

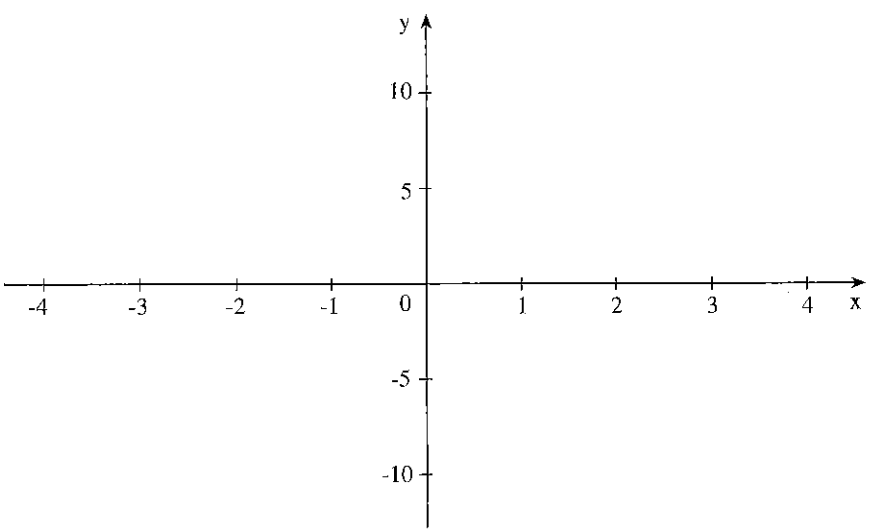
اضغطوا ם بجانب النقط القصوى.

اكملوا سطر الاسهم لخواص المشتقة f ' .

خواص f: $x = -2$ تصاعدية حتى $\rightarrow$ $x = -2$ نهاية عظمى في $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ --

خواص f ': $x = -2$ موجبة حتى $\rightarrow$ $x = -2$ قيمتها صفر في $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ -- $\rightarrow$ --

جـ) ارسموا في هيئة المحاور الفارغة، شكلا تقريبيا للخط البياني لمشتقة الدالة (ميول المماسات). عينوا اولا النقط التي تكون فيها المشتقة صفرا.



في البرمجية GNUN x ، يمكن الحصول على الخط البياني للمشتقة بواسطة الضغط على f '(x) بدون تسجيل قانون المشتقة. عند متابعة دراستنا، سنستعمل هذه الامكانية.

د) ارسموا الخط البياني للدالة f ' . | اضغطوا ESC لالغاء السير.
سجلوا في نافذة الدوال (في السطر الثاني) f ' (x) واضغطوا F2 للرسم.

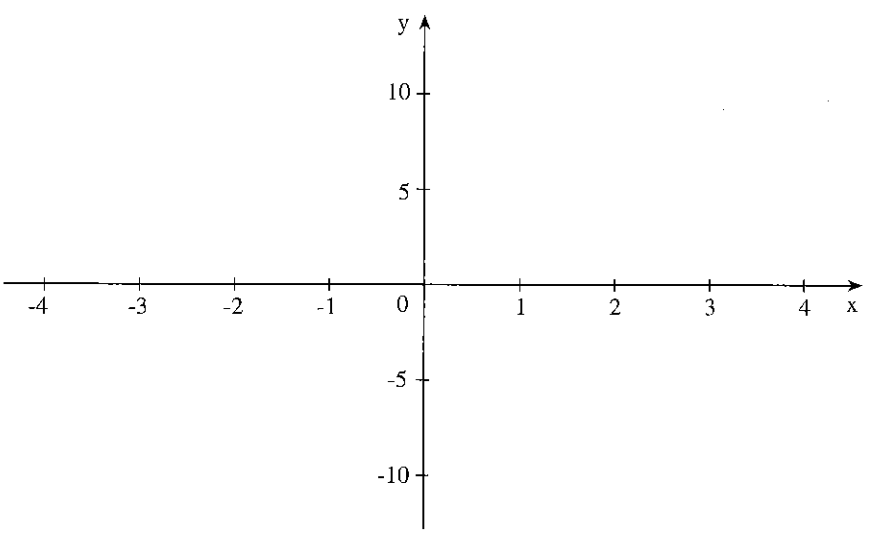
هـ) على الشاشة، حصلتم على الخط البياني للمشتقة f ' ، اضافة للدالة f . قارنوا مع الخط البياني للمشتقة ، الذي رسمتم في البند (جـ).

8. أ) (i) بمساعدة الحاسوب، ارسموا الخط البياني للدالة $f(x)=x^3 - 3x^2 + 1$ في المجال $-4 \le x \le 4$.

(ii) اهتموا بخواص f' (تصاعد وتنازل ونقط قصوى)، ثم اكملوا سطر الاسهم للمشتقة f ' (يمكنكم السير مع مماس).

	موجبة حتى		قيمتها صفر في		
f ':	x = 0	→	x = 0	→	...

ب) ارسموا شكلا تقريبيا للخط البياني للمشتقة.

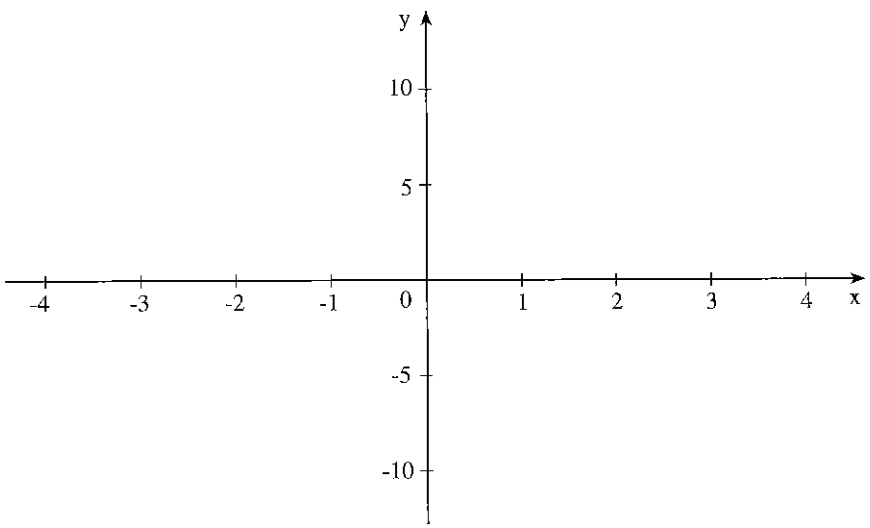


جـ) (i) ألغوا السير (اضغطوا ESC) وارسموا بمساعدة الحاسوب الخط البياني للدالة f ' (يجب التسجيل f '(x)).

(ii) حصلم على الخط البياني للمشتقة، اضافة للخط البياني للدالةf. قارنوا مع الخط البياني للمشتقة، الذي رسمتم في البند (ب).

9. أ) بمساعدة الحاسوب، ارسموا الخط البياني للدالة: $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ في المجال $-4 \leq x \leq 4$.

ب) (i) سجلوا ميل المماس في النقطة $x = 1$.
عينوا نقطة ملائمة في هيئة المحاور الفارغة.



(ii) اكملوا رسم الخط البياني لمشتقة الدالة (يمكنكم الاستعانة بالسير مع مماس، على الخط البياني للدالة من اليسار الى اليمين).

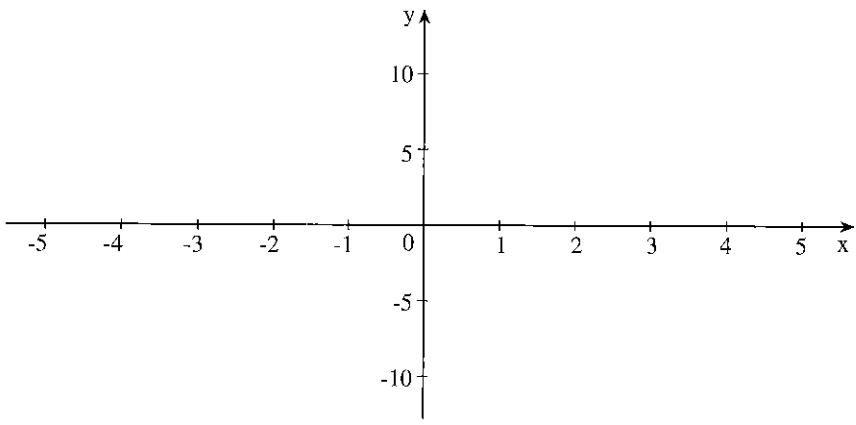
جـ) – بمساعدة الحاسوب، ارسموا الخط البياني للدالة f ' (في الحاسوب، يجب التسجيل f '(x)).
– حصلتم على شكل تقريبي للخط البياني لمشتقة الدالة، اضافة الى الخط البياني للدالة f. قارنوا مع الخط البياني للمشتقة، الذي رسمتم في البند (ب).

10. أ) بمساعدة الحاسوب، ارسموا الخط البياني للدالة $f(x) = (x^2 - 5x + 6) . e^x$,

في المجال: $-5 \le x \le 5$

$-10 \le y \le 10$

ب) ارسموا في هيئة المحاور الفارغة، شكلا تقريبيا للخط البياني لمشتقة الدالة. (عينوا اولا النقط التي فيها تكون المشتقة صفرا. يمكن الاستعانة بتسجيل سطر أسهم لمشتقة الدالة).



جـ) بمساعدة الحاسوب، ارسموا المشتقة $f'(x)$ (سجلوا $f'(x)$). بهذا تحصلون على الخط البياني لمشتقة الدالة، اضافة للخط البياني للدالة نفسها. قارنوا مع الخط البياني للمشتقة، الذي رسمتم في البند (ب).

11. أ) بمساعدة الحاسوب، ارسموا الخط البياني للدالة $f(x) = \sin x$,

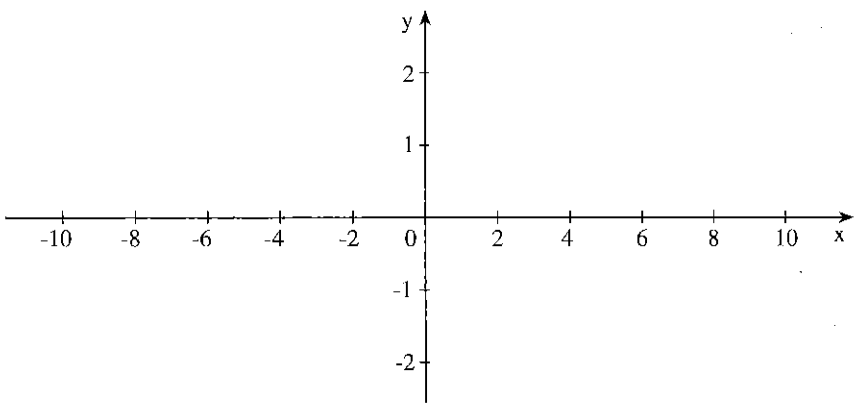
في المجال: $-10 \le x \le 10$

$-2 \le y \le 2$

(x يمثل زاوية مُقاسة بالرديان. الرديان هو وحدة لقياس الزاوية تختلف عن الدرجة).

ب) هل مشتقة الدالة دورية، حسب رأيكم؟ عللوا.

جـ) ارسموا في هيئة المحاور الفارغة، شكلا تقريبيا للخط البياني لمشتقة الدالة. (يمكنكم الاستعانة بالسير مع مماس و / أو بسطر أسهم).



د) بمساعدة الحاسوب، ارسموا المشتقة f ' (سجلوا f ' (x)). بهذا تحصلون على الخط البياني لمشتقة الدالة، اضافة الى الخط البياني للدالة نفسها. قارنوا مع الخط البياني للمشتقة، الذي رسمتم في البند (جـ).

هـ) (i) بينوا أياً من الدوال الاتية، يمكن ان تكون مشتقة الدالة:

$y' = -\cos x$ $y' = \sin(-x)$ $y' = \cos x$ $y' = -\sin x$

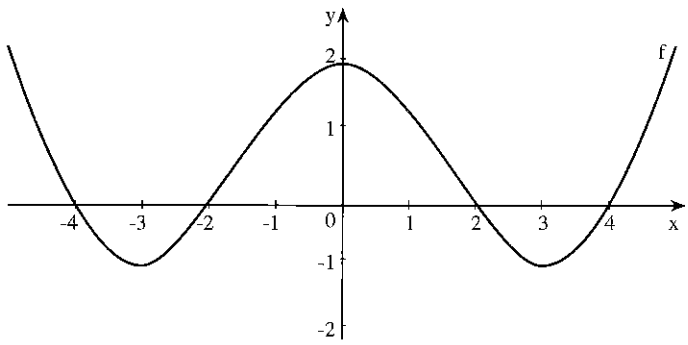
(ii) اشطبوا f ' وارسموا بمساعدة الحاسوب، الدالة التي اشرتم اليها، ثم قارنوا مع الخط البياني الذي رسمتم في البند (ب). سجلوا y = ، فقط قانون الدالة (وليس y' =).

نهاية الفعالية بمساعدة الحاسوب.

انتقلوا الى التمارين في صفحة 234.

التمارين التالية (12 - 19) مُعدة للطلاب الذين لم ينفذوا الفعالية بمساعدة الحاسوب.

12. مرسوم الخط البياني للدالة f.



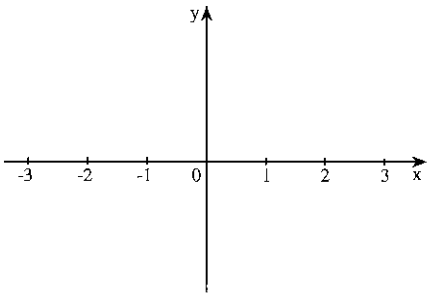
أ) اكملوا سطر الاسهم عن خواص الدالة f .
(تصاعد وتنازل ونقط قصوى).

ب) اكملوا سطر الاسهم عن خواص مشتقة الدالة f ' (موجبة وسالبة ونقط تقاطع f ' مع المحور x).

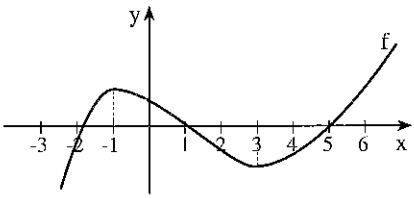
خواص f: تنازلية حتى — نهاية صغرى في
x = -3 → x = -3 → — → — → — → — → — → —

خواص f ': سالبة حتى — قيمتها صفر في
x = -3 → x = -3 → — → — → — → — → — → —

جـ) ارسموا شكلا تقريبيا لمشتقة الدالة f ' .



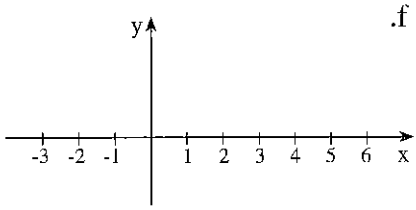
13. أ) مرسوم الخط البياني للدالة f.
اكملوا سطري الاسهم عن خواص f و f '
(تصاعد وتنازل ونقط قصوى للدالة f، ايجابية وسلبية ونقط تقاطع مع محور للدالة المشتقة f ').



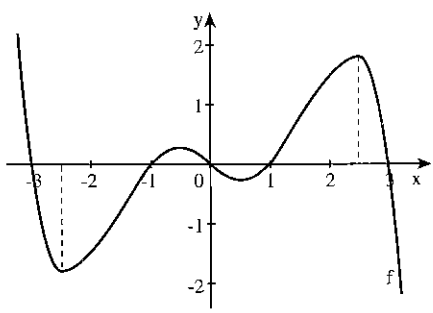
خواص f: تصاعدية حتى ... نهاية عظمى في $x = -1$ ← $x = -1$ ← ... ←

خواص f ': موجبة حتى ... قيمتها صفر في $x = -1$ ← $x = -3$ ← ... ←

ب) ارسموا شكلا تقريبيا للدالة المشتقة f '.

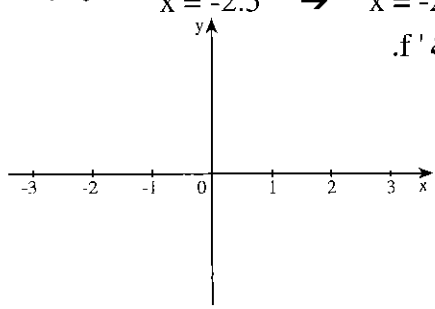


14. مرسوم الخط البياني للدالة f.
أ) اهتموا بخواص الدالة f
(تصاعد وتنازل ونقط قصوى) ثم اكملوا سطر الاسهم لخواص f '.

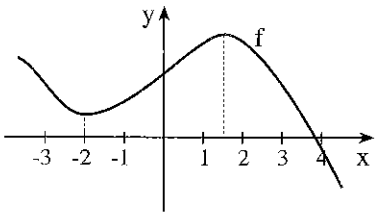


خواص f ': سالبة حتى ... قيمتها صفر في $x = -2.5$ ← $x = -2.5$ ← ...

ب) ارسموا شكلا تقريبيا للدالة المشتقة f '.



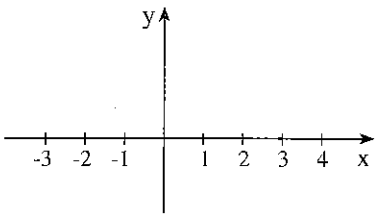
15. الخط البياني يصف الدالة f.



أ) (i) سجلوا الاحداثي x للنقط القصوى للدالة f.

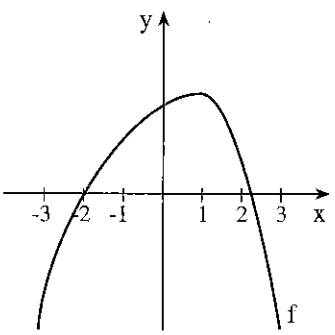
(ii) بمساعدة البند (i)، سجلوا نقط تقاطع الخط البياني للدالة f ' مع المحور x.

عينوا هذه النقط في هيئة المحاور الفارغة، المعدّة لرسم الخط البياني للدالة f '.



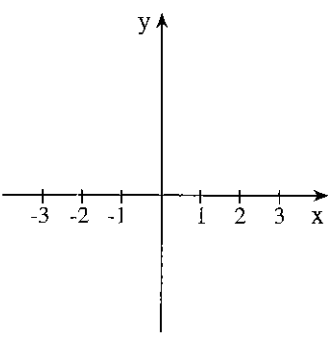
ب) اكملوا شكلا تقريبيا للدالة f ' (من المفضل اولا، ان تسجلوا سطر أسهم لخواص f ').

16. الخط البياني يصف الدالة f.



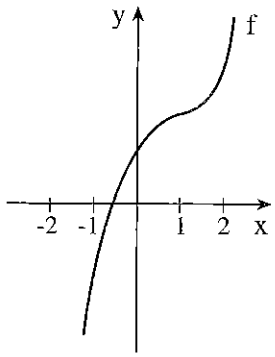
أ) سجلوا نقط تقاطع الخط البياني للدالة f ' مع المحور x.

عينوا هذه النقط في هيئة المحاور الفارغة، المعدّة لرسم الخط البياني للدالة f '.



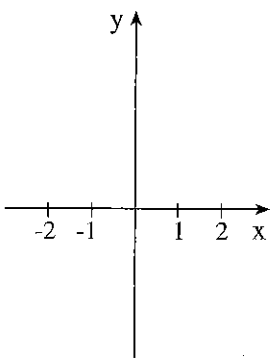
ب) اكملوا شكلا تقريبيا للدالة f ' (من المفضل اولا، ان تسجلوا سطر أسهم لخواص f ').

17. الخط البياني يصف الدالة f.

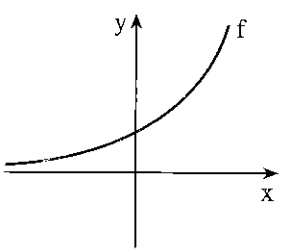


أ) ما هي قيمة المشتقة في النقطة $x = 1$. عينوا نقطة ملائمة في هيئة المحاور الفارغة (للدالة f').

ب) اكملوا شكلا تقريبيا للدالة f' (من المفضل اولا، ان تسجلوا سطر أسهم لخواص f').

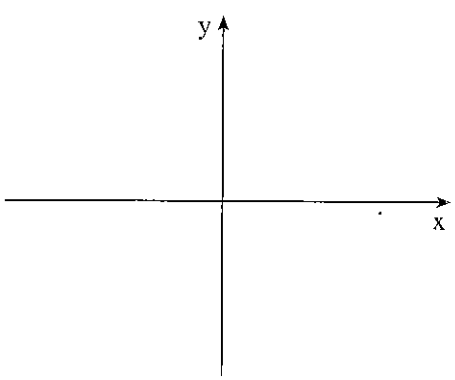


18. أ) ما هي اشارة الميل على طول الخط البياني للدالة المرسومة f؟



ب) الدالة المشتقة f' تصاعدية في كل المجال. فسروا.

جـ) ارسموا شكلا تقريبيا للدالة f'.



19. للدالة f توجد نقطتان قصويان فقط: نقطة نهاية صغرى (-4, 1) ،نقطة نهاية عظمى(2, 8) .

أ) ارسموا شكلا تقريبيا للدالة f.

ب) سجلوا سطر أسهم لخواص f ' ، ثم ارسموا شكلا تقريبيا ملائما.

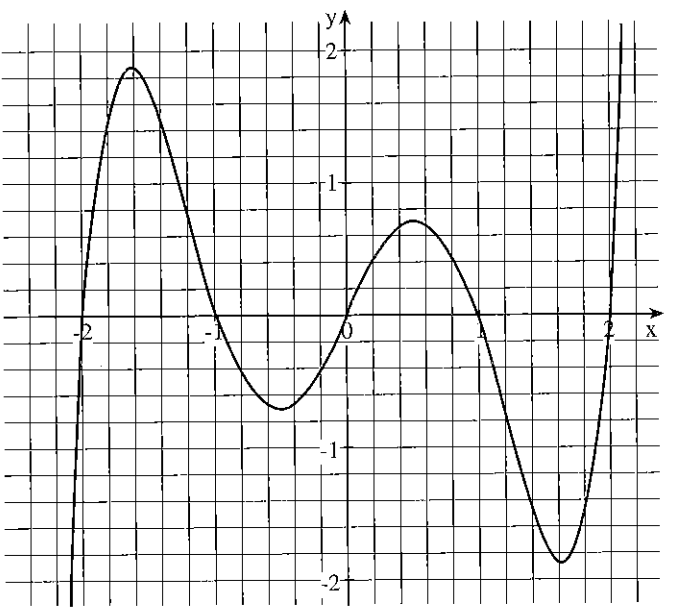
تمارين

20. أ) اكملوا واستمروا في وصف تغيّر الخط البياني المرسوم: (تصاعد وتنازل ونقط قصوى).

حتى x = -1.6 الدالة ——————

في x = -1.6 يوجد للدالة ——————

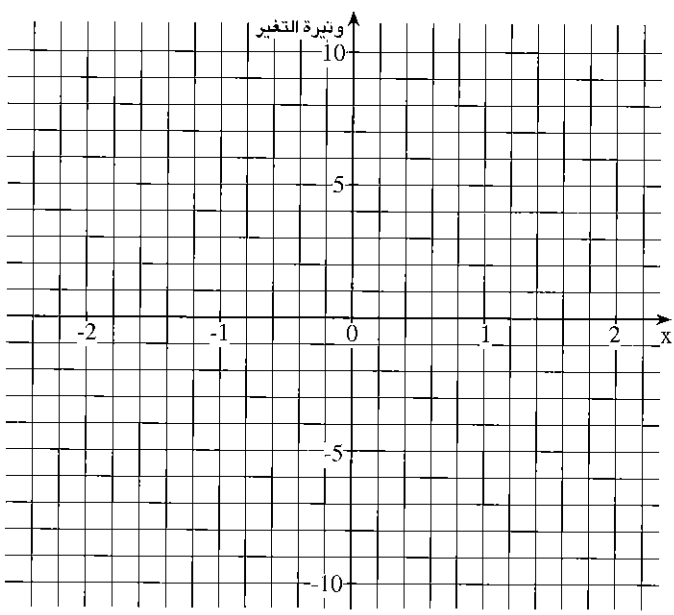
... استمروا في وصف التغيّر.



ب)ضعوا مماسا "وتنزهوا" معه على طول الخط البياني للدالة، من اليسار الى اليمين واكملوا الجدول.

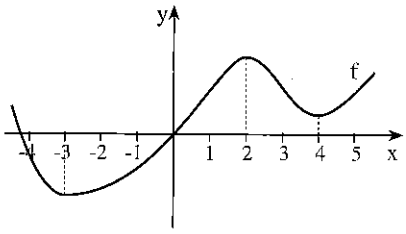
x	-2		-1		0		1		2
وتيرة التغيّر		0		0		0		0	

جـ) ارسموا خطا بيانيا يصف وتيرة التغيّر.



21. مرسوم الخط البياني للدالة f.

أ) اكملوا سطري الاسهم عن خواص الدالتين f و f ' .



خواص f: تنازلية حتى

$x = -3$ → -- → -- → -- → -- → -- → -- → --

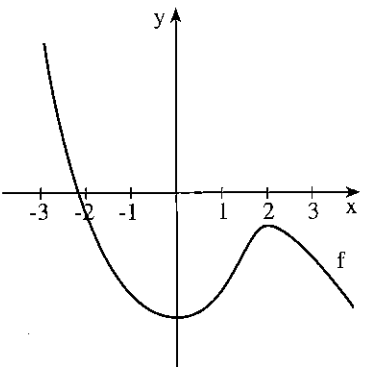
خواص f ': سالبة حتى

$x = -3$ → -- → -- → -- → -- → -- → -- → --

ب) اكملوا شكلا تقريبيا للدالة f ' .

22. الخط البياني يصف الدالة f.

أ) اكملوا وصف الدالة المشتقة (بسطر أسهم عن خواص f ').



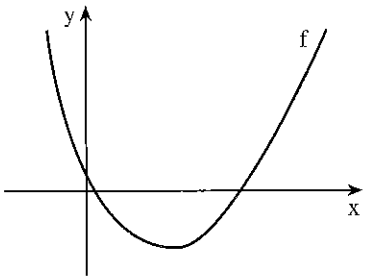
f ': سالبة حتى قيمتها صفر في

$x = 0$ ← $x = 0$ ← -- ← -- ← --

ب) ارسموا شكلا تقريبيا للدالة f '.

23. مرسوم الخط البياني للدالة f.

أ) اكملوا وصف تغيّر اشارة الميل، من اليسار الى اليمين للدالة f.



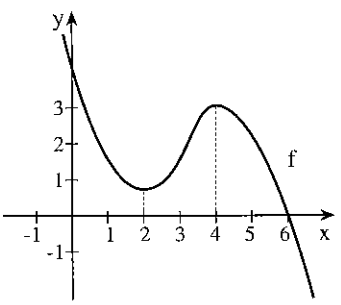
f ': سالبة ← ←

ب) استعينوا بسطر الاسهم الذي سجلتم في البند (أ)، وارسموا شكلا تقريبيا للدالة f '.

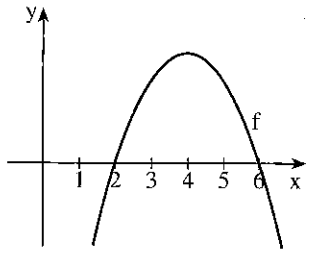
24. الخط البياني في الشكل، يصف الدالة f.

أ) سجلوا نقط تقاطع f ' (مشتقة الدالة f) مع المحور x.
(من المفضل ان تسجلوا سطر أسهم للدالة f ').

ب) في أية مجالات تكون f ' موجبة، وفي أية مجالات تكون سالبة؟ علّلوا.



25. الخط البياني في الشكل، يصف الدالة f .



أ) سجلوا نقط تقاطع الدالة f' مع المحور x.

ب) في أي مجال تكون f' موجبة، وفي أي مجال تكون سالبة؟
(استعينوا بسطر أسهم)

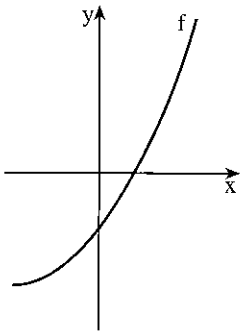
جـ) ارسموا شكلا تقريبيا يصف f'.

26. للدالة f توجد نقطتان قصويان فقط:
نقطة نهاية عظمى (2, 3) ،نقطة نهاية صغرى (-2, -1).

أ) ارسموا شكلا تقريبيا للدالة f .

ب) لأية قيم x ، يكون $f'(x) = 0$ ؟ علّلوا.
لأية قيم x ، يكون $f'(x) > 0$ ؟ علّلوا.
لأية قيم x ، يكون $f'(x) < 0$ ؟ علّلوا.
(من المفضل ان تسجلوا سطر أسهم لخواص f'.)

27. الخط البياني في الشكل، يصف الدالة f .

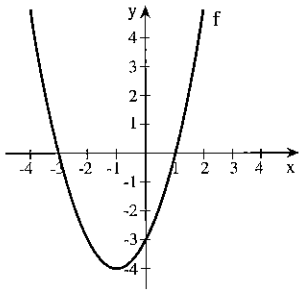


أ) ما هي اشارة الميل على طول الخط البياني للدالة؟

ب) الدالة المشتقة (f') تصاعدية في كل المجال.
فسروا.

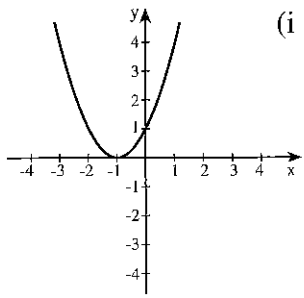
جـ) ارسموا شكلا تقريبيا للدالة f' .

28.مرسوم الخط البياني للدالة f .

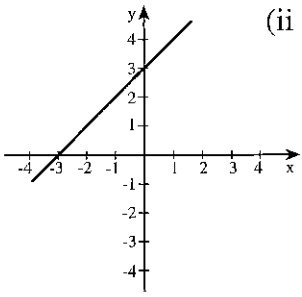


أي من الخطوط البيانية الاتية، يمكن ان يصف الخط البياني للمشتقة(f ')؟عللوا.

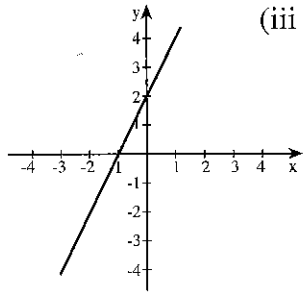
(i



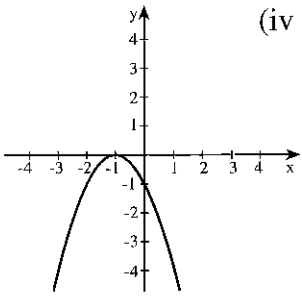
(ii



(iii

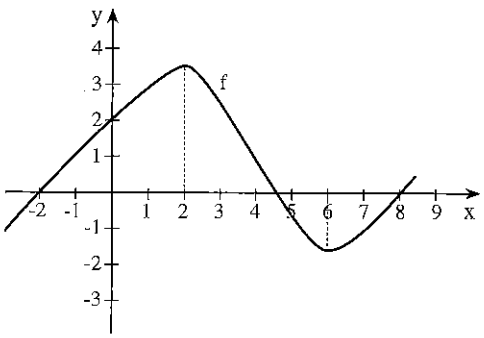


(iv



من الخط البياني للمشتقة f' الى الخط البياني للدالة f

1. مرسوم الخط البياني للدالة f.
اكملوا سطري أسهم عن خواص
الدالتين f و f '

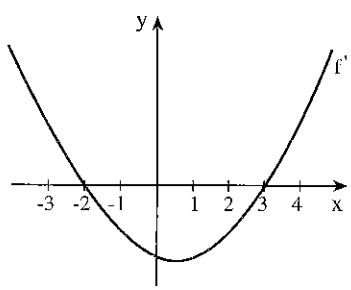


خواص f: تصاعدية حتى
$x = 2$ → -- → -- → -- → --

خواص f ': موجبة حتى
$x = 2$ → -- → -- → -- → --

في هذا الفصل، سنبدأ من الخط البياني للمشتقة f ' ونرسم خطا بيانيا ممكنا يصف الدالة f. نستعين بالخواص: موجبة وسالبة ونقط صفرية للدالة f ' ، كي نحدد خواص f المتعلقة بالتصاعد والتنازل والنقط القصوى.

2. مرسوم الخط البياني للدالة f '
(الخط البياني لمشتقة f)
أ) سجلوا الاحداثي x للنقط
التي يتحقق فيها $f'(x) = 0$.



ب) اكملوا سطري الاسهم عن خواص f ' و f .

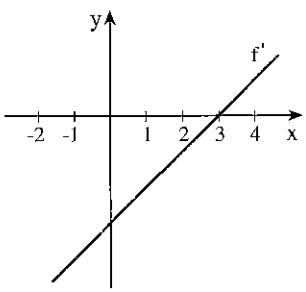
خواص f ': موجبة حتى — قيمتها صفر في
$x = -2$ → $x = -2$ → -- → -- → --

خواص f: تصاعدية حتى — مشبوهة في
$x = -2$ → $x = -2$ → -- → -- → --

جـ) هل يوجد للدالة نقط قصوى؟
اذا كان نعم، سجلوا الاحداثي x لها وبيّنوا نوعها (نهاية صغرى أو نهاية عظمى).

ع.ذ

1. الخط البياني في الشكل، يصف الدالة f ' .



أ) في $x = 3$ يوجد للدالة f نقطة قصوى، من أي نوع هي؟ فسروا. (من المفضل ان تسجلوا سطري أسهم عن خواص f و f ')

ب) معلوم ان (2, 1) تقع على الخط البياني للدالة f . ارسموا خطا بيانيا يمكن ان يلائم خواص f .

4. الدالة f تحقق الخواص الاتية:
- $f'(x) > 0$ لكل $x < -2$.
- $f'(x) = 0$ لـ $x = -2$.
- $f'(x) < 0$ لكل $x > -2$.

كي تجيبوا عن الاسئلة التالية، من المفضل ان تسجلوا سطري أسهم عن خواص f و f ' .

أ) هل يوجد للدالة f نقط قصوى؟
اذا كان نعم، سجلوا نوعها (نهاية صغرى او نهاية عظمى).

ب) معلوم ان: $f(-2) = -3$ ، هل يوجد للدالة f نقط تقاطع مع المحور x ؟
عللوا. (من المفضل رسم شكل تقريبي للدالة f).

ع.ذ

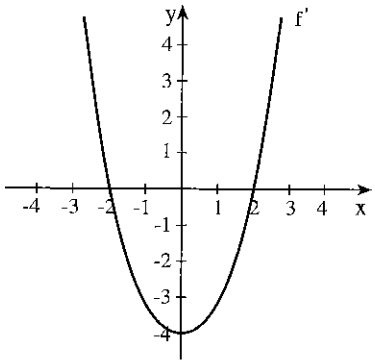
4. الدالة f تحقق الخواص الاتية:
- $f'(x) > 0$ لكل $x < -2$.
- $f'(-2) = 0$
- $f'(x) < 0$ لكل $-2 < x < 4$ (x محصور بين -2 و 4)
- $f'(4) = 0$
- $f'(x) > 0$ لكل $x > 4$.

ارسموا شكلا تقريبيا يمكن ان يصف الخط البياني للدالة f.
(من المفضل ان تسجلوا سطري أسهم عن خواص f و f ' .)

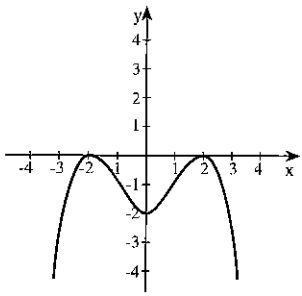
6. الخط البياني في الشكل، يصف الدالة f ' (الخط البياني لمشتقة f)

أ) لأية قيم x يوجد للدالة f نقط قصوى؟ سجلوا نوعها (نهاية عظمى او نهاية صغرى).
فسروا.
(من المفضل ان تسجلوا سطري أسهم عن خواص f ' و f).

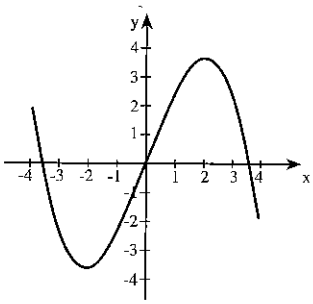
ب) اشيروا الى الخطوط البيانية التي يمكن ان تصف الدالة f.



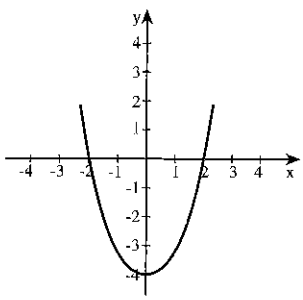
(i



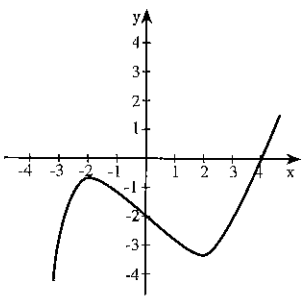
(ii



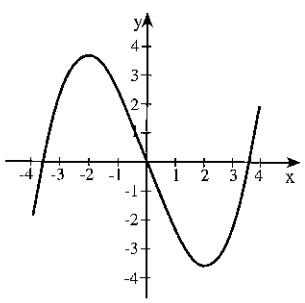
(iii



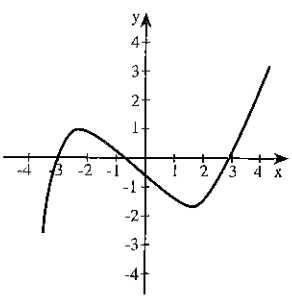
(iv



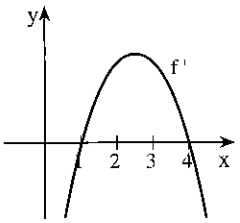
(v

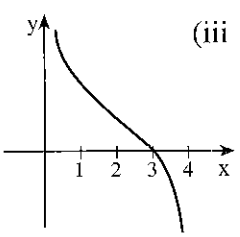


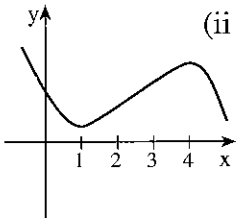
(vi

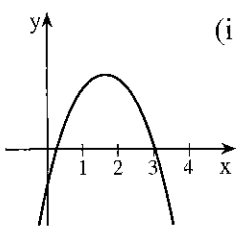


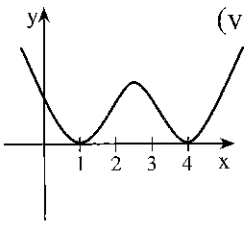
7. الخط البياني المرسوم هو f'.
اي من الخطوط البيانية الاتية،
يمكن ان يصف الدالة f؟

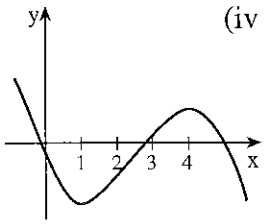




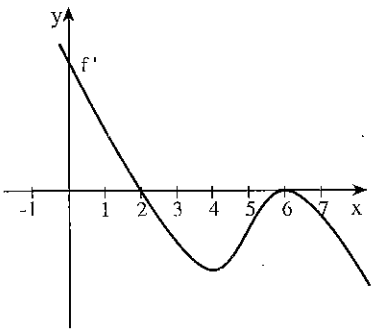








8. مرسوم الخط البياني للدالة f'.



