שלוש יחידות

التكامل

אינטגרלים

طبعة تطوير

دائرة تدريس العلوم، معهد وايزمن للعلوم

التكامل

طبعة تطوير

دائرة تدريس العلوم، معهد وايزمن للعلوم

يصدر بمبادرة ومراقبة
المركز الاسرائيلي لتدريس العلوم على اسم عاموس دي شليط
من تأسيس
وزارة المعارف والثقافة، والجامعة العبرية في القدس، ومعهد وايزمن للعلوم، رحوبوت

يمنع منعاً باتاً تكرار، أو نسخ، أو تصوير، أو تسجيل،
أو ترجمة، أو اختزان في مجمع معلومات، أو بث بأية
طريقة كانت، الكترونية، أو بصرية، أو ميكانيكية،
أو بأية طريقة أخرى، أي جزء من مادة هذا الكتاب
لاستخدامه لأغراض تجارية الا باذن خاص واضح
ومكتوب من الناشر.

©

حقوق الطبع محفوظة
معهد وايزمن للعلوم

طبع في اسرائيل سنة - 2000

تأليف:
نوريت هداس

استشارة:
طومي درايفوس

ترجمه الى العربية:
الياس حايك

مراجعة واعداد:
ناصيف فرنسيس

الى الطالب

ان نقطة الانطلاق في تعلّم موضوع التكامل هي البحث في معنى العلاقة بين تغيّر المقادير المختلفة (مثل المسافة والكمية) وتغيّر المساحة الواقعة تحت الخط البياني للدالة التي تبيّن هذه المقادير.

طريقة معالجة الموضوع، كما في جميع كتب هذه السلسلة، تؤكّد على العلاقة الموجودة بين المصطلحات الكثيرة ذات الصلة بموضوع التكامل، والعلاقة بين الموضوع الجديد والمواضيع التي بُحثت في فصول سابقة في موضوع التحليل.

نأمل أن تتمتع بدراستك لمادة هذا الكتاب، وتجني منها أكبر قدر ممكن من الفائدة.

هذا، ونتقدم بجزيل الشكر لطلاب الصفوف الثواني عشر /95) (96 في مدرسة أورط في اللد، على حسن تعاونهم عند دراسة الطبعة التجريبية من الكتاب، وابداء استعدادهم في اعطاء ملاحظاتهم وردود فعلهم، مما ساعد في اصدار هذه الطبعة المنقحة.

محتويات الكتاب

صفحة

السرعة، المسافة والزمن 7

الخط البياني للمسافة والرسم البياني للسرعة 18

حساب المساحة تحت الرسم البياني للدالة 26

ما هو الرسم البياني الملائم؟ 35

ايجاد دالة المساحة 42

كيفية ايجاد العائلة 48

اشارات وأسماء 54

العودة الى حساب المساحات 59

تحسين في حساب المساحة 68

عن تحسين الحساب أيضاً 73

اشارات ومصطلحات اخرى 80

واذا كان الرسم البياني للدالة تحت المحور ؟ 86

المساحة بين خطين بيانيين لدالتين 92

قليلاً عن جمع المساحات 98

تكامل الدالة المركبة 102

تفسير رموز الكتاب

تمرين يفسّره المعلم

تمرين "مفتاح" نتعلم منه أمراً جديداً

عمل ذاتي

انتبه

تمرين "أصعب قليلاً"

تمرين تحضير

اجمال

السرعة، المسافة والزمن

1. سارة ورنين وريم تركضن كل صباح.
تركض سارة مدة ساعة واحدة بسرعة 7 كم في الساعة.

وتركض رنين مدة $\frac{3}{4}$ ساعة بسرعة 8 كم في الساعة.

وتركض ريم مدة $\frac{1}{2}$ ساعة بسرعة 10 كم في الساعة.
من منهن تركض أكبر مسافة؟

نفترض هنا، أنه خلال كل وقت الحركة تتقدم البنات بنفس السرعة. (بينما في الواقع، فان السرعة تتغير وحينئذ هناك حاجة للتمييز بين السرعة في كل لحظة والسرعة المتوسطة.)

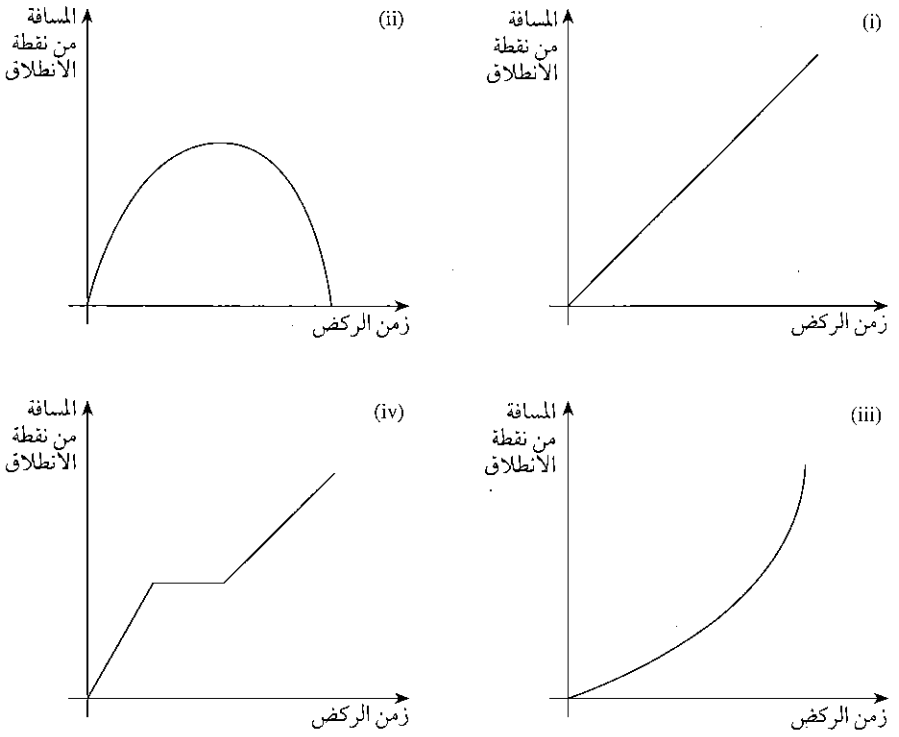
2. أ) تدرب داود وعادل استعداداً لسباق سيارات.
قطع داود مسافة 720 كم في مدة 4 ساعات.
وقطع عادل مسافة 600 كم في مدة 3 ساعات.
مَن منهما كانت سرعته أكبر؟
ب) طول مسار المسابقة 500 كم. قطعه داود في مدة 2.5 ساعة، وقطعه عادل في مدة ساعتين. كم كانت سرعة كل واحد منهما في يوم المسابقة؟

3. تركض ساميه لتلحق بوردة المتقدمة عنها.
عند بدء الركض، كانت المسافة بينهما 50 متراً.
ركضت وردة بسرعة مترين في الثانية.
وركضت ساميه بسرعة 3 أمتار في الثانية.

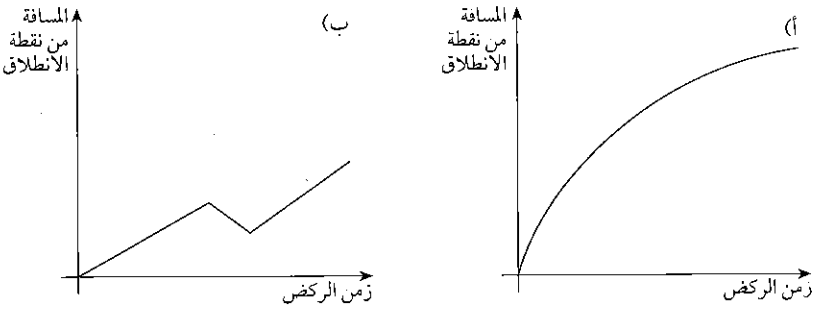
أ) كم متراً تقترب ساميه من وردة كل ثانية؟
ب) بعد كم ثانية تلحق ساميه بوردة؟
جـ) غيّر سرعة سامية المعطاة، بحيث لا تتمكن من اللحاق بوردة.

4. تدرّب رامي وأديب في ركوب الدراجات على طريق طوله 140 كم.
ركب رامي دراجته بسرعة 28 كم في الساعة.
وركب أديب دراجته بسرعة 20 كم في الساعة.
كم ساعة تدرب كل واحد منهما؟

5. الرسوم البيانية في هذه المسألة، تبيّن المسافة التي قطعها راكضون من نقطة الانطلاق تبعاً للزمن الذي مضى منذ لحظة الانطلاق.
أ) أي من هذه الخطوط، يبيّن راكضاً عاد الى نقطة الانطلاق؟
ب) أي من هذه الخطوط، يبيّن راكضاً استراح في الطريق؟
جـ) أي من هذه الخطوط، يبيّن راكضاً زاد من سرعته خلال كل زمن الركض؟
د) أي من هذه الخطوط، يبيّن راكضاً بوتيرة ثابتة كل زمن الركض؟



6. الرسمان البيانيان المرسومان، يبينان مسافة الركض من نقطة الانطلاق حسبً الزمن الذي مضى من لحظة الانطلاق. صف بالكلمات حركة الراكضين واهتم بسرعتهما أيضاً.



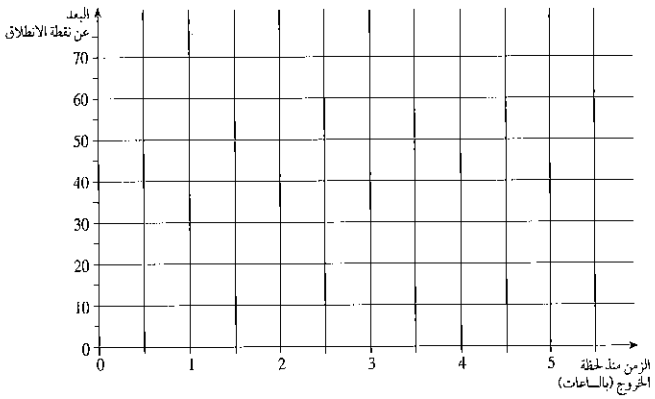
7. يركب منير دراجته بسرعة ثابتة مقدارها 25 كم في الساعة، ويبتعد عن نقطة الانطلاق كل الوقت.

أ) على أي بعد من نقطة الانطلاق يكون بعد مضي ساعة واحدة؟ عيّن نقطة ملائمة في هيئة المحاور.

ب) على أي بعد من نقطة الانطلاق يكون بعد ساعتين؟ عيّن نقطة ملائمة في هيئة المحاور.

جـ) عيّن نقطة ملائمة لبعده في اللحظة التي خرج فيها الى طريقه.

د) ارسم خطاً بيانياً، يبيّن بعد منير عن نقطة الانطلاق كدالة للزمن الذي مضى منذ لحظة خروجه.



هـ) اكتب قاعدة تناظر الدالة التي تبيّن بعد منير عن نقطة الانطلاق (y) كدالة للزمن الذي مضى (x).

و) كم يتقدم منير في كل ساعة؟

ز) ماذا يعبّر عن السرعة في الرسم البياني؟ وماذا يعبّر عنها في قاعدة تناظر الدالة؟

8. يتدرّب عماد على المشي بوتيرة واحدة.
أمامك جدول يبيّن بعده عن البيت، في طريق عودته، كدالة للزمن الذي مضى منذ لحظة البدء في العودة.