أ) سجلوا الاحداثي x للنقط المشبوهة.
- لكل نقطة، افحصوا هل هي نقطة قصوى للدالة f.
اذا كان نعم - سجلوا نوعها وفسروا.
(من المفضل ان تسجلوا سطري أسهم عن خواص f' و f)

ب) ارسموا شكلا تقريبيا للدالة f .

جـ) سجلوا المجال حيث الدالة تنازلية.

ع.ذ 9. معطاة الدالة f التي تحقق:

$f(2) = 3\,,\quad f(1) = 2\,,\quad f(0) = 1\,,\ f(-2) = -1\,,\ f(-3) = 0$

$f'(1) = 0\,,\ f'(-2) = 0$ هما النقطتان الوحيدتان اللتان فيهما تكون قيمة المشتقة صفرا.

أ) كم نقطة قصوى يوجد للدالة f؟

ب) بينوا نوعها (نهاية عظمى أو نهاية صغرى).
(من المفضل رسم الخط البياني للدالة f.)

ع.ذ 10. أ) ارسموا خطا بيانيا لدالة، تحقق الخواص الاتية في المجال $-5 \le x \le 5$

$f(0) = 2\,,\ f(2) = 4\,,\ f(5) = 0$.

$f'(x) > 0$ لكل $0 < x < 2$

$f'(2) = 0$

$f'(x) > 0$ لكل $2 < x < 5$

الخط البياني متماثل بالنسبة للمحور y.

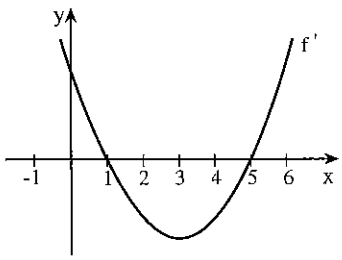
ب) كم نقطة قصوى يوجد للدالة؟ سجلوا الاحداثي x لكل واحدة من النقط القصوى. بينوا نوع كل واحدة منها، اذا كانت نقطة نهاية عظمى او نقطة نهاية صغرى.

تمارين

11. يظهر في الشكل الخط البياني للدالة f '
(الخط البياني لمشتقة f)

أ) لأية قيم x يتحقق $f'(x) = 0$؟

ب) اكملوا سطري أسهم عن خواص
f و f ' .



f ':
موجبة حتى
$x = 1$ → — → — → — → —

f :
تصاعدية حتى
$x = 1$ → — → — → — → —

جـ) النقطة (-2, 3) تقع على الخط البياني للدالة f . ارسموا شكلا تقريبيا يمكن ان يصف الدالة f.

12. الدالة f تحقق الخواص الاتية:

$f'(x) < 0$ لكل $x < 3$

$f'(x) = 0$ لـ $x = 3$

$f'(x) > 0$ لكل $x > 3$

أ) هل توجد للدالة نقطة قصوى؟
اذا كان نعم – هل هي نهاية عظمى أم نهاية صغرى؟
(من المفضل ان تسجلوا سطري أسهم عن خواص f ' ، f.)

ب) معطى ايضا ان $f(3) = -4$ وان للدالة f لا توجد نقطة تقاطع مع المحور x.
ارسموا شكلا تقريبيا، يبيّن خطا بيانيا ممكنا للدالة.

13. معطاة دالة f تحقق:

$f(4) = 6 \quad , \quad f(3) = 2 \quad , \quad f(0) = 3$

$f'(3) = 0$ هي النقطة الوحيدة التي فيها تكون قيمة المشتقة صفرا.

أ) هل $f'(0)$ موجبة أم سالبة؟ عللوا.
هل $f'(4)$ موجبة أم سالبة؟ عللوا.
(من المفضل رسم شكل تقريبي للدالة f.)

ب) في اي مجال تكون $f'(x) > 0$ ؟

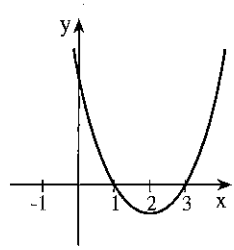
جـ) ارسموا شكلا تقريبيا، يبين خطا بيانيا ممكنا للدالة f.
(من المفضل ان تسجلوا سطري أسهم عن خواص f' و f)

14. معطاة دالة تحقق $f'(2) = 0$ وان x هذا هو الوحيد الذي فيه تكون قيمة المشتقة صفرا.

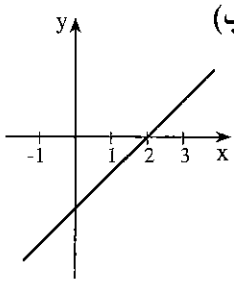
$f'(3) < 0 \quad , \quad f'(1) > 0$

أي من الخطوط البيانية الاتية، يمكن ان يصف الدالة f ؟

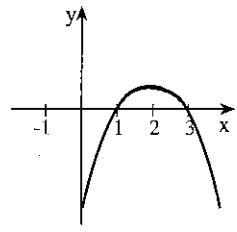
أ)



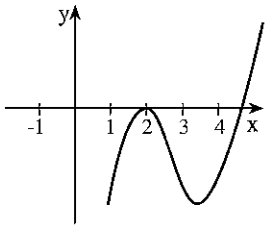
ب)



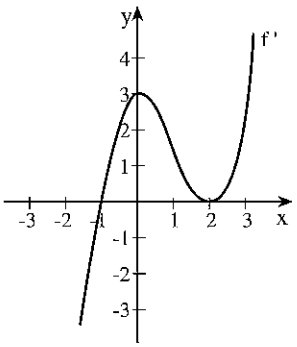
جـ)



د)



15. الخط البياني في الشكل، يصف الدالة f '

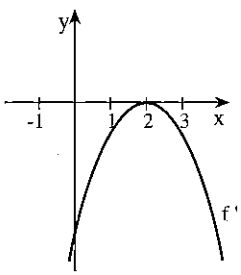


أ) كم نقطة قصوى يوجد للدالة f ؟
لكل نقطة منها، بينوا هل هي نقطة نهاية عظمى أم نقطة نهاية صغرى.
فسّروا.

ب) ارسموا شكلا تقريبيا، يمكن ان يصف خواص الدالة f.

جـ) سجلوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة f.

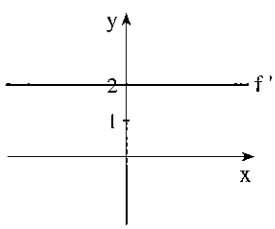
16. مرسوم الخط البياني للدالة f ' .



أ) سجلوا الاحداثي x للنقطة التي تحقق $f'(x) = 0$
هل هذه النقطة هي نقطة قصوى؟
عللوا. (استعينوا بسطري أسهم عن خواص الدالتين f ' و f)

ب) ارسموا شكلا تقريبيا، يمكن ان يصف خواص الدالة f.

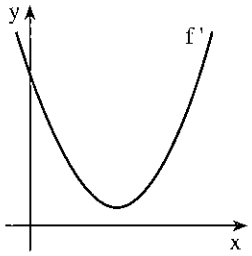
17. مرسوم الخط البياني للدالة f ' . ارسموا شكلا تقريبيا يصف خواص الدالة f .



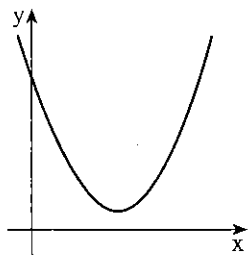
18. الشكل البياني في الشكل، يصف الدالة f'.

أ) هل يوجد للدالة f نقط قصوى؟ عللوا.

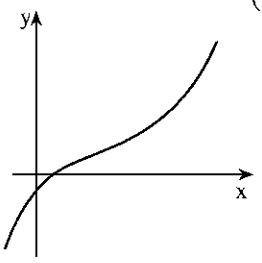
ب) أي من الخطوط البيانية الاتية، يمكن ان يصف خواص الدالة f؟



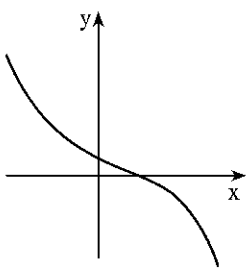
(i)



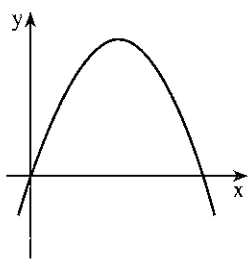
(ii)



(iii)



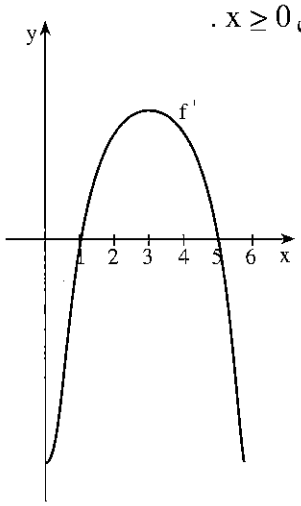
(iv)



19. الشكل البياني في الشكل، يصف الدالة f' في المجال $x \geq 0$.
الخط البياني للدالة f' متماثل بالنسبة للمحور y.

أ) انسخوا واكملوا رسم الخط البياني في المجال $x < 0$.

ب) كم نقطة قصوى يوجد للدالة f ؟
سجلوا الاحداثي x لكل واحدة من النقط، وبينوا لكل منها هل هي نقطة نهاية عظمى ام نقطة نهاية صغرى.
(من المفضل ان تسجلوا سطري أسهم عن خواص الدالتين f' و f.)



الفصل السادس: حاصل ضرب الدوال

رسوم بيانية لحاصل ضرب الدوال

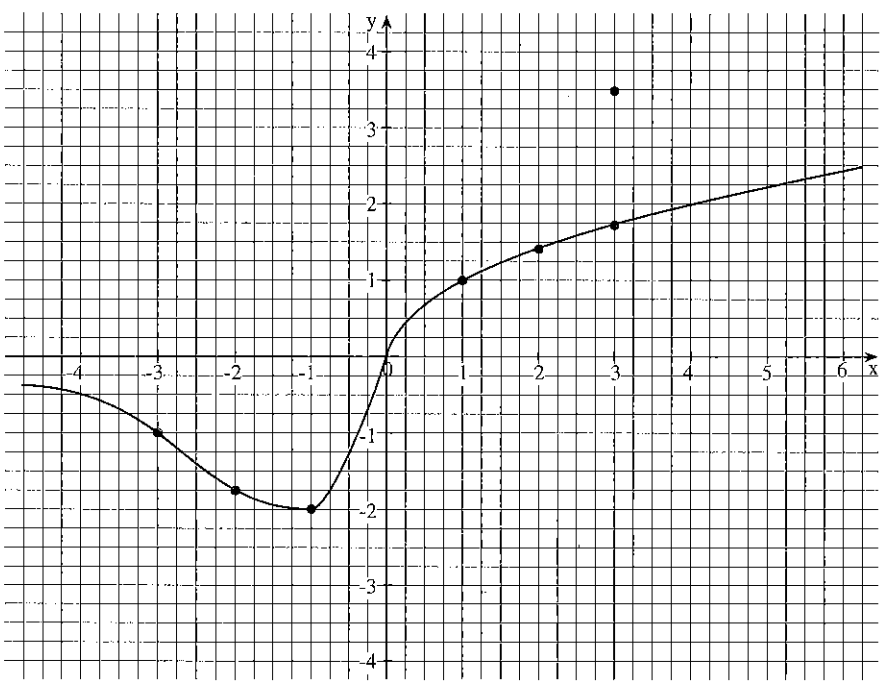
في هذا البند، سنرى كيف تتغير خواص دالة معطاة، عندما نضرب دالة في دالة ثابتة، أو في الدالة $f(x) = x$، أو في الدالة $f(x) = \sqrt{x}$. يجري فحص الرسوم البيانية في هذا البند، بواسطة حاسبة بيانية او بواسطة برمجية تمكننا من رسم خطوط بيانية للدوال (مثلا $x^3, \sin x$).

1. في هذه المسألة، سنفحص ماذا يحدث للخط البياني للدالة، عندما نضرب قانون الدالة في 2.

أ) على الخط البياني المرسوم للدالة f ، معينة بعض النقط.

(i) عينوا نقطا لها نفس الاحداثي x بحيث تقع على الخط البياني للدالة $2 \cdot f$.

احدى النقط معينة كمثال.



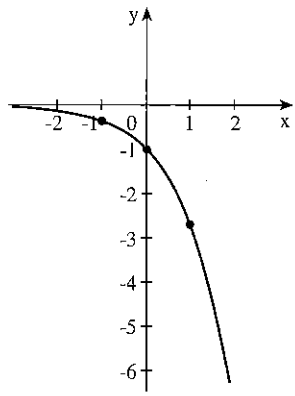
(ii) اكملوا رسم الخط البياني للدالة $2 \cdot f$.

(iii) في نفس هيئة المحاور، ارسموا الخط البياني للدالة $\frac{1}{2} \cdot f$

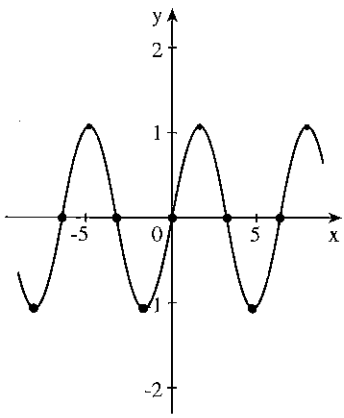
(iv) أية نقطة تبقى في مكانها في الحالتين (ii) , (iii)؟

ب) في كل بند مرسوم الخط البياني للدالة f.
ارسموا الخط البياني للدالة $g(x) = 2 \cdot f(x)$. استعينوا بالنقط المشددة على الخط البياني للدالة f.

i) الخط البياني المرسوم: $f(x) = -e^x$ ارسموا: $g(x) = 2 \cdot (-e^x)$



ii) الخط البياني المرسوم: $f(x) = \sin x$ ارسموا: $g(x) = 2\sin x$



يمكن قياس الزوايا بوحدات ليست درجات، تدعى راديان. الخط البياني المرسوم هو بالراديان

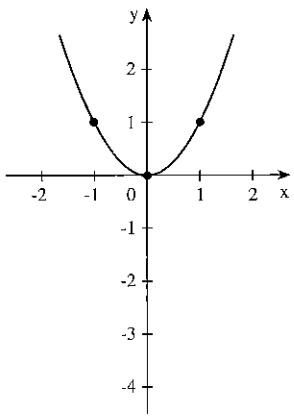
جـ) للفحص، ارسموا الخطين البيانيين لكل زوج من الدوال في الحاسوب او في الحاسبة البيانية. عند الانتقال من بند الى اخر، اشطبوا الدوال التي رسمتم في البند السابق.

د) أية خواص تُحفظ وأية خواص تتغير عند الانتقال من f الى $2 \cdot f$ ؟
اهتموا بالتصاعد/والتنازل،بالنقط القصوى، بوتيرة التغيير، بنقط التقاطع مع المحورين، بايجابية/ وسلبية الدالة، بالدورية وبالتماثل بالنسبة للمحور y.

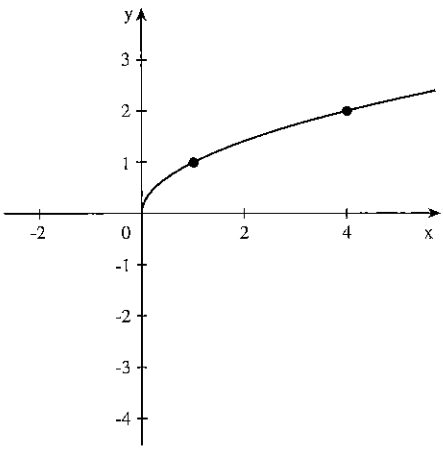
2. في هذه المسألة، سنفحص ماذا يحدث للخط البياني للدالة، عندما نضرب قانون الدالة بعدد سالب.

أ) في كل بند مرسوم الخط البياني للدالة f. ارسموا الخط البياني للدالة: $g(x) = -f(x)$. استعينوا بالنقط المشددة على الخط البياني للدالة f.

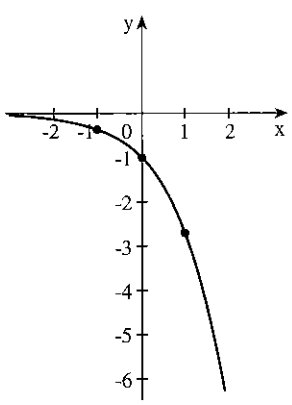
i) الخط البياني المرسوم: $f(x) = x^2$ ارسموا: $g(x) = -x^2$



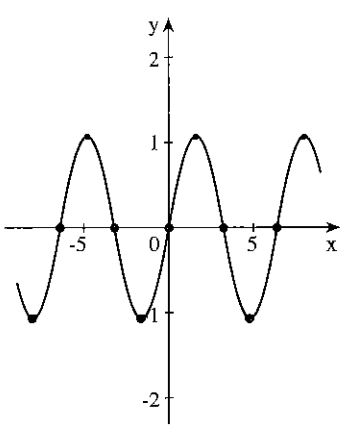
ii) الخط البياني المرسوم: $f(x) = \sqrt{x}$ ارسموا: $g(x) = -\sqrt{x}$



iii) الخط البياني المرسوم: $f(x) = e^x$ ارسموا: $g(x) = -e^x$



iv) الخط البياني المرسوم: $f(x) = \sin x$ ارسموا: $f(x) = -\sin x$



ب) للفحص، ارسموا الخطين البيانيين لكل زوج من الدوال f وَ g في الحاسوب أو في الحاسبة البيانية. عند الانتقال من بند الى آخر، اشطبوا الدوال التي رسمتم في البند السابق.

جـ) أية خواص تُحفظ وأية خواص تتغير عند ضرب الدالة في 1-؟

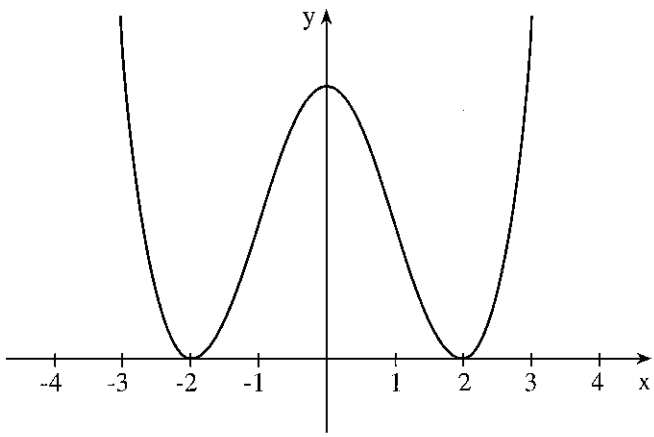
اهتموا بوتيرة التغيير، بالتصاعد / والتنازل، بنقط التقاطع مع المحورين، بايجابية / وسلبية الدالة، بالدورية وبالتماثل بالنسبة للمحور y.

د) لكل هيئة، اضيفوا خطاً بيانياً آخر يلائم $h(x)=-2.f(x)$. افحصوا في الحاسوب أو في الحاسبة البيانية.

3. في هذه المسألة، سنفحص ماذا يحدث للخط البياني للدالة، عندما نضرب قانون الدالة في x يعني $g(x)=x.f(x)$. وحيث ان البحث متشعب اكثر، سنجري الفحص على مراحل عما يحدث لخواص مختلفة.

أ) نفحص اولاً، ماذا يحدث لنقط التقاطع مع المحورين.

مرسوم الخط البياني للدالة f. عينوا نقط تقاطع الدالة المرسومة مع المحورين، ثم عينوا بلون اخر نقط تقاطع الدالة $g(x)=x.f(x)$ معهما.



ب) في هذا البند، نفحص اشارة الدالة $g(x)=x.f(x)$ بالنسبة للدالة f المرسومة في البند (أ).

(i) هل الخط البياني للدالة $g(x)=x.f(x)$ عن يمين المحور y $(x>0)$، يكون فوق المحور x أم تحته؟

(ii) هل الخط البياني $g(x)=x.f(x)$ عن يسار المحور y $(x<0)$، يكون فوق المحور x ام تحته؟

(iii) قانون الدالة المرسومة في البند (أ) هو:

$f(x) = 0.2 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 2)^2$

ارسموا في الحاسوب او في الحاسبة البيانية، الخطين البيانيين للدالتين

$g(x) = x \cdot 0.2 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 2)^2$: g وَ f

هل الخط البياني للدالة g يلائم اجاباتكم؟

جـ) نفحص ماذا يحدث للزوجية (تماثل بالنسبة للمحور y) وللفردية (تماثل بالنسبة لنقطة الاصل).

(i) ماذا يمكنكم القول عن زوجية او فردية الدالتين f وَ g السابقتين؟

(ii) ارسموا الدالة $f(x) = \cos x$ في الحاسوب او في الحاسبة البيانية

اختاروا مجالا وارسموا ايضا $g(x) = x \cdot \cos x$

ماذا يمكنكم القول عن زوجية او فردية الدالتين f وَ g؟

(iii) الدالة $f(x) = x^2$ زوجية.

اكملوا: الدالة $g(x) = x \cdot x^2$ هي ــــــــــــ.

(iv) ارسموا الدالة $f(x) = \sin x$ في الحاسوب او في الحاسبة البيانية.

ارسموا ايضا $g(x) = x \cdot \sin x$

ماذا يمكنكم القول عن زوجية او فردية الدالتين f وَ g؟

(v) الدالة $f(x) = x^3$ فردية.

اكملوا: الدالة $g(x) = x \cdot x^3$ هي ــــــــــــ.

(vi) استعينوا بالبنود (i) - (v) وفسروا ماذا يحدث للزوجية أو للفردية عند ضرب الدالة في x.

د) نفحص ماذا يحدث للنقط القصوى.

ارسموا في الحاسوب او في الحاسبة البيانية، زوج الدوال الاتي:

افحصوا هل يمكن القول شيئا ما عن النقط القصوى للدالة $g(x) = x \cdot f(x)$ اعتمادا على النقط القصوى للدالة f.

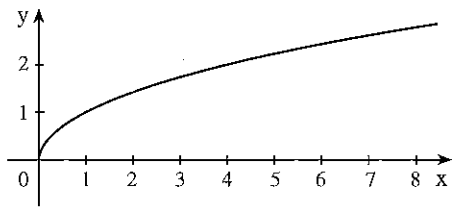
(i) $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$

(ii) $g(x) = x(x + 1)(x - 1)(x - 3)$

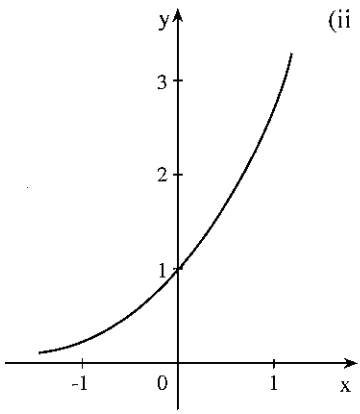
هـ) لخصوا استنتاجاتكم عن العلاقة بين الخط البياني للدالة f والخط البياني للدالة $g(x) = x \cdot f(x)$

4. في كل هيئة محاور، مرسوم الخط البياني لدالة f.

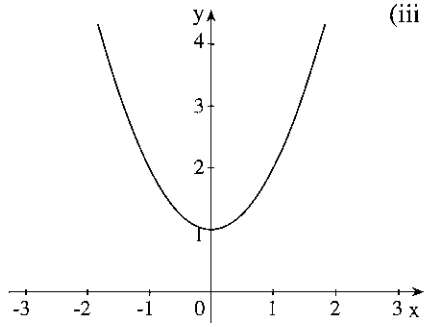
(i



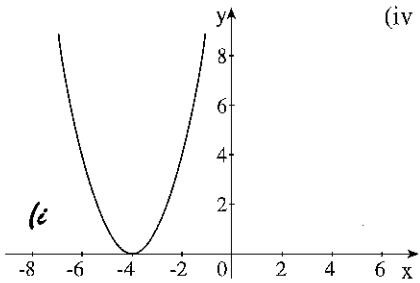
(ii



(iii



(iv



أ) حاولوا رسم الخط البياني للدالة $g(x)$ $x \cdot f(x)$

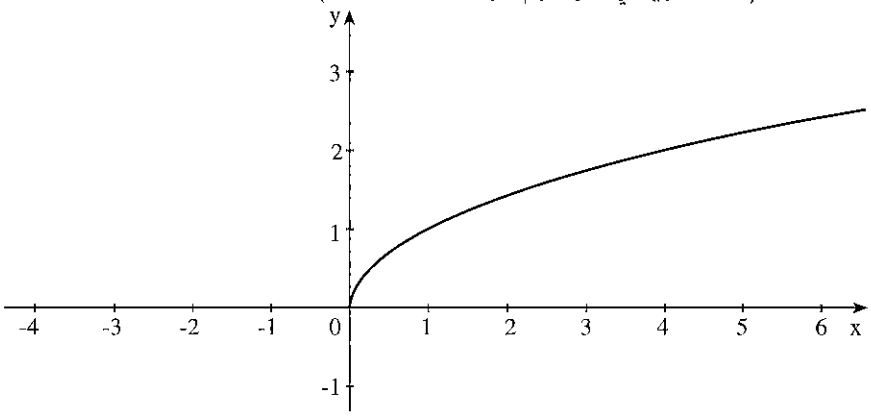
ب) ارسموا في الحاسوب او في الحاسبة البيانية، الخطين البيانيين للدالة f وللدالة $g(x) = x \cdot f(x)$ حسب القوانين المعطاة، قارنوا مع الخطوط البيانية التي رسمتم في البند (أ).

(i $f(x) = \sqrt{x}$ (ii $f(x) = x^2 + 1$

(iii $f(x) = e^x$ (iv $f(x) = (x + 4)^2$

5. أ) حاولوا ان تصفوا كيف يظهر الخط البياني لحاصل الضرب $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

(الخط البياني المرسوم هو $f(x) = \sqrt{x}$)



ب) ارسموا في الحاسوب أو في الحاسبة البيانية، الخط البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ وفسروا ماذا ينتج.

في هذا البند، رأينا انه حسب الخط البياني للدالة f يمكننا ان نرسم الخط البياني لحاصل ضرب f في دالة ثابتة. وكذلك يمكننا ان نبين عددا من خواص الدالة التي هي عبارة عن حاصل ضرب دالة في دالة اخرى، ولكن من الصعب ايجاد جميع الخواص المطلوبة لرسم الخط البياني.
ووجدنا ايضا انه من الصعب الاستنتاج من النقط القصوى للدالة f، اي شيء عن النقط القصوى للدالة $g(x) = x \cdot f(x)$. ووجدنا كذلك انه من الصعب التعرف على خواص التصاعد والتنازل، بينما يمكن التعرف على هذه الخواص بواسطة المشتقة.

المشتقة لحاصل ضرب الدوال، تساعدنا كثيرا في بحث حواصل ضرب كثيرة اخرى لم نعالجها في هذا البند ابدا.

التمارين 8 - 6 هي تمارين تحضيرية

6. بسطوا قدر الامكان.

أ) $x^2 \cdot x^3 =$

ب) $2 \cdot x^4 \cdot x^5 =$

جـ) $3x^3 \cdot x^2 =$

د) $2x^5 + x^5 =$

هـ) $2x^2 + x^2 + x^3 =$

و) $x(x^2 + 2) + x^2 =$

7. **بسطوا قدر الامكان**

أ) $2x^5 + 6x^5 =$

ب) $x^3 + x^2 =$

جـ) $x^2 + x^3 + 2x^5 =$

د) $x^2 \cdot x + x \cdot x^2 =$

هـ) $x^2 \cdot x + x^2 \cdot x^2 =$

و) $x^3 \cdot x^2 + x^3 \cdot x^3 =$

8. **فكوا الاقواس وبسطوا**

أ) $2x(x^3 +1) + 3x^2 (x^2 +4)$

ب) $3x^2(2x^4 - 1) + 8x^3 (x^3 +2)$

جـ) $(2x + 4) (2x^3 + 1) + 6x^2 (x^2 +4x)$

د) $(2x +1) (3x^2 - 1 + 6x (x^2 +x)$

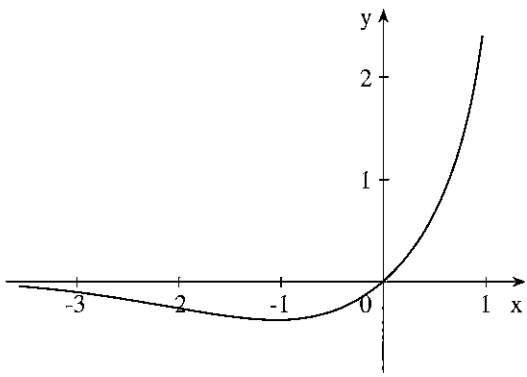
هـ) $(2x +1) (x^2 +3x) =$

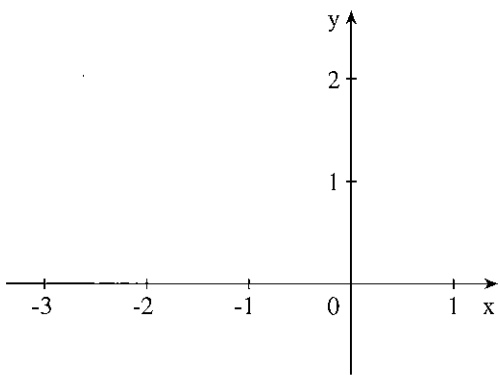
و) $(x^2 +2x) (2x^3 + x^2) =$

مشتقة حاصل ضرب الدوال

1. معطاة الدالة $f(x)=x \cdot e^x$

أ) مرسوم الخط البياني للدالة f، ارسموا في هيئة المحاور الفارغة، شكلا تقريبياً للخط البياني للمشتقة.





ب) نفحص هل المشتقة هي حاصل ضرب المشتقتين لِ x و e^x

(i) سجلوا حاصل ضرب المشتقتين.

(ii) فسروا لماذا لا يمكن ان تكون مشتقة الدالة هي حاصل ضرب المشتقتين.

د) ارسموا في الحاسوب او في الحاسبة البيانية، كل واحدة من الدوال الاتية، ثم افحصوا بالنسبة لكل منها، هل يمكن ان تكون مشتقة للدالة f.

(i) هل يمكن ان تكون المشتقة هي e^x؟

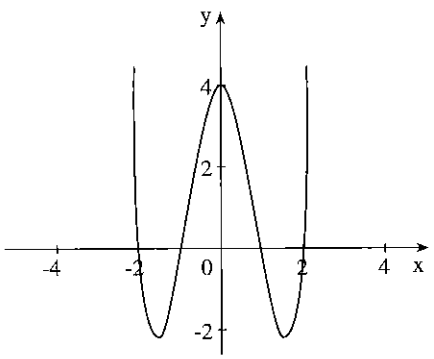
(ii) هل يمكن ان تكون المشتقة هي $x \cdot e^x$؟

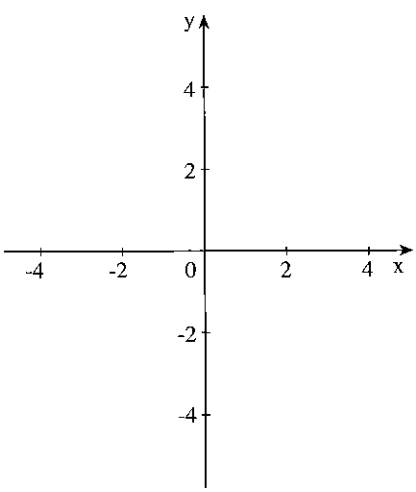
(iii) هل يمكن ان تكون المشتقة هي $e^x + x \cdot e^x$؟

(iv) هل يمكن ان تكون المشتقة هي $(x + 1)$؟

2. مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$.

ارسموا في هيئة المحاور الفارغة، شكلاً تقريبياً للخط البياني للمشتقة، عينوا اولا النقط التي يكون فيها ميل الدالة صفرا، (يمكنكم ايضا الاستعانة بسطر اسهم).





ب) ارسموا في الحاسوب او في الحاسبة البيانية، كل واحدة من الدوال الاتية، ثم افحصوا أيا من الدوال الاتية يمكن ان تكون مشتقة للدالة f.

(i) هل يمكن ان تكون المشتقة هي $2x \cdot 2x$؟

(ii) هل يمكن ان تكون المشتقة هي $2x(x^2 - 1)$؟

(iii) هل يمكن ان تكون المشتقة هي $2x \cdot (x^2 - 1) + 2x.(x^2 - 4)$؟

جـ) فكوا الاقواس وسجلوا قانون الدالة f من جديد.

$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)$

$f'(x) =$ اشتقوا الدالة

د) فكوا الاقواس وبسطوا قانون الدالة التي اخترتم في البند (ب).

هل هذا هو بالفعل قانون المشتقة f' التي نتجت في البند (جـ)؟

مشتقة حاصل ضرب الدوال:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

أو بالكلمات:

مشتقة الدالة الاولى مضروبة في الدالة الثانية+ مشتقة الدالة الثانية مضروبة في الدالة الاولى.

3. نفحص قانون مشتقة حاصل ضرب الدوال، بواسطة مثال بسيط.

$f(x)= x^2 \cdot x^3$

أ) اشتقوا حسب القانون المسجل أعلاه ثم بسطوا: $f'(x) =$

ب) $f(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5$

اشتقوا: $f'(x)$

جـ) قارنوا نتائجكم في البندين (أ) وَ (ب)

4. اشتقوا الدالة من التمرين 1 $(f(x) = x \cdot e^x)$ ، ثم افحصوا اجابتكم عن البند (د) من التمرين 1.

في التمرينين 3,2 وجدنا المشتقة لدوال تظهر كحاصل ضرب دالتين بشكلين: بمساعدة مشتقة حاصل ضرب أو بواسطة تنفيذ الضرب ثم الاشتقاق.

في دالة مثل $y=x^2 \cdot e^x$ لا يمكن تنفيذ الضرب، ويمكن الاشتقاق بواسطة القانون فقط.

في التمارين الاتية، شددوا الدالتين اللتين هما عاملا حاصل الضرب ثم اشتقوا.

مثال: $y=x^2 \cdot e^x$

نشدد الدالتين اللتين هما عاملا حاصل الضرب $\boxed{x^2} \cdot \boxed{e^x}$ ثم نشتق $y =$

$$y' = 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2$$

مثال آخر: $y = \boxed{(x^2+3)} \boxed{(x^3 - 1)}$

$$y' = 2x \cdot (x^3 - 1) + 3x^2 \cdot (x^2 + 3)$$

5. بمساعدة قانون مشتقة حاصل الضرب، اشتقوا وبسطوا (من المفضل وضع كل واحد من عاملي الضرب في اطار خاص)، للفحص، يمكنكم فك الاقواس ثم التبسيط والاشتقاق.

أ) $y = (x^2 - 1)(x^3 + 4)$

ب) $y = x^3 (2x^4 - 2)$

جـ) $y = (2x^3 - 1)(x^2 + 5)$

د) $y = (x^2 - x)(x^3 - 4)$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

6. (I) اشتقوا بمساعدة قانون مشتقة حاصل الضرب (من المفضل وضع كل واحد من عاملي الضرب في اطار خاص).

أ) $y = x \cdot \sqrt{x}$ جـ) $y = (\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)$

ب) $y = \sqrt{x} \cdot (x^2 + x)$ د) $y = (\sqrt{x} - x) \cdot (\sqrt{x} - x)$

(II) بسطوا الدالة من البند (جـ) ثم اشتقوها. بسطوا المشتقة ايضا وافحصوا نتائجكم.

7. اشتقوا (من المفضل وضع كل واحد من عاملي الضرب في اطار خاص).

أ) $y = 2x \cdot e^x$ هـ) $y = (e^x + 4) \cdot 2x$

ب) $y = \sqrt{x} \cdot e^x$ و) $y = e^x \cdot (3 - 2x)$

جـ) $y = x^3 \cdot e^x$ ز) $y = (1 - 2x^2) \cdot e^x$

د) $y = e^x \cdot (x^2 - 4)$ ح) $y = (e^x + 2) \cdot \sqrt{x}$

8. معطاة الدالة $f(x) = 3 \cdot x^6$

أ) اكملوا مشتقة الدالة: $f'(x) = 3 \cdot$ ———

ب) اشتقوا حسب قانون مشتقة حاصل الضرب.

اذا لم تخطئوا، فانكم حصلتم على ذات النتيجة في البندين.
الاشتقاق حسب قانون مشتقة حاصل الضرب هنا صحيح، لكنه صعب وغير جدير بالاستعمال.

9. أ) بينوا في أي من الدوال الاتية، يكون استعمال قانون مشتقة حاصل الضرب الزامياً. اشتقوا هذه الدوال.

(i) $y = 3 \cdot x^4$ (iv) $y = e^x \cdot (1 - x)$

(ii) $y = 2x \cdot e^x$ (v) $y = 4x^2 \cdot 5x^3$

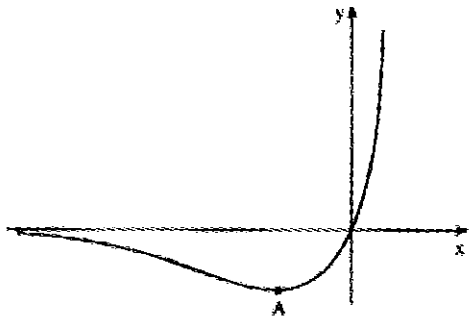
(iii) $y = x^2 \cdot (1 - x)$ (vi) $y = (3x - 4) \cdot (x^2 + 1)$

ب) بسطوا ثم اشتقوا الدوال الاخرى التي لم تشتقوها من البند (أ).

بحث حاصل ضرب الدوال

بحث حاصل ضرب يحوي دالة أسية

1. مرسوم الخط البياني للدالة $y = 3x \cdot e^x$. النقطة A هي نقطة نهاية صغرى.



أ) ما هي قيمة **المشتقة** في النقطة A؟

ب) نحسب احداثيات النقطة A حسب الخطوات الاتية:

(i) اشتقوا الدالة.

(ii) بينوا ان المشتقة التي حصلتم عليها مساوية لـ $y' = 3e^x \cdot (1 + x)$

(iii) احسبوا الاحداثي x للنقطة A وعينوه على المحور x.

(iv) احسبوا الاحداثي y للنقطة A وعينوه على المحور y.

جـ) حاولوا ان تبينوا حسب المشتقة، هل توجد للدالة نقط قصوى غير A ؟ عللوا.

لحساب نقط قصوى، نحتاج احياناً لاخراج عامل مشترك من مشتقة الدالة (كما رأيتم في التمرين 1 بند (ii) أعلاه). في التمرين 2، سنعتاد الى اخراج عامل مشترك وحل معادلات.

2. أخرجوا عاملاً مشتركاً ثم حلّوا:

مثال : $2e^x + 2xe^x = 0$

$2e^x (1 + x) = 0$

$2e^x = 0$ أو $1 + x = 0$

e^x موجب دائما $x = -1$

أ) $3e^x + 3xe^x = 0$

ب) $2xe^x + x^2e^x = 0$

ج) $e^x(2 + 4x) - 4e^x = 0$

د) $2x - 2xe^x = 0$

هـ) $e^x - xe^x = 0$

و) $e^x(1 + x^2) - 2xe^x = 0$

3. اشتقوا بسطوا وجدوا لأية قيم x تكون المشتقة مساوية لصفر.

أ) $y = 2x \cdot e^x$

ب) $y = 3x^2 \cdot e^x$

ج) $y = (1 - x) \cdot e^x$

د) $y = e^x \cdot (x - 4)$

هـ) $y = e^x \cdot (x^2 - 3)$

و) $y = x^2 \cdot e^{3x}$

4. معطاة الدالة $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 8)$

أ) جدوا لأية قيم x تكون المشتقة مساوية لصفر؟

ب) اذا لم تخطئوا، فانكم وجدتم في البند أ ان احد القيم x الملائمة هو 4-. كي تجدوا الاحداثي y للنقطة، استيعنوا بسلسلة الضغطات في الحاسبة.

-4	e^x	x	(	-4	x^2	-	8	)	=

جـ) جدوا الاحداثي y للنقطة المشبوهة الثانية.

5. أ) جدوا نقطة مشبوهة (النقطة حيث تكون المشتقة مساوية لصفر) للدالة: $f(x) = e^x \cdot (x-2)$ وعينوها في هيئة المحاور .

ب) بيّنوا هل هي نقطة قصوى، بواسطة حساب احداثيات نقط اخرى وتعيينها، إذا كان نعم– ما نوعها(نقطة نهاية عظمى او نقطة نهاية صغرى)؟

انتبهوا: في التمرين 6 f تحوي دالة مركبة ايضا.

6. جدوا نقطا قصوى للدالة $f(x) = (x + 3)\, e^{-x}$ وبينوا نوعها.(استعينوا بتعيين نقط في هيئة المحاور).

7. أ) جدوا نقطاً قصوى للدالة $f(x) = (4x^2+3)e^x$ وبينوا نوعها .

ب) احسبوا $f'(-1)$. هل الدالة تصاعدية ام تنازلية في النقطة $x=-1$؟
هل النتيجةتلائم ما حصلتم عليه في البند (أ)؟
(يمكنكم الرسم للفحص)

8. معطاة الدالة $f(x) = (x - 1)\, e^{2x}$

أ) افحصوا هل الدالة تصاعدية ام تنازلية في كل واحدة من النقط التي احداثيها x معطى
(i) $x = -1$ (ii) $x = 4$

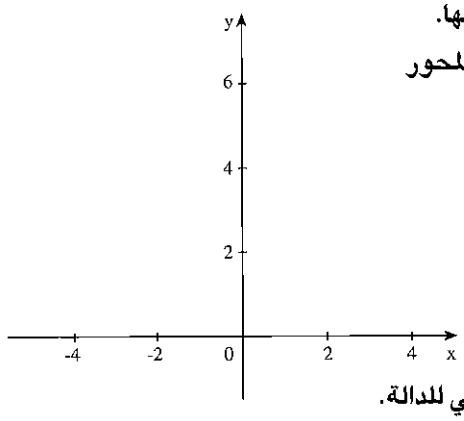
ب) هل توجد للدالة نقطة قصوى،حسب رأيكم؟ فسروا.

9. ارسموا شكلاً تقريباً للدالة $y = 3x^2 \cdot e^x$ حسب البنود الاتية:
(عينوا كل نقطة تجدونها في هيئة المحاور)

أ) جدوا نقطا قصوى وسجلوا نوعها.

ب) هل توجد للدالة نقط تقاطع مع المحور x اضافة الى (0,0) ؟ فسروا.

جـ) اكملوا احداثيات نقط واقعة على الخط البياني للدالة:
(-15,) , (-10,) , (-6,)
هل يوجد للدالة خط تقارب؟
اذا كان نعم– سجلوا معادلته.



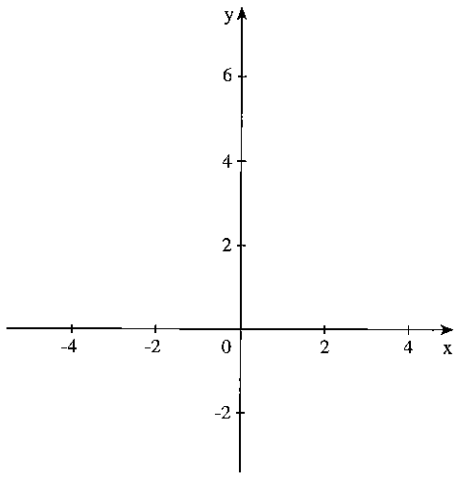
د) اكملوا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.

10. ابحثوا الدالة $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 3)$ حسب الخطوات الاتية:

أ) جدوا احداثيات نقط التقاطع مع المحورين، وعينوها في هيئة المحاور.

ب) جدوا نقطاً قصوى وسجلوا نوعها، ثم عينوها في هيئة المحاور.

جـ) اكملوا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.



تمارين

11. حلوا المعادلات الاتية (اخرجوا عاملا مشتركاً)

أ) $8e^x - 4x^2e^x = 0$

ب) $e^x(x - 2) + e^x = 0$

جـ) $2e^xx - 4e^xx^2 = 0$

د) $3xe^x + (3x^2 - 6)e^x = 0$

12. أ) ابحثوا الدالة $y = x^3 \cdot e^x$ حسب الخطوات الاتية:

(عينوا كل نقطة تجدونها في هيئة محاور).

(i) جدوا نقطة التقاطع مع المحور y.

(ii) جدوا نقطاً قصوى (سجلوا نوعها).

(iii) اكملوا احداثيات نقط واقعة على الخط البياني للدالة.

(-20 ,) , (-8 ,) , (-7 ,)

هل يوجد للدالة خط تقارب؟ اذا كان نعم- سجلوا معادلته.

(iv) اكملوا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.

(v) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل.

ب) ما هي النقط القصوى للدالة $y = - x^3 \cdot e^x$ ؟ وما هو نوعها؟

13. ابحثوا الدالة $y = (2 - 4x) \cdot e^x$ حسب الخطوات الاتية:

(عينوا كل نقطة تجدونها في هيئة محاور).

أ) احسبوا نقط التقاطع مع المحورين.

ب) احسبوا النقط القصوى.

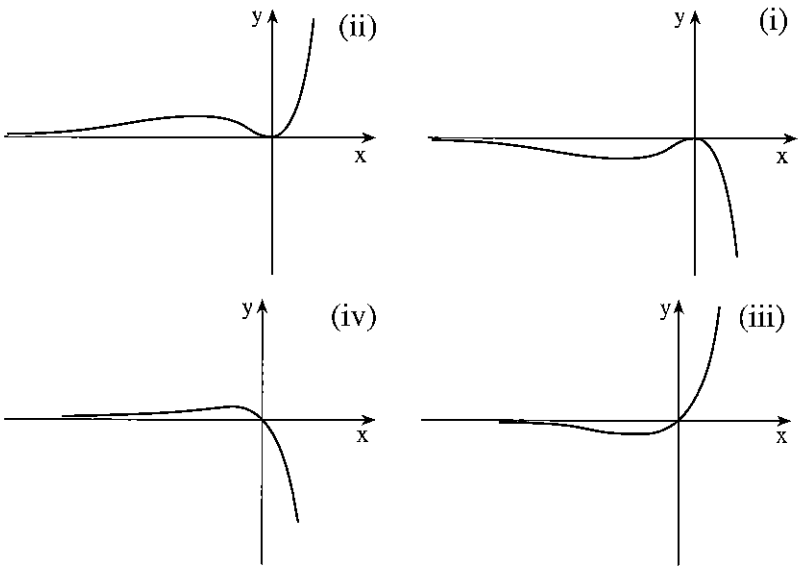
جـ) اكملوا احداثيات نقط واقعة على الخط البياني: $(-4, \ )$, $(-6, \ )$, $(-10, \ )$

هل يوجد للدالة خط تقارب؟ اذا كان نعم– سجلوا معادلته.

د) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.

14. ناظروا قانوناً لكل خط بياني.

أ) $y= e^x \cdot x$ ب) $y = -e^x \cdot x$ جـ) $y = e^x \cdot x^2$ د) $y = -e^x \cdot x^2$



15. ابحثوا الدالة $f(x) = e^x \cdot x^4$ ،حسب الخطوات الاتية:

أ) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.

ب) جدوا النقط القصوىٰ.

جـ) هل يوجد للدالة خط تقارب؟ اذا كان نعم– سجلوا معادلته.

د) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.

هـ) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل.

16. ابحثوا الدالة $g(x) = (x^2 - 2^x) \cdot e^x$ حسب الخطوات المسجلة في المسألة 15.

بحث حاصل ضرب يحوي دالة جذرية

في هذا البند، سنبحث دوال هي عبارة عن حاصل ضرب $\sqrt{x}$ في دوال اخرى. من اجل ذلك، توجد حاجة لحل معادلات مشابهة لـ $\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$. ان مجال تعريف هذه المعادلات هو $x>0$. كما ويجب فحص الحلول اذا كانت ملائمة لمجال تعريف المعادلات.

1. **في كل تمرين:**

(i) **حلوا وجدوا x. (من المفضل الضرب في $\sqrt{x}$ اولا).**

(ii) **عوضوا قيمة x التي حصلتم عليها وافحصوا اجابتكم (انتبهوا، مجال التعريف هو $x>0$).**

مثال: $\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \quad /\cdot 2\sqrt{x}$

$$2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + 1 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -0.5$$

- **عوضوا قيمة x التي حصلتم عليها في المعادلة المعطاة وفسروا ما حدث.**

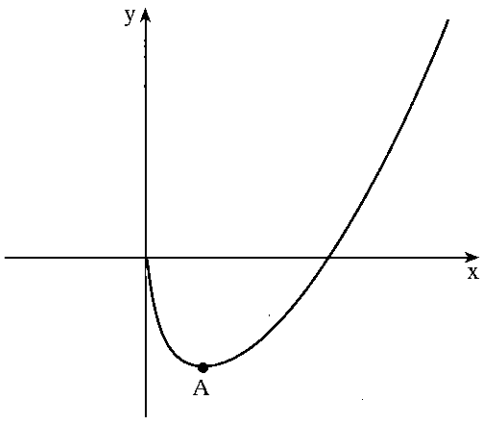
أ) $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$ ب) $2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

جـ) $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (x-4) + 2\sqrt{x} = 0$ د) $2x \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 5) = 0$

2. **مرسوم الخط البياني للدالة**

$$y = 2\sqrt{x}\cdot(x-4)$$

انتبهوا: مجال تعريف الدالة هو $x \geq 0$



أ) **احسبوا نقط التقاطع مع المحورين. شددوا هذه النقط في هيئة المحاور.**

ب) **احسبوا احداثيات النقطة A.**

ع.ذ 3. ابحثوا الدالة $y = \sqrt{x} \cdot e^x$ حسب الخطوات الاتية:
(عينوا كل نقطة تجدونها في هيئة محاور).

أ) سجلوا مجال تعريف الدالة.

ب) جدوا نقطة التقاطع مع المحور x.

جـ) جدوا قيمة x عندما تكون مشتقة الدالة صفراً. (فسروا لماذا لا يوجد للدالة نقطة قصوى بالنسبة لـ x الذي وجدتم).

د) للدالة نقطة قصوى واحدة. سجلوا احداثياتها ونوعها.

هـ) اكملوا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة (احسبوا وعينوا نقطاً اخرى اذا لزم الامر).

تمارين

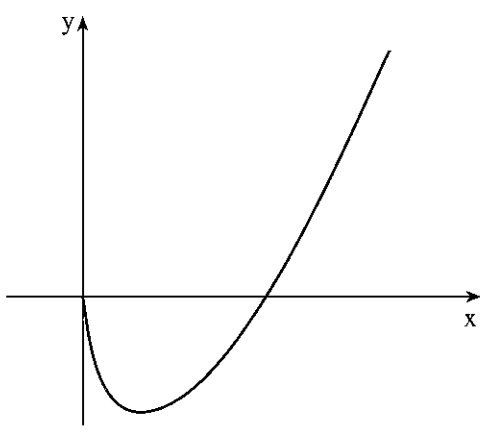
4. أ) جدوا نقط التقاطع مع المحور x لكل واحدة من الدوال الاتية:

(i $y = 2\sqrt{x} \cdot (x + 3)$ (ii $y = 2\sqrt{x}\,(x^2 - 9)$

(ii $y = 2\sqrt{x} \cdot e^x$ (iv $y = 2\sqrt{x} \cdot (x - 3)$

(v $y = 2\sqrt{x} \cdot (x^3 - 27)$ (vi $y = 2\sqrt{x} \cdot (e^x - 5)$

ب) سجلوا القوانين **التي يمكن** ان تلائم الخط البياني الاتي:



جـ) معلوم ان الاحداثي y لنقطة النهاية الصغرى هي 4-.
ناظروا للخط البياني المرسوم قانوناً من القائمة اعلاه.

5. حلوا المعادلات الاتية. للفحص، عوضوا في المعادلة.

أ) $e^x \cdot \sqrt{x} - e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

ب) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = 0$

جـ) $3e^x \sqrt{x} - \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = 0$

د) $\sqrt{x} \cdot (2x - 1) - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

6. ابحثوا الدالة $f(x) = \sqrt{x}\,(3x - 6)$ حسب الخطوات الاتية:

أ) جدوا مجال التعريف.
ب) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.
جـ) جدوا النقط القصوى.
د) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.
هـ) سجلوا مجالات تصاعد وتنازل الدالة.

7. ابحثوا الدالة $f(x) = \sqrt{x} \cdot (3x - x^2)$ حسب خطوات البحث المذكورة في التمرين 6.

8. بينوا ان اللدالة $f(x) = 2\sqrt{x}\,(x^2 + 2x)$ توجد نقطة قصوى عند طرفها فقط.

دوال حاصل ضرب اخرى

1. نبحث الدالة $y = \frac{e^x}{x}$

أ) في اية قيمة لـ x تكون الدالة غير معرفة؟

ب) فسروا لماذا لا يوجد للدالة نقط تقاطع مع المحورين؟

جـ) اشتقوا الدالة كحاصل ضرب: $y = e^x \cdot \frac{1}{x}$

$$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$$

- اخرجوا عاملاً مشتركاً وبينوا ان المشتقة التي حصلتم عليها مساوية لـ

$$y' = \frac{1}{x} \cdot e^x \cdot (1 - \frac{1}{x})$$

د) جدوا النقط القصوى وبينوا نوعها(نهاية عظمى أو نهاية صغرى) بمساعدة حساب نقط اخرى.

هـ) اكملوا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة (عن جهتي المحور y).

و) سجلوا معادلات خطوط التقارب.

ز) ارسموا الخط البياني للدالة $y = \frac{e^x}{x}$ في الحاسوب او في الحاسبة البيانية، ثم افحصوا اجاباتكم عن البنود السابقة.

2. اشتقوا الدوال الاتية: (من اجل ذلك سجلوها كحاصل ضرب).

أ) $y = \frac{2e^x}{x}$

ب) $y = \frac{e^x}{2x} + x$

جـ) $y = \frac{e^x + 1}{x}$

د) $y = \frac{e^x + x^2}{x}$

هـ) $y = \frac{2e^x + x^3}{x}$

و) $y = (e^x + 1)(\frac{1}{x} + 1)$

3. ابحثوا الدالة $y = e^x \cdot (\frac{1}{x} + 2)$ حسب الخطوات الاتية:

أ) سجلوا مجال تعريف الدالة.

ب) جدوا نقطة التقاطع مع المحور x.

جـ) جدوا النقط القصوى.

د) ارسموا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.

تمارين

4. حلوا المعادلات الاتية:

أ) $\frac{2}{x} \cdot e^x - \frac{2}{x^2} \cdot e^x = 0$

ب) $e^x \cdot (\frac{1}{x} + 3) + e^x \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 0$

جـ) $-\frac{e^x}{3x^2} + \frac{e^x}{x} = 0$

د) $e^x \cdot (1 - \frac{1}{x^2}) + 3e^x = 0$

5. ابحثوا الدالة $f(x) = \frac{4e^x}{x}$ حسب الخطوات الاتية:

أ) جدوا مجال التعريف.

ب) جدوا نقط التقاطع مع المحورين.

جـ) جدوا النقط القصوى (ان وجدت).

د) ارسموا شكلا تقريبياً للخط البياني للدالة.

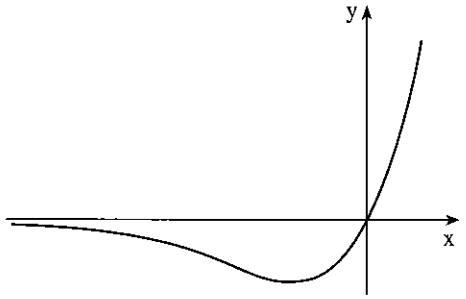
هـ) سجلوا مجالات التصاعد والتنازل.

6. ابحثوا الدالة $f(x) = e^x \cdot (\frac{1}{x} - 1)$ حسب الخطوات المسجلة في التمرين 5.

معادلة المماس

في بعض البنود، من المفضل الفحص بواسطة الحاسوب أو الحاسبة البيانية.

1. مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = 3x \cdot e^x$



أ) احسبوا الاحداثي x لنقطة، يكون ميل المماس فيها مساوياً لصفر، ارسموا المماس.

ب) سجلوا الاحداثي x لنقطة، يكون ميل المماس فيها موجباً. احسبوا الميل.

جـ) احسبوا ميل المماس في النقطة $x = -3$ افحصوا اجابتكم بمساعدة الخط البياني للدالة.

د) احسبوا $f'(3) =$

2. معطاة الدالة $f(x) = e^x \cdot (2x - 3)$

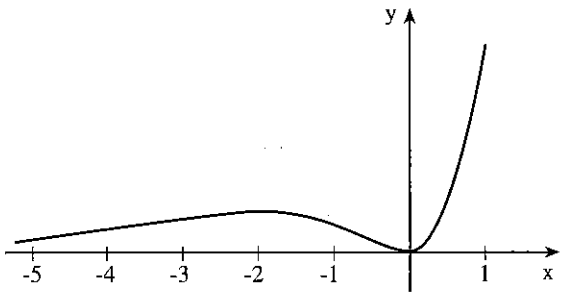
أ) احسبوا ميل الدالة في النقطة $(2, \quad)$ واكملوا احداثيات النقطة.

ب) احسبوا ميل الدالة في النقطة $(-1, \quad)$ واكملوا احداثيات النقطة.

جـ) – هل يوجد للدالة نقطة قصوى، حسب رأيكم، فسروا. اذا كان نعم– جدوها وبينوا من أي نوع هي.

– سجلوا الاحداثي x لنقطة اخرى، يكون ميل الدالة فيها سالباً.

3. مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = x^2 \cdot e^x$



أ) سجلوا اشارة الميل في النقط التي احداثيها x معطى.

$x = -\frac{1}{2}$ (i) $\quad x = 0$ (ii) $\quad x = 1$ (iii)

ب) ارسموا المماس في النقطة $x = 1$ واحسبوا ميل الدالة فيها.

جـ) من الحسابات في البند السابق، يظهر انه يمكن كتابة معادلة المماس في النقطة $x = 1$، بالصورة $y = 8.15x +$ ☐

جدوا الاحداثي y للنقطة وكذلك العدد الناقص داخل التربيعة، ثم افحصوا هل المستقيم الذي رسمتم في البند (ب) ملائم لمعادلة المستقيم التي وجدتم.

د) ارسموا الخط البياني للدالة في الحاسوب او في الحاسبة البيانية.

ارسموا المماس الذي حصلتم عليه في البند (جـ)، وافحصوا بواسطة السير على الخط البياني للدالة، هل هو مماس بالفعل.

(انتقلوا من خط بياني الى آخر بمساعدة الاسهم، وتأكدوا ان الاحداثي y لا يتغير).

ع.ذ 4. أ) جدوا معادلة المماس للدالة $f(x) = x^3 \cdot e^x$ في النقطة $x = -1$.

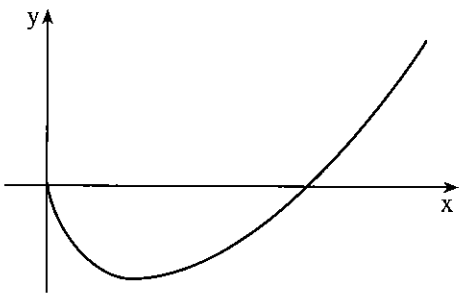
ب) افحصوا بواسطة الحاسوب أو الحاسبة البيانية. ارسموا الدالة وسيروا مع المماس حتى $x = -1$.

جـ) جدوا معادلة للدالة f في النقطة $x = -3$. افحصوا بواسطة الحاسوب أو الحاسبة البيانية.

نجد معادلة المماس ايضاً، لدوال هي حاصل ضرب $\sqrt{x}$ في دالة اخرى.

ع.ذ 5. **مرسوم الخط البياني للدالة:**

$$y = \sqrt{x} \cdot (0.5x - 2)$$



أ) **ما هو ميل المماس في النقطة $x = 1$؟**
ارسموا المماس بالتقريب.

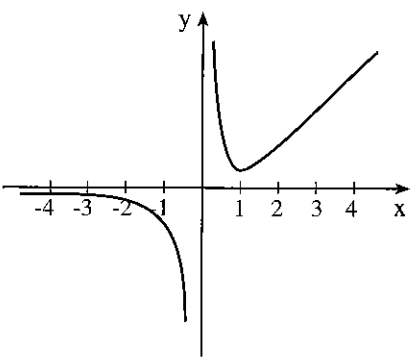
ب) **جدوا معادلة المماس.**

جـ) **اختاروا نقطة على الخط البياني للدالة، يكون الميل فيها موجباً (اختاروا الاحداثي x ، عوضوا وجدوا الاحداثي y).**
جدوا معادلة المماس في النقطة التي اخترتم.
ارسموا وافحصوا (بالتقريب) اذا كانت اجابتكم معقولة، أو افحصوا بواسطة الحاسوب أو الحاسبة البيانية.

تمارين

6. أ) **جدوا معادلة المماس للدالة** $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x}$ **في النقطتين الاتيتين:**

(i) $x = 2$
(ii) $x = 1$



ب) **مرسوم شكل تقريبي للخط البياني للدالة.**
ارسموا المماسين في هاتين النقطتين، وافحصوا اذا كانت اجابتكم عن البند (أ) معقولة.

7. أ) جدوا معادلة المماس للدالة $y = \sqrt{x} \cdot x^2$ في النقطة $x = 2$
ب) افحصوا بواسطة الحاسوب أو الحاسبة البيانية.

8. أ) جدوا معادلة المماس للدالة $y = \sqrt{x} \cdot (x^2 - 4)$ في النقطة $x = 4$
ب) افحصوا بواسطة الحاسوب أو الحاسبة البيانية.

9. لكل واحدة من الدالتين الاتيتين، جدوا معادلة المماس في النقطة التي احداثيها x مسجل الى جانبها.

أ) $y = \sqrt{x} \cdot (x^2 - x)$, $x = 2$

ب) $y = 2\sqrt{x} \cdot (3x^3 - x + 2)$, $x = 1$

10. جدوا معادلة المماس للدالة $y = (x + 7) \cdot e^{2x}$ في النقطة $x = -1$.

11. جدوا معادلة المماس للدالة $y = \sqrt{4 - x^2} \cdot (2x + 4)$ في النقطة $x = -1$.

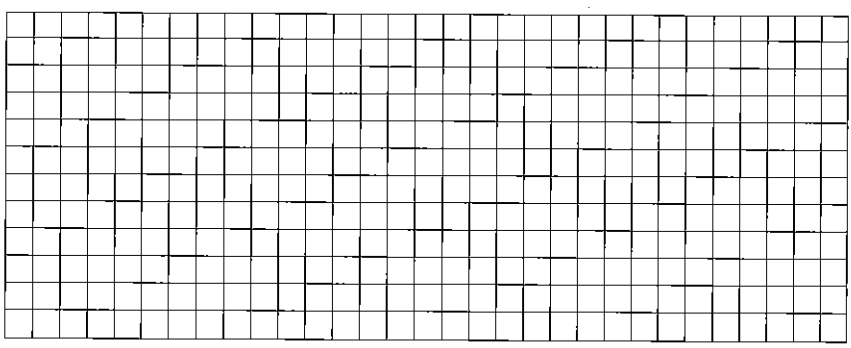
12. معطاة الدالة $f(x) = x^2 \cdot (\sqrt{x} - 2)$ والمستقيم $y = 4x + 1$
ارسموا الدالتين في الحاسوب.
في كم نقطة على الخط البياني للدالة، يمكن رسم مماس يوازي هذا المستقيم؟
ارسموا في الحاسوب، مستقيمات تمس الدالة (سجلوا معادلات ملائمة).
ما هي نقط التماس؟ (افحصوا بواسطة السير).
افحص بواسطة الاشتقاق وتعويض الاحداثي x للنقط.

الفصل السابع: مسائل نهايات قصوى مختارة

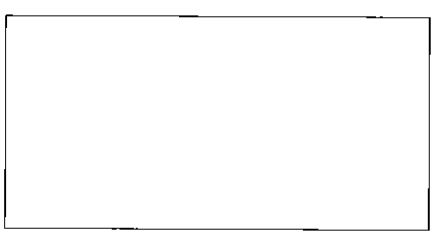
لقد عالجنا في بنود سابقة، مسائل نهايات قصوى أُدرجت مع سير المادة المدرّسة. اما هنا فسنعالج مسائل نهايات قصوى اخرى من انواع مختلفة.

1. من خيط طوله 36وحدة، يمكن انتاج مستطيلات مختلفة.

أ) ارسموا ثلاثة مستطيلات كهذه واحسبوا مساحتها (كل تربيعية هي وحدة مربعة).



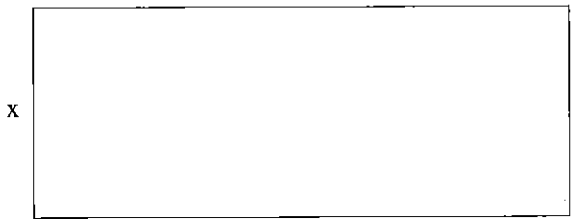
ب) أحد اضلاع المستطيل هو 5 وحدات. احسبوا طول الضلع الاخر ومساحة المستطيل.



في هذه المسألة، عالجنا مسارات مساحة ومحيط، ولكن ليس كمسألة نهاية قصوى، لقد عالجنا مسألة مشابهة في مدخل للتحليل.

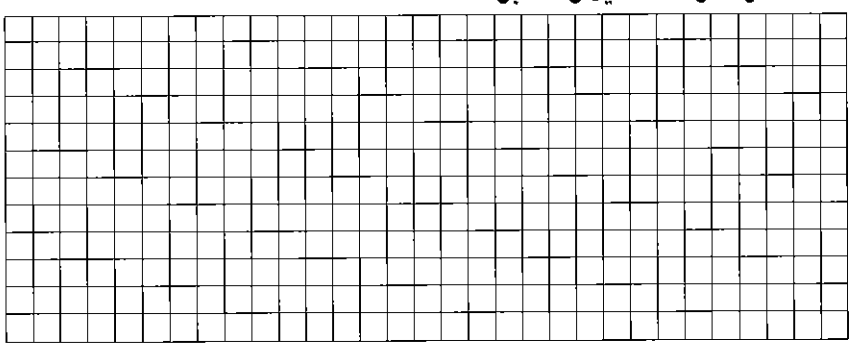
هنا سنبحث ثانية مساحة كل مستطيل وسنفحص متى ينتج المستطيل ذو اكبر اواصغر مساحة ممكنة.

جـ) ارمزوا الى احد اضلاع المستطيل بالحرف x.

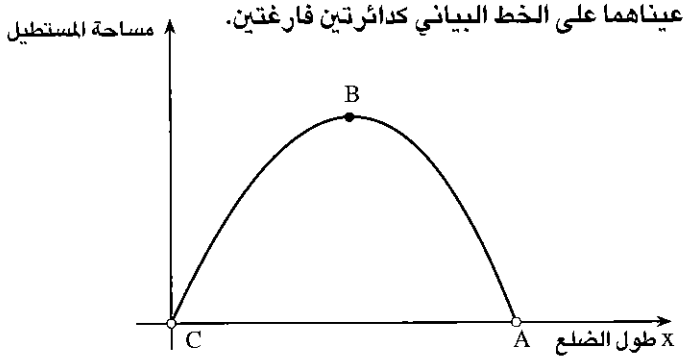


عبروا عن طول الضلع الاخر وعن مساحة المستطيل S بواسطة x.

د) جدوا لأية قيمة x تكون المساحة اكبر ما يمكن، على أي مستطيل حصلتم؟ ارسموا المستطيل واحسبوا مساحته.



هـ) أمامكم الخط البياني للدالة S. سجلوا احداثيات النقطتين A وَC وفسروا لماذا عيناهما على الخط البياني كدائرتين فارغتين.



و) – كم حسب رأيكم، طولا المستطيل ذي اكبر مساحة ممكنة، اذا ان طول الخيط 48 وحدة؟

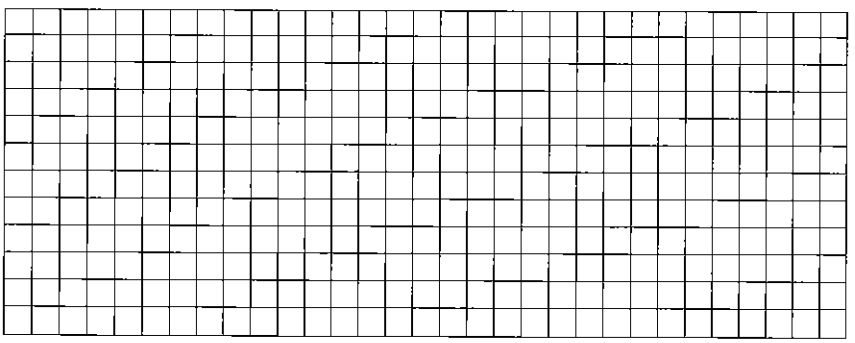
– كيف حسب رأيكم، يظهر الخط البياني الذي يبين مساحة المستطيلات كدالة للضلع، عندما يكون طول الخيط 48 وحدة؟

– بماذا يتشابه وبماذا يختلف عن الخط البياني المرسوم في البند (هـ)؟

في المسألة السابقة، بحثتم مساحة مستطيلات محيطها ثابت. أما في هذه المسألة، فستبحثون محيط مستطيلات مساحتها ثابتة.

لقد عالجنا هذه المسألة في مواد سابقة: مسارات مساحة ومحيط وفي التحليل ايضاً.

2. أ) ارسموا ثلاثة مستطيلات مساحة كل منها 36 وحدة مربعة (كل تربيعة هي وحدة مربعة) وسجلوا فوق كل مستطيل محيطه.



ب) أحد اضلاع المستطيل هو وحدتان. احسبوا طول الضلع الآخر ومحيط المستطيل (سجلوا الطولين على الشكل).

جـ) ارمزوا الى أحد اضلاع المستطيل بالحرف x. عبّروا عن طول الضلع الآخر وعن محيط المستطيل p بواسطة x(سجلوا على الشكل).

د) ابحثوا الدالة p حسب: مجال المسألة، نقطة قصوى (من أي نوع)، شكل تقريبي. (من المفضل الاستعانة بالنقط الملائمة للحسابات في البند أ)

هـ) ارسموا مستطيلاً ملائماً للنقطة القصوى. على أي مستطيل حصلتم؟ سجلوا أطوال أضلاعه واحسبوا محيطه.

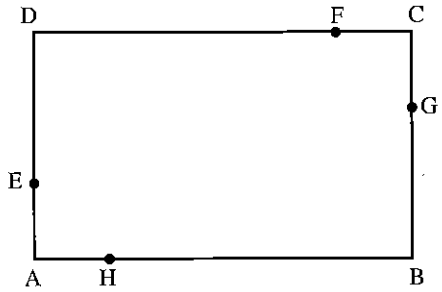
و) ما هو اصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته 36 وحدة مربعة؟

ز) ماذا يمكنكم القول عن مستطيل محيطه اكبر ما يمكن؟ فسروا.

3. ABCD مستطيل . AB = 10 وحدات

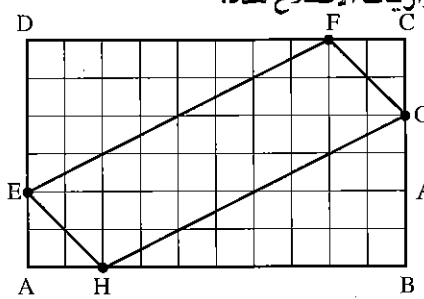
AD = 6 وحدات

(AE = AH = CF = CG)



أ) صلوا رؤوس الشكل الرباعي EFGH، ينتج متوازي اضلاع. فسروا!

في هذه المسألة، سنبحث مساحة متوازيات الاضلاع هذه.



ب) احسبوا مساحة متوازي الاضلاع EFGH اذا كان:

AE = AH = CF = CG = وحدتان

جـ) AE = 3 وحدات

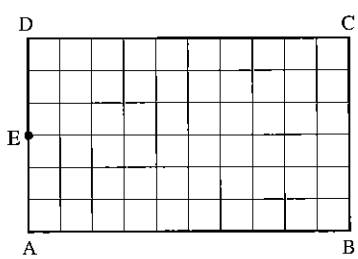
- عينوا:

F على DC بحيث يكون CF = 3 وحدات

G على CB بحيث يكون CG = 3 وحدات

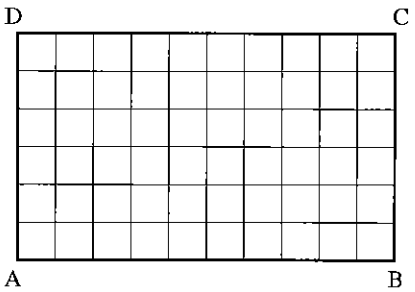
H على AB بحيث يكون AH = 3 وحدات

- احسبوا مساحة متوازي الاضلاع EFGH.

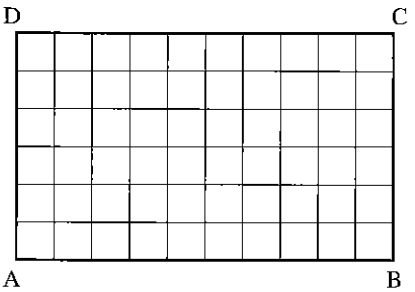


د) عينوا وارسموا متوازي الاضلاع EFGH، ثم احسبوا مساحته اذا كان

AE = AF = CG = CH = 6 وحدات



هـ) ارسموا متوازي اضلاع مساحته اكبر من مساحة كل واحد من متوازيات الاضلاع المرسومة في البنود السابقة.



عند متابعة المسألة، سنفتش عن متوازي اضلاع محصور داخل المستطيل المعطى بحيث تكون مساحته أكبر ما يمكن أو اصغر ما يمكن.

و) في هذا البند، يمكنكم بحث المسألة بواسطة البرنامج (هندسة في حركة).

ارسموا مستطيلاً طول ضلعيه 10 وحدات وَ 6 وحدات بمساعدة التعليمات التالية.

ارسموا قطعة AB طولها 10.

← انقلوا المؤشر الى الطرف الايسر السفلي من الشاشة وانقروا. تُعين النقطة A .

← مستقيم من A بطول 10.

ارسموا عموداً من النقطة B على المستقيم AB طوله 6 وحدات (يدعى BC)

← عمود من النقطة B على المستقيم AB طوله 6.

ارسموا عمودا من النقطة A على المستقيم AB طوله 6 وحدات (يدعى AD)

صلوا C مع D، ينتج مستطيل

← مستقيم من C الى D.

عينوا نقطة E على AD.

← انقلوا المؤشر الى القطعة AD وانقروا

ارسموا القطعة CF المساوية لـ AE.

← مسقيم من DC بطول AE.

ارسموا القطعة CG المساوية لـ AE.

مستقيم من C الى B بطول AE.

ارسموا القطعة AH المساوية لـ AE.

مستقيم من A الى B بطول AE.

صلوا القطع لينتج متوازي الاضلاع EFGH.

لونوا اضلاع متوازي الاضلاع بلون آخر. لونْ.....

قيسوا طول AE.

← انقلوا الاطار الى الشاشة وسجلوا AE.

انتبهوا : طول AE بين 0وَ 6 وحدات.

قيسوا مساحة متوازي الاضلاع EFGH.

← انقلوا الاطار الى الشاشة وسجلوا EFGH.

ازيحوا E على AD وافحصوا اجاباتكم عن البنود (ب) حتى (د).

← .....

ازيحوا بحيث يكون AE = 2 وافصحوا صحة اجابتكم عن مساحة متوازي الاضلاع من النبد (ب) .

ازيحوا بحيث يكون AE = 3 وافحصوا.

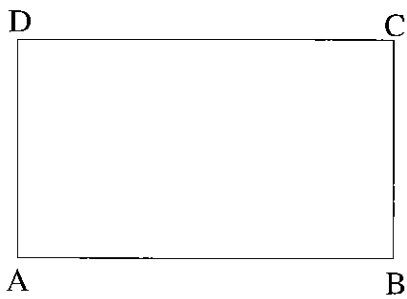
ازيحوا بحيث يكون AE = 6 وافحصوا.

- جدوا نقطة E، بحيث تكون المساحة صفراً. ما هو طول AE في هذه الحالة؟ (انتبهوا : الحاسوب لا يدقق احياناً).

- فتشوا عن نقطة E، بحيث تكون المساحة اكبر منها في كل الحالات التي حسبتموها سابقاً.

في البند (ز) سنبحث المسألة بمساعدة التحليل، بينما في البند (ح) سنتابع بحث المسألة بمساعدة " هندسة في حركة " (لا تشطبوا الاشكال من الشاشة).

ز) ارمزوا الى $AE = AH = CF = CG = x$ في المستطيل ABCD.



ارسموا متوازي الاضلاع وعبروا عن مساحته s كدالة لـ x.
(تذكروا : 10 وحدات = AB، 6 وحدات = CB)

احسبوا لأية قيمة x تكون مساحة متوازي الاضلاع اكبر ما يمكن.

ح) حاولوا وصف الخط البياني الناتج بالكلمات، عند رسم الخط البياني الذي يبين مساحة متوازي الاضلاع كدالة لـ x.
ارسموا الخط البياني في الحاسوب (حسب التعليمات في الصفحة التالية)، ثم افحصوا الوصف الذي سجلتم.

انقلوا هيئة المحاور الى الشاشة

انقلوا الاطار الى الشاشة واضغطوا.

سجلوا ماذا يمثل كل محور.

انقلوا المؤشر الى السهم الصغير الذي عند طرف مقياس الطول. أزيحوا حتى السهم الظاهر الى جانب المحور الافقي وحرروا. (AE يتسجل الى جانب المحور).

غيّروا الوحدات على المحورين.

اضغطوا مرتين على احد المحورين. يظهر على الشاشة:

وحدات على المحورين
المحور الافقي من 0 حتى 8
المحور العمودي من 0 حتى 40

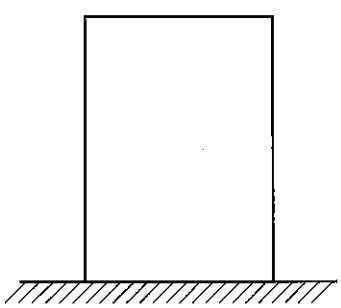
ارسموا الخط البياني في المجال من 0 حتى 6.

أزيحوا E من A حتى B يُرسم الخط البياني.