الزمن (بالساعات)	0	0.5	1	1.5	2
البعد عن البيت (كم)	16	12	8	4	0

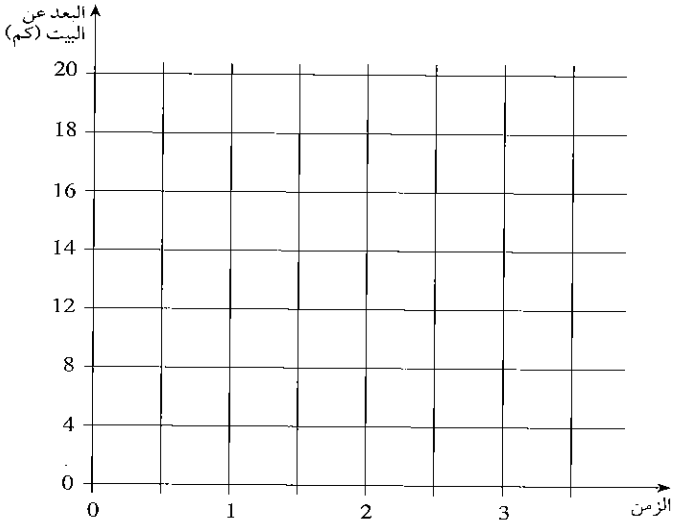
أ) ارسم خطاً بيانياً ملائماً.

ب) اكتب قاعدة تناظر الدالة التي تبيّن بعد عماد عن البيت (y)، كدالة للزمن الذي مضى منذ لحظة البدء في العودة (x).

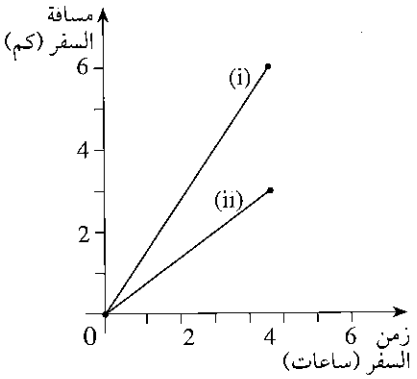
y =

جـ) - كم كيلومتراً قطع عماد في الساعة الأولى؟
- كم كيلومتراً قطع في الساعة الثانية؟
- كم كيلومتراً قطع في الزمن الذي مرّ من 0.5 وحتى 1.5 ساعة منذ بدأ في العودة؟
- كم كيلومتراً يقترب من بيته كل ساعة؟

د) - ما هي سرعة مشي عماد؟
- ماذا يعبّر عن السرعة في الرسم البياني؟ وماذا يعبّر عنها في قاعدة تناظر الدالة؟
- عن ماذا يعبّر الميل السالب؟



9. الشكل البياني الأول، يبيّن حركة سيارتين.

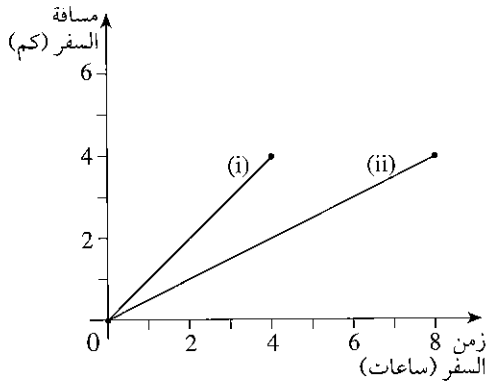


أ) هل قطعت السيارتان نفس المسافة؟
اذا كان لا – أيهما قطعت مسافة أكبر؟

ب) هل زمن سفر السيارتين متساو؟
اذا كان لا – أيهما سافرت زمناً أطول؟ علّل.

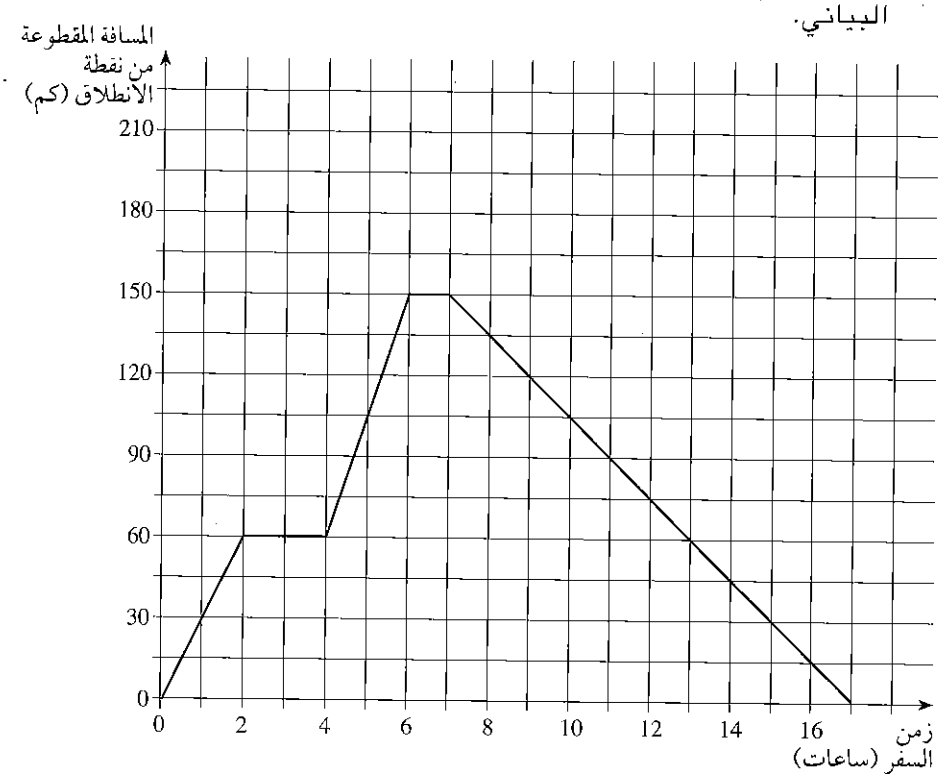
جـ) هل سافرت السيارتان بنفس السرعة؟ اذا كان لا – لأي منهما سرعة أكبر؟ فسّر. ماذا يعبّر عن سرعة السيارتين في الشكل البياني؟

د) أجب مرة أخرى عن الأسئلة أ – جـ بخصوص حركة السيارتين المبينة في الشكل البياني الثاني.

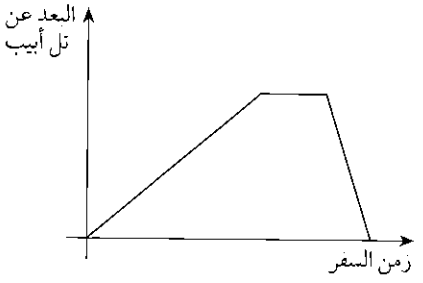


تمارين

10. الخط البياني المرسوم، يبيّن حركة راكب دراجة هوائية.
اكتب سرعة راكب الدراجة في كل واحدة من القطع المبينة في الرسم البياني.



11. صف حركة السيارة المبيّنة في الخط البياني التالي واهتم بسرعتها أيضاً.



12. الرسوم البيانية أمامك، تبيّن الحركة لعدد من وسائل النقل من تل أبيب واليها.

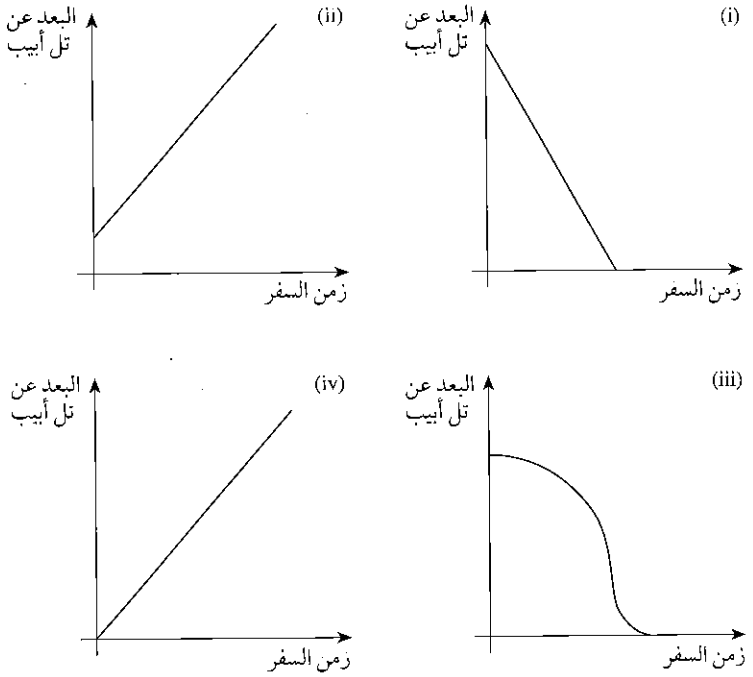
أ) كيف يمكن التعرف من الرسم البياني ، اذا كانت السيارة قد خرجت من تل أبيب.

ب) أي من هذه الخطوط، يبيّن سفراً بسرعة ثابتة **من تل أبيب**؟

جـ) أي من الخطوط، يبيّن سفراً بسرعة ثابتة **الى تل أبيب**؟

د) أي من الخطوط، يبيّن سفر سيارة لم تخرج من تل أبيب وهي **تبتعد** عنها؟

هـ) أي من الخطوط، يبيّن سفراً بسرعة **ليست** ثابتة؟



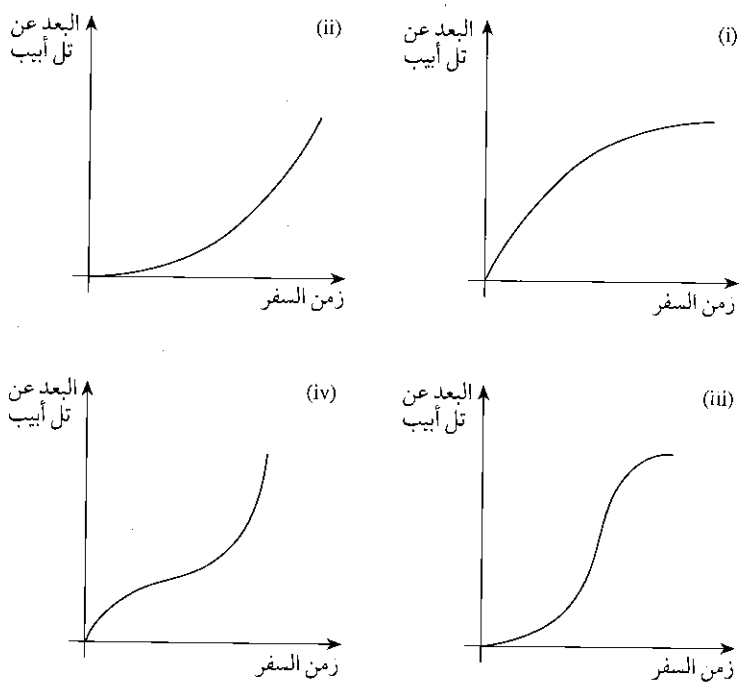
13. الرسوم البيانية أمامك، تبيّن الحركة لعدد من وسائل النقل من تل أبيب.

أ) أي من هذه الخطوط، يبيّن سيارة تزيد من سرعتها كل وقت سفرها؟

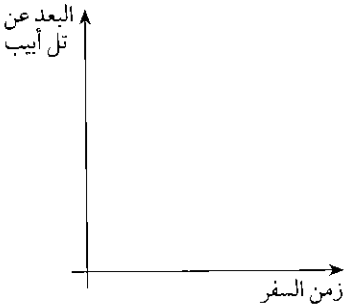
ب) أي من الخطوط، يبيّن سيارة تقلّل من سرعتها كل وقت سفرها؟

جـ) أي من الخطوط، يبيّن سيارة تزيد من سرعتها في البداية ثم تقللها بعد ذلك؟

د) أي من الخطوط، يبيّن سيارة تقلّل من سرعتها في البداية ثم تزيدها بعد ذلك؟



14. ارسم خطاً بيانياً، يبيّن حركة سيارة تخرج من تل أبيب وتسافر بسرعة ثابتة، ثم تتوقف، وبعد ذلك تتابع سفرها مبتعدة عن تل أبيب بسرعة تتزايد طول الوقت.



15. الخطوط البيانية المرسومة، تبيّن تغيّر كمية الماء في بركة خلال زمن معيّن.

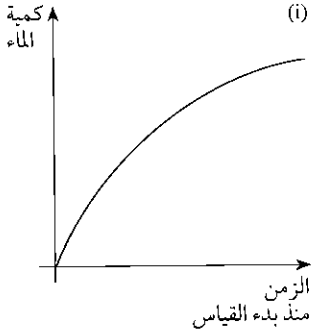
أ) أي من هذه الرسوم، يبيّن دخول الماء الى البركة بوتيرة واحدة؟

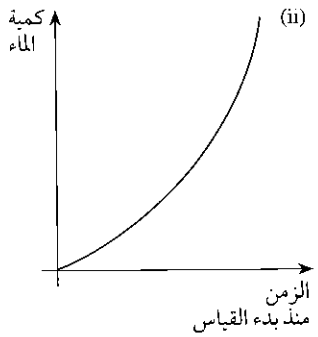
ب) أية رسوم تبيّن دخول أو خروج الماء بوتيرة ثابتة؟

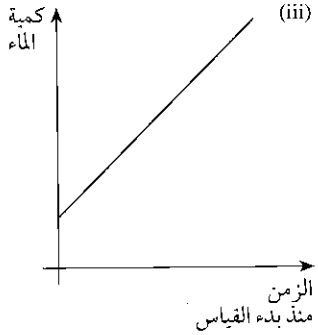
جـ) أي من الرسوم، يبيّن أن تيار الماء هو بوتيرة آخذة في الازدياد؟

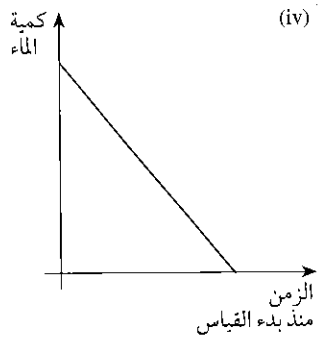
د) أي من الرسوم، يبيّن ان تيار الماء هو بوتيرة آخذة في التناقص؟

هـ) أي من الرسوم، يبيّن أن تيار الماء هو لبركة كان فيها ماء سابقاً؟





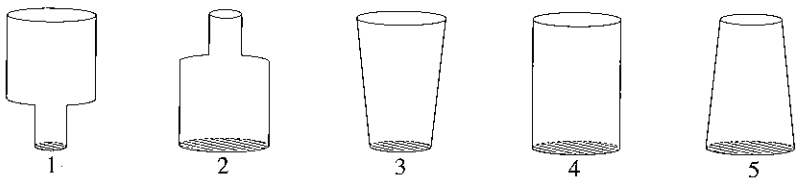


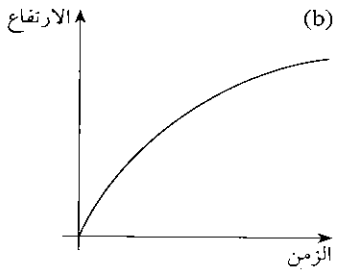


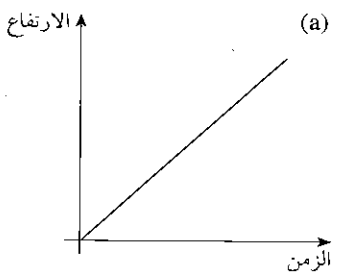
16. تصب حنفية الماء بوتيرة ثابتة وتملأ الأوعية المرسومة.

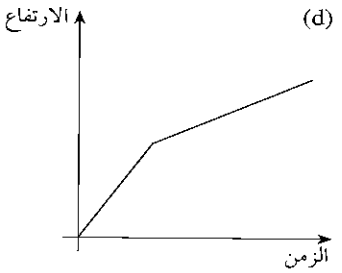
أ) الرسوم البيانية تناظر لزمن امتلاء كل وعاء، ارتفاع الماء فيه.
ناظر لكل وعاء الرسم البياني الملائم.

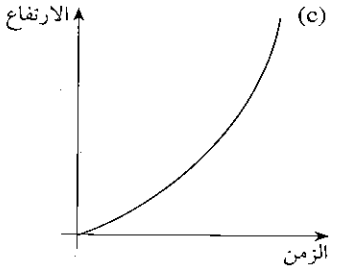
ب) ماذا تبيّن ميول القطع في الخطين البيانيين (d) وَ (e) ؟

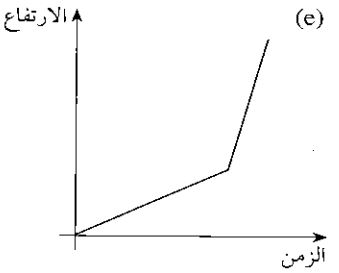




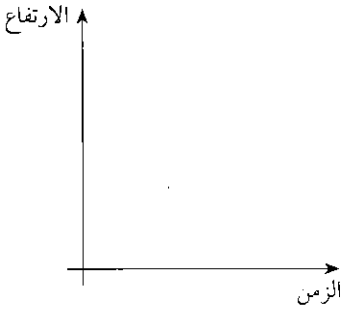


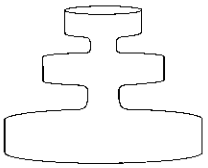


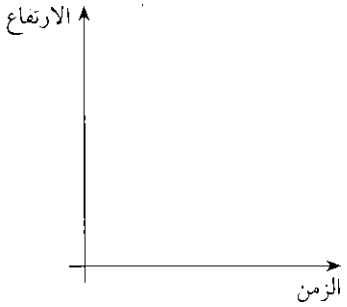


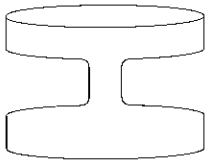


17. تصب حنفية الماء بوتيرة ثابتة وتملأ الوعائين المرسومين هنا.
ارسم خطاً بيانياً، يبيّن ارتفاع الماء في كل واحد من الوعائين كدالة لزمن امتلائه.



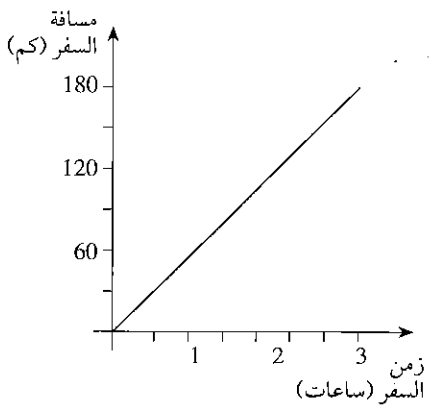






الرسم البياني للمسافة والرسم البياني للسرعة

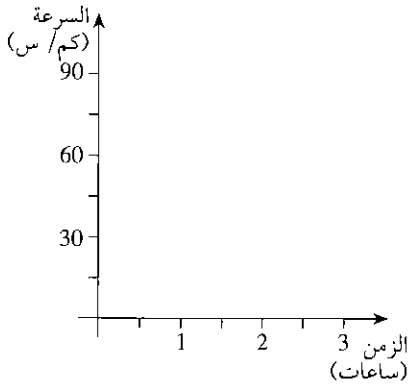
1. الرسم البياني المرسوم، يبيّن المسافة التي قطعتها سيارة من نقطة الانطلاق، كدالة للزمن الذي مضى منذ لحظة الانطلاق الى الطريق.



أ) كم كيلومتراً قطعت السيارة في الساعة الأولى؟

ب) هل قطعت السيارة في كل ساعة، نفس عدد الكيلومترات؟
اذا كان نعم – ما هي سرعتها؟

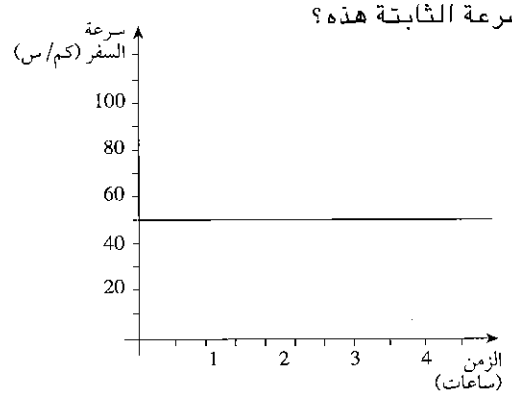
جـ) خطّط رسماً بيانياً، يبيّن سرعة السيارة كدالة للزمن الذي مضى منذ لحظة الانطلاق
الى الطريق.



في التمرين السابق وكذلك في البند السابق، توصلت الى نتائج من الرسم البياني الذي يبيّن مسافة السفر كدالة لزمن السفر. أما الآن، فسنحاول التوصل الى نتائج من الرسوم البيانية التي تمثل السرعة كدالة لزمن السفر.

2. الخط البياني المرسوم، يبيّن سرعة سيارة تسافر بسرعة ثابتة.

أ) ما هي السرعة الثابتة هذه؟

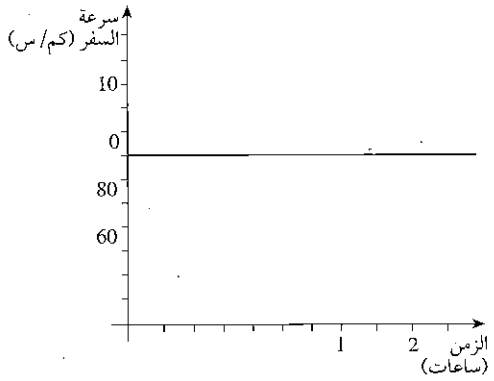


ب) كم كيلومتراً قطعت السيارة في الساعتين الأوليين؟
كم كيلومتراً قطعت في الساعات الثلاث الأولى؟

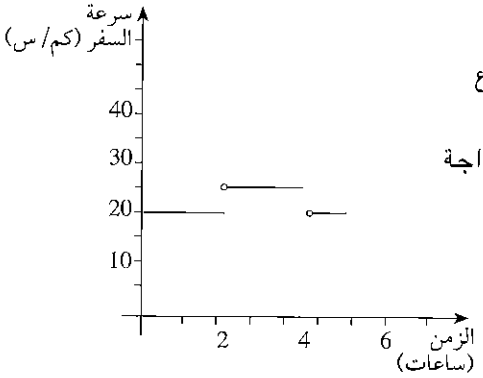
جـ) لون مساحة تبيّن المسافة التي قطعتها السيارة في الساعات الأربع الأولى.

في حالات كثيرة، يكون حساب المساحة الواقعة تحت الرسم البياني ذا أهمية كبيرة.
ففي هذا التمرين، تعبر هذه المساحة عن مسافة السفر.
(حاصل ضرب السرعة الثابتة في زمن السفر.)

د) الرسم البياني أدناه، يبيّن سرعة سيارة أخرى. ما هي المسافة التي قطعتها هذه السيارة في الزمن الذي مضى من 2 حتى 5 ساعات منذ بدء السفر؟



3. القطع من الرسم البياني، تبيّن سرعة راكب دراجة هوائية.
(نهمل القطع التي تبيّن التسارع أو التباطؤ).