ط) ما هي اكبر مساحة ممكنة، عندما E تتحرك من A حتى D؟ ما هي قيمة AE في هذه الحالة؟

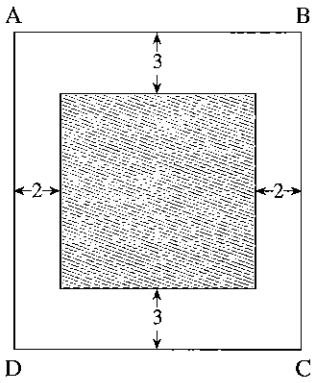
قارنوا مع النتيجة التي حصلتم عليها في البند (ز).

4. حصلت مدرسة "النور" على تبرع هو عبارة عن سياج طوله 30 م.
قررت مديرة المدرسة استعماله كله في تسييج قطعة ارض مستطيلة لتكون حديقة زهور مجاورة لبناء المدرسة من جهة واحدة، بحيث تكون لها اكبر مساحة ممكنة.
جدوا اطوال قطعة الارض التي تكون اكبر مساحة ممكنة للحديقة.
احسبوا هذه المساحة.



5. ارادت مديرة مدرسة "الحرش" تسييج قطعة ارض مستطيلة مساحتها 16 م^2، بحيث يكون محيط القطعة اصغر ما يمكن (بسبب تكاليف السياج الباهظة). احسبوا اطوال قطعة الارض التي يكون لها اصغر محيط ممكن. كم يكون هذا المحيط؟

6. تُصدر مطبعة كتاباً مساحة كل صفحة فيه 600سم^2. المساحة المخصصة للحواشي تظهر في الشكل.

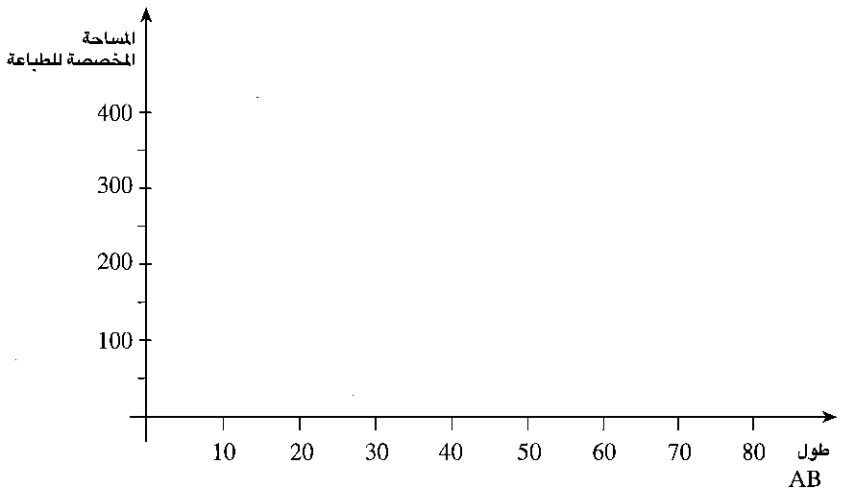


أ) احسبوا المساحة المخصصة للطباعة اذا كان AB = 15 سم.

ب) اختاروا قيمة معقولة لطول AB واحسبوا المساحة المخصصة للطباعة.

جـ) احسبوا المساحة المخصصة للطباعة، لو اختيرت صفحة فيها AB = 75سم

د) عينوا النقط التي حسبتم في هيئة المحاور (بالتقريب).



هـ) ارمزوا الى AB = x وعبروا عن المساحة المطبوعة s كدالة لـ x.

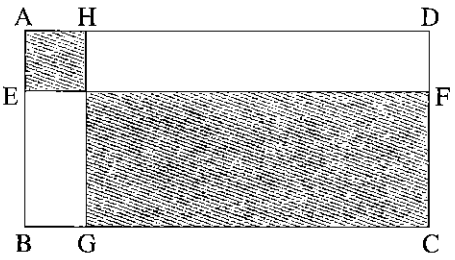
و) ابحثوا الدالة s (المجال– اهتموا بالمسألة، نقط قصوى– سجلوا نوعها، اكملوا الشكل التقريبي من البند(د).

ز) لأية قيمة x تكون المساحة المطبوعة اكبر ما يمكن؟

ما هي هذه المساحة؟

ارسموا صفحة حسب الاطوال التي وجدتم وخططوا المساحة المطبوعة داخلها.

7. نلعب لعبة تلوين المساحات داخل مستطيل ABCD الذي طولا ضلعيه 20 سم وَ 10 سم .

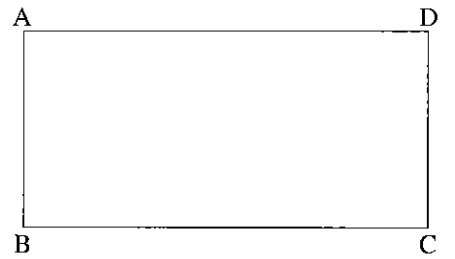


قوانين اللعبة: كل لاعب بدوره، يختار طول AE ويعين AE = AH.

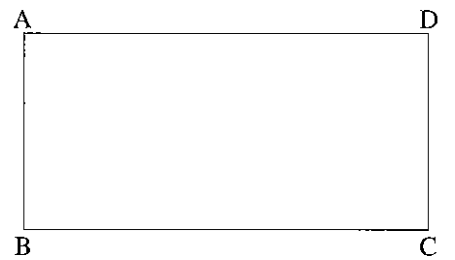
يرسم خطوطاً موازية لأضلاع المستطيل، ثم يلون المساحات كما في الشكل.

المساحة الملونة تخص اللاعب الذي اختار AE، واما المساحة غير الملونة فهي للاعب الآخر.

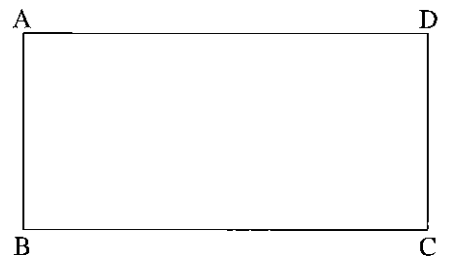
اللاعب الذي تخصه المساحة الكبرى، يفوز في هذا الدور.



أ) ارسموا (بالتقريب) واحسبوا المساحة الملونة اذا كان 2 سم= AE. احسبوا ايضاً المساحة غير الملونة.



ب) ارسموا (بالتقريب) واحسبوا المساحة الملونة اذا كان 3سم = AE . احسبوا ايضاً المساحة غير الملونة.

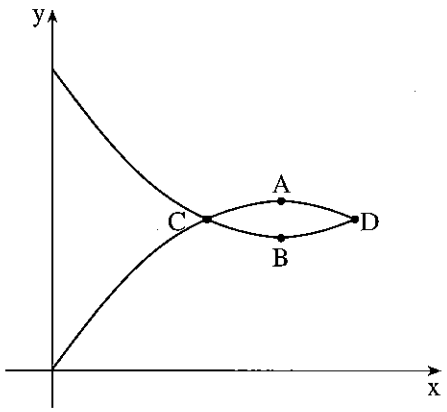


جـ) – ارمزوا الى AE = x

– سجلوا دالة g تبين المساحة الملونة كدالة لـ x.

– سجلوا دالة h تبين المساحة غير الملونة كدالة لـ x.

د) – ما هي اكبر مساحة ممكنة تبقى غير ملونة؟
– لوّنوا المساحة التي تخص اللاعب الذي اختار AE.

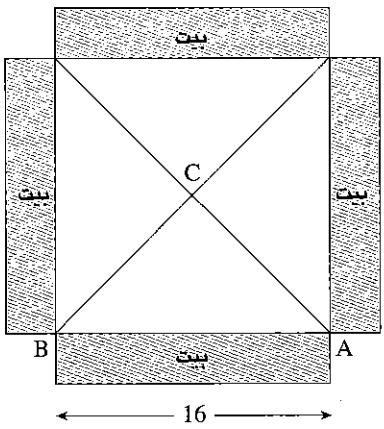


هـ) الدالتان h،g مرسومتان في الشكل.
– لكل خط بياني، ناظروا قانوناً وسجلوه.
– احسبوا احداثيات النقط A ، B ، C، D
– ما هو معنى النقط A، B ، C ،D بالنسبة للعبة؟

و) ما هي اكبر مساحة ممكنة، يتمكن اللاعب الذي اختار AE من تلوينها؟(استعينوا بالخط البياني).

ز) ما هو المجال الذي يفوز فيه اللاعب الذي تخصه المساحة غير الملونة؟

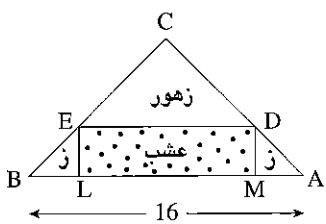
8. في أحد الاحياء، رتبت البيوت كما يظهر في الشكل. طول ضلع المربع 16 م. لكل بيت خصصت حديقة على شكل مثلث.



أ) فسروا لماذا يكون لحديقة كل بيت شكل مثلث متساوي الساقين. احسبوا زوايا المثلث.

أرادت عائلة تسكن أحد البيوت، تنظيم مساحة الحديقة بحيث يكون العشب مجاوراً للبيت وبمساحات للزهور كما في الشكل.

ب) احسبوا المساحة المعدة للعشب (المستطيل EDML).



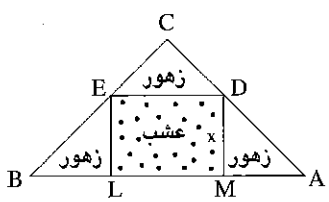
اذا كان :

(i) MD = 3 م

(انتبهوا : ΔDAM متساوي الساقين ايضاً).

(ii) MD = 7 م

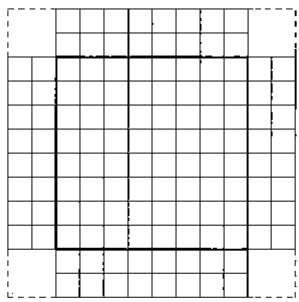
جـ) عبروا عن المساحة المعدة للعشب اذا كان MD = x. كم يجب ان يكون x لتكون مساحة العشب اكبر ما يمكن؟ ما هي المساحة في هذه الحالة؟

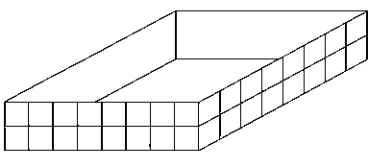


9. من صفحة مربعات طولها 12 وحدة، نريد ان ننتج صناديق مفتوحة بالشكل التالي: عند الزوايا الاربع، نقص مربعات لها نفس طول الضلع ثم نطوي على طول الخطوط المشددة. يمكن انتاج صناديق مختلفة (انظر الاشكال).

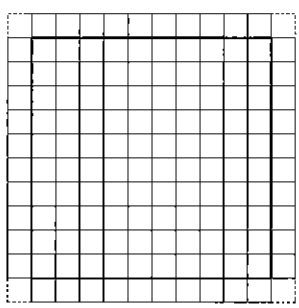
أ) ارسموا في صفحة المربعات، الشكل الناتج من قص مربعات طول ضلع كل واحد منها وحدتان.

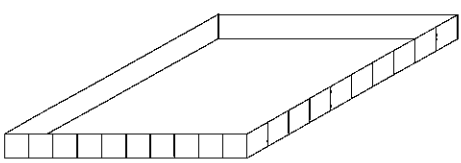
سجلوا على الصندوق المرسوم، اطواله الملائمة واحسبوا حجمه.



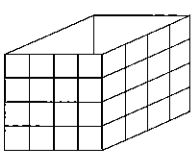


ب) احسبوا حجم الصندوق اذا قُصت مربعات طول ضلع كل واحد منها وحدة واحدة.

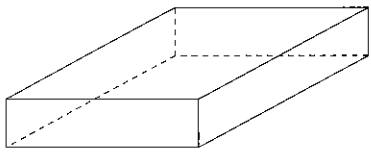


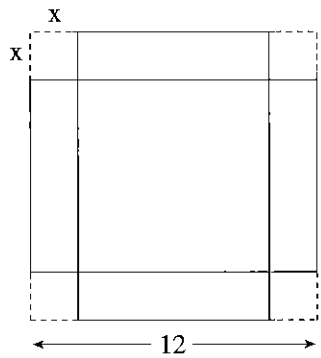


جـ) احسبوا حجم الصندوق الناتج من قص مربعات طول كل واحد منها 4 وحدات (سجلوا أطوال الصندوق على الشكل).



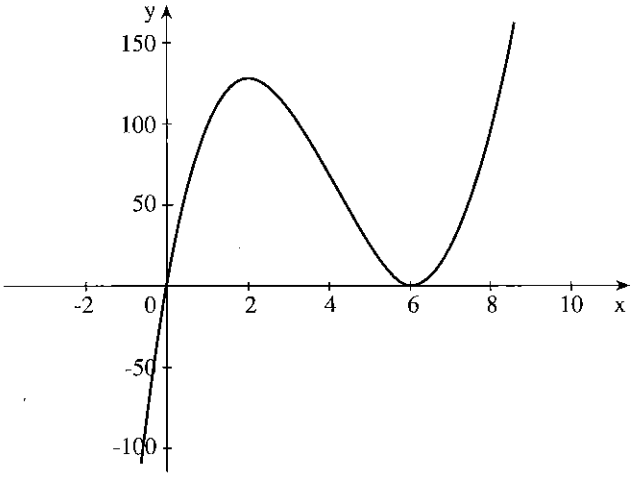
د) سجلوا الدالة V التي تبين حجم الصندوق الناتج من قص مربعات طول ضلع كل واحد منها x وحدات.



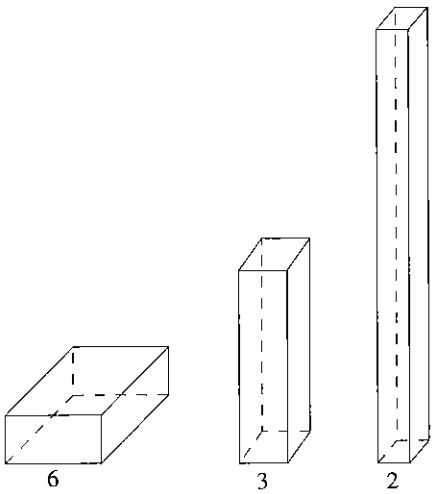


هـ) ما هي قيمة x التي تؤدي الى اكبر حجم ممكن للصندوق؟
سجلوا أطوال الصندوق في هذه الحالة، واحسبوا حجمه.

و) جزء من الخط البياني الظاهر في الشكل، يلائم الدالة V لونوا الجزء الملائم منه.



10. في مصنع لانتاج العلب الجميلة، يهتمون بصناعة العلب الفضية المفتوحة.كل علبة على شكل صندوق مربع القاعدة وحجمها 108 سم ^{3}. بالطبع هم يهتمون بالتوفير في تكاليف الانتاج عن طريق تصغير مساحة سطوح العلبة قدرالامكان.



أ) احسبوا لكل علبة:

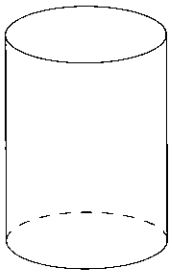
(i) ارتفاعها.

(ii) مجموع مساحة سطوحها الخمسة (القاعدةوَ 4 السطوح الجانبية).

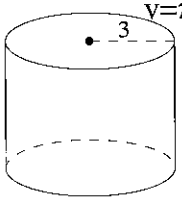
ب) ارمزوا بـ x الى طول ضلع قاعدة العلبة.

عبروا عن الارتفاع h وعن مساحة السطوح الخمسة s بواسطة x. جدوا لأية قيمة x تكون هذه المساحة اقل ما يمكن. افحصوا انكم بالفعل حصلتم على الحد الادنى من المساحة. ما هي المساحة في حدها الادنى.

11. في نفس المصنع، يهتمون بصناعة علب مذهبه للحلي.
كل علبة على شكل اسطوانة مع غطاء وحجمها 125 سم ^{3}.
بالطبع هنا ايضا يهتمون بتوفير المواد.



حجم الاسطوانة التي نصف قطرها r وارتفاعها h هو : $v=\pi r^2 \cdot h$



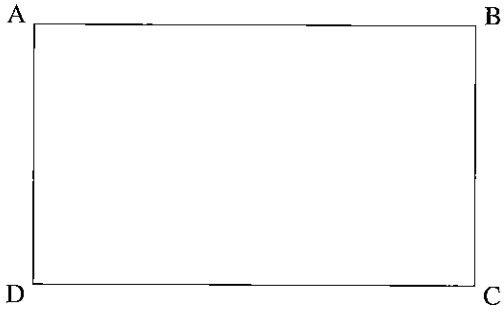
أ) نصف قطر قاعدة الاسطوانة 3 سم.

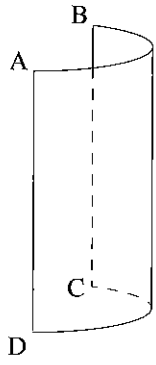
(i) احسبوا ارتفاع العلبة h.

محيط الدائرة: $2\pi r$

(ii) احسبوا محيط قاعدة العلبة.

(iii) على الشكلين الاتيين، سجلوا الارتفاع ومحيط القاعدة في المكان الملائم، ثم احسبوا المساحة الجانبية.



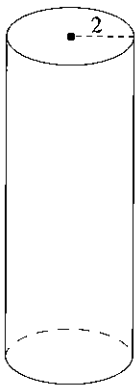


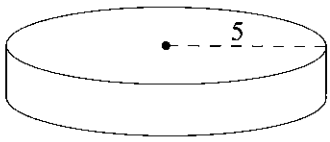
(iv) احسبوا مساحة قاعدتي العلبة والمساحة الكلية.

(المساحة الجانبية ومساحة القاعدتين).

ب) لكل واحدة من العلبتين المرسومتين، احسبوا:

(i) ارتفاع العلبة . (ii) المساحة الجانبية (iii) المساحة الكلية



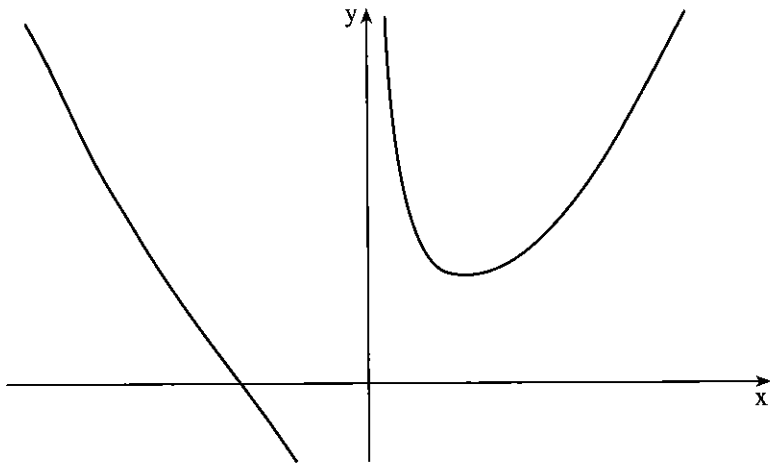


جـ) ارمزوا بـ x الى نصف قطر القاعدة، عبروا عن الارتفاع h وعن المساحة الكلية s للعلبة بواسطة x.

د) لأية قيمة x تكون هذه المساحة اقل ما يمكن؟

ما هي المساحة الكلية في هذه الحالة؟

هـ) جزء من الخط البياني المرسوم، يلائم دالة المساحة الكلية S. لونوا الجزء الملائم منه.



التمرين الاتي هو عبارة عن تحضير للتمارين الاربعة التي بعده.

12. حلوا ثم افحصوا بواسطة التعويض، اذا كانت الحلول ملائمة.

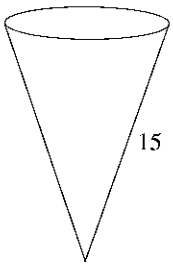
أ) $\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} = \sqrt{x^2-2}$ (اضربوا المعادلة في $\sqrt{x^2-2}$)

ب) $\frac{3x}{\sqrt{10-x}} - 2\sqrt{10-x} = 0$

جـ) $\frac{x^2}{\sqrt{48-x^2}} = \frac{\sqrt{48-x^2}}{2}$

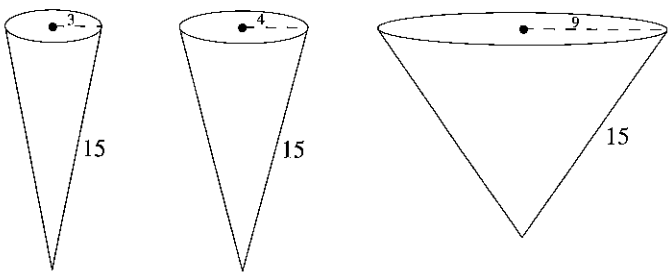
د) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{4x}{\sqrt{x^2-4}} = \sqrt{x^2-4}$

13. نريد انتاج قمع كبير للبوظة (مخروط)طول الخط الراسم فيه 15 سم .

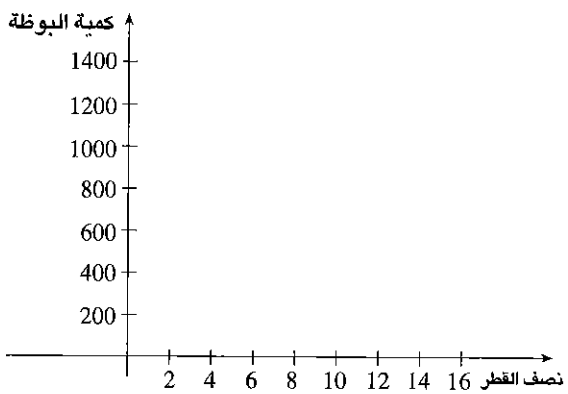


حجم المخروط : $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ بحيث يكون r نصف قطر القاعدة وَ h الارتفاع.

أ) (i) احسبوا كمية البوظة (حجم المخروط) في كل حالة مما يأتي:



(ii) عينوا النتائج التي توصلتم اليها من البند (i)، في هيئة المحاور التي أمامكم.



(iii) خمنوا هل تزداد كمية البوظة كلما كبر نصف القطر.

ب) ما هو مجال التعريف للمسألة؟

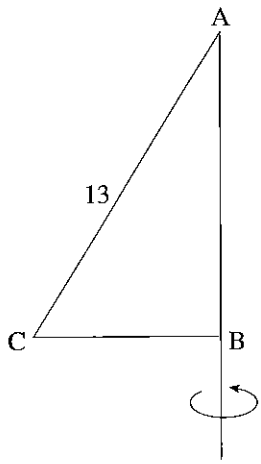
ج) احسبوا كمية البوظة عندما يكون نصف القطر 14 سم؟
عينوا النتيجة في هيئة المحاور.
افحصوا تخمينكم من البند أ (iii).

د) ارمزوا الى نصف قطر قاعدة القمع بالحرف x. عبروا عن كمية البوظة g كدالة لـ x.

هـ) لأية قيمة x تكون كمية البوظة في القمع اكبر ما يمكن؟ احسبوا هذه الكمية. عينوا النقطة الملائمة في هيئة المحاور، ثم اكملوا شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة g.

و) لا يُحب ابراهيم القموع الذائبة، لكنه يرغب بالحصول على نفس كمية البوظة في حدها الاعلى، في اسطوانة نصف قطرها كنصف قطر قاعدة المخروط. كم يجب ان يكون ارتفاع الاسطوانة؟

14. ندير مثلثا قائم الزاوية طول الوتر فيه 13 سم، حول الضلع القائم AB.



أ) على أي جسم نحصل؟

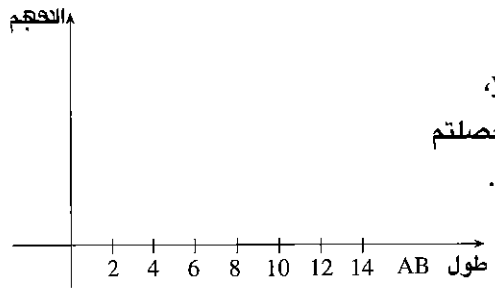
ب) احسبوا حجم جسم الدورات الناتج اذا كان:

(i) AB = 5 وحدات

(ii) AB = 8 وحدات

(iii) AB = 10 وحدات

جـ) سجلوا المجال الملائم للمسألة.

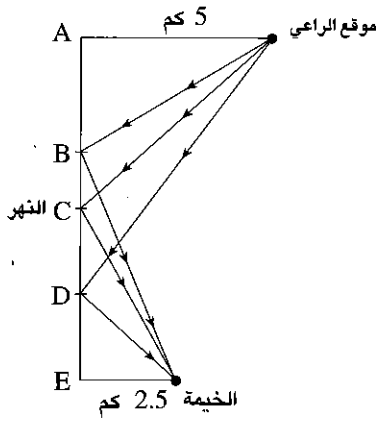


د) سجلوا وحدات على المحور y، ثم عينوا جميع النقط التي حصلتم عليها (من البندين ب وَ جـ).

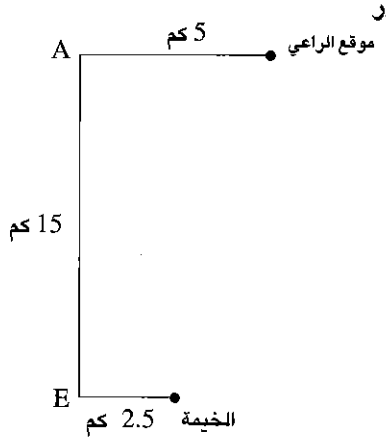
هـ) عبروا عن حجم جسم الدوران الناتج v، اذا كان AB = x

و) جدوا قيمة x بحيث يكون الحجم اكبر ما يمكن، احسبوا الحجم في هذه الحالة. اضيفوا هذه النقطة الى هيئة المحاور واكملوا شكلاً تقريبياً.

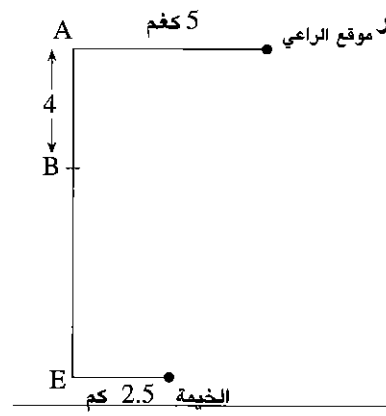
15. اراد راعٍ ارواء حصانه من النهر، في طريقِ عودته الى خيمته التي تبعد 2.5 كم عن النهر. كان الراعي في موقع يبعد 5 كم عن النهر، وكان بامكانهان يركب الحصان في مسارات مختلفة (انظر الشكل). اهتم الراعي في ايجاد اقصرمسار ممكن. طول قطعة النهر المرسومة 15 كم (AE = 15 كم).



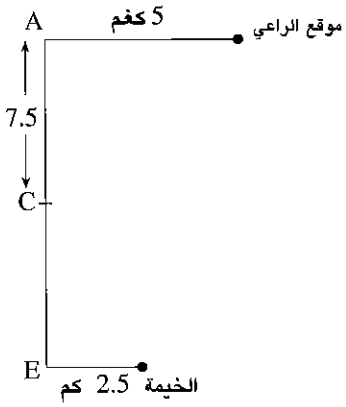
أ) ارسموا المسار الذي يقطعه الراعي، اذا قرر ان يروي حصانه عند النقطة A. احسبوا طول هذا المسار.



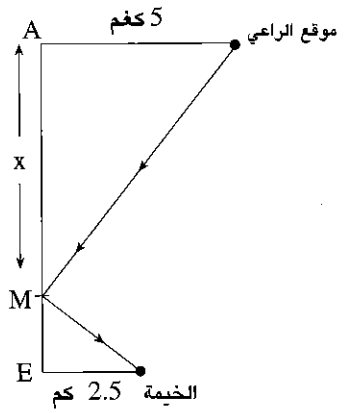
ب) ارسموا المسار الذي يقطعه الراعي،اذا قرر ان يروي حصانه عند النقطة B. احسبواطول هذا المسار.



جـ)ارسموا المسار الذي يقطعه الراعي، اذا قرر ان يروي حصانه عند النقطة C.
احسبوا طول هذا المسار.

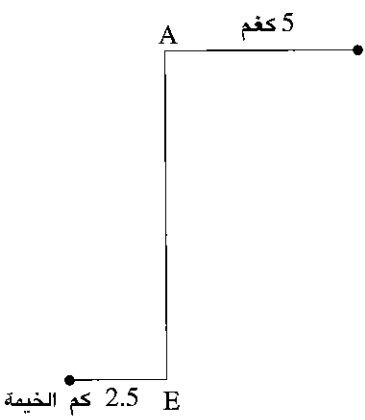


د) (i) ارمزوا الى بُعد النقطة التي يشرب فيها الحصان (M) عن النقطة A بالحرف x.
عبروا عن البعد بين النقطة M والخيمة.
سجلوا دالة تبين طول المسار الذي يقطعه الراعي من موقعه الى الخيمة.



(ii) جدوا قيمة x بحيث يكون فيها طول المسار الذي يقطعه الراعي اقصر ما يمكن. جدوا طول المسار في هذه الحالة.

هـ) نفترض ان الخيمة تقع على الجهة الاخرى من النهر.
(i) ارسموا اقصر مسار ممكن في هذه الحالة.
(ii) على اي بعد من A على طول النهر، يشرب الحصان في هذا المسار؟ قارنوا مع النتيجة التي حصلتم عليها من البند (د).
(iii) ما هو طول المسار في هذه الحالة؟



16. يريد مقاول ان يبني عمارة مكاتب. تكاليف البناء هي دالة f لعدد الطوابق x:

$$f(x) = 750{,}000 + 50{,}000 \cdot \frac{x(x+1)}{2}$$

750.000$– ثمن الارض

50. 000$ – اضافة لتكاليف الطابق بالنسبة لتكاليف الطابق الذي تحته.

أ) احسبوا تكاليف العمارة لو كانت ذات طابق واحد، طابقين، ثلاثة طوابق او اربعة طوابق.

ب) ينوي المقاول تأجير جميع طوابق المكاتب بسعر واحد، لذلك من الافضل له بناء عمارة يكون فيها متوسط تكاليف الطابق الواحد اقل ما يمكن.

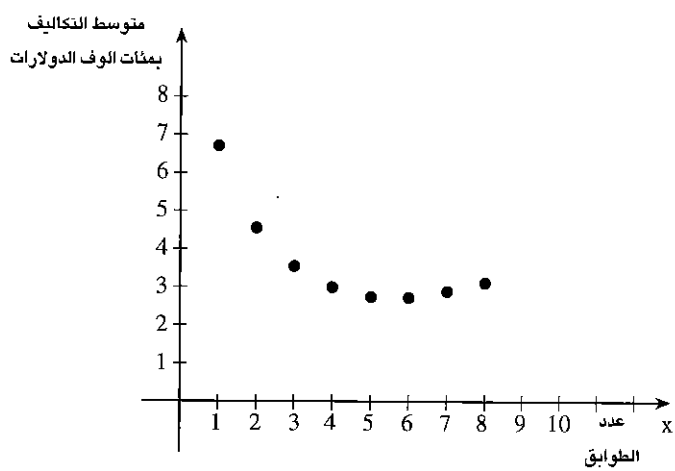
(i) g هي دالة تبين متوسط تكاليف الطابق الواحد.

$$g(x) = \frac{750{,}000}{x} + 50{,}000\ \frac{(x+1)}{2}$$

احسبوا متوسط تكاليف الطابق الواحد بالنسبة للعمارات المذكورة في البند (أ).

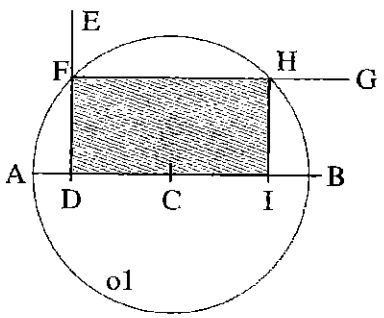
(ii) احسبوا عدد الطوابق في عمارة بحيث يكون متوسط تكاليف الطابق الواحد فيها اقل ما يمكن.(انتبهوا الى مضمون المسألة).

جـ) مرسوم الخط البياني للدالة g. حاولوا ان تفسروا لماذا يكون الخط البياني معتدلاً لعدد من الطوابق يزيد عن 6.



17. لهذه المسألة جزءان. في الاول منهما ، ستبحثون بواسطة البرنامج " هندسة في حركة " مسألة " عن تغير مساحة مستطيل، احد رؤوسه (D) يتحرك على القطر (انظر الشكل)، اما في الجزء الثاني فستبحثون مسألة مشابهة بواسطة التحليل.

الجزء الاول: مستطيل داخل دائرة.



ارسموا قطعة طولها 6 وحدات.

← انقلوا المؤشر الى الشاشة وانقروا. تُعين النقطة A.

← سجلوا: مستقيم من A بطول 6.

عينوا وسط القطعة.

←
← اقسموا AB الى قسمين. تتعين النقطة C.

ارسموا دائرة قطرها AB (بنصف قطر AC)

←
← دائرة مركزها C ونصف قطرها AC.

عينوا نقطة D على AB وارسموا عموداً على AB من النقطة D.

← انقلوا المؤشر الى القطر وانقروا. تُعين النقطة D.

(انتبهوا الى موقع D في الشكل).

← سجلوا: عمود على المستقيم AB من النقطة D.

عينوا نقطة تقاطع العمود والدائرة.

←
← تقاطع الدائرة 01 والعمود DE. تُعين النقطة F.

(اضغطوا ثانية اذا لزم الامر بحيث تُعين نقطة التقاطع في الشكل).

ارسموا موازيا لـ AB من النقطة F.

←
← مستقيم موازٍ لـ AB من النقطة F.

عينوا نقطة التقاطع الثانية للمستقيم الموازي والدائرة

تقاطع الدائرة O1 والمستقيم الموازي FG.

(اضغطوا ثانية اذا لزم الامر بحيث تُعين نقطة التقاطع الثانية H)

ارسموا عموداً من النقطة H الى المستقيم AB.

عمود من النقطة H الى المستقيم AB.

لونوا المستطيل DFHI.

اضغطوا على Shift وعلى رؤوس المستطيل.
تنغليم ← املأوا الشكل.
وعينوا

قيسوا طول AD.

انقلوا مقياس الطول الى الشاشة وسجلوا AD.

قيسوا مساحة المستطيل.

انقلوا مقياس المساحة الى الشاشة وسجلوا رؤوس المستطيل (DFHI).

ارسموا خطاً بيانياً يصف مساحة المستطيل كدالة لطول AD.

انقلوا هيئة المحاور الى الشاشة.
سجلوا ماذا يمثل كل محور.

انقلوا الاطار الى الشاشة واضغطوا

غيروا الوحدات على المحورين.

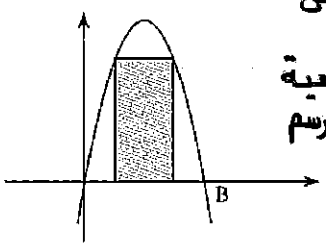
انقلوا المؤشر الى السهم الصغير الذي عند طرف مقياس الطول AD. انقروا وازيحوا حتى السهم الظاهر الى جانب المحور الافقي وحرروا (AD يتسجل الى جانب المحور) اعيدوا العمل بالنسبة لمقياس المساحة والمحور العمودي.
اضغطوا مرتين على أحد المحورين.
يظهر على الشاشة:

وحدات على المحور
المحور الافقي من 0 حتى 8
المحور العمودي من 0 حتى 10

ارسموا الخط البياني ، ازيحوا D.
أية قيمة لـ AD تكون المساحة اكبر ما يمكن؟

ازيحوا D ، يُرسم الخط البياني .

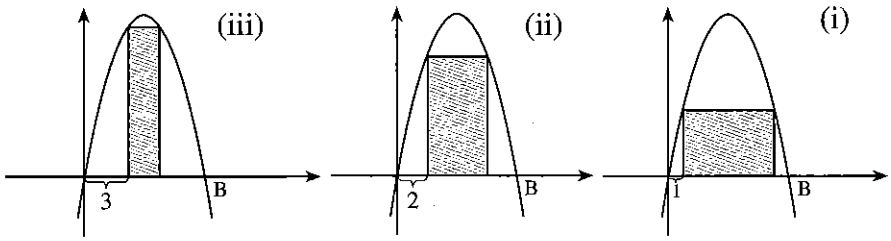
الجزء الثاني: مستطيل محصور داخل قطع مكافئ



امامكم شكل تقريبي للخط البياني للدالة التربيعية $f(x)= -x^2 + 8x$ ، ومستطيل محصور داخل الرسم البياني للدالة والمحور x (انظروا الشكل).

أ) جدوا احداثيات النقطة B.

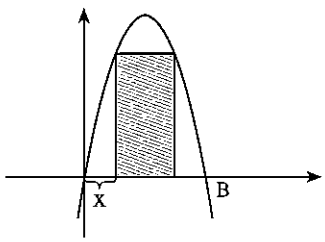
ب) احسبوا مساحة المستطيل في كل واحد من الاشكال الاتية:



جـ) – عبروا عن طول ضلع المستطيل الواقع على المحور x،بواسطة x.

– عبروا عن طول الضلع الاخر بواسطة x.

– عبروا عن الدالة s التي تبين مساحة المستطيل كدالة لـ x.

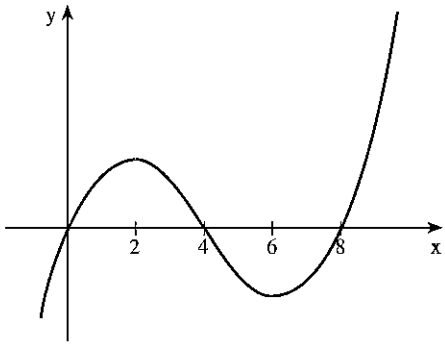


د) احسبوا لأية قيمة x تكون مساحة المستطيل اكبر ما يمكن. جدوا المساحة في هذه الحالة.

هـ) جزء من الخط البياني المرسوم، يلائم الدالة s.

– أي جزء من المجال يلائم وصف المسألة؟ شددوا في الشكل.

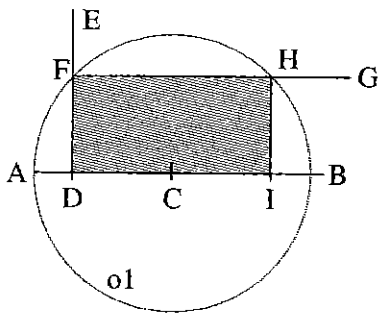
– عينوا على المحورين في الامكنة الملائمة، القيم التي وجدتم في البنود السابقة.



18. لهذه المسألة جزءان.

في الاول منهما، ستبحثون بواسطة البرنامج "هندسة في حركة" مسألة" عن تغير مساحة مستطيل، أحد رؤوسه (E) يتحرك على محيط الدائرة، ورأس آخر (A) عند طرف القطر (انظر الشكل). اما في الجزء الثاني فستبحثون مسألة مشابهة بواسطة التحليل.

الجزء الاول: مستطيل دائرة



ارسموا قطعة طولها 6 وحدات. ← انقلوا المؤشر الى الشاشة وانقروا. تُعين النقطة A.

← سجلوا: مستقيم من A بطول 6.

عينوا وسط القطعة ← اقسموا AB الى قسمين.

ارسموا دائرة قطرها AB (بنصف قطر AC) ← دائرة مركزها C ونصف قطرها AC.