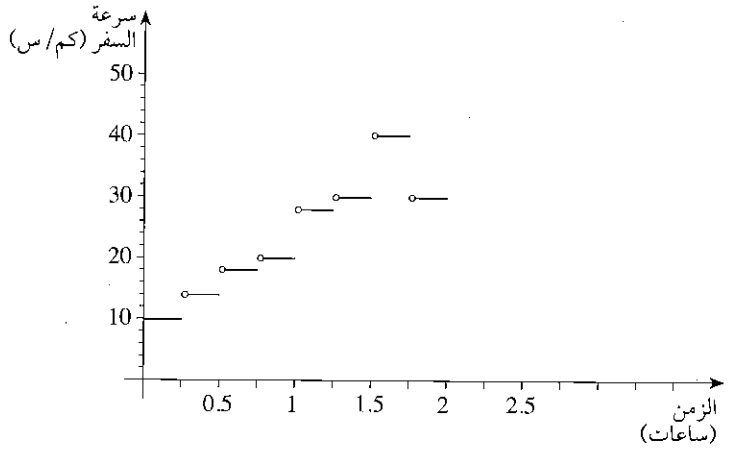
أ) كم كيلومتراً قطع راكب الدراجة في الساعتين الأوليين؟
لوّن مساحة ملائمة.

ب) كم كيلومتراً قطع في الساعتين التاليتين؟ لوّن مساحة ملائمة.

جـ) كم كيلومتراً مجموع ما قطعه راكب الدراجة في 5 ساعات؟

4. القطع المشدّدة تصف سرعة راكب دراجة في فترات زمن قصيرة .

أ) - كم كيلومتراً قطع في ربع الساعة الأولى؟ (لوّن مساحة ملائمة.)
- كم كلم قطع في ربع الساعة الثانية؟ (لوّن مساحة ملائمة.)
- كم كلم مجموع ما قطعه في نصف الساعة الأولى؟
- كم كلم مجموع ما قطعه في الساعة الأولى؟
- جد مجموع ما قطعه خلال الساعتين.



ب) عيّن وسط القطع المشددة وصل بينها (بشكل يشابه ما فعلته في مادة الاحصاء، عندما رسمت مضلع تكرارية على الهستوغرام).

الخط الناتج، يبيّن تغيّر السرعة. المساحة من تحته تقترب من مساحات كل المستطيلات التي حسبتها في البند (أ).
لقد رأيت ان لحساب المساحة تحت رسم بياني معطى، يوجد أحياناً معنى غير حساب المساحة نفسها. في التمارين السابقة أُعطي رسم بياني، بيّن سرعة السفر تبعاً لزمن السفر. المساحة تحت الرسم البياني وصفت عدد الكلم التي قطعتها السيارة تبعاً لزمن السفر.

فيما يلي من هذه الوحدة، سنرى كيف نحسب المساحات تحت رسوم بيانية لدوال معطاة. وسنأتي بنماذج عن استعمال هذه المساحات في حل مسائل مختلفة مثل ايجاد المسافة وفقاً للرسم البياني للسرعة.

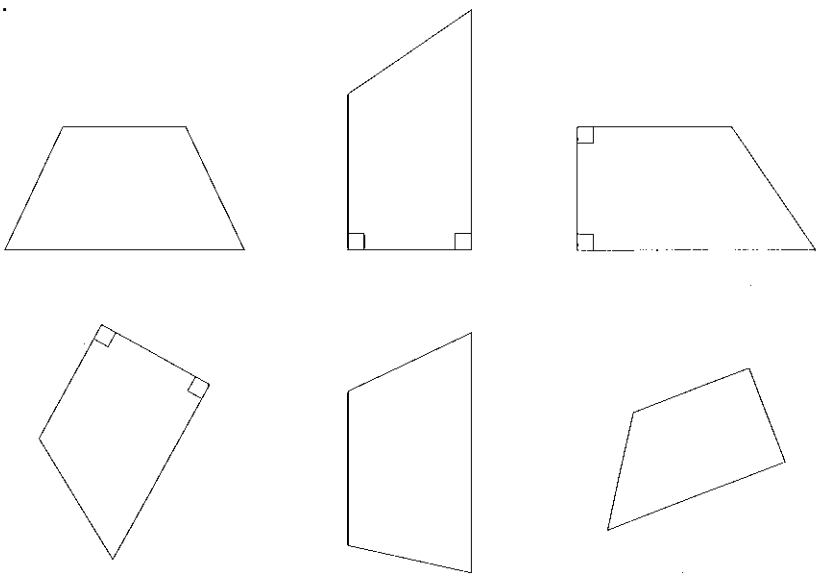
في التمارين التالية من هذا البند، سنعمل على مراجعة حساب مساحة شبه المنحرف وضرب قوالب، سوف نستعمل هذه في البنود التالية.

(بامكان الطلاب المتقنين لهذه المواد ان ينتقلوا الى البند التالي).

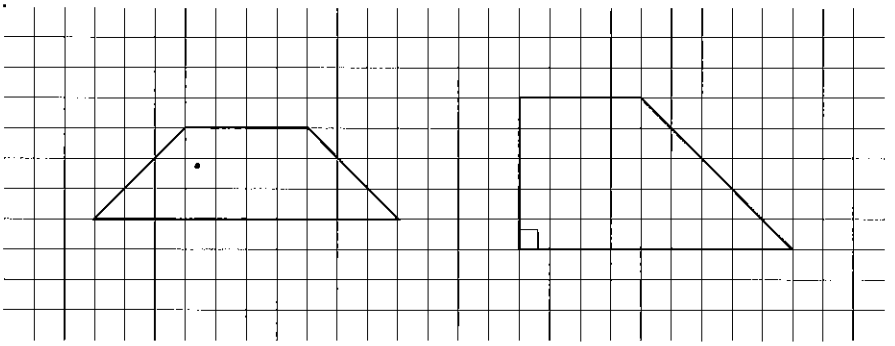
قليلاً عن حساب مساحة شبه المنحرف

يدعى الضلعان المتوازيان في شبه المنحرف، قاعدتي شبه المنحرف. البعد بين القاعدتين (القائم على كلتيهما) يدعى ارتفاع شبه المنحرف.

5. سجل الحرف ق على كل قاعدة، والحرف أ على كل ارتفاع. ارسم ارتفاعاً اذا لزم الأمر.

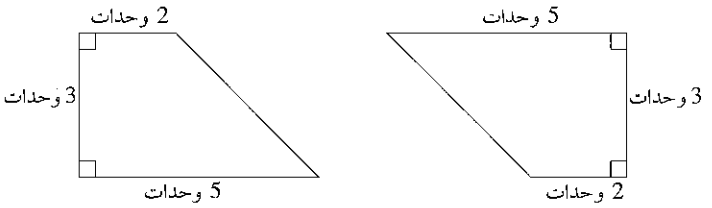


6. ما هي مساحة كل واحد من شبهي المنحرف؟ (وحدة القياس هي تربيعة مربعة.)



7. أمامك شبها منحرف قائما الزاوية ،متطابقان.

أ) ارسم أحد شبهي المنحرف الى جوار الآخر، بحيث ينتج مستطيل مساحته مساوية لمجموع مساحتي شبهي المنحرف.

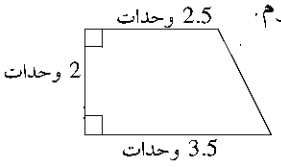


ما هي مساحة المستطيل؟

ما هي مساحة كل شبه منحرف؟

ب) ارسم كما فعلت في البند (أ)، مستطيلاً مساحته ضعفا مساحة شبه المنحرف المرسوم.

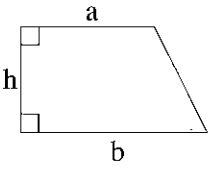
احسب مساحة المستطيل ومساحة شبه المنحرف.



جـ) ارسم مستطيلاً مساحته ضعفا مساحة شبه المنحرف القائم الزاوية المرسوم.

سجل قالباً يبيّن مساحة المستطيل.

سجل قالباً يبيّن مساحة شبه المنحرف.



مساحة شبه المنحرف: (مجموع طولي القاعدتين × طول الارتفاع) · $\frac{1}{2}$

لقد بيّنا كيف ينتج قانون المساحة، فقط بالنسبة لأشياه المنحرف قائمة الزاوية، حيث نستعمل هذا القانون هنا فقط فيها.

مراجعة عن ضرب القوالب

ع"ذ 8. فك الأقواس واجمع حدوداً متشابهة.

أ) $x(x-1)+2(x-1)$

ب) $3(2x+3)-4(2x+3)$

ع"ذ 9. فك الأقواس واجمع.

أ) $(x+5)(x-2)$

ب) $(2x+1)(x-3)$

جـ) $(x+2)(2x-5)$

د) $(3x+4)(x-2)$

هـ) $(0.5x+1)(x-3)$

و) $(3x+5)(x-1)$

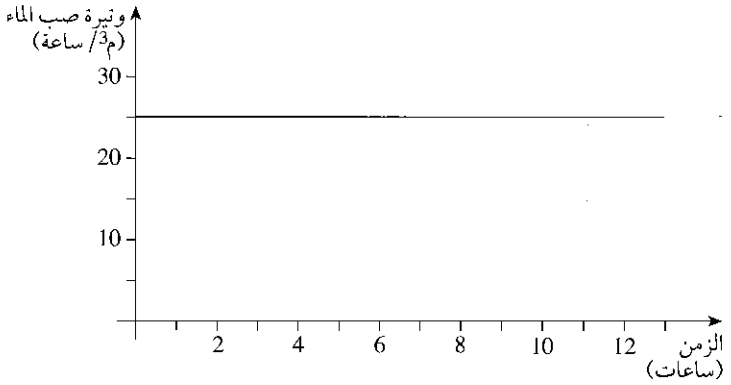
ز) $\frac{1}{2}\cdot(2x+3)(x-3)$

ح) $\frac{(2x+1)(2x+1)}{2}$

تمارين

10. حنفية تصب الماء بوتيرة واحدة وتملأ بركة فارغة.

أ) كم م3 (أمتار مكعبة) من الماء تصب الحنفية في البركة في الساعات الأربع الأولى؟
عيّن مساحة ملائمة على الشكل البياني.

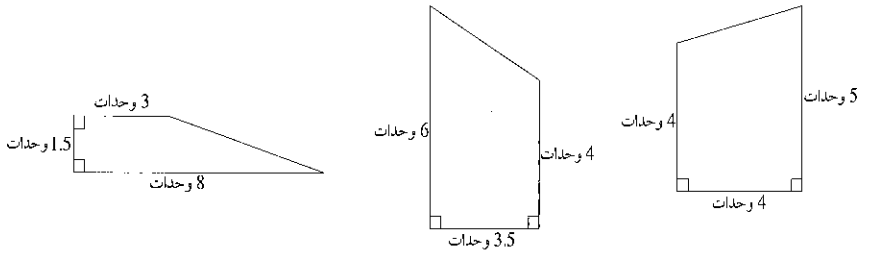


ب) كم م3 من الماء تصب الحنفية في 12 ساعة الأولى؟ عيّن مساحة ملائمة على الشكل البياني.

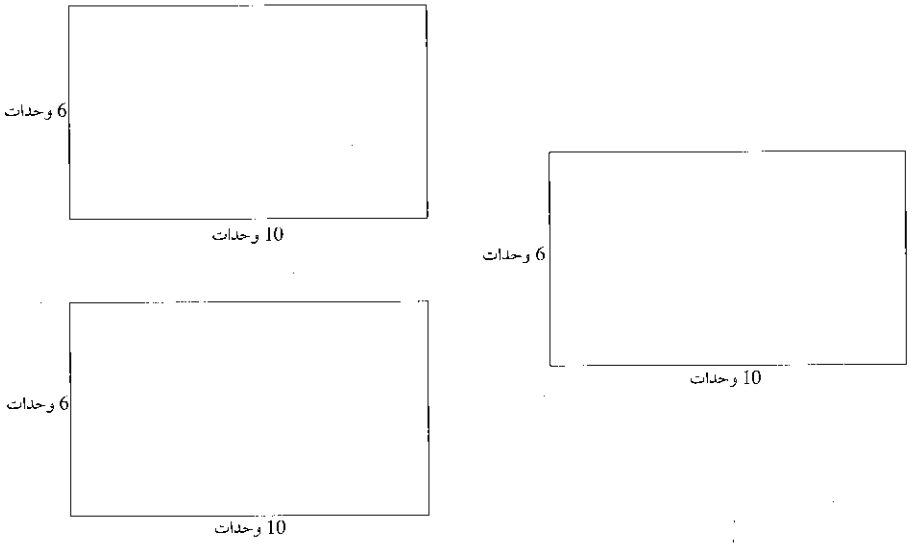
جـ) كم من الوقت يلزم كي تصب الحنفية 200 م3 من الماء؟

د) عندما تمتلئ البركة يكون فيها 750 م3 من الماء. كم من الوقت يلزم كي تملأ الحنفية البركة؟

11. احسب مساحة أشباه المنحرف قائمة الزاوية.



12. أ) اقسم المستطيل الى شبهي منحرف متطابقين، بأشكال مختلفة.



ب) ما هي مساحة كل شبه منحرف؟

جـ) هل قسمت بحيث نتج لديك شبه منحرف أحد ساقيه 10 وحدات؟
اذا كان لا – ارسم واقسم بهذا الشكل.

13. فكّ الأقواس واجمع.

أ) $2x(x + 2) + 3(x + 4)$

ب) $3x(2x - 1) - 5(x - 2)$

جـ) $0.5(x - 4) - 1.5(2x + 3)$

14. فكّ الأقواس واجمع.

أ) $(7 + 2x)(x - 3)$

ب) $(5 + 3x)(x - 5)$

جـ) $(4 + 2x)(2x - 3)$

د) $(3 - 2x)(x - 4)$

هـ) $(5 - 0.5x)(x + 1)$

و) $(3 - 1.5x)(2x - 4)$

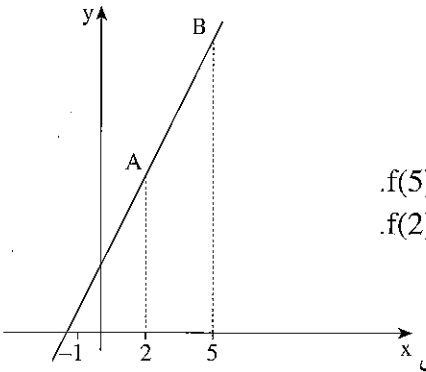
ز) $\frac{1}{2} \cdot (3 + 2x)(x - 1)$

ح) $\frac{(2 + x)(x - 4)}{2}$

حساب المساحة تحت الرسم البياني للدالة

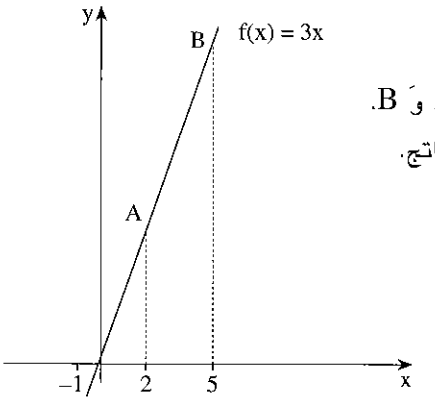
لقد رأيت أن المساحة الواقعة تحت الرسم البياني للسرعة (الثابتة) تبيّن المسافة المقطوعة. كذلك المساحة الواقعة تحت الرسم البياني لدالة غير ثابتة، فهي ذات معنى أيضاً. لذلك سنبدأ هنا بحساب المساحة الواقعة تحت الرسم البياني لدالة خطية غير ثابتة.

1. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = 2x + 3$.



- احسب احداثيات النقطتين A وَ B.
- لوّن على الشكل، قطعة طولها f(5).
- لوّن على الشكل، قطعة طولها f(2).
- لوّن شبه منحرف قاعدتاه هما القطعتان الملونتان وساقاه هما المحور x وجزء من الخط البياني للدالة.
- احسب مساحة شبه المنحرف.

2. أمامك الخط البياني للدالة $f(x) = 3x$.
من النقطتين (2, 0) وَ (5, 0)
رسم عمودان على المحور x.

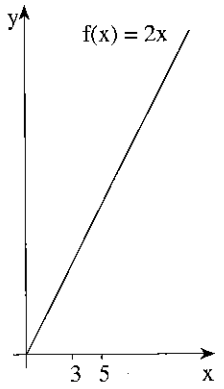


- احسب احداثيات النقطتين A وَ B.
- لوّن مساحة شبه المنحرف الناتج.
- سجّل على قاعدتيه طولهما.
- احسب ارتفاع شبه المنحرف.
- احسب مساحته.

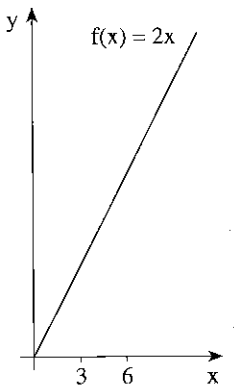
3. معطاة الدالة $f(x) = 2x$.

أ) ارسم واحسب مساحة شبه المنحرف المحصور بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور x من النقط الآتية:

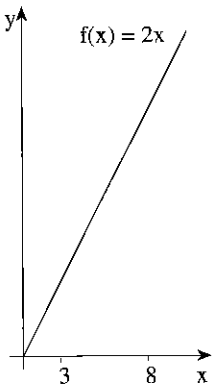
(i) $(3,0)$ وَ $(5,0)$



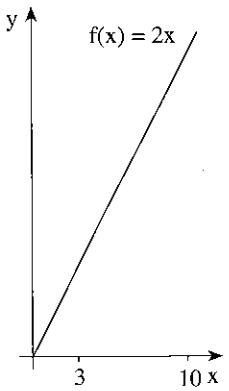
(ii) $(3,0)$ وَ $(6,0)$



(iii) $(3,0)$ وَ $(8,0)$

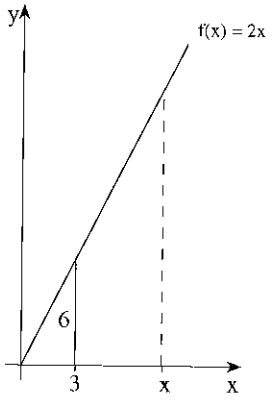


(iv) $(3,0)$ وَ $(10,0)$



ب) نرسم ونعبّر بشكل عام عن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور x من النقطة $(3,0)$ والنقطة العامة $(x,0)$ الواقعة على امتداد المحور عن يمين $(3,0)$:

- طول العمود على المحور من النقطة $(x,0)$ يساوي $2x$.
  سجل على الشكل.
- عبّر عن ارتفاع شبه المنحرف بواسطة x.
- عبّر عن مساحة شبه المنحرف بواسطة
  $s(x) =$



$s(x)$ هي دالة جديدة تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة f والمحور x والعمودين على المحور x من النقطة $(3,0)$ والنقطة العامة $(x,0)$ الواقعة على امتداد المحور. ($f(x)$ هي دالة موجبة في المجال المعني هنا).

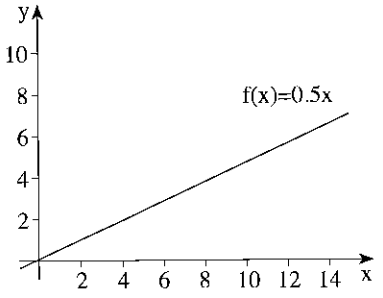
جـ) عوّض واحسب $s(5)$, $s(6)$, $s(8)$, $s(10)$, وقارن مع النتائج من البند (أ).

د) فك الأقواس في التعبير $s(x)$، اقسم وجمّع وبعد ذلك اشتق $s(x)$. ما هي العلاقة بين $s'(x)$ والدالة $f(x)$ المعطاة؟

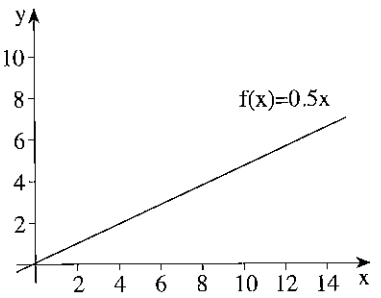
4. في هيئات المحاور الآتية، مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = 0.5x$.

أ) ارسم واحسب مساحة شبه المنحرف المحصور بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمود على المحور x من النقطة $(2, 0)$ والعمود على المحور x من النقط الآتية:

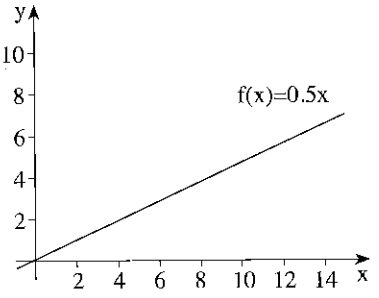
(i) من النقطة $(5, 0)$



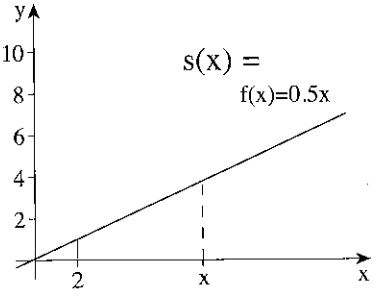
(ii) من النقطة $(9, 0)$



(iii) من النقطة $(12,0)$



ب) ارسم وعبّر عن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور x من النقطة $(2, 0)$ والنقطة العامة $(x, 0)$ الواقعة على امتداد المحور.



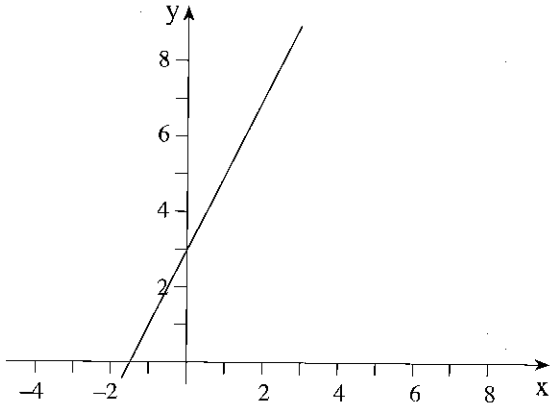
جـ) جد $s(5)$ وقارن مع نتيجة الحساب من البند أ (i).

د) احسب بواسطة التعويض، المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور x من النقطتين $(2, 0)$ و $(20, 0)$.

هـ) فك الأقواس، ثم اجمع وجد $s'(x)$. على ماذا حصلت؟

5. في هيئة المحاور الآتية، مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = 2x + 3$.

أ) ارسم واحسب مساحة شبه المنحرف المحصور بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور x من النقطتين $(0, -1)$ و $(0, 2)$.



ب) عبّر عن المساحة $S(x)$، المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور من النقطة $(0, -1)$ والنقطة العامة $(0, x)$ الواقعة على امتداد المحور x.