ارسموا عمودا من النقطة A على المستقيم AB. ← عمود من النقطة A على المستقيم AB.

عينوا نقطة E على الدائرة. ← انقلوا المؤشر الى الدائرة وانقروا. تُعين النقطة E. (انظروا موقع النقطة E في الشكل)

ارسموا من النقطة E عمودين الى AD وعلى AB. ← عمود من النقطة E على المستقيم AD.

← عمود من النقطة E على المستقيم AB.

لونوا المستطيل AFEG

اضغطوا على Shift وعلى  وعينوا رؤوس المستطيل.
تنظيم ← املأوا الشكل.

قيسوا AG.

 ← انقلوا مقياس الطول الى الشاشة وسجلوا AG.

قيسوا مساحة المستطيل.

 ← انقلوا مقياس المساحة الى الشاشة وسجلوا رؤوس المستطيل (AFEG).

ارسموا خطاً بيانياً يصف مساحة المستطيل كدالة لطول AG:

انقلوا هيئة المحاور الى الشاشة.

 ← انقلوا الاطار الى الشاشة واضغطوا.

سجلوا ماذا يمثل كل محور.

انقلوا المؤشر الى السهم الصغير الذي عند طرف مقياس الطول AG. انقروا وازيحوا حتى السهم الظاهر الى جانب المحور الافقي وحرروا. (AG يتسجل الى جانب المحور). اعيدوا العمل بالنسبة لمقياس المساحة والمحور العمودي.

غيروا الوحدات على المحورين.

اضغطوا مرتين على أحد المحورين.
يظهر على الشاشة:
وحدات على المحورين
المحور الافقي من 0 حتى 7.
المحور العمودي من 0 حتى 15.

ارسموا الخط البياني: ازيحوا E.

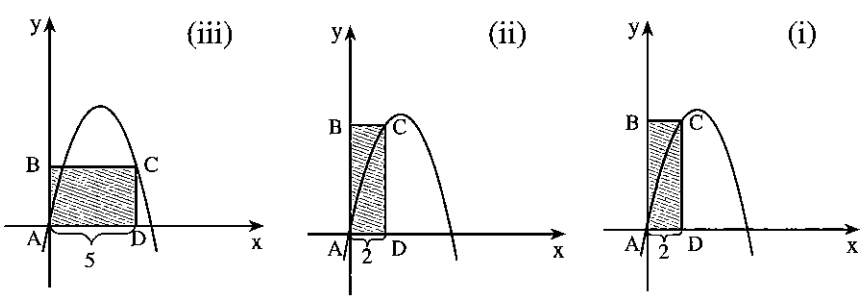
" ← ازيحوا E، يرسم الخط البياني.

أية قيمة لـ AG تكون المساحة اكبر ما يمكن؟

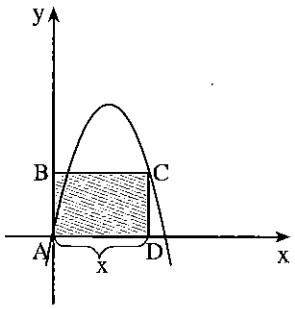
الجزء الثاني: مستطيل وقطع مكافىء

امامكم شكل تقريبي للخط البياني للدالة $f(x) = 6x - x^2$ ، ومستطيل أحد رؤوسه يقع على الخط البياني لها (انظروا الشكل).

أ) احسبوا مساحة المستطيل الملون في كل شكل.



ب) عبروا عن مساحة المستطيل كدالة لـ x.



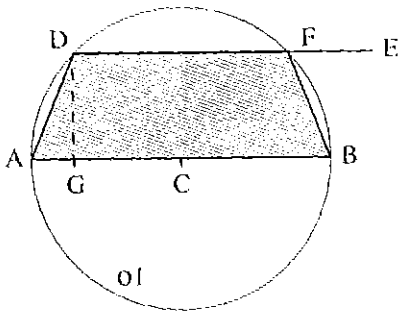
جـ) احسبوا لأية قيمة x تكون المساحة اكبر ما يمكن. جدوا المساحة في هذه الحالة.

19. لهذه المسألة جزءان.

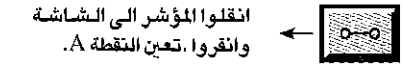
في الاول منهما، ستبحثون بواسطة البرنامج "هندسة في حركة" مسألة" عن تغير مساحة شبه منحرف محصور في دائرة، بحيث احد رؤوسه (D) يتحرك على محيطها وقاعدته الكبرى تقع على قطرها.

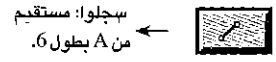
اما في الجزء الثاني فستبحثون مسألة مشابهة بواسطة التحليل.

الجزء الاول: شبه منحرف محصور في دائرة



ارسموا قطعة طولها 6 وحدات.





عينوا وسط القطعة.

ارسموا دائرة قطرها AB
(بنصف قطر AC)

عينوا نقطة D على الدائرة وارسموا منها متوازيا لـ BC.

انقلوا المؤشر الى الدائرة وانقروا.
تعين النقطة D.

انتبهوا أين تقع نقطة D في الشكل.

سجلوا: مواز للمستقيم AB من النقطة D.

عينوا نقطة التقاطع الثانية للمستقيم الموازي DE مع الدائرة.

تقاطع الدائرة 01 مع المستقيم الموازي DE.

(اذا لزم الامر، اضغطوا ثانية بحيث تعين نقطة التقاطع الثانية F)

صلوا ساقي شبه المنحرف.

مستقيم من A الى D.
مستقيم من A الى B.

ارسموا عموداً من النقطة D على المستقيم AB.

عمود من النقطة D على المستقيم AB.

اختاروا لوناً مختلفاً ولونوا شبه المنحرف.

اضغطوا على **Shift** وعلى

وعينوا رؤوس شبه المنحرف.

لونوا ← .....

تنظيم ← املأوا الشكل.

قيسوا AG.

انقلوا مقياس الطول الى الشاشة وسجلوا AG.

قيسوا مساحة شبه المنحرف.

انقلوا مقياس المساحة الى الشاشة وسجلوا رؤوس شبه المنحرف (ADFB).

ارسموا خطاً بيانيا يصف مساحة شبه المنحرف كدالة لطول AG:

انقلوا هيئة المحاور الى الشاشة.

انقلوا الاطار الى الشاشة واضغطوا.

سجلوا ماذا يمثل كل محور.

انقلوا المؤشر الى السهم الصغير الذي عند طرف مقياس الطول. انقروا وازيحوا حتى السهم الظاهر الى جانب المحور الافقي وحرروا. (AG يتسجل الى جانب المحور). اعيدوا العمل بالنسبة لمقياس المساحة والمحور العمودي.

غيروا الوحدات على المحورين.

اضغطوا مرتين على احد المحورين.

يظهر على الشاشة: وحدات على المحورين

المحور الافقي من 0 حتى 8.

المحور العمودي من 0 حتى 15.

ارسموا الخط البياني: ازيحوا D.

ازيحوا D، يرسم الخط البياني.

اية قيمة لـ AG تكون المساحة اكبر ما يمكن؟

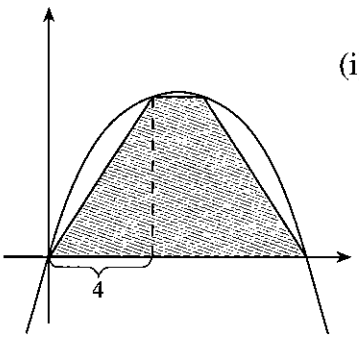
ما هي المساحة في هذه الحالة؟

الجزء الثاني: شبه منحرف محصور في قطع مكافىء.

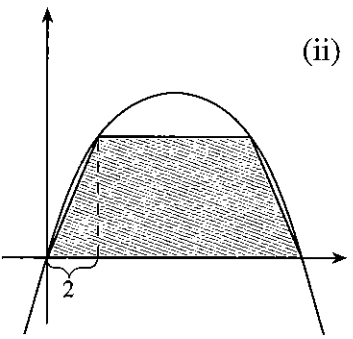
أمامكم شكل تقريبي للخط البياني للدالة $f(x) = 10x - x^2$، وشبه منحرف متساوي الساقين محصور بين الخط البياني للدالة والمحور x.

أ) احسبوا مساحة شبه المنحرف الملون في كل شكل.

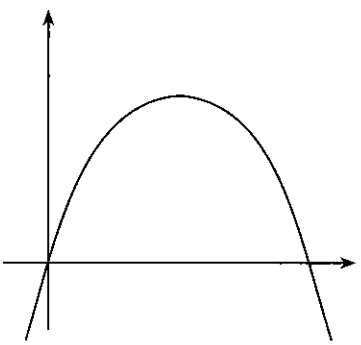
(i)



(ii)



ب) ارسموا الحالة الحدودية، حيث يكون شبه المنحرف مثلثاً واحسبوا مساحته.



جـ) (i) عبروا عن مساحة شبه المنحرف كدالة لـ x.

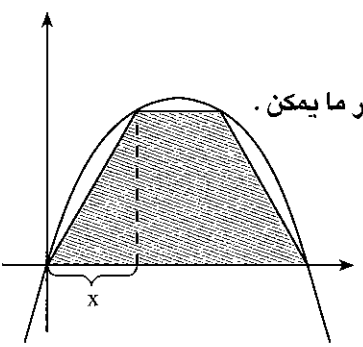
(x هو الاحداثي الاول لرأس القاعدة الصغرى القريب من المحور x. انظروا الشكل).

(ii) أية قيم يمكن ان تكون لـ x؟

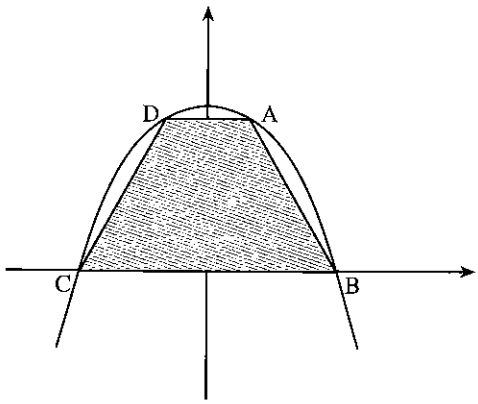
انتبهوا لاجابتكم عن البند (ب).

د) احسبوا لأية قيمة x تكون المساحة اكبر ما يمكن .

– جدوا المساحة في هذه الحالة.



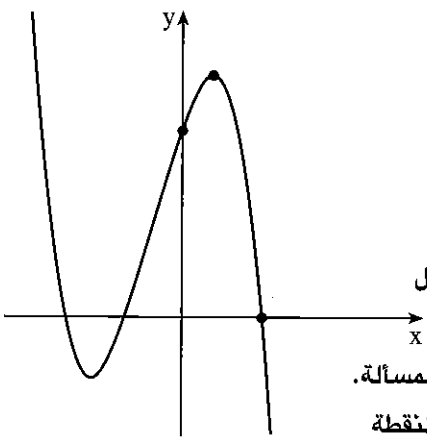
20. شبه منحرف ABCD محصور بين الخط البياني للدالة $f(x) = 16 - x^2$ والمحور x.



أ) احسبوا احداثيات النقطتين B وَ C.

ب) احسبوا مساحة شبه المنحرف، اذا كان الاحداثي الاول للنقطة A هو 2.
احسبوا مساحة شبه المنحرف، اذا كان الاحداثي الاول للنقطة Aهو 3.

جـ) كم تكون احداثيات النقطة A لتكون المساحة اكبر ما يمكن؟ (عبروا عن المساحة كدالة للاحداثي الاول للنقطة A،x وجدوا لأية قيمة x تكون المساحة اكبر ما يمكن).



د) احسبوا المساحة في هذه الحالة.

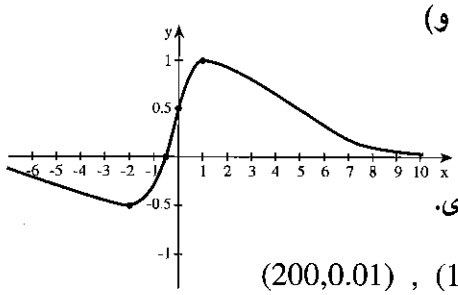
هـ) مرسوم الخط البياني للدالة s الذي يصف مساحة شبه المنحرف كدالة لـ x (الذي هو الاحداثي الاول للنقطة A).
عينوا على المحور x المجال الملائم للمسألة.
سجلوا على المحور x الاحداثي x للنقطة المعينة، وكذلك على المحور y الاحداثي y لها.

اجابات

الفصل الاول: دوال خارج القسمة

خط التقارب، ما هو؟ (صفحة 7-11)

2. ب) (0 , 0.5) و)



جـ)(8, 0.26) , (2, 0.833)

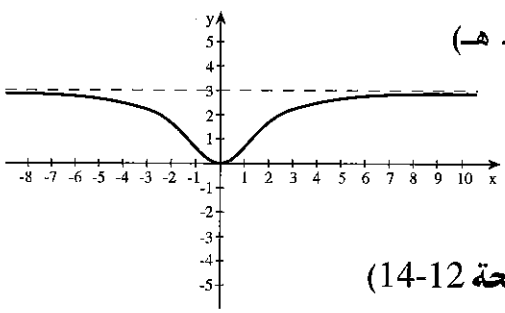
د)(-3 , -0.45) , (-6, -0.29)

هـ)(1,1) نقطة نهاية عظمى،
(-2, -0.5) نقطة نهاية صغرى.

ح) (200,0.01) , (150,0.013) , (100, 0.02)

ط) موجب.

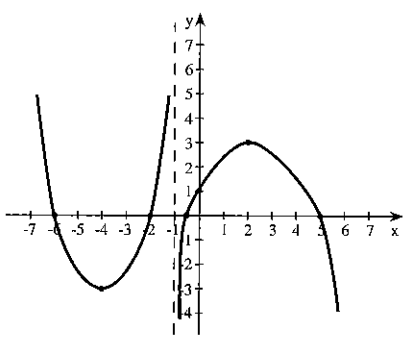
8. ب) (10, 2.91) , (2, 1.71) . هـ)



جـ)– (200, 2.9997)
(1000, 2.9999)
y = 3 –

عن خطوط التقارب ايضاً (صفحة 12-14)

7.



8. أ) x = -1 ب) y = 0 , x =2

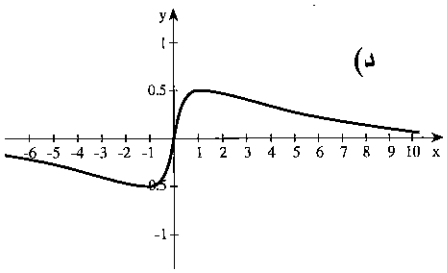
كسور عشرية صغيرة (صفحة 15-16)

2. أ) 0.08 , 0.002 , 0.035 ب) 0.04

3. أ) (0, 0) ب) (1, 0.5) نقطة نهاية عظمى، (–1, –0.5) نقطة نهاية صغرى.

جـ) (–100, –0.0099)
(100, 0.0099)
(1000, 0.00099)
(10.000, 0.000099) , y = 0

د)



واحدة من العائلة (صفحة 17-32)

2. أ) x = 2 ب) x = –2 جـ) x = 3 د) x = –1 هـ) x = 0 و) x = 1

3. أ)

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	1	0.5	0.33	0.25	0.2	0.17

ب) (0.25, 4) , (0.4, 2.5) , (0.5, 2) , (0.75, 1.33) جـ) لا يوجد

د) (0.1, 10) , (0.01, 100) , (0.001, 1000)

هـ) (10,000, 0.0001) , (1000, 0.001) , (100, 0.01) , (10, 0.1) ز) لا يوجد

ح) $f(1) = 1$, $f(3) = \frac{1}{3}$, $f(0.5) = 2$, $f(0.25) = 4$

$f(-1) = -1$, $f(-3) = -\frac{1}{3}$, $f(-0.5) = -2$, $f(-0.25) = -4$

4. أ) لا توجد نقط قصوى ب) الدالة تنازلية في المجال $x > 0$, $x < 0$.

جـ) الميل في A: $f'(1) = -1$. الميل في B: $f'(2) = -0.25$.

$f'(-1) = -1$, $f'(-2) = -0.25$, $f'(0.5) = -4$, $f'(-0.5) = -4$.

د) (i) $f'(\frac{1}{3}) = -9$ (ii)

5. أ) $(\frac{1}{2}, 3)$. قانون الدالة المزاحة: $y = \frac{1}{x} + 1$.

ب) (i) $x = 0$, $y = 1$ (ii) $(-1, 0)$ (iii) لا زوجية ولا فردية.

جـ) $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ د) $f'(2) = -\frac{1}{4}$, $g'(2) = -\frac{1}{4}$

6. أ) الخط المتقطع يلائم الدالة g(x) . ب) $f'(1) = -1$ $g'(1) = -1$
جـ) المماسان متوازيان .

7. أ) المشتقة لجميع الدوال: $y' = -\frac{1}{x^2}$.

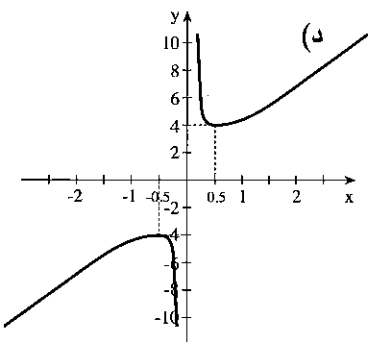
8. أ) $y = -\frac{1}{x}$ جـ) (i) $x = 0$, $y = 0$ (ii) لا توجد نقط تقاطع مع المحورين. (iii) الدالة تصاعدية في المجال $x < 0$, $x > 0$. (iv) الدالة فردية.
هـ) المشتقة لجميع الدوال: $y' = \frac{1}{x^2}$.

9. أ) (1, 0) ب) $x = 0$, $y = 1$

10. أ) $x = 1$, $x = -1$ جـ) لا يوجد حل هـ) $x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$
ب) $x = 0.5$, $x = -0.5$ د) $x = 0.5$, $x = -0.5$ و) $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$

11. أ) $x = 0$ ب) (i) $y' = -\frac{1}{x^2} + 4$
(ii) (0.5, 4) , (–0.5, –4)
(iii) (1, 5) (0.25, 5) (–0.25, –5) (–1, –5).
(iv) (0.5, 4) نهاية صغرى
(–0.5, –4) نهاية عظمى.

د)



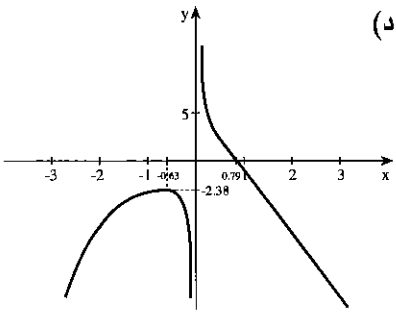
جـ) (i)

x	–0.1	–0.01	0	0.01	0.1
y	–10.4	–100.04	غير معرفة	100.04	10.4

(ii) عندما تقترب قيم x الى $x = 0$ من اليمين، تأخذ قيم الدالة بالكبر.
عندما تقترب قيم x الى $x = 0$ من اليسار، تأخذ قيم الدالة بالصغر .
(iii) $x = 0$.

12. أ) $x = 0$ ب) $y' = \frac{1}{x^2} - 1$ ، (1, 0) نهاية عظمى، (–1, 4) نهاية صغرى.

14. أ) $x = 0$ ب) $(0.79, 0)$ د)



جـ) $y' = -\frac{1}{x^2} - 4x$ ،

$(-0.63 , -2.38)$ **نهاية عظمى .**

15. أ) (i) $\leftarrow h(x)$ (ii) $\leftarrow g(x)$

(iii) $\leftarrow m(x)$ (iv) $\leftarrow f(x)$

ب) $g(x)$ ، $f(x)$

16. ب) $y = -\frac{1}{x} + 3$ جـ) $y = 3$ ، $x = 0$ د) $(\frac{1}{3}, 0)$

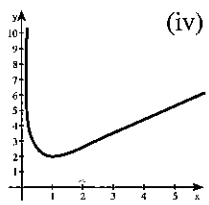
18. أ) $4\frac{1}{4}$ ب) $3\frac{1}{3}$ جـ) 3

هـ) (i) $y = x + \frac{1}{x}$

(ii) $(4, 4\frac{1}{4})$ ، $(\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3})$ ، $(3, 3\frac{1}{3})$

(iii) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ ، $x = 1$

(iv)



19. ب) (i) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$

(ii) **نقط مشبوهة:** $(-1, -2)$ ،

$(1, 2)$

(iii) $(0.5, 2.5)$ ، $(2, 2.5)$ ،

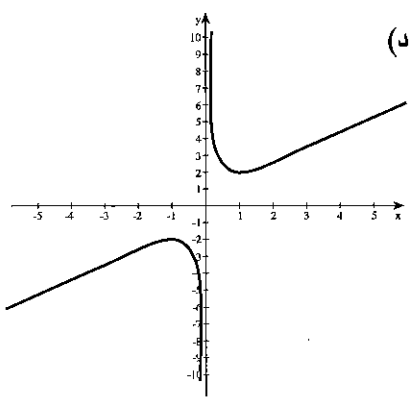
$(-0.5, -2.5)$ ،

$(-2, -2.5)$

(iv) $(1, 2)$ **نهاية صغرى.**

$(-1, -2)$ **نهاية عظمى.**

د)

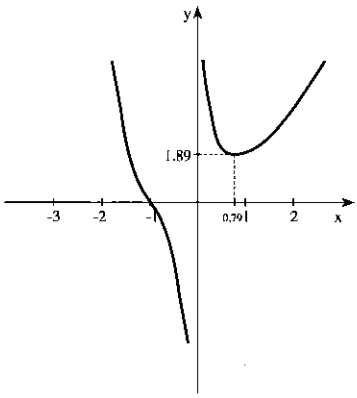


جـ) (i)

x	–0.1	–0.01	0	0.01	0.1
y	–10.1	–100.01	غير معرفة	100.01	10.1

(iii) $x = 0$.

21. أ) $x \neq 0$



ب) (0, –1) نقطة تقاطع مع المحور x .

لا توجد نقطة تقاطع مع المحور y .

جـ) (0.79, 1.89) نقطة نهاية صغرى.

د) $x = 0$

دوال قوى اخرى (صفحة 33-41)

7. ب)

$y = \frac{1}{x^2}$	$y = \frac{1}{x^3}$	
0.25	–0.125	$x = -2$
4	8	$x = 0.5$

8. ب) $y = \frac{1}{x^2}$; $(2, \frac{1}{4})$. $y = \frac{1}{x^4}$; $(2, \frac{1}{16})$.

9. $y = \frac{1}{x^3}$; $(2, \frac{1}{8})$. $y = \frac{1}{x}$; $(2, \frac{1}{2})$.

10. زوجي: أ، جـ، و فردية: ب، د، هـ

11. ب) $y = 1$

جـ) (0, –1) هي نقطة تقاطع مع المحور x، لا توجد نقطة تقاطع مع المحور y .

13. (i) أ، هـ (ii) جـ، ط

14. (i) - (د) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ (ii) - (أ) $(2, \frac{1}{4})$

(iii) - (ب) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ (iv) - (جـ) $(2, \frac{1}{8})$

(v) - (و) $(2, \frac{1}{2})$ (vi) - (هـ) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$

عمليات جبرية وازاحات(صفحة 42-46)

1. أ) $x \neq 0$

ب)

x	–3	–2	–1	–0.5	–0.1	0	0.1	0.5	1	2	3
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	–9	غير معرفة	11	3	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$

ازاحة الدالة $\frac{1}{x}$ بمقدار وحدة واحدة الى اعلى. القانون هو : $y = \frac{1}{x} + 1$.

2. أ) $3x + 4$ ب) $3 + \frac{1}{x}$ جـ) $\frac{1}{x} - 2$ د) $3 - \frac{1}{x}$

3. أ) $y = \frac{1 + x}{x} = \frac{1}{x}(1 + x) = \frac{1}{x} + 1$

ب) 2 أ: ازاحة للدالة $y = 3x$ بمقدار 4 وحدات الى أعلى.

2 ب: ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$ بمقدار 3 وحدات الى أعلى.

2 جـ: ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$ بمقدار وحدتين الى أسفل.

2 د: ازاحة للدالة $y = -\frac{1}{x}$ بمقدار 3 وحدات الى أعلى .

4. أ) $y = \frac{1}{x} + 3$ ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$ بمقدار 3 وحدات الى أعلى.

ب) $y = 2 + \frac{1}{x}$ ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$ بمقدار وحدتين الى أعلى.

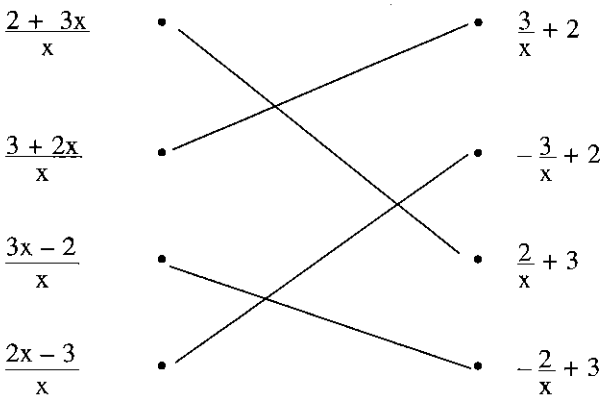
جـ) $y = \frac{1}{x} - 2$ ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$ بمقدار وحدتين الى أسفل.

د) $y = \frac{1}{x} - 1$ ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$ بمقدار وحدة واحدة الى أسفل.

5. ب) $y = \frac{1}{x} + x$, $y' = -\frac{1}{x^2} + 1$

$(1, 2)$ نهاية صغرى ، $(-1, -2)$ نهاية كبرى.

.6



.7 (i)+(ii)

أ) $y = 0.5 - 0.5x$ ، دالة خطية د) $y = x + 1$ ، دالة خطية

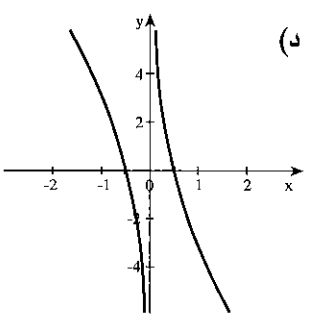
ب) $y = 4 - \frac{1}{x}$، ازاحة الدالة $y = -\frac{1}{x}$ هـ) $y = 5 - \frac{1}{x}$، ازاحة الدالة $y = -\frac{1}{x}$

جـ) $y = \frac{1}{x} + 1.5$، ازاحة الدالة $y = \frac{1}{x}$ و) $y = \frac{1}{x} - 1$، ازاحة الدالة $y = \frac{1}{x}$

.8 $(-0.63\ ,\ -2.38)$ نقطة نهاية عظمى.

.9 أ) $x \neq 0$.

د)



ب) $(0.5\ ,\ 0)$ $(-0.5\ ,\ 0)$ نقطتا تقاطع مع المحور x. لا توجد نقطة تقاطع مع المحور y.

جـ) لا توجد نقطة قصوى.

هـ) لا يوجد للدالة مجالات تصاعد.

الدالة تنازلية عندما $x > 0\ ,\ x < 0$.

ازاحات وانعكاسات للدالة $y = \frac{1}{x}$ (صفحة 47-52)

.1 أ) $x = 2$ جـ) $x = 2\ ,\ y = 0$ د) $(0,\ -\frac{1}{2})$

.2 أ) $x \neq -3$

ب)

x	–3.5	–3.1	–3	–2.9	–2.5
y	–2	–10	غير معرفة	10	2

– عندما تقترب قيم x الى $x = -3$ من اليسار، تأخذ قيم الدالة بالصغر. وعندما تقترب قيم x الى $x = -3$ من اليمين تأخذ قيم الدالة بالكبر.

- $x = -3$

جـ) $(2, \frac{1}{5})$ $(1, \frac{1}{4})$ $(-1, \frac{1}{2})$ $(-2, 1)$ $(-4, -1)$

د) ازحنا الدالة $y = \frac{1}{x}$ الى اليسار بمقدار 3 وحدات.

3. أ) $x \neq 4$ ب) $x \neq 2$ جـ) $x \neq -1$ د) $x \neq \frac{1}{2}$

4. أ (i) $x = 1$ ب) $x = -2$.

(ii) الدالة (أ) هي ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$ بمقدار وحدة واحدة الى اليمين.

الدالة (ب) هي ازاحة للدالة $y = \frac{1}{x}$ بمقدار وحدتين الى اليسار.

5. أ) $x \neq -1$ ب) $x \neq -1$ جـ) $x \neq -2$
د) $x \neq 2$ هـ) $x \neq 0$ و) $x \neq 1$

6. أ) $\frac{1}{x-2}$ ب) $\frac{1}{x} + 1$ جـ) $\frac{1}{x-2} + 1$

7. - (i) $x \neq -2$ (ii) $x \neq -2$ (iii) $x \neq 2$ (iv) $x \neq 2$
(جـ) - (i) - (iii) - (أ)
(د) - (ii) - (iv) - (ب)

8. أ) $x \neq -2$

ب) (i) ازحنا الدالة $y = \frac{1}{x}$ وحدتين الى اليسار ووحدة واحدة الى أسفل.

جـ) $(0, -\frac{1}{2})$, $(-1, 0)$

د) $x = -2$, $y = -1$.

قليلاً من "الشد" (صفحة 53-67)

3. أ) $y' = 3 \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{3}{x^2}$

ب) $y' = -\frac{2}{x^2}$ $\quad y' = -\frac{2.5}{x^2}$ $\quad y' = \frac{3}{x^2}$

4. أ) $y' = -\frac{4}{x^2}$ ب) لا يوجد جـ) الدالة ليست تصاعدية، بل تنازلية عندما $x < 0, x > 0$

د)

x	–4	–2	–1	–0.5	0	0.5	1	2	4
y	–1	–2	–4	–8	غير معرفة	8	4	2	1

هـ) $y = 0 \quad , \quad x = 0$

5. أ) $y' = -\frac{4}{x^2} + 5$ $\quad$ د) $y' = \frac{3}{x^2} + 2$

ب) $y' = -\frac{7}{x^2} + 6x$ $\quad$ هـ) $y' = -\frac{4}{x^2} - 1$

جـ) $y' = -\frac{6}{x^2} + 1$ $\quad$ و) $y' = \frac{1}{x^2} + 12x$

6. أ) $x = -6 \ , \ x = 6$ $\quad$ د) $x = 2$

ب) $x = -2 \ , \ x = 2$ $\quad$ هـ) $x = -2$

جـ) لا يوجد حل $\quad$ و) $x = -0.71 \ , \ x = 0.71$

7. أ) $x \neq 0$

ب)

x	–0.5	–0.1	0	0.1	0.5
y	–7.5	–39.9	غير معرفة	39.9	7.5

– عندما تقترب قيم x الى $x = 0$ من اليمين، تأخذ قيم الدالة بالكبر.

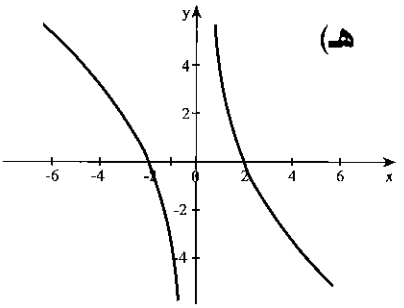
وعندما تقترب قيم x الى $x = 0$ من اليسار، تأخذ قيم الدالة بالصغر.

جـ) $(2,0)$, $(-2,0)$ نقطتا تقاطع مع المحور x .

لا توجد نقطة مع المحور y .

د) $y' = -\frac{4}{x^2} - 1$ ، المشتقة سالبة لكل $x \neq 0$.

هـ)



و) $y = 0$

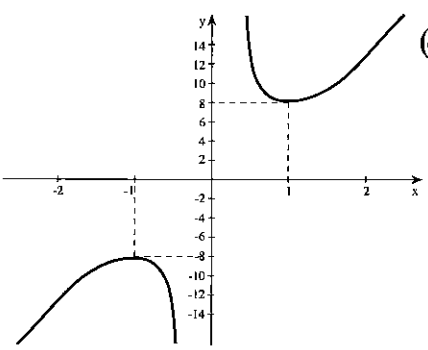
ز) الدالة تنازلية في المجال $x < 0 , x > 0$.
الدالة لا تكون تصاعدية في مجال تعريفها.

8. أ) $x \neq 0$

ب)

x	–0.5	–0.01	0	0.01	0.5
y	–10	–400.04	غير معرفة	400.04	10

هـ)



– عندما تقترب x الى $x = 0$ من اليمين، تأخذ قيم الدالة بالكبر.

وعندما تقترب x الى $x = 0$ من اليسار، تأخذ قيم الدالة بالصغر.

جـ) لا توجد نقط تقاطع مع المحورين.

د) $(1, 8)$ نقطة نهاية صغرى.

$(-1, -8)$ نقطة نهاية عظمى.

9. أ) $y = \frac{2}{x} - 3$, $y' = -\frac{2}{x^2}$ ب) $y = \frac{6}{x} + 2x - 1$, $y' = -\frac{6}{x^2} + 2$

جـ) $y = 4 - \frac{2}{x}$, $y' = \frac{2}{x^2}$ د) $y = 6x^2 + \frac{2}{x}$, $y' = 12x - \frac{2}{x^2}$

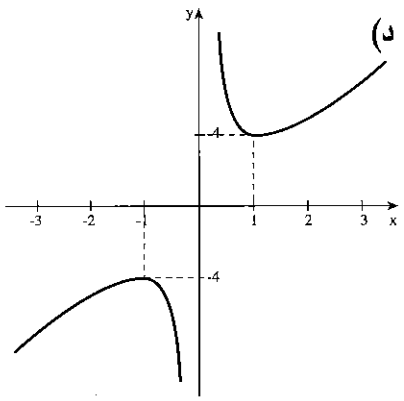
10. أ) $x = -0.5$ ب) $x = 2 , x = -2$ جـ) لا يوجد حل.

د) $x = 4 , x = -1$

11. أ) $x \neq 0$ ب) لا توجد نقط تقاطع مع المحورين.

جـ) $(1, 4)$ نقطة نهاية صغرى.
$(-1, -4)$ نقطة نهاية عظمى.

د)



12. ب) طول الضلع الاخر : 18 وحدة.
محيط المستطيل: 40 وحدة.

ب) طول الضلع الاخر: $\frac{36}{x}$.

محيط المستطيل: $k(x) = 2x + \frac{72}{x}$

د) $x = 6$ ينتج مربع محيطه 24 وحدة.

13. أ) عندما يكون أحد اضلاع مستطيل 2سم، فان طول الضلع 9 سم.
وعندما يكون احد اضلاعه 4سم، فان طول ضلع الاخر 4.5سم.

ب) $y = \frac{18}{x}$

جـ) (i) $A(1, 18)$. (ii) طول العمود على المحور y يمثل احد اضلاع المستطيل.
(iii) طول العمود على المحور x يمثل ضلعه الاخر.
(iv) مساحة المستطيل 18 سم2. (v) محيط المستطيل 38 سم.

د) (i) $B(6, 3)$. (ii) احد الاضلاع 6سم والاخر 3سم.
(iii) مساحة المستطيل 18سم2. (iv) محيط المستطيل 18سم.

هـ) مساحة المستطيل 18سم2. محيط المستطيل 73سم.

و) (i) $M(x, \frac{18}{x})$ (ii) احد اضلاع x، والاخر $\frac{18}{x}$.

(iii) $y = 2x + \frac{36}{x}$ (iv) $x = \sqrt{18} =$ 4.24سم نحصل على مربع.

(v) المحيط: $4\sqrt{18} =$ 16.96سم.

14. أ) ارتفاع الصندوق 54سم، مساحة السطوح 440سم2.

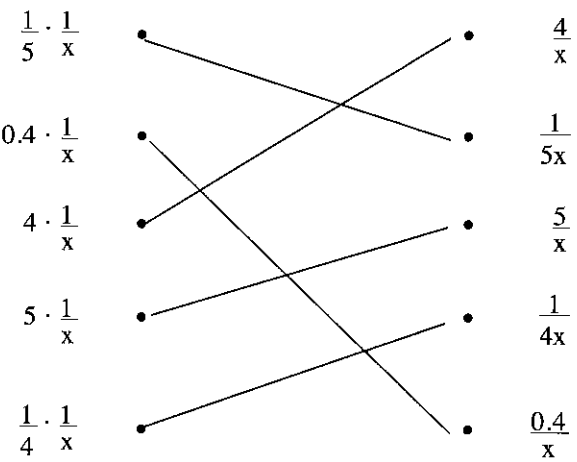
ب) ارتفاع الصندوق 24سم، مساحة السطوح 306سم2.

جـ) ارتفاع الصندوق $\frac{216}{x^2}$.

مساحة السطوح: $y = 4 \cdot \frac{216}{x^2} \cdot x + 2x^2 = \frac{864}{x} + 2x^2$

د) اطوال الصندوق: طول ضلع القاعدة 1سم، ارتفاع الصندوق 216،
مساحة السطوح 866 سم2. هـ) $x =$ 6 سم

15.



16. أ) $y' = -\frac{3}{x^2}$ ب) $y' = -\frac{2.3}{x^2}$ جـ) $y' = -\frac{1}{2x^2}$ د) $y' = -\frac{3}{4x^2}$ هـ) $y' = -\frac{0.8}{x^2}$ و) $y' = \frac{2}{3x^2}$

17. أ) $y' = \frac{5}{x^2}$ ب) $y' = -\frac{1}{2x^2} + 3$ جـ) $y' = \frac{4}{x^2} + 4x$ د) $y' = -\frac{6}{x^2} + 1$

18. أ) $y = \frac{7}{x} + 2$ ، $y' = -\frac{7}{x^2}$ ب) $y = 3x - \frac{6}{x}$ ، $y' = 3 + \frac{6}{x^2}$

جـ) $y = \frac{4}{5} - \frac{6}{5}x^2$ ، $y' = -\frac{12}{5}x$ د) $y = \frac{4}{x} + 4 + 6x$ ، $y' = -\frac{4}{x^2} + 6$

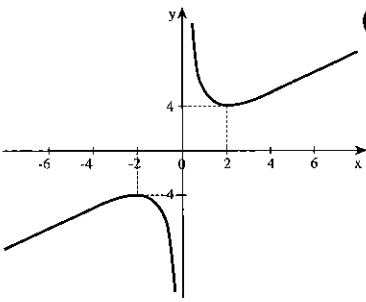
19. أ) $x = 1$, $x = -1$ ب) $x = 2$, $x = -2$

جـ) لا يوجد حل. د) لا يوجد حل.

20. أ) $x \neq 0$

ب)

x	–0.5	–0.1	0	0.1	0.5
y	–8.5	–40.1	غير معرفة	40.1	8.5

جـ) 

-عندما تقترب قيم x الى الى $x = 0$ من اليسار، تأخذ قيم الدالة بالصغر.

- عندما تقترب قيم x الى $x = 0$ من اليمين، تأخذ قيم الدالة بالكبر.

جـ) - لا توجد نقط تقاطع مع المحورين.

- $(2, 4)$ نهاية صغرى ، $(-2, -4)$ نهاية عظمى.

- معادلة خط التقارب $x = 0$

21. أ) $x \neq 0$ ب) $y = \frac{1}{x} + 9x$, $y' = -\frac{1}{x^2} + 9$.