جـ) احسب $S(2)$, بمساعدة التعبير الذي حصلت عليه، وقارن مع النتيجة من البند (أ).

د) جد $S'(x)$. (بسّط أولاً، التعبير $S(x)$ الذي حصلت عليه).

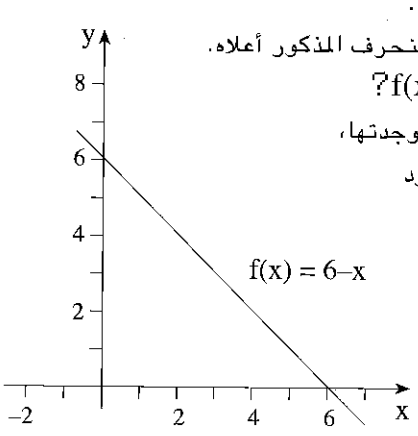
6. في هيئة المحاور الآتية، مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = 6 - x$.

أ) ارسم شبه المنحرف المحصور بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور x من النقطة $(0, 1)$ والنقطة العامة $(0, x)$ الواقعة على امتداد المحور. (عن يسار $(0, 6)$).

ب) اكتب دالة تعبّر عن مساحة شبه المنحرف المذكور أعلاه.
هل هنا أيضاً $S'(x)$ مساوية لِ $f(x)$؟

جـ) احسب بمساعدة الدالة $S(x)$ التي وجدتها،
المساحة المذكورة أعلاه حتى العمود
من النقطة $(0, 5)$.

د) عوّض $x = 6$, في الدالة $S(x)$
وفسّر ماذا تبيّن النتيجة التي
تحصل عليها.



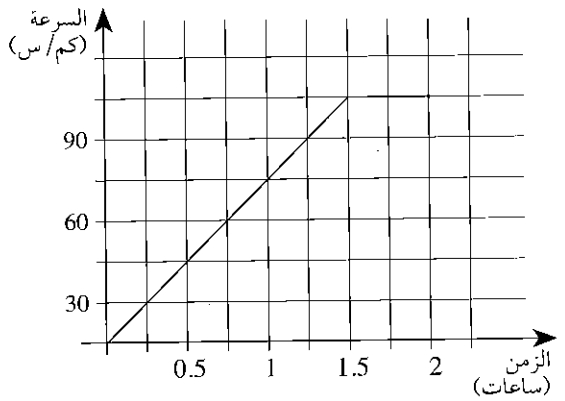
7. الخط البياني المرسوم، يبيّن سرعة سيارة سافرت مدة ساعتين.

أ) كم كانت السرعة بعد مرور نصف ساعة من السفر؟

كم كانت السرعة بعد مرور ساعة واحدة من السفر؟

كم كانت السرعة بعد مرور ساعة ونصف من السفر؟

كم كانت السرعة بعد مرور ساعتين من السفر؟



كما رأيت في البنود السابقة، عندما تكون الحركة بسرعة ثابتة، فان المساحة الواقعة تحت الخط البياني، تبيّن المسافات المقطوعة في أجزاء الزمن الملائمة. كذلك عندما تكون السرعة متغيّرة، فان المساحة تبيّن المسافات المقطوعة أيضاً.

ب) ما هي المسافة التي قطعتها السيارة في الساعة الأولى؟

لوّن مساحة ملائمة على الشكل البياني أعلاه.

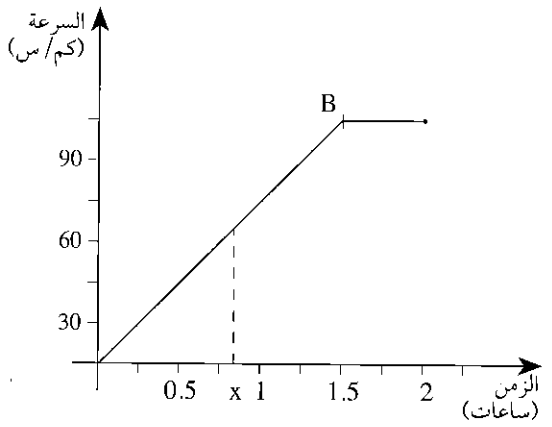
ما هي المسافة التي قطعتها السيارة في الساعتين الأوليين لسفرها؟ لوّن مساحة ملائمة على الشكل.

جـ) اكتب قانون الدالة بالنسبة لِ x بين 0 وَ 1.5 ساعة.

$$f(x) =$$

يتبع ←

د) سجل على العمود من النقطة $(x, 0)$ تعبيراً يبيّن طوله.
اكتب قالباً يبيّن مساحة المثلث. $s(x) =$

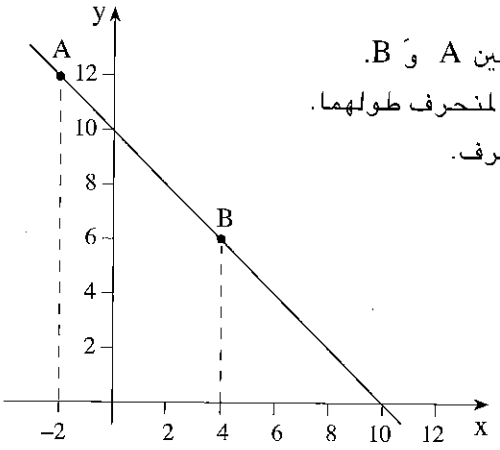


بسّط واحسب $s(1)$ وقارن مع النتيجة الملائمة من البند (ب).

هـ) فكّ الأقواس واجمع، ثم اشتق $s(x)$.
ما هي العلاقة بين $s(x)$ والدالة $f(x)$؟

تمارين

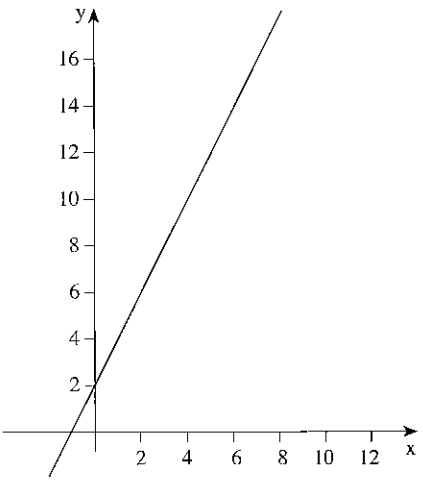
8. الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = -x + 10$
- احسب احداثيات النقطتين A وَ B.
- سجل على قاعدتي شبه المنحرف طولهما.
- احسب ارتفاع شبه المنحرف.
- احسب مساحته.



9. في الشكلين من هذا التمرين، مرسوم الخط البياني للدالة $f(x) = 2x + 2$.

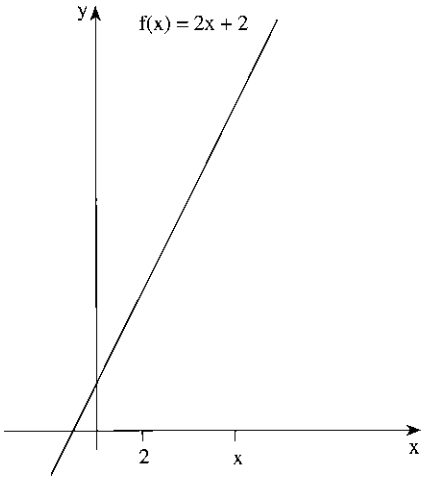
أ) ارسم واحسب مساحة شبه المنحرف المحصور بين الخط البياني للدالة والمحور x، والعمود على المحور x من النقطة $(0, 0)$ والعمود على المحور x من النقط الآتية:

i) من النقطة $(5, 0)$ ii) من النقطة $(8, 0)$



ب) عبّر عن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين من النقطة $(0, 0)$ والنقطة العامة $(x, 0)$ الواقعة على امتداد المحور.

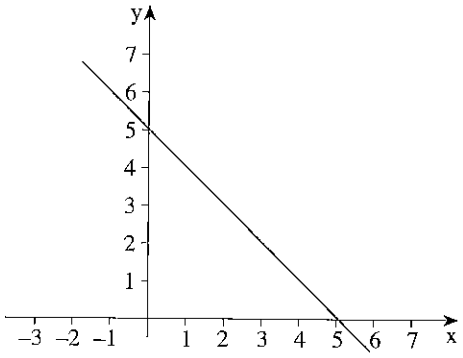
$s(x) =$



جـ) فك الأقواس واجمع، ثم اشتق.
قارن مع $f(x)$.

د) احسب المساحة المذكورة أعلاه حتى العمود من النقطة $(8, 0)$ وافحص هل حصلت على ذات النتيجة كما في البند أ (ii).

10. أ) جد دالة مساحة $s(x)$ تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x) = -x + 5$ والمحور x والمحور y والعمود من النقطة $(x, 0)$ على امتداد المحور بحيث لا تتخطى $(5, 0)$. (ارسم أولاً).



ب) احسب $s(3)$ و $s(5)$.

جـ) احسب مساحة المثلث المرسوم وافحص هل حصلت على $s(5)$.

د) اشتق $s(x)$. على ماذا حصلت؟

11. حسبوا ووجدوا ان الدالة $s(x) = 2x^2 - 2$ تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور x من النقطة $(1, 0)$ والنقطة $(x, 0)$ الواقعة على امتداد المحور.

أ) احسب $s(3)$, $s(6)$, $s(3)$.

ب) حاول ان تجد قانون الدالة $f(x)$. (معادلة المستقيم.)

ما هو الخط البياني الملائم؟

(فعالية بمساعدة البرمجية هندسة في حركة).

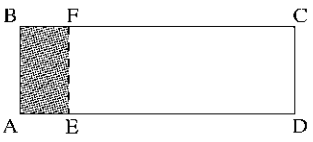
في البنود السابقة، تعرفت الى الدالة $s(x)$, ***التي تبيّن المساحة الواقعة تحت الخط البياني للدالة*** $f(x)$. ***ورأيت ان المساحة تتغيّر تبعاً لموقع العمود المقام من النقطة*** $(x, 0)$.

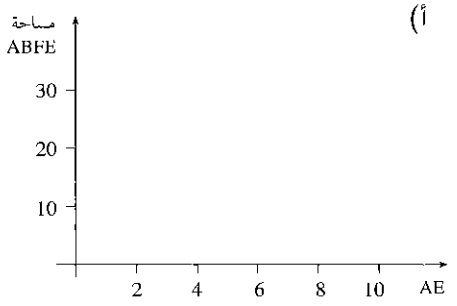
في هذه الفعالية، سوف ترسم خطوطاً بيانية مخمنة تبيّن تغيّر المساحة. ثم بعد ذلك سوف تفحص تخمينك بمساعدة البرمجية هندسة في حركة.

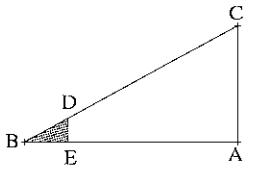
ارسم خطاً بيانياً يبيّن تغيّر المساحة المظللة المحصورة داخل الشكل، وذلك عند تحرك العمود من النقطة E الى اليمين.

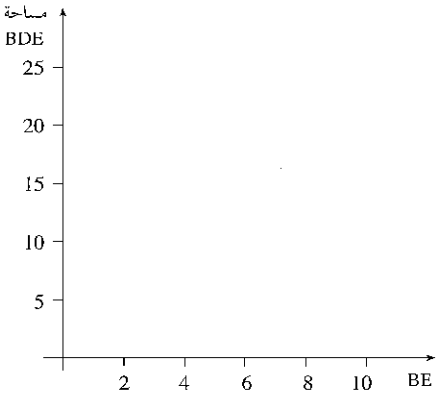
(يعني ان النقطة E هي $(x, 0)$).

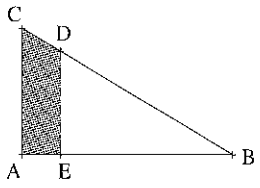
أ)

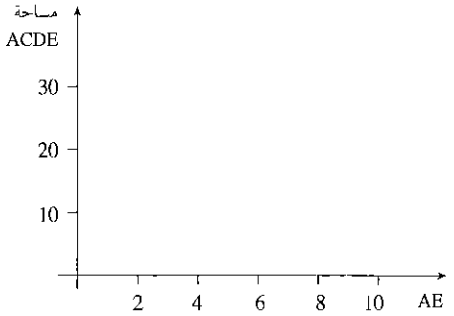


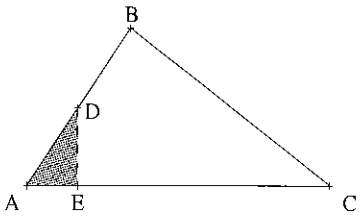


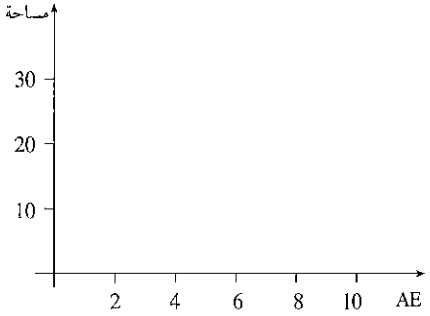




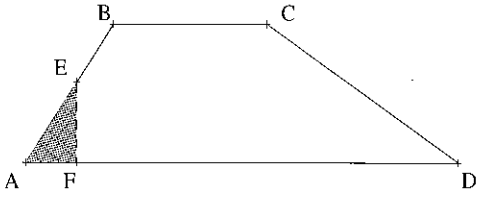


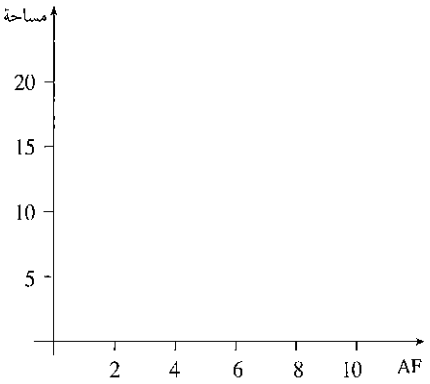






ب) في هذا التمرين، النقطة F هي $(x, 0)$.





كي تفحص الأشكال، افتح البرمجية **هندسة في حركة**.

أ) اختر مستطيلاً.

← ابنِ.

أقم عموداً من النقطة E على المستقيم AD الى المستقيم BC.

← ضع الاشارة في مكان ما على AD واضغط. تعين النقطة E.

← عمود من E للمستقيم BC

لوّن المساحة ABFE.

← اضغط على shift وعلى النقط A, B, F, E.

تنفيذ ← املأ الشكل.

افتح مقياس طول لقياس AE.

← سجل AE.

افتح مقياس مساحة.

← سجل ABFE.

حضّر هيئة محاور.
سجّل ماذا يبيّن كل محور.

← قرّب الاطار من الشاشة واضغط.

قرّب الاشارة الى السهم الذي في أسفل مقياس الطول، اضغط وحرك السهم الذي في أسفل اطار الرسم، (تحت المحور x) وحرّر. يسجل AE.

غيّر الوحدات على المحورين
سجل أعداداً في الاطارات الملائمة:

أعد بالنسبة لمقياس المساحة والمحور y.

قرّب الاشارة الى أحد المحورين واضغط مرتين.
المحور الأفقي من 0 حتى 10.
المحور العمودي من 0 حتى 30.

ارسم الخط البياني الذي يبيّن تغيّر المساحة ABFE كدالة لِ AE.

← قرّب الاشارة الى النقطة E،

اضغط وأزح على طول AD. يُرسم الخط البياني.

قارن مع الخط البياني الذي خمنته ورسمته في البند (أ) (حسب العمل في الحاسوب).

ب) اختر مثلثاً قائم الزاوية.

ابنِ.

أنزل عموداً الى المستقيم AB من النقطة D على المستقيم BC.

ضع الاشارة في مكان ما على BC واضغط.تعين النقطة D.

عمود من D للمستقيم AB.

لوّن المساحة DBE.

اضغط على shift وعلى النقط D, B, E.

تنفيذ ← املأ الشكل.

افتح مقياس طول لقياس AE.

سجل BE.

افتح مقياس مساحة.

سجل DBE.

حضّر هيئة محاور

قرّب الاطار من الشاشة واضغط.

سجل ماذا يبيّن كل محور.

صل مقياس الطول بالمحور x، ومقياس المساحة بالمحور y .

غيّر الوحدات على المحورين.

قرّب الاشارة الى احد المحورين واضغط مرتين.
المحور الأفقي من 0 حتى 10.
المحور العمودي من 0 حتى 25.

ارسم

أزح D.

جـ) بامكانك استعمال البناء السابق.

امحُ اللون من داخل المثلث DBE.

اضغط داخل المثلث الملوّن، وبعد ذلك اضغط delete.

لوّن المساحة ACDE.

← اضغط على shift وعلى النقط E, D, C, A.

تنفيذ ← املأ الشكل.

سجّل مقياس المساحة ACDE.

اضغط داخل مقياس المساحة. امحُ وسجل ACDE.

امحُ الخط البياني السابق.

اضغط على اطار الرسم ← تنفيذ ← امحُ المعطيات.

صل مقياس المساحة الجديد بالمحور y.

ارسم الخط البياني.
وقارن مع الخط البياني الذي رسمته في البند (جـ).

← أزح D.

في البندين التاليين (في الصفحتين التاليتين)، هناك حاجة للتحرك على AB ***وعلى*** BC ***كل على انفراد.***
كي نبني مرتين، نختار نقطة ليست على هاتين القطعتين ونتحرك بحذر على الضلعين.

د) اختر مثلثاً عاماً.

ابنِ.

انزل عموداً **من أية** نقطة D الى المستقيم AC.

ضع الاشارة في مكان ما فوق A وليس على A B.

عمود من D للمستقيم AC.

لا تلوّن.

افتح مقياس طول لقياس AE .

سجل AE.

افتح مقياسي مساحة.

سجل ADE.

سجل ABDE.

حضّر هيئة محاور.

قرّب الاطار من الشاشة واضغط.

سجل ماذا يبيّن كل محور.

صل مقياس الطول بالمحور x ومقياس المساحة ADE بالمحور y.

غيّر الوحدات على المحورين.

قرّب الاشارة الى احد المحورين واضغط مرتين.
المحور الأفقي من 0 حتى 10.
المحور العمودي من 0 حتى 30.

ارسم الخط البياني.

أزح D بحذر على طول AB من A حتى B.

غيّر مقياس المساحة.
تابع الرسم.

صل مقياس المساحة ABDE بالمحور y.
تابع ازاحة D على BC حتى C.

قارن مع الخط البياني الذي رسمته في البند (د).

هـ) اختر شبه منحرف.

كبّره.

أعد البناء من البند السابق.

أنزل عموداً **من أية** نقطة E الى المستقيم AD.

افتح مقياس طول لقياس AF.

افتح **ثلاثة** مقاييس مساحة.

حضّر هيئة محاور.

سجّل ماذا يبيّن كل محور.

صل مقياس الطول بالمحور x ومقياس المساحة AEF بالمحور y.

غيّر الوحدات على المحورين.

قرّب الاشارة الى أحد المحورين واضغط مرتين.
المحور الأفقي من 0 حتى 10.
المحور الأفقي من 0 حتى 30.

ارسم الخط البياني.

غيّر مقياس المساحة.
تابع الرسم.

صل مقياس المساحة ABDE بالمحور y.
تابع ازاحة E على BC حتى C.

غيّر مقياس المساحة.
تابع الرسم.

صل مقياس المساحة ABCEF بالمحور y .
تابع ازاحة E على CD حتى D.

قارن مع الخط البياني الذي رسمت في البند (هـ).

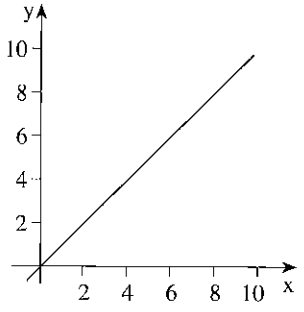
ايجاد دالة المساحة

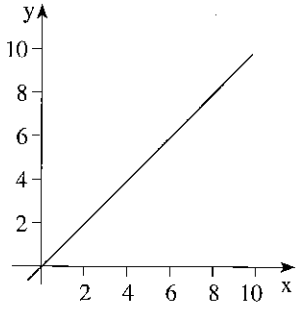
لقد بيّنا بمساعدة أمثلة، أنه عندما تبيّن الدالة $S(x)$ المساحة المحصورة بين الخط البياني لدالة خطية $f(x)$ الموجبة في المجال المعني وبين المحور x ، والعمود علي المحور من نقطة معطاة عليه والعمود على المحور x من نقطة عامة $(x, 0)$ ، حينئذ يكون $S'(x) = f(x)$.

في التمرينين 2, 1 سوف نبيّن كيف تؤثر نقطة البداية (العمود الأيسر) على دالة المساحة.

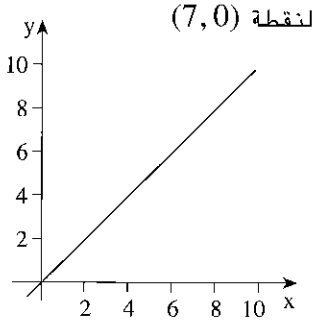
1. أ) جد دالة المساحة $S(x)$, التي تصف المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x) = x$ والمحور x والعمود على المحور من النقطة المعطاة والعمود من نقطة أخرى $(x, 0)$ واقعة على امتداد المحور (خطط المساحة).

i) العمود من النقطة $(2, 0)$ ii) العمود من النقطة $(4, 0)$





iii) العمود من النقطة $(7, 0)$



ب) بماذا تختلف الدوال $S(x)$ الناتجة، الواحدة عن الأخرى؟
ماذا يمكنك ان تقول عن مشتقاتها؟

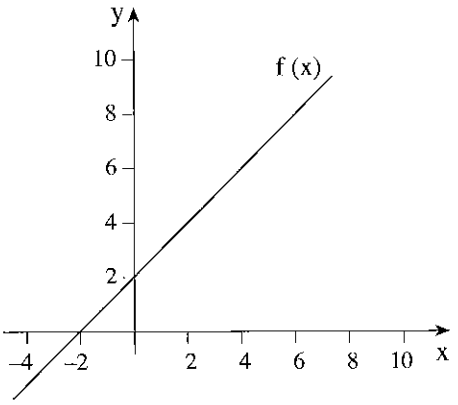
في جميع البنود، حسبت المساحة الواقعة تحت نفس الدالة $f(x) = x$. تختلف دوال المساحة الناتجة، الواحدة عن الأخرى بزيادة ثابتة. لذلك فان لها نفس المشتقة.

2. جد دالة المساحة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x) = x + 2$ والمحور x والعمود من النقطة المعطاة والعمود من نقطة عامة $(x, 0)$ واقعة على امتداد المحور. (ارسم أولاً).

أ) العمود من النقطة $(1, 0)$ – ارسم.

ب) العمود من النقطة $(3, 0)$.