$(\frac{1}{3}, 6)$ نهاية صغرى ، $(-\frac{1}{3}, -6)$ نهاية عظمى.

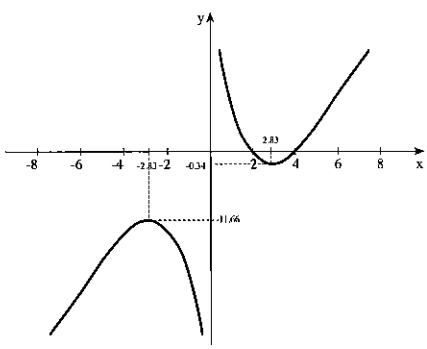
22. أ) $x \neq 0$ ب) $y = \frac{4}{x} + 2x^2$, $(1, 6)$ نهاية صغرى .

24. أ) $x \neq 0$

ب) $(4, 0)$ $(2,0)$ لاتوجد نقطة تقاطع مع المحور y. د)

جـ) $(2.83, -0.34)$ نهاية صغرى،

$(-2.83, -11.66)$ نهاية عظمى.



هـ) مجالات التصاعد:

$x > 2.83 , x < -2.83$

مجالات التنازل:

$0 < x < 2.83 , -2.83 < x < 0$

25. جـ) $y = 2(\frac{120}{x} + x)$ د) $(\sqrt{120}, \sqrt{120})$

عن مماس الدالة (صفحة 68-73)

1. أ) $f'(1) = -1$ معادلة المماس: $y = -x + 2$
   ب) نقطة التماس هي $(-1, -1)$ معادلة المماس: $y = -x - 2$
   جـ) المماسان متوازيان.

2. ب) $f'(-2) = -\frac{1}{4}$

3. أ) $y = 2x + 3$ ب) $y = -2x$ جـ) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ د) $y = 3x - 4$

4. أ) $f'(2) = -\frac{1}{4}$ ب) $y = -\frac{1}{4}x + 1$

   د) $g'(2) = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}x + 3$ هـ) المماسان متوازيان.

5. أ) $A(2, 2.5)$ ب) $f'(2) = \frac{3}{4}$ جـ) $y = \frac{3}{4}x + 1$
   د) $B(-1, -2)$, $y = -2$

6. ب) $(2, \frac{1}{2})$, $(-2, -\frac{1}{2})$
   جـ) (i) $-\frac{1}{x^2} = -4 \Leftarrow x = 0.5$, $x = -0.5$. $A(0.5, 2)$
   (ii) نعم – نقطة التماس هي : $(-0.5, -2)$

7. أ) $(\frac{1}{3}, 3)$, $(-\frac{1}{3}, -3)$ ب) $(3, \frac{1}{3})$, $(-3, -\frac{1}{3})$
   جـ) $(\sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\sqrt{5}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$

8. أ) $y = -x - 5$ ب) $y = -9x + 11$ جـ) $y = 2.875x + 1$
   د) $y = -\frac{1}{4}x + 3$ هـ) $y = 2x - 6$

9. $y = -8x + 8$

10. أ) $(\frac{1}{3}, 6)$, $(-\frac{1}{3}, -6)$ ب) $y = -18x + 12$, $y = -18x - 12$

11. $(\frac{1}{2}, 3)$, $(-\frac{1}{2}, -3)$ $y = -2x + 4$, $y = -2x - 4$

12. $x = 0.5$, $x = -0.5$

13. معادلة المماس في النقطة $A(1, 5.5)$ هي: $y = -3.5x + 9$
    معادلة المماس في النقطة $B(4, 4)$ هي: $y = 0.25x + 3$
    نقطة تقاطع المماسين هي : $(1.6, 3.4)$

بحث دوال خارج قسمة اخرى (صفحة 74-78)

1. أ) $x = 1$, $x \neq 1$

ب) $(0\ ,\ 0)$

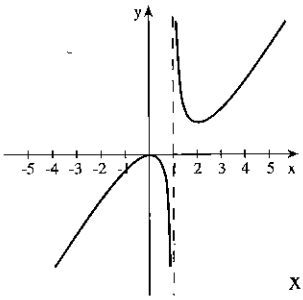
جـ) نقط مشبوهة: $(0\ ,0)$, $(2\ ,4)$ هـ)

نقط اخرى: $(3\ ,4.5)$, $(1.5\ ,4.5)$,

$(0.5\ ,-0.5)$, $(-1\ ,-0.5)$.

$(0\ ,\ 0)$ نقطة نهاية عظمى،

$(2\ ,\ 4)$ نقطة نهاية صغرى.



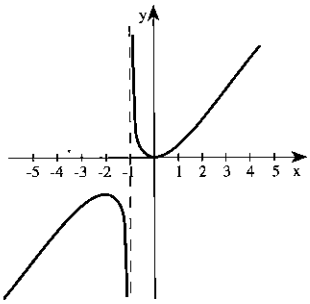
د)

x	0.9	0.99	1	1.01	1.1
y	–8.1	–98.01	غير معرفة	102.01	12.1

– عندما تقترب قيم x الى $x = 1$ من اليسار، تأخذ قيم الدالة بالصغر.
عندما تقترب قيم x الى $x = 1$ من اليمين، تأخذ قيم الدالة بالكبر.
معادلة خط التقارب $x = 1$.

3. $(0\ ,\ 0)$ نقطة نهاية صغرى.

$(-4\ ,\ -2)$ نقطة نهاية عظمى.

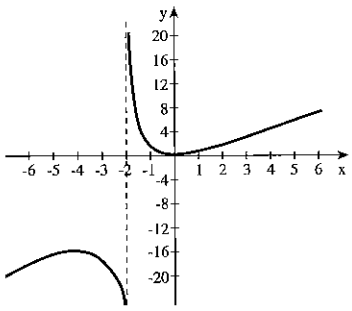


4. أ) $x \neq -2$

ب) $(0\ ,\ 0)$ نقطة نهاية صغرى.

$(-16\ ,\ -4)$ نقطة نهاية عظمى.

جـ) $x = -2$

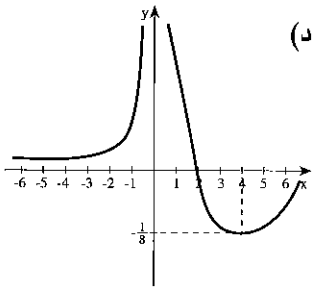


5. أ) $x \neq 0$

ب) لا توجد نقط تقاطع مع المحور y .

نقطة تقاطع مع المحور x . (2 , 0)

د)



جـ)

x	–4	–2	–1	–0.5	0	0.5	2	4	5
y	0.375	1	3	10	غير معرفة	6	0	–0.125	–0.12

هـ) $x = 0$, $y = 0$

6. ب) (iii) -f(x) (i)- g(x)، (ii) - h(x) ، (iv) - m(x)

خط بياني ذو ثقب وتبسيط الكسور (صفحة 79-85)

1. أ) $x \neq 0$

ب) (0.01 , 2.01) ، (–0.1 , 1.9) ، (–0.01 , 1.99) ، (0.1 , 2.1)

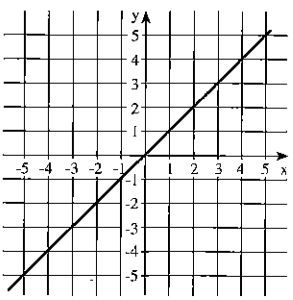
– عندما تقترب الى $x = 0$، فان قيم الدالة تقترب الى 2 .

جـ)

x	–3	–2	–1	–0.5	0	0.5	1	2	3
y	–1	0	1	1.5	غير معرفة	2.5	3	4	5

2. أ) $x \neq 1$

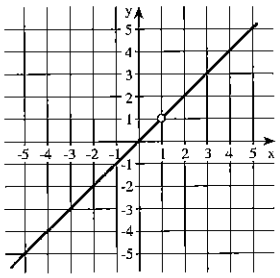
ب) $y = \dfrac{x(x-1)}{x-1} = x$



جـ)

في الدالة "المبسطة"	في الدالة "الاصلية"
(3 , 3)	(3 , 3)
(1.1 , 1.1)	(1.1 , 1.1)
(1 , 1)	(لا يوجد , 1)

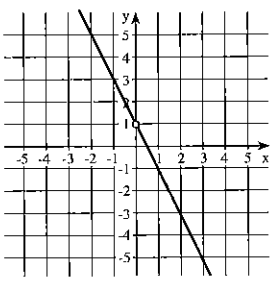
د)



3. أ) $x \neq 0$

ب) $y = \frac{x(-2x+1)}{x} = -2x + 1$

جـ)

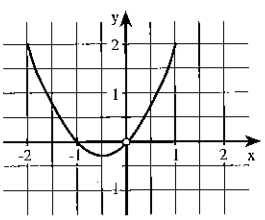


4. أ) $x \neq 0$

ب) $y = \frac{x(x^2+x)}{x} = x^2 + x$

جـ) $y' = 2x + 1$

هـ)



(–0.5 , –0.25) **نقطة نهاية صغرى.**

5. (i) أ) $x \neq 0 \ , \ y = 5x$

ب) $x \neq -7 \ , \ y = -1$

جـ) $x \neq 2 \ , \ y = 5x$

د) $x \neq -5 \ , \ y = \frac{1}{x+5}$

هـ) $x \neq -3 \ , \ y = 1$

و) $x \neq 0 \ , \ y = x + 2$

(ii) أ) (ب) (جـ) (هـ) (و)

6. أ) $3x^2(x-2)$

ب) $x(3x-2)$

جـ) $5(1+x)$

د) $x(-x+1)$

هـ) $x(1 + x^2 + x)$

و) $x(-x^2 + x + 1)$

ز) $5x^2(1-3x)$

ح) $x(7 + 10x)$

7. أ) $y = \frac{5}{2}$ ، $x \neq 1$

ب) $y = 11x$، $x \neq -1$

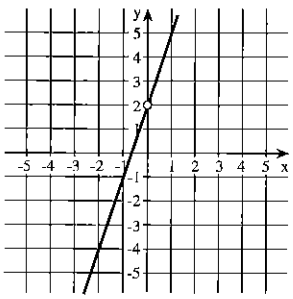
جـ) $y = \frac{x}{2}$ ، $x \neq -3$

د) $x \neq -0.5$ ، **لا يمكن التبسيط**

هـ) $y = \frac{3x}{2}$ ، $x \neq -2$

و) $y = \frac{5x^2}{3}$ ، $x \neq -2$

8. أ) $x \neq 0$

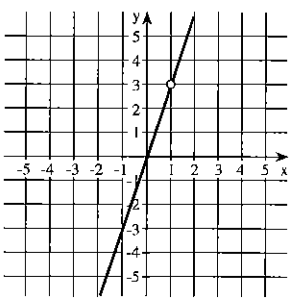


ب) $y = \frac{x(3x+2)}{x} = 3x + 2$

د) **في الدالة الاصلية:** (1 , 5)

في الدالة المبسطة: (1 , 5)

9. أ) $x = 1$



ب) $y = 3x$, (1 , 3)

10. أ) $f(x) = 2x - 1$, $x \neq 0$:f(x)

$g(x) = x^2$, $x \neq 2$:g(x)

h(x): $x \neq 0$, **الدالة مبسطة.**

m(x): $x \neq 2$, **الدالة مبسطة.**

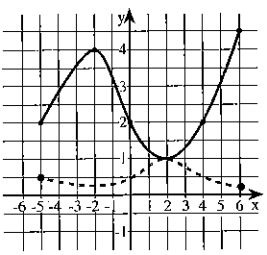
ب) (ii) - f(x) , (i) - h(x)

(iv) - g(x) , (iii) - m(x)

الفصل الثاني: الدالتان f و $\frac{1}{f}$

الدالة المعرفة في قطعة مغلقة (صفحة 86-97)

1. أ) $-2 < x < 1$ ، $6 < x < 8$ ب) $1 < x < 6$
جـ) $(1, 6)$ نهاية عظمى، $(6, -3)$ نهاية صغرى $(8, 2)$ نهاية عظمى .
3. ب) $(1, -2)$ جـ) $(-2, 6)$
4. أ) $(-3, -2)$ نهاية صغرى، $(1, 2)$ نهاية عظمى، $(3, 1)$ نهاية صغرى
ب) $(-3, -2)$ نهاية صغرى مطلقة.
5. أ) $(6, 4.5)$ نهاية عظمى مطلقة، $(2, 1)$ نهاية صغرى مطلقة.



ب) (i)

f	$\frac{1}{f}$
$(-2, 4)$	$(-2, 0.25)$
$(0, 2)$	$(0, 0.5)$
$(2, 1)$	$(2, 1)$
$(4, 2)$	$(4, 0.5)$
$(6, 4.5)$	$(6, 0.22)$

جـ) (i) $(2, 1)$ (ii) جميع قيم $\frac{1}{f}$ موجبة . (iii) عندما f تنازلية،تكون $\frac{1}{f}$ تصاعدية .(iv) $(-5, 0.5)$ نهاية عظمى، $(-2, 0.25)$ نهاية صغرى، $(2, 1)$ نهاية عظمى مطلقة، $(6, 0.22)$ نهاية صغرى مطلقة.

6. أ)+ب)

النوع	f	$\frac{1}{f}$	النوع
نهاية عظمى	$(-3, 1.5)$	$(-3, 0.67)$	نهاية صغرى
نهاية صغرى مطلقة	$(-2, 0.5)$	$(-2, 2)$	نهاية عظمى مطلقة
نهاية عظمى مطلقة	$(1, 5)$	$(1, 0.2)$	نهاية صغرى مطلقة
نهاية صغرى	$(3, 2)$	$(3, 0.5)$	نهاية عظمى
نهاية عظمى	$(4, 4)$	$(4, 0.25)$	نهاية صغرى
نهاية صغرى	$(6, 1)$	$(6, 1)$	نهاية عظمى

د) (ii) الاحداثي y لها هو 1 .

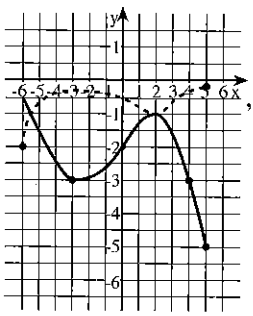
هـ) f تصاعدية في المجالات $-2 < x < 1$, $3 < x < 4$. في هذه المجالات تكون $\frac{1}{f}$ تنازلية.

و) قيم f وقيم $\frac{1}{f}$ موجبة .

7. أ)+ب)

النوع	g	$\frac{1}{g}$	النوع
نهاية عظمى مطلقة	(–6, –0.5)	(–6, –2)	نهاية صغرى مطلقة
نهاية صغرى	(–3, –3)	(–3, –0.33)	نهاية عظمى
نهاية عظمى	(2, –1)	(2, –1)	نهاية صغرى
نهاية صغرى مطلقة	(5, –5)	(5, –0.2)	نهاية عظمى مطلقة

جـ)



د) (ii) (2, –1) (–5.5, –1)

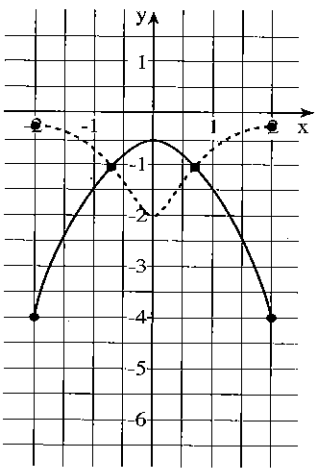
(iii) الاحداثي y لها (–1) .

هـ) g تنازلية في المجالات: $-6 < x < -3$, $2 < x < 5$

في هذه المجالات تكون $\frac{1}{g}$ تصاعدية.

و) كلتاهما سالبة.

8. أ) النقط المشتركة مشددة في الشكل، البند (جـ).



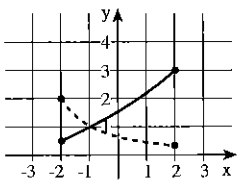
ب) (2, -4) , (-2, 4) نقطتا نهاية صغرى للدالة f .

(0 -0.5) نهاية عظمى للدالة f .

(2,–0.25) ، (–2,–0.25) نقطتا نهاية عظمى للدالة $\frac{1}{f}$.

(0, –2) نقطة نهاية صغرى للدالة $\frac{1}{f}$.

د) (0, –2) نقطة نهاية صغرى مطلقة.



11. أ) $(-2, 0.5)$ نهاية صغرى، $(2, 3)$ نهاية عظمى هـ)

ب) $(-2, 2)$ نهاية عظمى، $(2, 0.33)$ نهاية صغرى.

جـ) $(-1, 1)$

د) نقط تقاطع h مع المحور y: $(0, 1.5)$.

نقط تقاطع $\frac{1}{h}$ مع المحور y: $(0, 0.67)$.

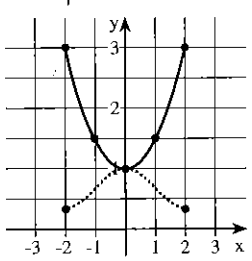
و) h تصاعدية، $\frac{1}{h}$ تنازلية. ز) h وَ $\frac{1}{h}$ موجبتان.

12. الخط البياني (جـ) هو الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$.

13. أ)+ب)+ جـ)

	$\frac{1}{f}$	f	
نهاية صغرى مطلقة	$(-2, 0.33)$	$(-2, 3)$	نهاية عظمى مطلقة
	$(-1, 0.67)$	$(-1, 1.5)$	
نهاية عظمى مطلقة	$(0, 1)$	$(0, 1)$	نهاية صغرى مطلقة
	$(1, 0.67)$	$(1, 1.5)$	
نهاية صغرى مطلقة	$(2, 0.33)$	$(2, 3)$	نهاية عظمى مطلقة

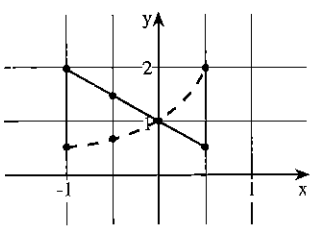
جـ)(iii)



16. أ) $(-1, 2)$, $(-0.5, 1.5)$, $(0, 1)$, $(0.5, 0.5)$

ب) $(-1, 0.5)$, $(-0.5, 0.67)$, $(0, 1)$, $(0.5, 2)$

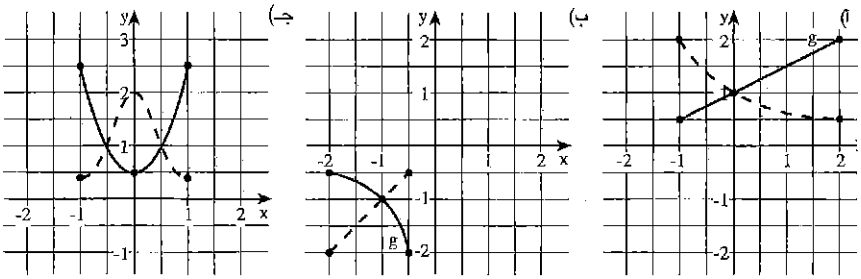
جـ)



د) $\frac{1}{g}$ هي ليست دالة خطية.

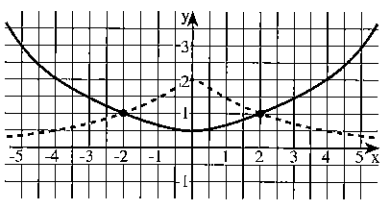
هـ) g تنازلية، $\frac{1}{g}$ تصاعدية.

.17



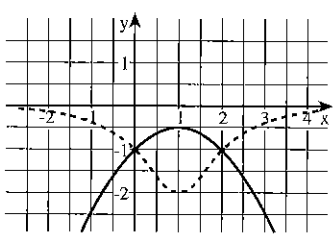
وماذا لو كان المجال غير مغلق؟ (صفحة 98-105)

1. أ) $(0, 2)$ نهاية عظمى للدالة $\frac{1}{f}$. و)



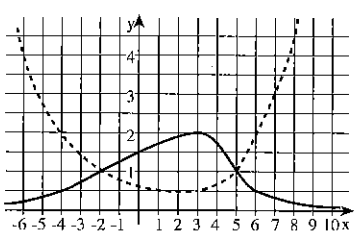
د) $(6, 0.25)$, $(7, 0.17)$

2. أ) $(1, -2)$ نهاية صغرى للدالة $\frac{1}{f}$. هـ)



د) $(4, -0.2)$, $(-2, -0.2)$.

3. أ) $(3, 0.5)$ نهاية صغرى للدالة $\frac{1}{f}$.

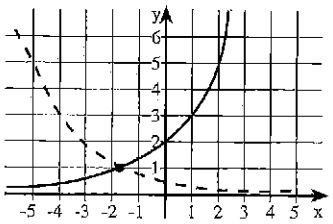


د) هـ)

f	$\frac{1}{f}$
$(-6, \frac{1}{4})$	$(-6, 4)$
$(-3, \frac{3}{4})$	$(-3, \frac{4}{3})$
$(6, \frac{1}{2})$	$(6, 2)$
$(8, \frac{1}{4})$	$(8, 4)$

و) عندما تكون قيم x كبيرة او صغيرة جدا، تأخذ قيم الدالة $\frac{1}{f}$ ، بالكبر.

ن) عندما $x < 3$ الدالة تنازليـــــة،
وعندما $x > 3$ الدالة تصاعدية.

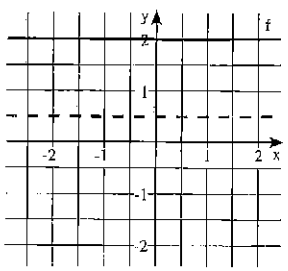


4. أ) $(5, 0.08)$, $(-5, 5)$

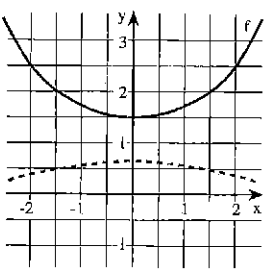
ب) $(0, 0.5)$

جـ) $y = 0$

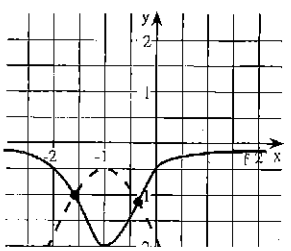
5. أ)



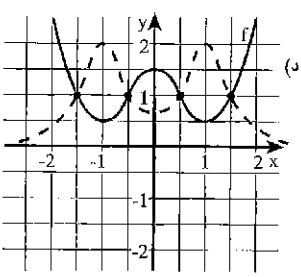
ب)



جـ)



د)



6. أ) $(0,-2)$ نهاية صغرى للدالة $\frac{1}{f}$.

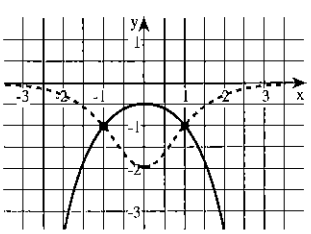
ب) $(2, -0.17)$, $(3, -0.1)$

جـ) (i) $(-5, -0.033)$.

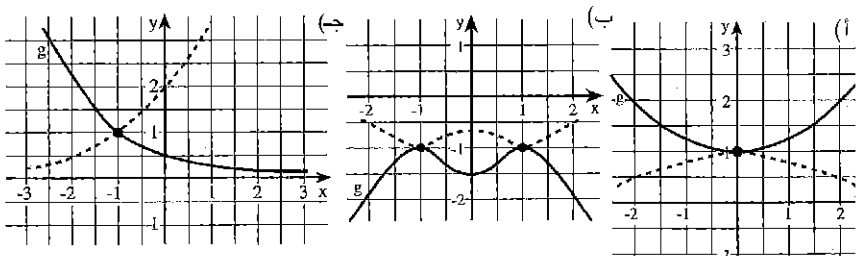
(ii) لا يوجد للدالة $\frac{1}{f}$ نقط تقاطع مع المحور x.

(iii) $y = 0$.

هـ)



.7



وماذا لو قطع الخط البياني المحور x؟ (صفحة 106-120)

1. أ) $(6, 3)$, $(-1, -2)$ نقطتا الطرفين للدالة f .

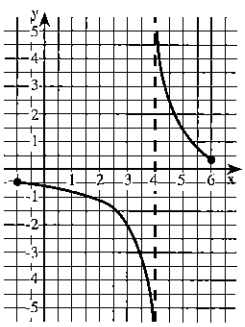
$(6, \frac{1}{3})$, $(-1, -0.5)$ نقطتا الطرفين للدالة $\frac{1}{f}$.

ب) (i) $(4, 0)$ (ii) للدالة $\frac{1}{f}$ لا توجد نقطة ملائمة للنقطة $(4, 0)$.

جـ)

	f	$\frac{1}{f}$
B:	(3.5, –0.2)	(3.5, –5)
	(3.8, –0.1)	(3.8, –10)
	(4.1, 0.1)	(4.1, 10)
	(4.2, 0.2)	(4.2, 5)
A:	(4.5, 0.4)	(4.5, 2.5)

د)



د) عن يسار $x = 4$ ، تأخذ قيم الدالة $\frac{1}{f}$ بالصغر.

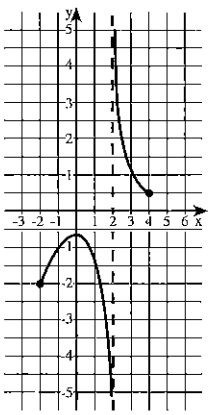
وعن يمين $x = 4$ ، تأخذ قيم الدالة $\frac{1}{f}$ بالكبر.

2. أ) (2, 0) (i) y = 2 (iii).

ب)

	$\frac{1}{f}$	f
B:	(1.5, –2.5)	(1.5, –0.4)
	(1.8, –4)	(1.8, –0.25)
	(1.9, –5)	(1.9, –0.2)
	(2.1, 5)	(2.1, 0.2)
	(2.2, 2.5)	(2.2, 0.4)
A:	(2.5, 2)	(2.5, 0.5)

جـ) (4, 2) , (–2, –0.5) نقطتا نهاية عظمى للدالة g . د) (0, –1.5) نقطة نهاية صغرى للدالة g .

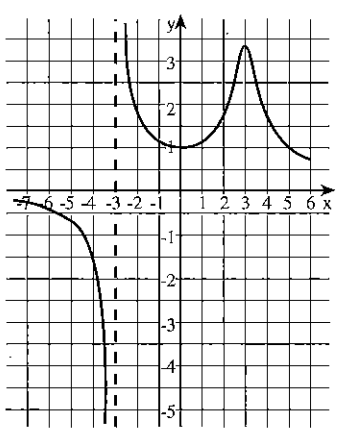


(4, 0.5) , (–2, –2) نقطتا نهاية صغرى للدالة $\frac{1}{g}$.

(0, –0.67) نقطة نهاية عظمى للدالة $\frac{1}{g}$.

3. أ) x = –3

ب) (–3.5, –5) , (–2.5, 3.33)



هـ)

جـ) $\frac{1}{f}$ تناقصية وسالبة عن يسار الخط الفاصل.

د) (0, 1) نقطة نهاية عظمى للدالة f .

(3, 0.3) نقطة نهاية صغرى للدالة f.

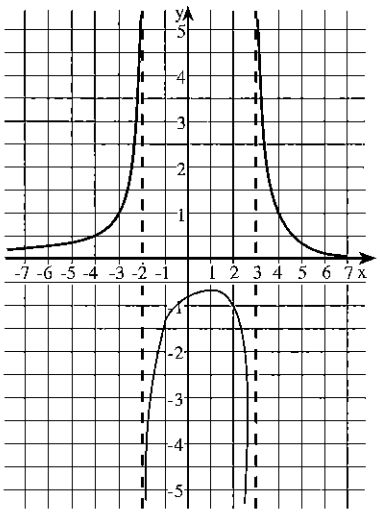
(0, 1) نقطة نهاية صغرى للدالة $\frac{1}{f}$ ،

(3, 3.33) نقطة نهاية عظمى للدالة $\frac{1}{f}$.

4. أ) $x = -2$, $x = 3$

ب) $(-2.25, 5)$, $(-1.75, -5)$, $(2.75, -5)$, $(3.25, 5)$

جـ) (i) تصاعدية عن يسار $x = -2$. (ii) موجبة عن يسار $x = -2$.



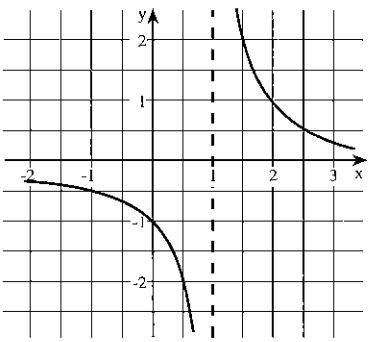
د) (i) $\frac{1}{h}$ تنازلية عن يمين $x = 3$.

(ii) $\frac{1}{h}$ موجبة عن يمين $x = 3$.

هـ) $(0, -\frac{2}{3})$ نقطة نهاية عظمى.

و) $(-\frac{1}{2}, -1)$, $(1, -1)$ نقطتان مشتركتان.

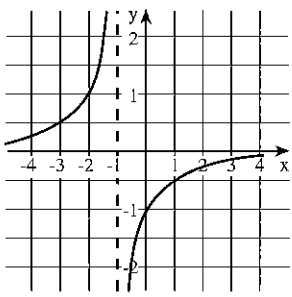
5. أ) (i) $x = 1$

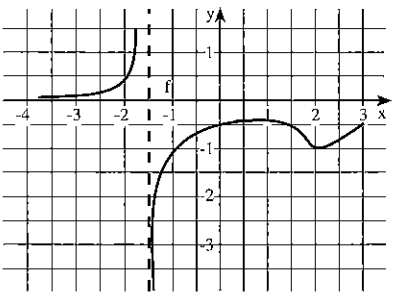


ب) (i) $(1.25, 4)$, $(0.75, -4)$

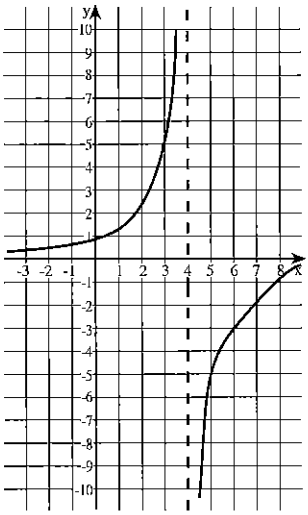
(ii) $(2, 1)$, $(0, -1)$

6.





7. أ) $x = 4$ ب) $(4.5, -10)$, $(3.5, 10)$



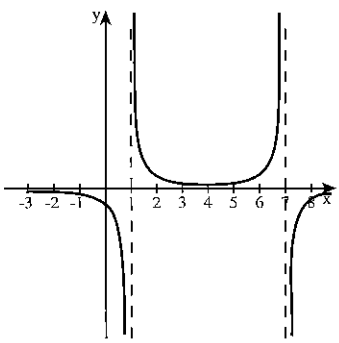
جـ) $\frac{1}{g}$ تصاعدية وموجبة عن يسار الخط الفاصل.

د) $\frac{1}{g}$ تصاعدية وسالبة عن يمين الخط الفاصل.

8. أ) $(1, 0)$, $(7, 0)$

ب) $x = 1$, $x = 7$

جـ) $(4, 0.2)$ نهاية صغرى،



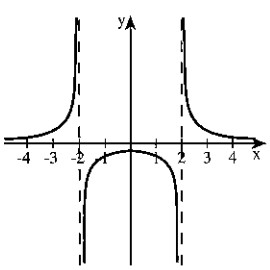
د) (ii) $\frac{1}{h}$ تنازلية عن يسار خط التقارب الايسر.

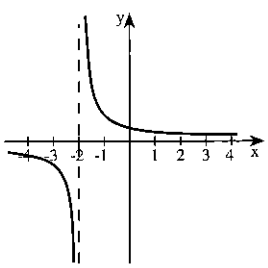
(iii) $\frac{1}{h}$ سالبة عن يسار خط التقارب الايسر.

هـ) (ii) $\frac{1}{h}$ تصاعدية عن يمين خط التقارب الايمن.

(iii) $\frac{1}{h}$ سالبة عن يمين خط التقارب الايمن.

9.

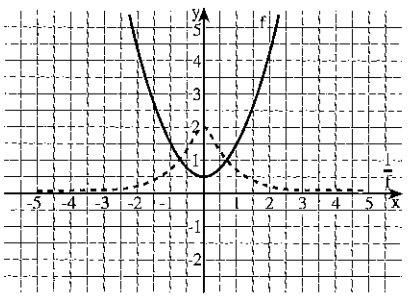




رسم الخط البياني للدالة $\frac{1}{f}$ اذا علم قانون f (صفحة 121-140)

1. أ) II ، ب) III ، جـ) IV ، د) I

8. أ) $(0, \frac{1}{2})$ نقطة نهاية صغرى. جـ) $(0, 2)$ نقطة نهاية عظمى.



ب)+ د)

f	$\frac{1}{f}$
(–2, 4.5)	(–2, 0.22)
(–1, 1.5)	(–1, 0.67)
(1, 1.5)	(1, 0.67)
(2, 4.5)	(2, 0.22)

هـ) (ii) المحور x هو خط تقارب.

(iii) $y = \frac{1}{x^2 + 0.5}$. عندما $x = -10$ ، $y = 0.0099$

عندما $x = 10$ ، $y = 0.0099$

و) $\frac{1}{f}$ تصاعدية عندما $x < 0$. الدالة تنازلية عندما $x > 0$.

9. (i) نقط التقاطع مع المحورين: $(0, -3)$ ، $(3, 0)$ ، $(-1, 0)$.

$(1, -4)$ نقطة نهاية صغرى.

(ii) نقط التقاطع مع المحورين: $(0, 6)$ ، $(2, 0)$ ، $(-3, 0)$.

$(-\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4})$ نقطة نهاية عظمى.

(iii) نقط التقاطع مع المحورين: $(2, 0)$ ، $(0, 4)$

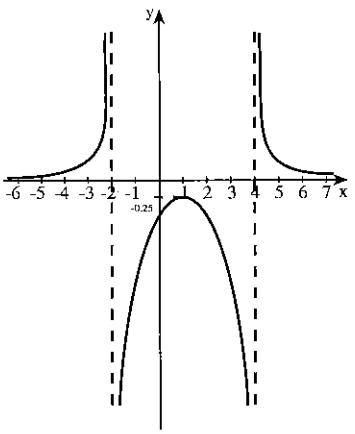
$(2, 0)$ نقطة نهاية صغرى .

(iv) أ) نقطة تقاطع مع المحور y $(0, 5)$.. لا توجد نقط تقاطع مع المحور x .

ب) $(1.5, 0.5)$ نقطة نهاية صغرى.

10. ب) $x = 3$, $x = -1$

جـ) (i) $(1, -0.25)$ نهاية عظمى.



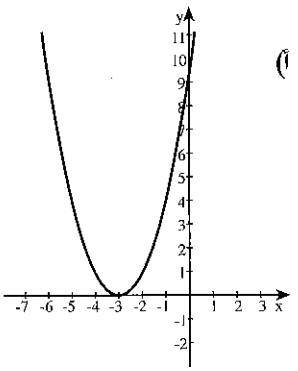
د) $\frac{1}{f}$ تنازلية وموجبة عن يمين $x = 3$.

و) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

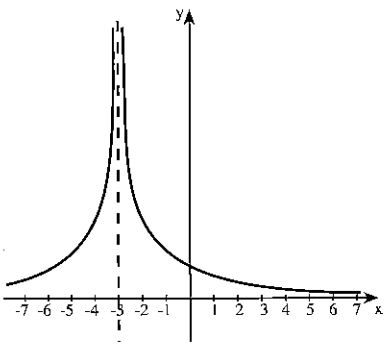
(ii) $(-6, 0.022)$ $(6, 0.048)$

ز) 4 نقط، الاحداثي y لها 1 أو -1 .

11. أ)



ج) +د)



ب) $x = -3$ جـ) (i) $\frac{1}{f}$ تنازلية عن يمين الخط الفاصل.

(iii) $\frac{1}{f}$ موجبة عن يمين الخط الفاصل.

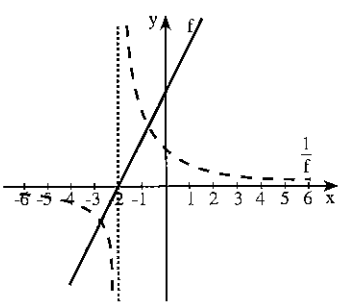
هـ) $x = -3$, $y = 0$ و) نقطتان مشتركتان، الاحداثي y لهما 1.

ز) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 6x + 9}$ (ii) $(-7, 0.06)$ $(4, 0.02)$

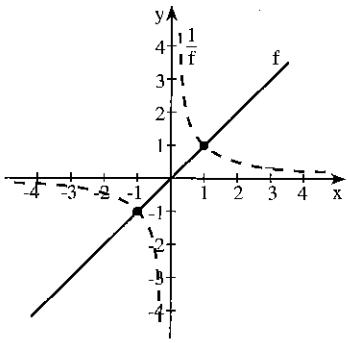
12. ب) $x = -2$

هـ) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x + 4}$

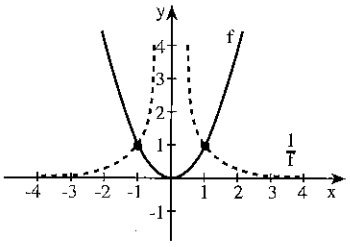
و) لا.



13. جـ) $x = 0$ و) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$



14. جـ) $x = 0$ هـ) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$



15. أ) (0, 0) , (0.04, 0.2) , (0.64, 0.8)

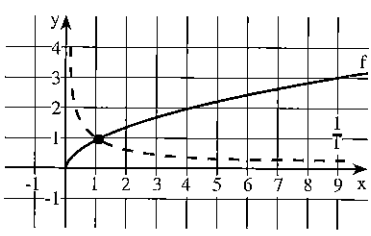
(1, 1) , (3, 1.73) , (4, 2)

جـ) (i) (0.04, 5) , (0.64, 1.25)

(1, 1) , (3, 0.58) , (4, 0.5)

هـ) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(ii) (0.09, 3.33) , (9, 0.33).



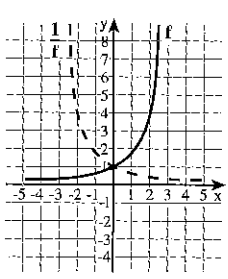
16. أ) (2, 7.39) , (1, 2.72)

(0, 1) , (–2, 0.13) , (–5, 0.007) ,

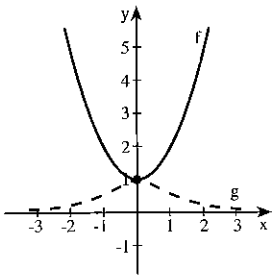
(1, 2.72) , (2, 7.39)

د) (i) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x}$

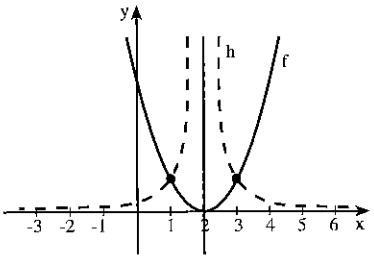
(ii) (–2, 7.39) , (0, 1) , (5, 0.007)



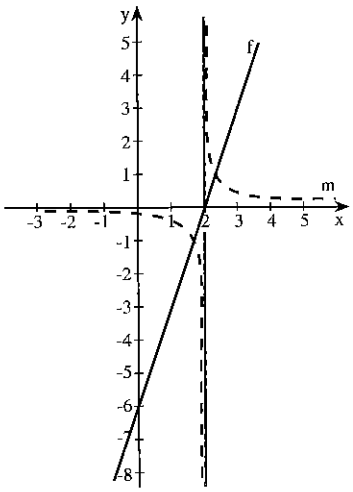
.18



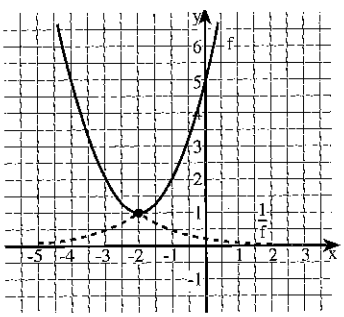
.19



.20



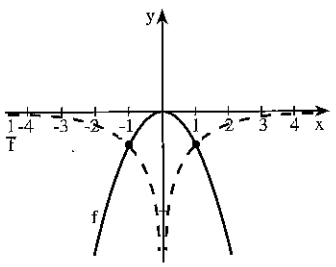
.21 أ+جـ)



د) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$ (i)

(–6, 0.06) , (4, 0.03) (ii)

.22 ب) x = 0



هـ) $\frac{1}{g(x)} = -\frac{1}{x^2}$

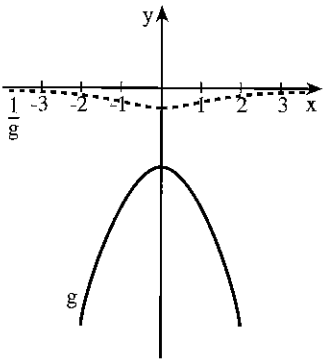
23. أ) $(0, -2)$ نهاية عظمى.

ب) (i) $(0, -0.5)$ نهاية صغرى.

(ii) في $x < 0$ $\frac{1}{g}$ تنازلية.

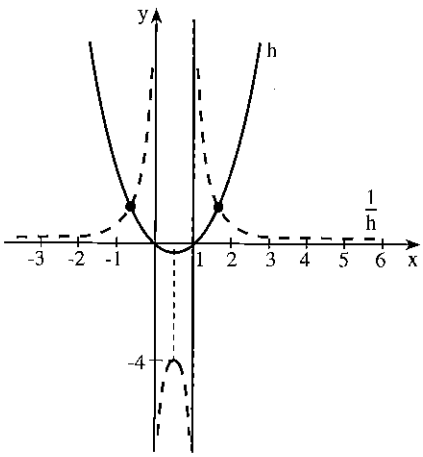
في $x > 0$ $\frac{1}{g}$ تصاعدية.

(iii) $\frac{1}{g}$ سالبة في كل المجال.



24. ب) $x = 0 \ , \ x = 1$

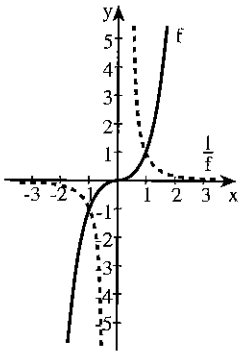
هـ) $\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x^2 - x}$



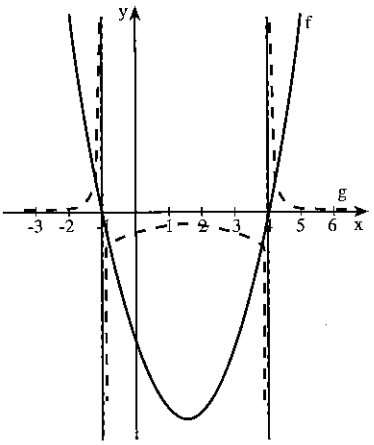
25. جـ) $x = 0$

و) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^3}$

ز) $y = -\frac{1}{x^3}$



.26

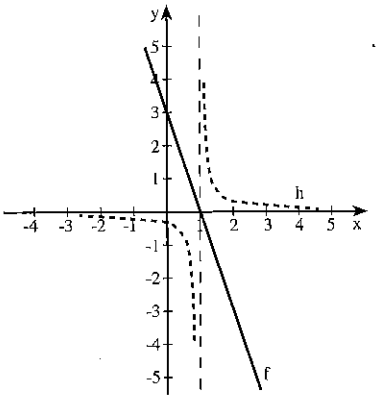


.27 (–2, 0.25) **نقطة نهاية صغرى للدالة** $\frac{1}{f}$.

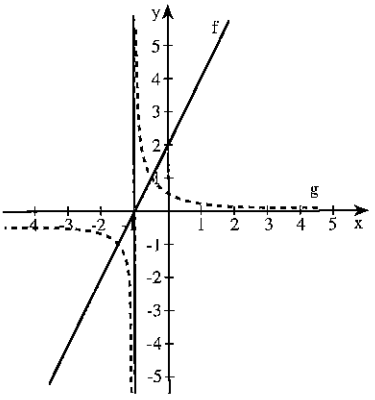
.28 أ) (6, –36) **نقطة نهاية صغرى.**

ب (6, –0.03) **نقطة نهاية عظمى.**

.29



.30



.31 أ) – (iii) ب) – (iv) جـ) – (iii) د) – (ii)

الفصل السادس: عائلة اخرى من الدوال

تناظر وتناظر عكسي (صفحة 141-149)

4. أ) $y = 2x - 2$ (i) , $y = \frac{1}{2}x + 1$

$y = -3x + 3$ (ii) , $y = -\frac{1}{3}x + 1$

$y = x$ (iii) , $y = x$ ب) حاصل ضرب الميلين يساوي 1.

6. ب) $y = x$

9. أ) $(3, -5)$ $(1, 1)$ $(0, 4)$ $(-1, 7)$

دالة الجذر (صفحة 150-154)

7. $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-3^2}$, $\sqrt{(-5)^3}$, $-\sqrt{-16}$, $-\sqrt{-4^2}$

8. أ) 3.41 ب) 9.43 جـ) لا يمكن د) 2.83 هـ) 0.59

و) 46.96 ز) 2.24 ح) 2.66− ط) 2.24−

9. أ) $g(9) = 3$ ب) $g(0) = 0$ جـ) $g(0.25) = 0.5$

د) $g(10) = 3.16$ هـ) لا يمكن و) $g(125) = 11.18$

عن الجذور ايضاً (صفحة 155-162)

1. ب) $y = \sqrt{x} + 2$

2. ب) $y = \sqrt{x} - 3$ د) $(0, -3)$ هـ) $(9,0)$

3. ب) $y = -\sqrt{x}$ د) $x \geq 0$

4. ب) $y = -\sqrt{x} + 1$ د) $(1, 0)$, $(0, 1)$ هـ) $x \geq 0$

6. أ) $y = \sqrt{x} + 1$ ب) $y = \sqrt{x}$ جـ) $y = -\sqrt{x}$

د) $y = -\sqrt{x} + 2$ هـ) $y = \sqrt{x} - 4$ و) $y = -\sqrt{x} - 4$

8. أ) (ii) $y = \sqrt{x} + 2$ (iii) ب) لا (i) $y = \sqrt{x} - 4$ (iii) $(16, 0)$

ج) (ii) $y = -\sqrt{x} - 6$

9. أ) $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(6, 2)$, $(11, 3)$

ب) $(9, 2.65)$, $(5, 1.73)$, $(2.25, 0.5)$ ، لا يمكن تعويض الصفر.

جـ) ازاحة الى اليمين بمقدار وحدتين على طول المحور x. د) $x \geq 2$

10. أ) $(-1, 0)$ ب) $(0, 1)$ جـ) $(8, 3)$ $(5, 2.45)$ $(3, 2)$ $(2, 1.73)$

هـ) لا يمكن تعويض $x = -2$. ازاحة الى اليسار بمقدار وحدة واحدة على طول المحور x.

و) $x \geq -1$

13. أ) (iii) ، ب) (i) ، جـ) (vi) د) (v) ، هـ) ii ، و) (iv).

عن الجذور و المشتقة (صفحة 163-171)

1. أ) $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$

ب) $f'(8) > f'(10)$ $f'(80) > f'(100)$

2. أ) 0.25 جـ) 0.25

د) متوازيان هـ) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. أ) $(0, 0)$ ب) $x \geq 0$

جـ)

x	0.25	1	2	3	4	9
g(x)	1	2	2.83	3.46	4	6

هـ) للدالة g ميل اكبر. و) $g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

ز) $f'(4) = \frac{1}{4}$, $g'(4) = \frac{1}{2}$

4. ب) $g'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}$ ، $g'(9) = \frac{1}{12}$

5. ب) (ii) $y = \frac{1}{4}x + 1$

6. أ) (ii) – f(x) ، (i) – g(x) ، (iii) – h(x) ، (iv) - k(x) .

ب) $f'(4) = \frac{1}{4}$ ، $g'(4) = \frac{1}{12}$ ، $h'(4) = \frac{1}{4}$ ، $k'(4) = \frac{3}{4}$

9. أ)+ب) (i) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2$, **تنازلية**.

(ii) $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2x$, **تنازلية**.

(iii) $y' = -\frac{1}{4\sqrt{x}}$, **تنازلية**.

(iv) $y' = \frac{1}{6\sqrt{x}}$, **تصاعدية**.

10. أ) $x = 1$ ب) $x = 4$ جـ) $x = 16$ د) $x = 4$ هـ) $x = \frac{1}{16}$

و) $x = 0.63$

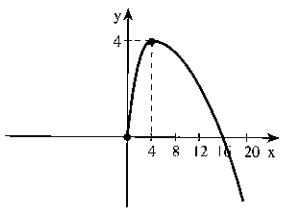
11. أ) $x \geq 0$ ب) $(0, 0)$ ، $(16, 0)$

جـ) $(4, 4)$ **نهاية عظمى.**

د) $(0, 0)$ **نهاية صغرى.**

و) $(4, 4)$ **نهاية عظمى مطلقة.**

هـ)

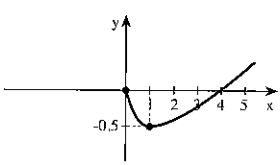


12. أ) $x \geq 0$ ب) $(0, 0)$

د) $(1, -\frac{1}{2})$ **نهاية صغرى**، $(0, 0)$ **نهاية عظمى.**

و) $(1, -\frac{1}{2})$ **نهاية صغرى مطلقة.**

هـ)



13. $(1, -3)$ نهاية صغرى ، $(0, 0)$ نهاية عظمى.
عندما يكون x بين 0 وَ 1 الدالة تنازليـــة. عندمـــا يكون $x > 1$ الدالة تصاعدية.

14. ب) $f'(2) = 4$ ، $g'(2) = 0.35$ د) $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ ، $g'(\frac{1}{4}) = 1$

15. أ) $f'(4) = \frac{1}{2}$ ب) $y = \frac{1}{2}x + 2$

16. أ) $y' = 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ب) $y' = -3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ جـ) $y' = \frac{1}{4\sqrt{x}} + 1$

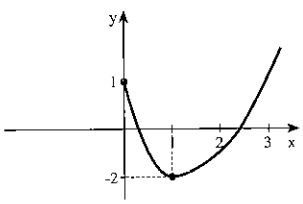
17. $y = \frac{1}{2}x - 1.5$

18. أ) (i) $f(x)$ – (ii) $g(x)$–
ب) $y = \frac{1}{4}x + 1$ ، $y = \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$,
المماسان متقاطعان في النقطة $(-4, 0)$.

19. الدالة تصاعدية في النقطة $x = 4$.

20. $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ نقطة نهاية صغرى.
$(0, 0)$ نقطة نهاية عظمى.

21. أ) $x \geq 0$



ب) $(1, -2)$ نهاية صغرى $(0, 1)$ نهاية عظمى
جـ) $(3, 3.07)$
هـ) توجد نقطتا تقاطع مع المحور x .
و) عندما يكون x بين 0 وَ 1 الدالة تنازليـــة..
وعندما يكون $x > 1$ الدالة تصاعدية .

الفصل الرابع: الدالة المركبة

ما هي الدالة المركبة؟

الدالة المركبة- بواسطة Excel (صفحة 172-180)

2. (i) أ) $y = \frac{1}{5x-2}$

ب) $y = \sqrt{5x-2}$

جـ) $y = (x-5)^6$

د) $y = (5x^3-2)^2$

هـ) $y = \frac{1}{(6x-2)^2}$

و) $y = e^{4-2x^2}$

(ii) - نعم

- لا، لان $f(0.4) = 0$.

5. أ) $y = \frac{1}{2x+5}$

ب) $y = \frac{1}{2x+5} + 5$

جـ) $y = \frac{1}{2(2x+5)}$

د) $y = (2x+5)^4$

هـ) $y = \sqrt{(2x+5)}$

و) $y = e^{2x+5}$

6. أ) $\begin{cases} f(x) = 2x+1 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = x^2-5x \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} f(x) = x^2+2x \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = x^2+3x \\ y = [f(x)]^4 \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} f(x) = x^2-1 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

و) $\begin{cases} f(x) = x^3-2x \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

ز) $\begin{cases} f(x) = 3e^x \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$

ح) $\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} \\ y = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$

7. أ) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 5x \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

8. ب) $\begin{cases} f(x) = 2x - 4 \quad \text{(i)} \\ y = [f(x)]^4 \end{cases}$

9. ب) $\begin{cases} f(x) = 2x - 2 \quad \text{(i)} \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

الدالة المركبة- بدون حاسوب (صفحة 181-184)

2. (i) أ) $y = \frac{1}{5x - 2}$

ب) $y = \sqrt{5x - 2}$

جـ) $y = (x - 5)^6$

د) $y = (5x^3 - 2)^2$

هـ) $y = \frac{1}{(6x - 2)^2}$

و) $y = e^{4-2x^2}$

(ii) – نعم

– لا، لأن $f(0.4) = 0$.

3. أ)+ب)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	10
f	10	5	2	1	2	5	10	101
$\frac{1}{f}$	0.1	0.2	0.5	1	0.5	0.2	0.1	0.01

جـ) (i) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

4. أ) $y = \frac{1}{2x + 5}$

ب) $y = \frac{1}{2x + 5} + 5$

جـ) $y = \frac{1}{2(2x + 5)}$

د) $y = (2x + 5)^2$

هـ) $y = \sqrt{2x + 5}$

و) $y = e^{2x+5}$

5. أ) $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 5x \\ y = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \\ y = [f(x)]^4 \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

و) $\begin{cases} f(x) = x^3 - 2x \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

ز) $\begin{cases} f(x) = 3e^x \\ y = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$

ح) $\begin{cases} f(x) = 2\sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$

6. أ) $y = \sqrt{3x^2 - 2}$

ب) $y = \sqrt{3x^2 - 2} + 3$

جـ) $y = \dfrac{1}{3x^2 - 2}$

د) $y = e^{3x^2 - 2}$

هـ) $y = 3e^{3x^2 - 2}$

و) $y = e^{3(3x^2 - 2)}$

7. أ) $\begin{cases} f(x) = 4 - 2x^2 \\ y = \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = 4 - 2x \\ y = \sqrt{f(x)} \end{cases}$

جـ) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = -x \\ y = e^{f(x)} \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} f(x) = 1 - 4x \\ y = [f(x)]^2 \end{cases}$

و) $\begin{cases} f(x) = 6 - x \\ y = [f(x)]^4 \end{cases}$

مشتقة الدالة المركبة (صفحة 185- 192)

1. أ) $f(0) = 1$, $f(1) = 2.72$, $f(-1) = 0.37$ ب) $f'(0) = 1$ (i)

$y = x + 1$ (ii)

3. أ) $\begin{cases} f(x) = x^2 + 3 \\ y = [f(x)]^2 \end{cases}$

4. ب) $y' = -6(4 - 2x)^2$ (i) $y' = 12x\cdot(3 + 2x^2)^2$ (ii)

$y' = 5(1 + x)^4$ (iii) $y' = 2 \cdot (2 - 2x)(2x - x^2)$ (iv)

5. أ) $f'(x) = 3(x - 1)^2$ (i) $f'(2) = 3$ ب) $y = 3x - 5$

6. $y = 48x + 88$

7. أ) $y' = 5e^{5x}$ د) $y' = 1.5e^{0.5x}$

ب) $y' = -2e^{-2x+5}$ هـ) $y' = e^x - e^{-x}$

جـ) $y' = -2xe^{-x^2}$ و) $y' = 6e^{3x} + 12e^{-3x}$

8. أ) $A(0.5, 0.13)$, $B(2, 2.72)$

ب) $y' = 2e^{2x-3}$ جـ) $y'(2) = 5.44$, $y'(0.5) = 0.26$

9. أ) $A(1, -2)$ ب) $y'(1) = -4$ جـ) $y = -4x + 2$

10. معادلة المماس $y = -2x + 1$

11. أ) $h(4) = 2$ $h'(4) = 0.25$ ب) $y = 0.25x + 1$

13. أ) $y' = -\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$ ب) $y' = \frac{7-2x}{2\sqrt{7x-x^2}}$ جـ) $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ د) $y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$

14. أ) $g'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-4}}$ ب) $g'(2) = 3$ جـ) $y = 3x - 4$

15. معادلة المماس: $y = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$

16. أ) $y' = -\frac{2}{(2x-5)^2}$ ب) $y' = -\frac{6x}{(x^2+1)^2}$ جـ) $y' = -\frac{6}{(3x)^2}$ د) $y' = -\frac{3}{(3x+4)^2}$ هـ) $y' = -\frac{10}{x^3}$ و) $y' = \frac{6}{x^4}$

17. أ) $A(1, -\frac{1}{2})$ ب) $y' = \frac{3-2x}{(x^2-3x)^2}$ ، $y'(1) = \frac{1}{4}$ جـ) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

18. أ) $y' = (8x-2)e^{4x^2-2x}$ ب) $y' = -4e^{-2x} + 12e^{4x}$ جـ) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}} + 3x^2$ د) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$ هـ) $y' = \frac{-6x}{(4-x^2)^2}$ و) $y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{(3+2x)^2}$ ز) $y' = \frac{x}{2\sqrt{4+x^2}} + 3$ ح) $y' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{9-x}}$

19. أ) $f'(x) = -3(x+2)^2$ $f'(-3) = -3$

20. أ) $y = -4x$ ب) $y = -0.75x + 1.75$

جـ) $y = 0.5x - 0.25$ د) $y = -4x + 21$

بحث الدوال المركبة (صفحة 193-210)

1. أ) $q(x)$, $l(x)$, $n(x)$, $g(x)$ ب) $m(x)$ جـ) $p(x)$

د) $h(x)$, $f(x)$

2. أ) النقط الواقعة على الخط البياني للدالة g: $(-6, 1)$ $(-6.5, 0)$ $(-5, 1.73)$

$(-2, 2.45)$ $(1, 2)$ $(3, 1)$ $(4, 0)$

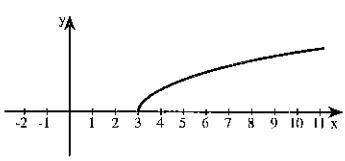
ب) $(4, 0)$ $(3, 1)$ $(-6, 1)$ $(-6.5, 0)$

3. أ) $x \geq -3$ (i) $x \geq 0$ (ii) $x \leq 4$ (iii) $x \geq -2$ (iv)

ب) $g(x) \rightarrow$ (iii) $m(x) \rightarrow$ (ii) $h(x) \rightarrow$ (iv) $n(x) \rightarrow$ (i)

- g: $x \leq 4$, m: $x \geq 0$, h: $x \geq -2$, n: $x \geq -3$

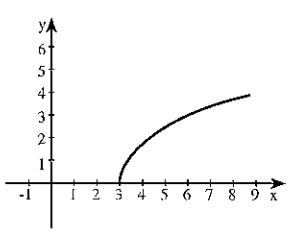
4. أ) $x \geq 3$ هـ)



ب) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

جـ) $(3, 0)$

5. أ) $x \geq 3$ د)



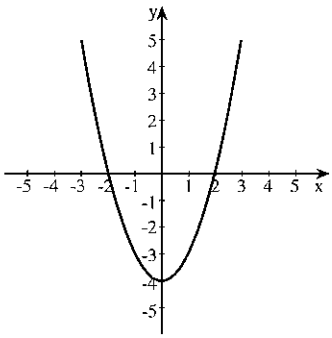
ب) $(3, 0)$

جـ) $(3, 0)$

6. أ) نقط التقاطع مع المحورين.

$(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -4)$

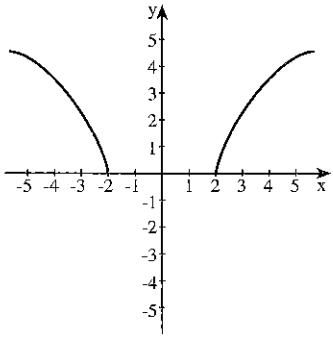
$(0, -4)$ نهاية صغرى.



ب) $x \geq 2$ أو $x \leq -2$

جـ) $x \geq 2$ أو $x \leq -2$

د)



7. ب) (ii)

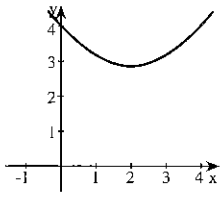
8. أ) $(0.5, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(2.5, 1)$.

ب) (i) عندما تكون قيم الدالة f بين 0 و1 ،تكون g فوق f .

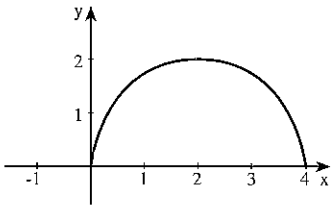
(ii) عندما تكون قيم الدالة f اكبر من 1 ،تكون g تحت f

9. ب) $f'(x) = \dfrac{2x - 4}{\sqrt{(4 - x)^2 + x^2}}$

جـ)



$(2, 2.83)$ نهاية صغرى.



10. ب) $0 \le x \le 4$ (x بين $x = 0$ و $x = 4$)

جـ) $(0,0)$, $(4,0)$

د) $(2,2)$ نهاية عظمى .

$(4,4)$, $(0,0)$ نقطتا نهاية صغرى.

11. جـ) (i) $x = 2$ (ii) أطوال الاضلاع: 2.83 , 2 , 2 .

(iii) مثلث متساوي الساقين.

12. أ) المسافة: 8 كم. الوقت: 2.17 ساعة.

ب) المسافة : 6.83 كم. الوقت: 1.94 ساعة..

جـ) الوقت: 1.95 ساعات.

د) $BM = \sqrt{x^2 + 4}$, $y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{3} + \frac{6 - x}{4}$ هـ) 2.27 كم.

13. القسم الثاني:

أ) (i) $AB = 4.24$, $B(3, 11)$; $AB = 5.1$, $B(1, 3)$; $AB = 2.83$, $B(-2, 6)$;

(ii) $g(x) = \sqrt{x^4 - 11x^2 + 36}$ (iii) $x = 2.35$, $x = -2.35$

14. أ) $(0.25, 0.5)$ ، المسافة 0.9 .

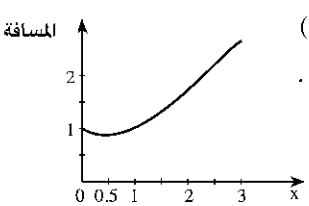
$(1, 1)$ ،المسافة 1.

$(2.25, 1.5)$ ،المسافة : 1.95 .

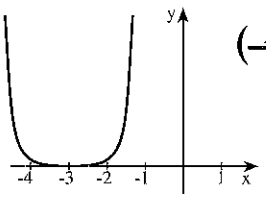
ب) (i) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$

(ii) $(0.5, 0.87)$

(iii)



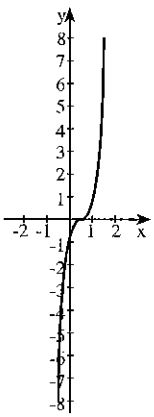
15. أ) $(-3, 0)$; $(0, 81)$ ب) $(-3, 0)$ جـ)



د) الدالة تصاعدية في المجال $x > -3$ ،

الدالة تنازلية في المجال $x < -3$.

16. أ) $(0, -1)$ ، $(\frac{1}{2}, 0)$. جـ)



ب) لا يوجد.

د) $x < \frac{1}{2}$.

17. (i) أ) $(0, 1)$. ب) $(1, 2.72)$ نهاية عظمى.

د) الدالة تصاعدية في المجال $x < 1$ وتنازلية في المجال $x > 1$.

18. أ) $(0, 2.72)$ ب) لا توجد نقط قصوى. د) الدالة تصاعدية لكل x .

19. أ) $x \geq 0$ ب) $x \leq 12$ جـ) $x \geq -4$ د) $x \leq 2.5$

20. أ) $x \geq 3$ او $x \leq -3$ ب) $x \geq 0$ او $x \leq -3$

جـ) لكل x. د) $0 \leq x \leq 6$ هـ) $x \geq 5$ او $x \leq -1$

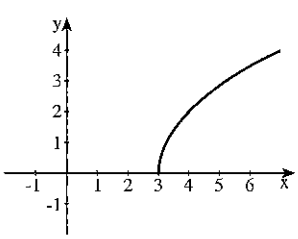
و) $-1 \leq x \leq 4$

21. أ) (i) $x \geq 3$

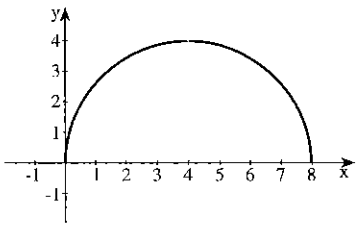
(ii) $(3, 0)$

(iii) $(3, 0)$ نهاية صغرى.

(iv)



(v) g تصاعدية لكل x في المجال .



ب) (i) $0 \le x \le 8$ (iv)

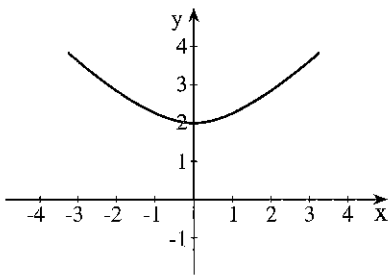
(ii) $(0,0)$, $(8,0)$

(iii) $(4,4)$ نهاية عظمى.

نقطتـــا $(0,0)$, $(8,0)$ نهاية صغرى.

(v) m تصاعدية في المجال $0<x<4$ وتنازلية في المجال $4 < x < 8$.

جـ) (i) لكل x (ii) $(0,2)$ (iv)



(iii) $(0,2)$ نهاية صغرى.

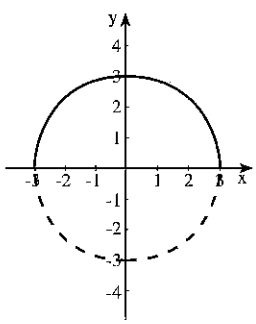
(v) h تنازلية في المجال $x < 0$.

وتصاعدية في المجال $x > 0$.

22. أ)+ب) الخط البياني المتصل هو $g(x)$.

والخط البياني المتقطع هو $-g(x)$.

جـ) $-3 \le x \le 3$



23. أ) $m(x)$ ، $g(x)$ تلائمان الخط البياني(ii) .

$h(x)$،$k(x)$ تلائمان الخط البياني (iii)

$n(x)$،$v(x)$ تلائمان الخط البياني (i) .

ب) مجال تعريف الدالتين $m(x)$ وَ $g(x)$: $x \ge 4$ أو $x \le 0$.

مجال تعريف الدالتين $h(x)$ وَ $k(x)$: $0 \le x \le 4$.

مجال تعريف الدالتين $n(x)$ وَ $v(x)$: $x \ge 4$.

24. أ) 7.62 سم.

د) (i) $y = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$ (ii) $x = 5$

25. أ) CM = 2.83 , C(4, 3) , BM = 1.41 , B(1, 2), AM = 2 , A(0, 1)

ب) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ جـ) (1.5, 2.22)

تكامل الدالة المركبة (صفحة 211-215)

1. أ) $y' = 2e^{2x+3}$ ب) $y' = 3e^{3x}$ جـ) $y' = -2e^{-2x+1}$

د) $y' = -e^{-x}$

3. أ) $\frac{e^{4x}}{4} + c$ ب) $\frac{e^{3+2x}}{2} + c$ جـ) $-3e^{-x+1}$

د) $e^{2x+3} + c$ هـ) $4e^{-x+2} + c$ و) $-e^{-2x+1} + x^2 + c$

4. أ) $y' = 8(2x + 3)^3$ ب) $y' = 15(5x - 1)^2$ جـ) $y' = -5(3 - x)^4$

د) $y' = -6(2 - 3x)$

5. ب) $\frac{(5 - 2x)^5}{-10} + c$ جـ) $\frac{(0.5x + 1)^4}{2} + c$

6. أ) $\frac{(3 - x)^4}{-4} + c$ ب) $\frac{(4x + 1)^5}{20} + c$ جـ) $\frac{(x + 4)^6}{6} + c$

د) $\frac{(0.1x - 2)^4}{0.4} + c$ هـ) $\frac{(x - 1)^5}{5} + c$ و) $\frac{(-2x + 3)^3}{-6} + c$

ز) $\frac{(7 - 3x)^6}{-18} + c$ ح) $\frac{(3 - 0.5x)^5}{-2.5} + c$

7. أ) $y' = -\frac{2}{(2x+4)^2}$ ب) $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$ جـ) $y' = \frac{1}{(-x+1)^2}$

د) $y' = -\frac{0.5}{(0.5x-2)^2}$

9. أ) $\frac{1}{3(3x-2)} + c$ ب) $-\frac{1}{x-4} + c$ جـ) $-\frac{2}{0.5x-3} + c$

د) $\frac{2}{3(3x+1)} + c$ هـ) $-\frac{1}{4(2x-1)} + c$ و) $\frac{1}{4x} + c$

10. 2.79 **وحدات مربعة.**

11. أ) i - f(x) , ii - g(x) ب) 1.26 **وحدات مربعة.**

12. أ) $x = 0.5$ ب) 0.5 **وحدة مربعة.**

13. 0.5 **وحدة مربعة.**

14. 0.2 **وحدة مربعة.**

الفصل الخامس: العلاقة بين الخط البياني للدالة والخط البياني للمشتقة

وتيرة تغيّر الدالة(من f الى f) (216-238)

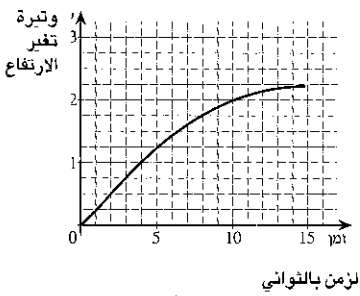
1. أ) 1 سم ،4 سم، 17 سم.

ب) 1

جـ) (i) 20 سم.

(ii) بعد $9\frac{2}{3}$ ثانية.

د) (i) 0.5 سم، 1.5 سم، 2 سم.



هـ)

الزمن من بدء القياس	2	3	5	7	10	12	13
وتيرة تغير الارتفاع	0.5	0.75	1.25	1.7	2	2.1	2.2

2. أ) بعد ساعة ، 11.5 ساعة ، 18 ساعة.

ب) بعد 5 ساعات وبعد 20 ساعة.

جـ) (i) عند بدء القياس كانت درجة الحرارة اوطأ ما يمكن، وكانت 8° .

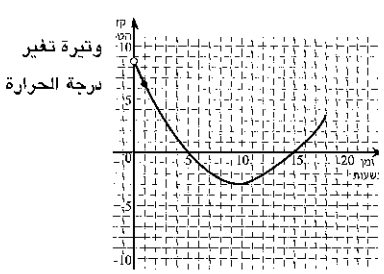
(ii) $(15\ ,\ 10^\circ)$

د) من 5 ساعات حتى 15 ساعة من بدء القياس، كانت درجة الحرارة تنخفض.
من 15 ساعة حتى 120 ساعة من بدء القياس، كانت درجة الحرارة ترتفع.

هـ)

الزمن بالساعات	1	3	4	5	7	10	13	15	18
وتيرة التغير	6.5	3	1.3	0	–2	–3	–1.5	0	3.5

و)

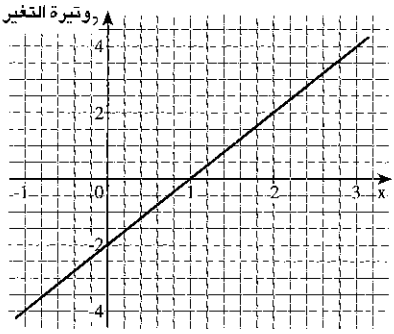


3. أ) الدالة تنازلية حتى $x=1$. في $x=1$ توجد للدالة نقطة نهاية صغرى. في $x>1$ الدالة تصاعدية.

ب)

x	-1	0	-0.5	1	1.5	2	3
وتيرة التغير	-4	-2	-1	0	1	2	4

جـ)



د) $f'(x)=2x-2$ i

12. تصاعدية من نهاية صغرى في تنازلية نهاية عظمى في تصاعدية نهاية صغرى في تنازلية حتى

f :

$x=-3 \rightarrow x=-3 \rightarrow$ o حتى 3 من $\rightarrow x=0 \rightarrow 3$ حتى 0 من $\rightarrow x=3 \rightarrow x=3$

موجبة من قيمتها صفر في سالبة قيمتها صفر في موجبة قيمتها صفر في سالبة حتى

f ' :

$x=-3 \rightarrow x=-3 \rightarrow$ o حتى 3 من $\rightarrow x=0 \rightarrow 3$ حتى 0 من $\rightarrow x=3 \rightarrow x=3$

13. تصاعدية من نهاية صغرى في تنازلية نهاية عظمى في تصاعدية حتى

f:

$x=-1 \rightarrow x=-1 \rightarrow 3$ و1 بين $\rightarrow x=3 \rightarrow x=3$

موجبة من قيمتها صفر في سالبة قيمتها صفر في موجبة حتى

f ':

$x=-1 \rightarrow x=-1 \rightarrow 3$ و1 بين $\rightarrow x=3 \rightarrow x=3$

14. سالبة قيمتها صفر في موجبة قيمتها صفر في سالبة حتى

f ':

$x=-2.5 \rightarrow x=-2.5 \rightarrow$ -o.5 وَ-2.5 بين $\rightarrow x=-0.5 \rightarrow$ 0.5 وَ-0.5 بين $\rightarrow$

سالبة من قيمتها صفر في موجبة قيمتها صفر في

$x=0.5 \rightarrow 2.5$ وَ 0.5 بين $\rightarrow x=2.5 \rightarrow x=2.5$

15. أ) (i) $x=-2$, $x=1.5$

ب)

	سالبة من	قيمتها صفر في	موجبة	قيمتها صفر في	سالبة حتى:
f ':					
	$x=1.5 \rightarrow$	$x=1.5 \rightarrow$	بين 2-وَ1.5 $\rightarrow$	$x=-2 \rightarrow$	$x=-2$

16. أ) (1,0)

ب)

	سالبة من	قيمتها صفر في	موجبة حتى
f ':			
	$x=1 \rightarrow$	$x=1 \rightarrow$	$x=1$

17. أ) (1,0)

ب)

	موجبة من	قيمتها صفر في	موجبة حتى
f ':			
	$x=1 \rightarrow$	$x=1 \rightarrow$	$x=1$

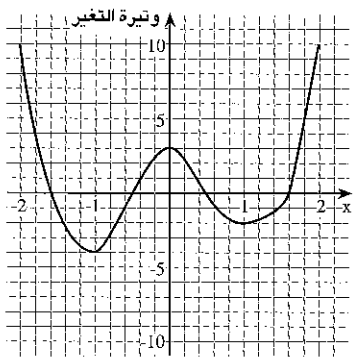
19. ب)

	سالبة من	قيمتها صفر في	موجبة	قيمتها صفر في	سالبة حتى:
f ':					
	$x=2 \rightarrow$	$x=2 \rightarrow$	بين 4-وَ2 $\rightarrow$	$x=-4 \rightarrow$	$x=-4$

20. أ) **الدالة تصاعدية حتى $x=-1.6$.**
للدالة نهاية عظمى في $x=-1.6$.
الدالة تنازلية بين $x=-1.6$ وَ $x=-0.5$.
للدالة نهاية صغرى في $x=-0.5$.
الدالة تصاعدية بين $x=-0.5$ وَ$x=0.5$.
للدالة نهاية عظمى في $x=0.5$.
الدالة تنازلية بين $x=0.5$ وَ $x=1.6$.
للدالة نهاية صغرى في $x=1.6$.
الدالة تصاعدية من $x=1.6$.

ب)

x	-2	-1.6	-1	-0.5	0	0.5	1	1.6	2
وتيرة التغير	10	0	-4	0	3	0	-2	0	10



.21 تصاعدية في نهاية صغرى في تنازلية نهاية عظمى في تصاعدية نهاية صغرى في تنازلية حتى

f :

$x=-3 \rightarrow \quad x=-3 \rightarrow$ بين 3- وَ2 $\rightarrow \quad x=2 \rightarrow$ بين 2 وَ4 $\rightarrow x=4 \rightarrow x=4$

موجبة من قيمتها صفر في سالبة قيمتها صفر في موجبة قيمتها صفر في سالبة حتى

f ':

$x=-3 \rightarrow \quad x=-3 \rightarrow$ بين 3- وَ2 $\rightarrow \quad x=2 \rightarrow$ بين 2 وَ4 $\rightarrow x=4 \rightarrow x=4$

.22 سالبة من قيمتها صفر في موجبة قيمتها صفر في سالبة حتى

f ':

$x=0 \rightarrow \quad x=0 \rightarrow$ بين 0 وَ2 $\rightarrow \quad x=2 \rightarrow x=2$

.24 أ) $(4,0)$, $(2,0)$

سالبة من قيمتها صفر في موجبة قيمتها صفر في سالبة حتى

f ':

$x=2 \rightarrow \quad x=2 \rightarrow$ بين 2 وَ4 $\rightarrow \quad x=4 \rightarrow x=4$

ب) سالبة في المجالين: $x<2$, $x>4$. موجبة في المجال بين $x=2$ وَ $x=4$.

.25 أ) $(4,0)$

ب) سالبة من قيمتها صفر في موجبة حتى

f ':

$x=4 \rightarrow \quad x=4 \rightarrow \quad x=4$

26. ب) f' قيمتها صفر في $x=-1$, $x=2$

f' موجبة في المجال بين $x=-1$ وَ $x=2$. f' سالبة في المجالين : $x<-1, x>2$

27. أ) اشارة الميل موجبة . 28. (iii)

من الخط البياني للمشتقة f' الى الخط البياني للدالة f (صفحة 239-247)

1.

f : تصاعدية من $x=6$ → نهاية صغرى في $x=6$ → تنازلية بين 6 وَ 2 → نهاية عظمى $x=2$ → تصاعدية حتى $x=2$

f' : موجبة من $x=6$ → قيمتها صفر في $x=6$ → سالبة بين 6 وَ 2 → قيمتها صفر في $x=2$ → موجبة حتى $x=2$

2. أ) $x=-2$, $x=3$

ب)

f' : موجبة من $x=3$ → قيمتها صفر في $x=3$ → سالبة بين 3 وَ -2 → قيمتها صفر في $x=-2$ → موجبة حتى $x=-2$

f : تصاعدية من $x=3$ → مشبوهة في $x=3$ → تنازلية بين 3 وَ -2 → مشبوهة في $x=-2$ → تصاعدية حتى $x=-2$

جـ) نهاية عظمى في $x=-2$، ونهاية صغرى في $x=3$.

3. أ) نهاية صغرى في $x=3$.

4. أ) نعم، نهاية عظمى في $x=-2$ ب) لا.

6. أ) نهاية عظمى في $x=-2$، ونهاية صغرى في $x=2$.

7. (ii) , (iv).

8. أ) $x=2$, $x=6$ ب) نهاية عظمى في $x=2$ جـ) تنازلية في المجال : $x>2$

9. أ) نقطة واحدة في $x=2$. ب) نهاية صغرى في $x=-2$.

10. ب) 5 نقطة قصوى.
نهاية صغرى في $x=-5$, $x=0$, $x=5$
نهاية عظمى في $x=-2$, $x=2$

11. أ) $x=1$, $x=5$

ب)

	موجبة من	قيمتها صفر في	سالبة	قيمتها صفر في	موجبة حتى
f ':	$x=5$	$\rightarrow$ $x=5$	$\rightarrow$ بين 5 و1	$\rightarrow$ $x=1$	$\rightarrow$ $x=1$

	تصاعدية من	مشبوهة في	تنازلية	مشبوهة في	تصاعدية حتى
f :	$x=5$	$\rightarrow$ $x=5$	$\rightarrow$ بين 5 و1	$\rightarrow$ $x=1$	$\rightarrow$ $x=1$

12. أ) نعم ، نهاية صغرى في $x=3$.

13. أ) $f'(0)$ سالبة . $-f'(4)$ موجبة ب) $x>1/3$

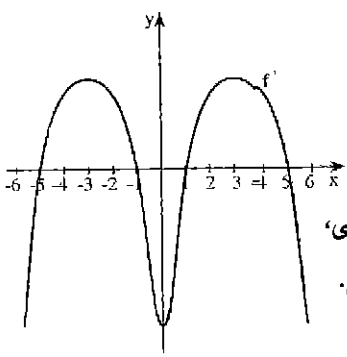
14. الشكل في البند (جـ).

15. أ) نهاية صغرى في $x=-1$.

جـ) الدالة تصاعدية في المجال : $x>-1$.

الدالة تنازلية في المجال: $x<-1$.

16. أ) $x=2$، النقطة ليست نقطة قصوى.



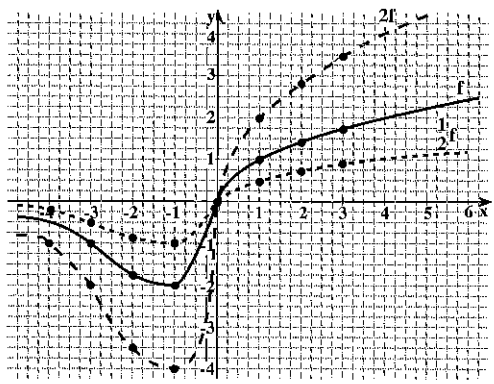
18. أ) لا توجد نقط قصوى. ب) (ii)

19. ب) للدالة f توجد 4 نقط قصوى:
في $x=-5$ نهاية صغرى، في $x=-1$ نهاية عظمى،
في $x=1$ نهاية صغرى وفي $x=5$ نهاية عظمى.

الفصل السادس: حاصل ضرب الدوال

رسوم بيانية لحاصل ضرب الدوال (صفحة 248-255)

1. أ)



6. أ) x^5 ب) $2x^9$ ج) $3x^5$ د) $3x^5$ هـ) $3x^2 + x^3$ و) $x^3 + 2x + x^2$

7. أ) $8x^5$ د) $2x^3$ ز) $2x^3 + 7x^2 + 3x$ ح) $2x^5 + 5x^4 + 2x^3$

8. أ) $5x^4 + 12x^2 + 2x$ ب) $14x^6 + 16x^3 - 3x^2$ جـ) $10x^4 + 32x^3 + 2x + 4$

د) $12x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ هـ) $2x^3 + 7x^2 + 3x$ و) $2x^5 + 5x^4 + 2x^3$

مشتقة حاصل ضرب الدوال (صفحة 256-260)

5. أ) $y' = 5x^4 - 3x^2 + 8x$ جـ) $y' = 10x^4 + 30x^2 - 2x$

ب) $y' = 14x^6 - 6x^2$ د) $y' = 5x^4 - 4x^3 - 8x + 4$

6. أ) $y' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$ جـ) $y' = 1$

ب) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) + \sqrt{x}(2x + 1)$ د) $y' = 2(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1)(\sqrt{x} - x)$

7. أ) $y' = 2e^x + 2xe^x$ هـ) $y' = e^x\, 2x + 2(e^x + 4)$

ب) $y' = \frac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\, e^x$ و) $y' = e^x\,(3 - 2x) - 2e^x$

جـ) $y' = 3x^2e^x + x^3e^x$ ز) $y' = -4xe^x + (1 - 2x^2)\, e^x$

د) $y' = e^x\,(x^2 - 4) + 2xe^x$ ح) $y' = e^x\,\sqrt{x} + \frac{e^x + 2}{2\sqrt{x}}$

9. أ) $y' = 2e^x + 2xe^x$ (ii) $y' = e^x(1 - x) - e^x$ (iv)

ب) $y' = 12x^3$ (i) $y' = 2x - 3x^2$, $y = x^2 - x^3$ (iii)

$y' = 100x^4$, $y = 20x^5$ (v)

$y' = 9x^2 - 8x + 3$, $y = 3x^3 - 4x^2 + 3x - 4$ (vi)

بحث حاصل ضرب الدوال (صفحة 261-274)

بحث حاصل ضرب يحوي دالة أسية (صفحة 261-265)

1. أ) صفر ب) $x = -1$ (iii) $y = \frac{-3}{e} = -1.1$ (iv)

2. أ) $x = -1$ ب) $x = -2$, $x = 0$ جـ) $x = 0.5$ د) $x = 0$ هـ) $x = 1$

و) $x = -1$

3. أ) $x = -1$, $y' = 2e^x + 2xe^x$

ب) $x = 0$, $x = -2$, $y' = 6xe^x + 3x^2e^x$

جـ) $x = 0$, $y' = -xe^x$ د) $x = 3$, $y' = xe^x - 3e^x$

هـ) $x = 1$, $x = -3$, $y' = 2xe^x + x^2 \cdot e^x - 3e^x$

و) $x = -\frac{2}{3}$, $2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}$

4. أ) $x = 2$, $x = -4$ ب) $y = 8e^{-4} = 0.17$ جـ) $y = -4e^2 = -29.56$

5. أ) $(1, -e)$ ب) نقطة نهاية صغرى.

6. $(-2, e^2)$ نهاية عظمى.

7. أ) $(-1.5, 2.68)$ نهاية عظمى. $(-0.5, 2.43)$ نهاية صغرى..

ب) $f'(-1) = -0.37$ ، الدالة تنازلية.

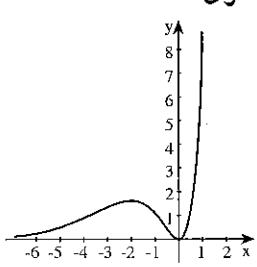
8. أ) (i) تنازلية (ii) تصاعدية ب) نعم.

9. أ) $(-2, 1.62)$ نهاية عظمى، $(0, 0)$ نهاية صغرى.

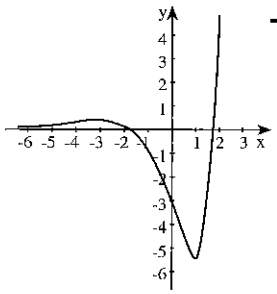
ب) لا.

جـ) للدالة خط تقارب $y = 0$.

د)



10. أ) $(0, -3)$, $(1.73, 0)$, $(-1.73, 0)$ جـ)



ب) $(-3, 0.3)$ نهاية عظمى، $(1, -5.44)$ نهاية صغرى.

11. أ) $x = 1.41$, $x = -1.41$ ب) $x = 1$ جـ) $x = 0$, $x = 2$ د) $x = -2$, $x = 1$

12. أ) $(0, 0)$ (i)

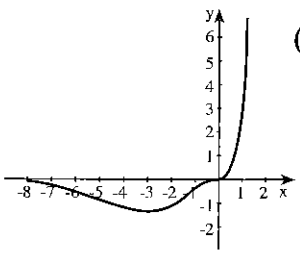
(ii) $(-3, -1.34)$ نهاية صغرى.

(iii) للدالة خط تقارب $y = 0$.

(v) الدالة تنازلية في المجال $x < -3$.

الدالة تصاعدية في المجال $x > -3$.

ب) $(-3, 1.34)$ نهاية عظمى.

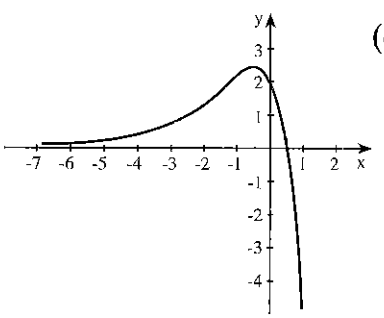


و)

13. أ) $(0, 2)$ $(0.5, 0)$

ب) $(-0.5, 2.43)$ نهاية عظمى.

جـ) للدالة خط تقارب $y = 0$.



د)

14. أ) (iii) – ب) – (iv) جـ) – (ii) – د) – (i)

15. أ) $(0, 0)$

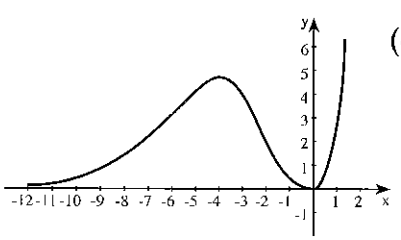
ب) $(-4, 4.69)$ نهاية عظمى،

$(0, 0)$ نهاية صغرى.

جـ) للدالة خط تقارب، $y = 0$.

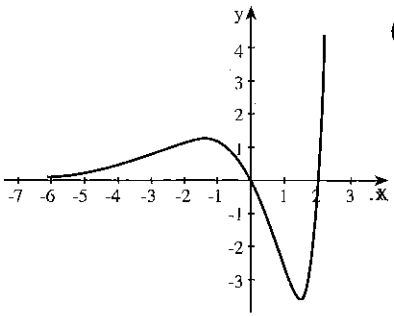
هـ) مجالا التصاعد : $x < -4$, $x > 0$

مجال التنازل: $-4 < x < 0$



د)

16. أ) $(0,0)$ د)



ب) $(1.17\ ,\ -1.41)$ نهاية عظمى
$(1.41\ ,\ -3.41)$ نهاية صغرى.
جـ) للدالة خط تقارب $y = 0$.
هـ) مجالا التصاعد : $x < -1.41\ ,\ x > 1.41$
مجال التنازل: $-1.41 < x < 1.41$.

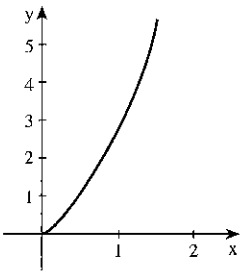
بحث حاصل ضرب يحوي دالة جذرية (صفحة 266-268)

1. أ) $x = 4$ ب) لا يوجد حل جـ) $x = \frac{4}{3}$ د) $x = 1$

2. أ) $(0,0)\ ,\ (4,0)$ ب) $A(1.3, -6.16)$

3. أ) $x \geq 0$
ب) $(0,0)$
جـ) $x = -\frac{1}{2}$
د) $(0,0)$ نهاية صغرى.

هـ)

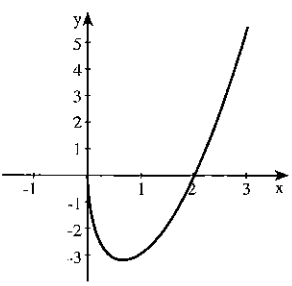


4. أ) (i) $(0,0)$ (ii) $(3,0)\ ,\ (0,0)\ ,\ (-3,0)$ (iii) $(0,0)$
(iv) $(3,0)\ ,\ (0,0)$ (v) $(3,0)\ ,\ (0,0)$ (vi) $(1.61,0)\ ,\ (0,0)$
ب) (ii) , (iv) , (v) , (vi)
جـ) (iv)

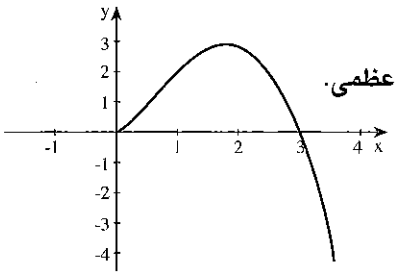
5. أ) $x = 1$ ب) لا يوجد حل جـ) $x = \frac{1}{6}$ د) $x = 1$

6. أ) $x \geq 0$ ب) $(0,0)\ ,\ (2,0)$
جـ) $(0,0)$ نهاية عظمى، $(0.7, -3.27)$ نهاية صغرى.
هـ) الدالة تنازلية في المجال $0 < x < 0.7$
الدالة تصاعدية في المجال $x > 0.7$.

د)



7. أ) $x \geq 0$ ب) $(0,0)\ ,\ (3,0)$



جـ) $(0,0)$ نهاية صغرى، $(1.8, 2.9)$ نهاية عظمى.

هـ) الدالة تصاعدية في المجال $0 < x < 1.8$

الدالة تنازلية في المجال $x > 1.8$

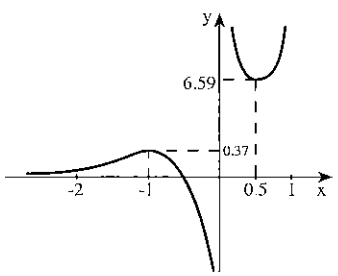
دوال حاصل ضرب اخرى (صفحة 269-270)

2. أ) $y' = \frac{2e^x}{x} - \frac{2e^x}{x^2}$ د) $y' = \frac{e^x + 2x}{x} - \frac{e^x + x^2}{x^2}$

ب) $y' = \frac{e^x}{2x} - \frac{e^x}{2x^2} + 1$ هـ) $y' = \frac{2e^x + 3x^2}{x} - \frac{2e^x + x^3}{x^2}$

جـ) $y' = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x + 1}{x^2}$ و) $y' = e^x\left(\frac{1}{x} + 1\right) - \frac{(e^x + 1)}{x^2}$

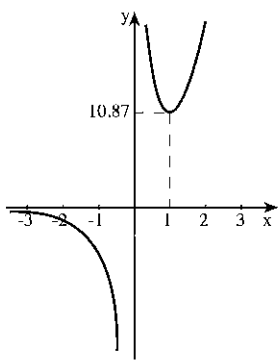
3. أ) $x \neq 0$ ب) $(-0.5, 0)$



جـ) $(-1, 0.37)$ نهاية عظمى.

$(0.5, 6.59)$ نهاية صغرى.

5. أ) $x \neq 0$

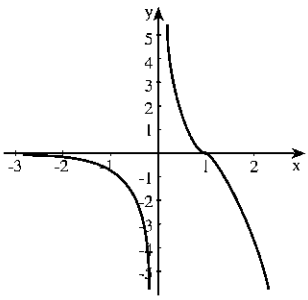


ب) لا توجد نقط تقاطع مع المحورين.

جـ) $(1, 10.87)$ نهاية صغرى.

هـ) مجال التصاعد: $x > 1$

مجالا التنازل: $x < 0\ ,\ 0 < x < 1$



6. أ) $x \neq 0$

ب) $(1, 0)$

جـ) لا توجد نقط قصوى.

د) مجالا التنازل: $x > 0 , x < 0$

معادلة المماس (صفحة 271-274)

1. أ) $x = -1$ جـ) $f'(-3) = -0.3$ د) $f'(3) = 241.03$

2. أ) $(2, 7.39)$, $f'(2) = 22.17$ ب) $f'(-1) = -1.1$, $(-1, -1.84)$

جـ) نعم توجد للدالة نقطة قصوى. $(0.5, -3.3)$ نهاية صغرى.

3. أ) (i) سالب (ii) صفر (iii) موجب

ب) $f'(1) = 8.15$ جـ) $(1, 2.72)$, $y = 8.15x - 5.43$

4. أ) $y = 0.74x + 0.37$

5. أ) $y = -0.25x - 1.25$

6. أ) (i) $y = 1.85x$ (ii) $y = 2.72$

7. $y = 7.07x - 8.49$

8. $y = 19x - 52$

9. أ) $y = 4.95x - 7.07$ ب) $y = 20x - 12$

10. $y = 1.76x + 2.57$

11. $y = 4.62x + 8.08$

الفصل السابع: مسائل نهايات قصوى مختارة

1. ب)الضلع الآخر 13 وحدة، المساحة 65 وحدة مربعة.
جـ) الضلع الآخر $18 - x$، المساحة $x(18 - x)$.
د) تكون مساحة المستطيل اكبر ما يمكن عندما يكون مربعا، طول ضلعه 9 وحدات.
المساحة القصوى هي 81 وحدة مربعة.
هـ) $x = 0$, $x = 36$.
و) $A(36, 0)$ $B(9, 81)$
2. ب) الضلع الاخر 18 وحدة .المحيط 40 وحدة.
جـ) طول الضلع الاخر: $\frac{36}{x}$,المحيط $2(\frac{36}{x} + x)$.
د) مجال المسألة $x > 0$.
هـ) تحصلون على مربع ضلعه 6 وحدات ومحيطه 24 وحدة.
و) أصغر محيط ممكن للمستطيل 24 وحدة.
ز) لا يوجد مستطيل محيطه اكبر ما يمكن.
3. ب) 24 وحدة مربعة.
جـ) 30 وحدة مربعة.
د) 24 وحدة مربعة.
ز) $s(x) = 16x - 2x^2$
تكون مساحة متوازي الاضلاع اكبر ما يمكن ، عندما $x = 4$
4. أطوال قطعة الارض: 15 م ، 7.5 م. اكبر مساحة ممكنة للحديقة 112.5 م^2
5. أطوال قطعة الارض: 4 م طول كل ضلع (مربع). أصغر محيط ممكن 16 م.
6. أ) 374 سم^2.
جـ) 142 سم^2.

هـ) $s(x) = (x - 4)(\frac{600}{x} - 6)$

و) يمكن ان يكون لـ AB قيم اكبر من 4 سم واصغر من 100 سم.
$(20, 384)$ نقطة نهاية عظمى.
ز) نهاية عظمى عندما 20 سم = AB. اكبر مساحة ممكنة 384 سم^2.
ح) نهاية صغرى عندما 4سم = AB أو 100سم = AB. اصغر مساحة ممكنة 0 سم^2.
7. أ) المساحة الملونة: 148 سم^2.
المساحة غير الملونة : 52 سم^2.

ب) المساحة الملونة: 128 سم^2.
المساحة غير الملونة 72 سم^2.

جـ) $g(x) = x^2 + (20-x)(10-x) = 2x^2 - 30x + 200$, $h(x) = 30x - 2x^2$.

د) اكبر مساحة ممكنة تبقى غير ملونة: 112.5 سم^2

هـ) الدالة g يلائمها الخط البياني الذي تقع عليه النقطة B .
الدالة h يلائمها الخط البياني الذي تقع عليه النقطة A .
D(10, 100) , C(5, 100) , B(7.5, 87.5) , A(7.5, 112.5)

و) اكبر مساحة ممكنة، يتمكن اللاعب الذي اختار AE من تلوينها: 200 سم^2 (كل المستطيل).

ز) $x = 5$, $x = 10$.

ح) في المجال بين $x = 5$ وَ $x = 10$ يفوز اللاعب الذي تخصه المساحة غير الملونة.

8. أ) قطرا المربع متساويان وينصف كل منهما الآخر.

ب) (i) مساحة العشب 30 م^2. (ii) مساحة العشب 14 م^2.

جـ) مساحة العشب: $s(x) = (16 - 2x)x$.
تكون مساحة العشب اكبر ما يمكن عندما 4 م = x المساحة القصوى: 32 م^2.

9. أ) 128 وحدة حجم. ب) 100 وحدة حجم. جـ) 64 وحدة حجم .

د) $v = (12 - 2x) \cdot (12 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

هـ) $x = 2$. أطوال الصندوق الذي حجمه اكبر ما يمكن: 8, 8, 2.
الحجم في هذه الحالة: 128 وحدة حجم.
الجزء الملائم من الخط البياني يقع في المجال بين $x = 0$ وَ $x = 6$.

10. أ) العلبة التي ضلع قاعدتها 2 سم: ارتفاع العلبة 27 سم. مجموع مساحة سطوحها الخمسة : 220 سم^2.
العلبة التي ضلع قاعدتها 3 سم: ارتفاع العلبة 12 سم، مجموع مساحة سطوحها الخمسة : 153 سم^2.
لعلبة التي ضلع قاعدتها 6 سم : ارتفاع العلبة 3 سم ، مجموع مساحة سطوحها الخمسة : 108 سم^2.

ب) ارتفاع العلبة: $h = 108/x^2$

مجموع مساحة سطوحها الخمسة: $s(x) = x^2 + \frac{432}{x}$
أقل مساحة ممكنة عندما 6 سم = x وتكون 108 سم^2.

11. أ) (i) 4.42 سم = h (ii) 18.85سم (iii) المساحة الجانبية: 83.32سم^2.
(iv) مساحة القاعدتين 56.55 سم^2. المساحة الكلية 139.87 سم^2.

ب) عندما 2 سم = r: 9.95 سم = h، المساحة الجانبية 125 سم^2،
المساحة الكلية 150.13 سم^2

عندما 5سم = r، 1.59سم = h، المساحة الجانبية 49.95 سم^2.المساحة الكلية 207.08 سم^2.

جـ) $s(x) = 2\pi x^2 + \frac{250}{x}$, $h = \frac{125}{\pi x^2}$

د) تكون المساحة اقل ما يمكن عندما 2.71 سم = x المساحة الكلية في هذه الحالة: 138.4سم^2.

هـ) الجزء الملائم من الخط البياني يقع في المجال $x > 0$.

12. أ) $x = 2$ (الحل $x = -1$ غير ملائم).

ب) $x = 4$

جـ) $x = 4 , x = -4$.

د) $x = 5$ (الحل $x = -1$ غير ملائم).

13. أ) (i) عندما 9 سم = r، تكون كمية البوظة 1017.88 سم^3.

عندما 4سم = r،تكون كمية البوظة 242.23.

عندما 3 = r،تكون كمية البوظة 138.51 سم^3.

ب) مجال المسألة: بين $x = 0$ وَ $x = 15$.

جـ) 1105.31 سم^3.

د) $g(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{225 - x^2}$

هـ) تكون كمية البوظة في القمع اكبر ما يمكن عندما 12.25 سم = x الكمية القصوى هي 1360.35 سم^3.

و) ارتفاع الاسطوانة: 2.88 سم..

14. أ) مخروط. ب) (i) 753.98 وحدة حجم.

(ii) 879.65 وحدة حجم (iii) 722.57 وحدة حجم.

جـ) مجال المسألة: بين $x = 0$ وَ $x = 13$.

هـ) $v(x) = \frac{1}{3}\pi (169 - x^2) \cdot x$

و) الحجم اكبر ما يمكن عندما x=7.5 ويكون في هذه الحالة 885.54 وحدة حجم.

15. أ) طول المسار : 20.21 كم. ب) طول المسار : 17.68 كم.

جـ) طول المسار : 16.92 كم.

د) (i) $m(x) = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{2.5^2 + (15 - x)^2} = \sqrt{25 + x^2} + \sqrt{x^2 - 30x + 231.25}$

(ii) يكون طول المسار اقصر ما يمكن عندما10كم =xوطوله 16.77كم.

16. أ) تكاليف بناء عمارة ذات طابق واحد: : 800,000$.

تكاليف بناء عمارة ذات طابقين: 900,000$.

تكاليف بناء عمارة ذات ثلاثة طوابق: $1,050,000.

تكاليف بناء عمارة ذات اربعة طوابق: $1,250,000.

ب) (i) متوسط تكاليف الطابق الواحد في عمارة ذات طابق واحد: $800,000.

متوسط تكاليف الطابق الواحد في عمارة ذات طابقين : $450,000.

متوسط تكاليف الطابق الواحد في عمارة ذات ثلاثة طوابق: $350,000

متوسط تكاليف الطابق الواحد في عمارة ذات اربعة طوابق:$312,500

(ii) يكون متوسط تكاليف الطابق الواحد اقل ما يمكن في عمارة ذات 5 أو 6 طوابق.

17. الجزء الثاني: مستطيل محصور داخل قطع مكافيء

أ) $B(8, 0)$

ب) (i) 42 وحدة مربعة. (ii) 48 وحدة مربعة. (iii) 30 وحدة مربعة.

جـ) ضلعا المستطيل: $8 - 2x$, $-x^2 + 8x$.

$$s(x) = (8 - 2x)(-x^2 + 8x)$$

د) مساحة المستطيل اكبر ما يمكن عندما $x = 1.69$ وتكون 49.27 وحدة مربعة.

18. الجزء الثاني: مستطيل و قطع مكافيء

أ) (i) 16وحدة مربعة. (ii) 32 وحدة مربعة. (iii) 25وحدة مربعة.

ب) $y = x(6x - x^2)$

جـ) مساحة المستطيل اكبر ما يمكن عندما $x = 4$ وتكون 32 وحدة مربعة.

19. الجزء الثاني: شبه منحرف في قطع مكافيء

أ) (i) 128 وحدة مربعة. (ii) 144وحدة مربعة.

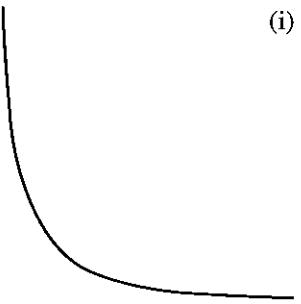
ب) 62.5 وحدة مربعة.

جـ) $$y = \frac{(20 - 2x)(10x - x^2)}{2}$$

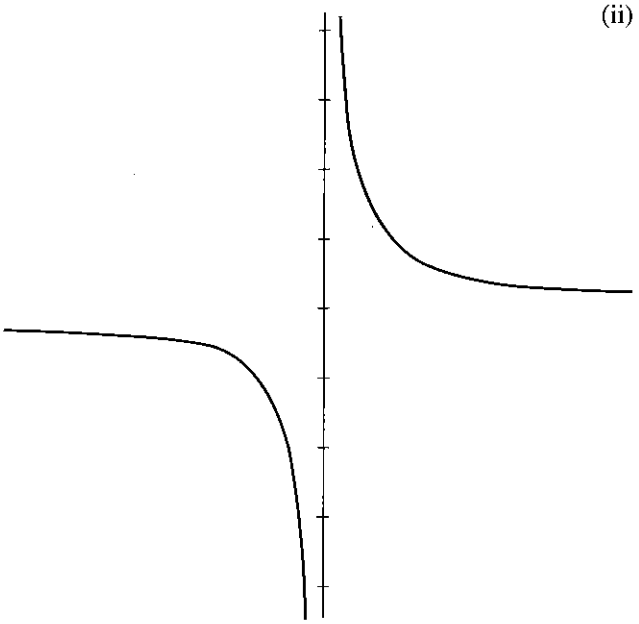
د) مساحة شبه المنحرف اكبر ما يمكن عندما $x = 3\frac{1}{3}$ وتكون 148.15 وحدة مربعة.

الصفحة الشفافة (أ)

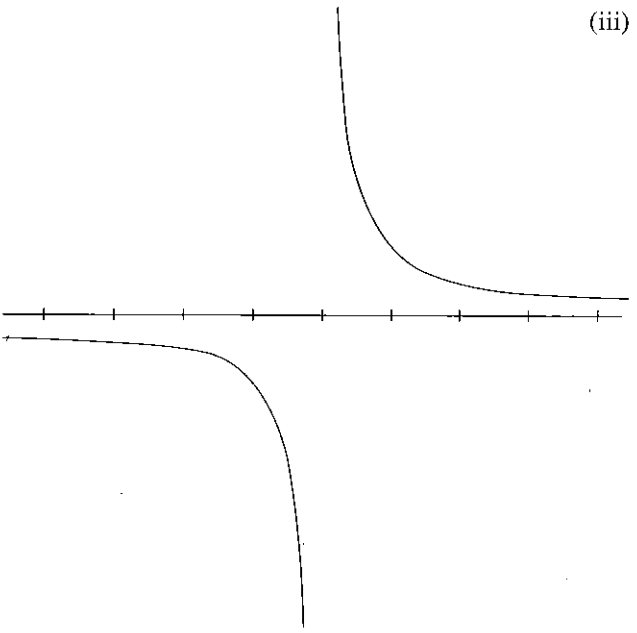
(i)



(ii)

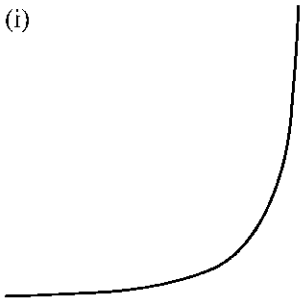


(iii)

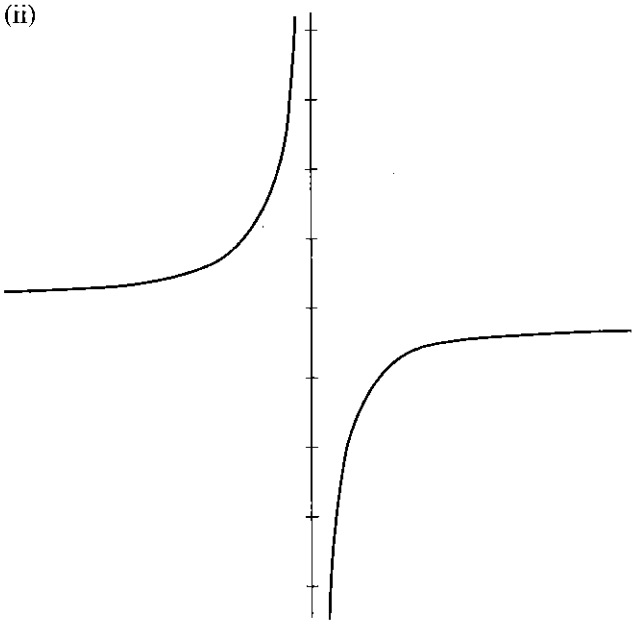


(i) اهذه الدالة متصاعدة

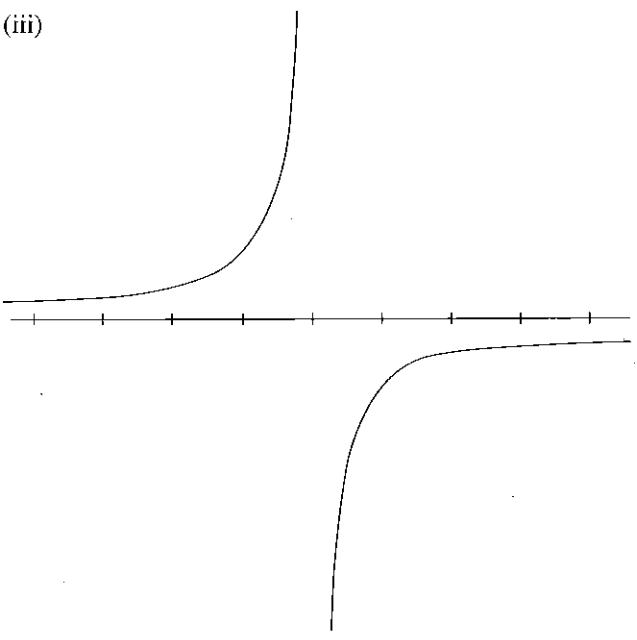
(i)



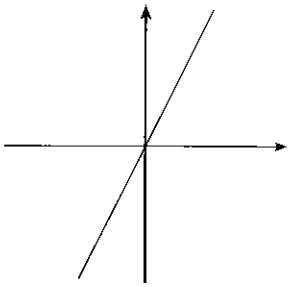
(ii)

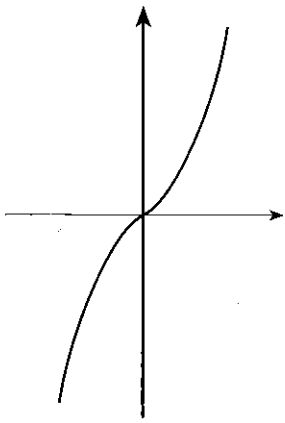


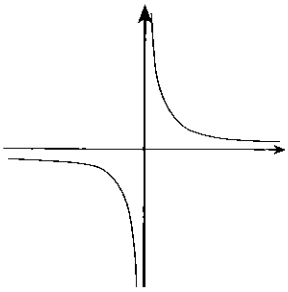
(iii)

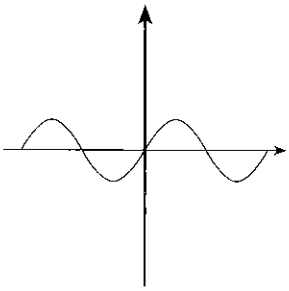


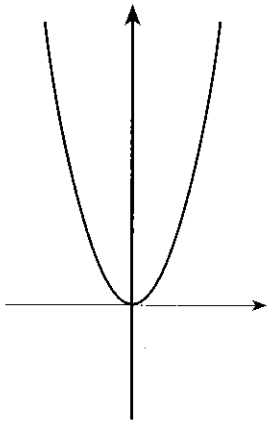
الصفحة الشفافة(ب)

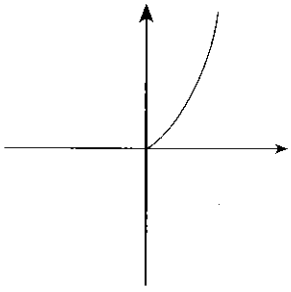




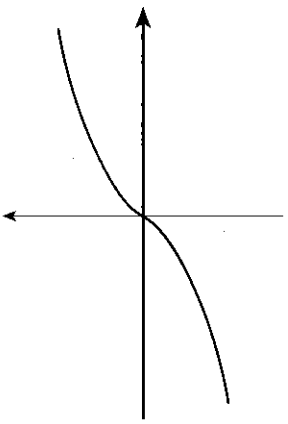


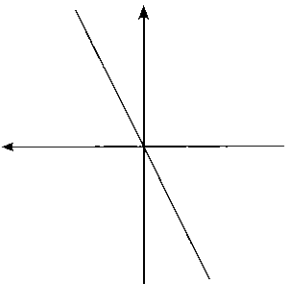


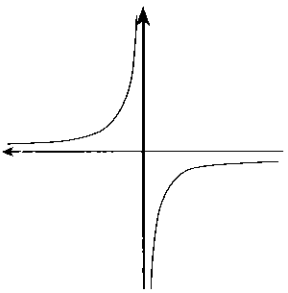


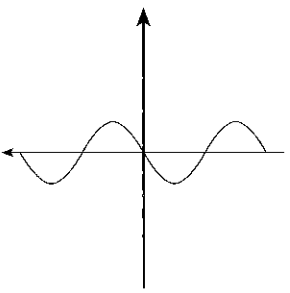


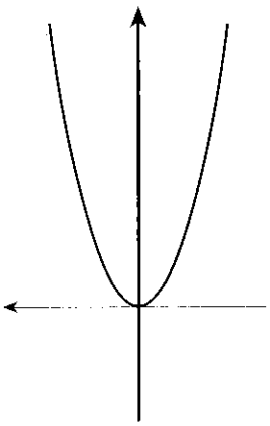
(ب) اختر الشكل المناسب

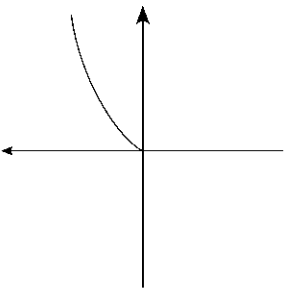




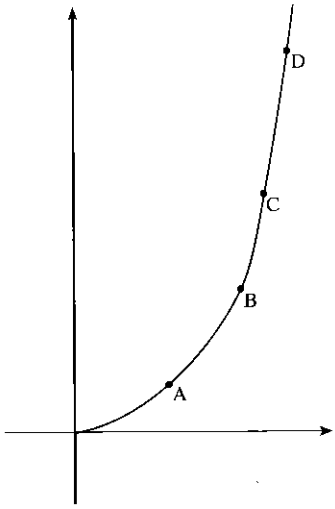


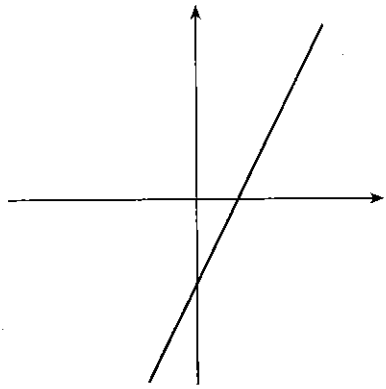


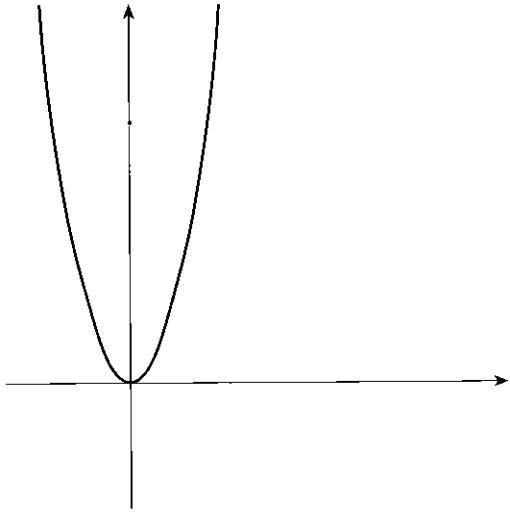


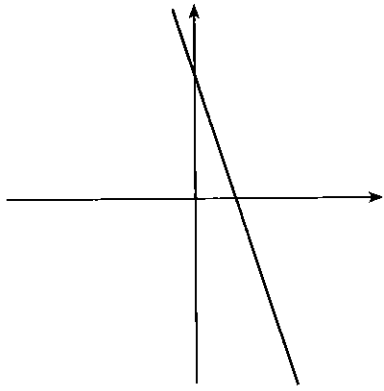


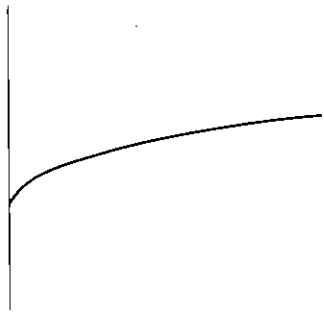
الصفحة الشفافة (جـ)

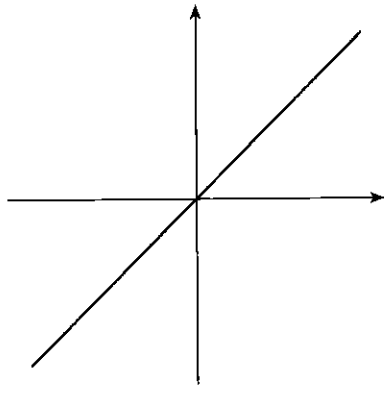






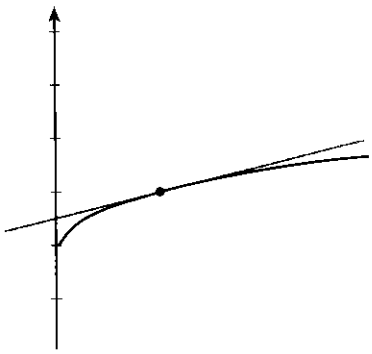






(ب) تفاعلات الصفحة

الصفحة الشفافة(د)



(ب) التفاف الشاطئ