جـ) العمود من النقطة $(0, 0)$ (المحور y).



عائلة دوال المساحة $s(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \square$ تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x) = x + 2$ والمحور x والعمود من نقطة معطاة على المحور x والعمود من نقطة عامة $(x, 0)$ الواقعة على امتداد المحور.

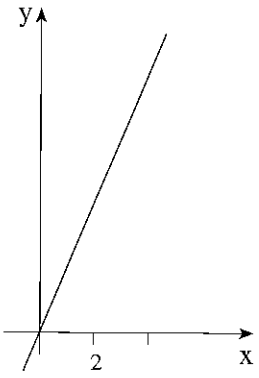
بدلاً من تسجيل المربع الفارغ (يتحدد العدد بداخله حسب موقع النقطة التي منها يقام العمود الأول) نستعمل الحرف c.

في المثال: $s(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$.

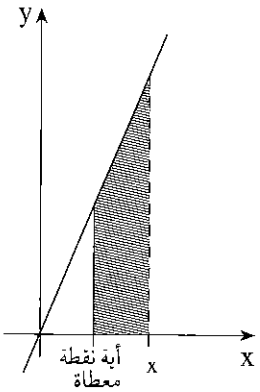
3. الدالة المرسومة هي $f(x) = 4x$.

أ) جد دالة $s(x)$ تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمود من النقطة المعطاة والعمود من نقطة عامة $(x, 0)$ على امتداد المحور – خطط المساحة.

i) من النقطة $(1, 0)$ ii) من النقطة $(3, 0)$



ب) اشتق كل واحدة من الدالتين الناتجتين، وافحص هل حصلت على $f(x)$.



جـ) سجل عائلة الدوال $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة.

بدلاً من ايجاد مساحة شبه المنحرف، يمكن ايجاد دالة المساحة بدءاً من العمود من أية نقطة معطاة، بطريقة اخرى: يمكن ايجاد دالة $s(x)$ التي مشتقتها هي $f(x)$.

كما رأيت، توجد عائلة كاملة من الدوال كهذه، تختلف الواحدة عن الأخرى في الثابت c. تحدد قيمة c بمساعدة موقع العمود الأيسر الذي يكوّن شبه المنحرف.

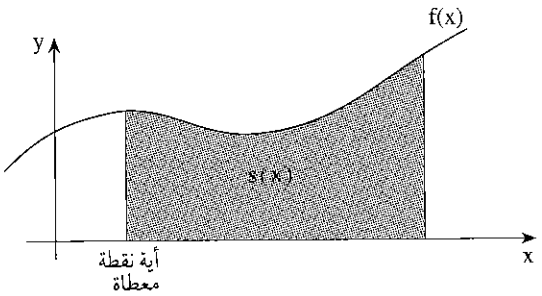
4. أ) **خمّن** ما هي عائلة الدوال التي تبيّن المساحة المظللة عندما:

$f(x) = 2x$

$s(x) =$

في التمرين 4، خمنت عائلة الدوال $s(x)$ دون حاجة لحساب مساحة شبه المنحرف. النتيجة التي حصلت عليها في حالات خاصة من الدوال الخطية، صحيحة أيضاً في حالات من الدوال غير الخطية.

اذا كانت $f(x)$ دالة موجبة (في المجال المعني)، فان الدالة $s(x)$ تبيّن المساحة المظللة من الشكل وهي دالة تنتمي لعائلة تحقق $s'(x) = f(x)$.



فيما يلي من المادة، سوف نتعلم كيف نجد قيمة c حسب النقطة المعطاة، أيضاً في حالات من الدوال غير الخطية. بالنسبة للدوال الخطية فقد وجدنا قيمة c عندما حسبنا مساحة شبه منحرف.
نتركز الى حين، في ايجاد عائلات من الدوال $s(x)$.

5. أ) خمّن ما هي عائلة دوال المساحة التي تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x) = 3x^2$ والمحور x والعمود من أية نقطة معطاة والعمود من نقطة عامة $(x\ ,\ 0)$ الواقعة على امتداد المحور.

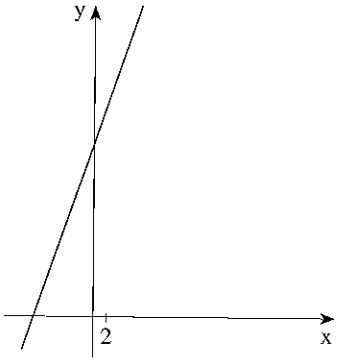
ب) - هل الدالة $s(x) = x^3 - 3$ تنتمي للعائلة؟
اشتق، هل حصلت على $f(x)$؟
- هل الدالة $s(x) = x^2 - 3$ تنتمي للعائلة؟
اشتق، هل حصلت على $f(x)$؟
- هل الدالة $s(x) = x^3 + 2$ تنتمي للعائلة؟
اشتق، هل حصلت على $f(x)$؟

جـ) سجل دالتين اخريين تنتميان للعائلة.

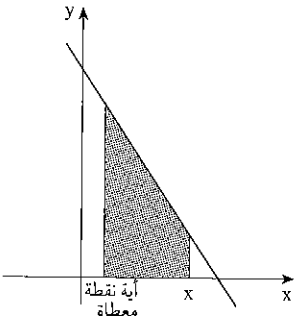
تمارين

6. أ) خمّن أو احسب بمساعدة مساحة شبه منحرف، ما هي عائلة الدوال $s(x)$ التي تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x) = 4x + 12$ والمحور x والعمود من أية نقطة معطاة والعمود من نقطة عامة $(x, 0)$ الواقعة على امتداد المحور. اشتق وافحص هل حصلت على $f(x)$.

ب) أقم عموداً على المحور x من النقطة $(2, 0)$ ولوّن المساحة الملائمة بدءاً من العمود الذي رسمته حتى العمود من نقطة عامة $(x, 0)$ واقعة على امتداد المحور.



7. أ) خمّن ما هي عائلة دوال المساحة التي تبيّن المساحة المظللة، اذا كانت $f(x) = -2x + 6$. اشتق وافحص.

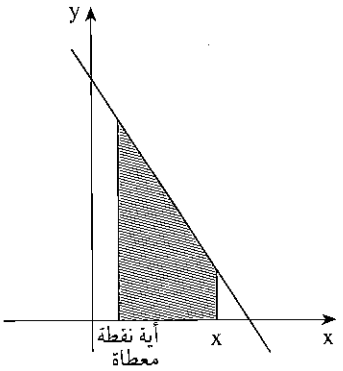


ب) - هل الدالة $s(x) = -x^2 + 6x + 2$ تنتمي للعائلة؟ علّل.

- هل الدالة $s(x) = -x^2 + 6x$ تنتمي للعائلة؟ علّل.

- هل الدالة $s(x) = -x^2 + 6$ تنتمي للعائلة؟ علّل.

8. أ) خمّن ما هي عائلة دوال المساحة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x) = -3x^2 + 8$ والمحور x، والعمود على المحورx من نقطة معطاة والعمود من نقطة عامة $(x, 0)$ الواقعة على امتداد المحور (في المجال المعني تكون $f(x)$ موجبة).



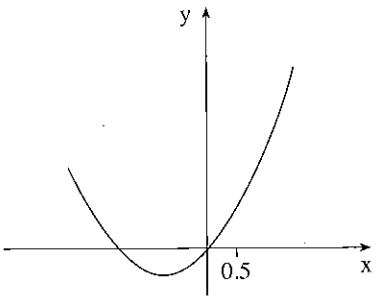
ب) اشتق وافحص هل حصلت على $f(x)$.

جـ) سجّل دالتين تنتميان للعائلة.

9. أ) خمّن ما هي عائلة الدوال $s(x)$ التي تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x) = 3x^2 + 2x$ والعمود من أية نقطة معطاة والعمود من نقطة عامة $(x, 0)$. في المجال $x > 0$).

ب) اشتق وافحص هل حصلت على $f(x)$.

جـ) سجّل دالتين تنتميان للعائلة.



د) أقم عموداً على المحور x من النقطة $(\frac{1}{2}, 0)$ ولوّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمود الذي رسمته والعمود من نقطة عامة $(x, 0)$.

كيفية ايجاد العائلة S.

رأيت في البنود السابقة أن $s'(x) = f(x)$. وهذا يعني، كي تجد عائلة دوال المساحة $s(x)$، عليك ايجاد عائلة من الدوال التي عندما تشتقها تحصل على $f(x)$. في البند السابق، خمنت عائلة الدوال حسب الدالة المعطاة $f(x)$، ثم فحصت بواسطة الاشتقاق. في هذا البند، سنستعين بهذه الطريقة (التخمين والفحص) من أجل ايجاد دوال مشتقاتها معطاة، ومن أجل ايجاد قواعد تمكننا من ايجاد دوال كهذه.

في هذه المرحلة سنتعامل مع ايجاد الدوال حسب مشتقاتها، دون **علاقة لحساب المساحة** أيضاً. لذلك سوف لن نحصر عملنا في المجالات التي فيها قيم الدالة موجبة.

1. أ) سجّل عائلة الدوال $s(x)$ التي مشتقتها $f(x) = 2x + 1$.

ب) سجل دالة تنتمي للعائلة واشتقها. هل حصلت على $f(x)$ ؟

> الدالة $s(x)$ المعرّفة في مجال متصل، والتي مشتقتها مساوية لِ $f(x)$، تدعى دالة أصلية $f(x)$.

2. أشر الى الادعاءات الصحيحة وافحص بواسطة الاشتقاق.

أ) اذا كانت $f(x) = 3x^2$ فان $s(x) = x^3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

ب) اذا كانت $f(x) = x^2$ فان $s(x) = \frac{x^3}{3} + 10$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

جـ) اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ فان $s(x) = x^3 + x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

د) اذا كانت $f(x) = x^3$ فان $s(x) = x^4$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

هـ) اذا كانت $f(x) = x$ فان $s(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

و) اذا كانت $f(x) = x$ فان $s(x) = \frac{x^2}{2} + c$ هي عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x)$. (c هو أي عدد.)

3. أشر الى الادعاءات الصحيحة وافحص بواسطة الاشتقاق.

معطاة: $f(x) = 3x^2 + 2x$

أ) الدالة $s(x) = x^3 + x^2$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

ب) الدالة $s(x) = x^3 + 4$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

جـ) الدالة $s(x) = x^3 + x^2 + x$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

د) الدالة $s(x) = x^3 + x^2 + 4$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

4. أ) ما هي عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = x$ ؟
سجل دالة من هذه العائلة، اشتق وافحص.

ب) ما هي عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = x^2$ ؟
سجل دالة من هذه العائلة، اشتق وافحص.

جـ) ما هي عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = x^3$ ؟
سجل دالة من هذه العائلة، اشتق وافحص.

د) ما هي عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = x^4$ ؟
سجل دالة من هذه العائلة، اشتق وافحص.

هـ) ما هي عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = x^{12}$ ؟
سجل دالة من هذه العائلة، اشتق وافحص.

و) ما هي عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = x^{14}$ ؟
سجل دالة من هذه العائلة، اشتق وافحص.

يمكن كتابة القاعدة التي وجدتها من التمرين 4 بشكل عام:

عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = x^n$ n عدد طبيعي

هي: $s(x) = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$

ز) ما هي عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = x^{47}$

معطى اضافي يمكن ان يساعدنا في ايجاد دالة معينة من العائلة (يعني ايجاد c). سنرى ذلك في التمرين التالي.

5. عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = 4x^3$ هي $s(x) = x^4 + c$

أ) معلوم ان $s(2) = 0$.

يعني، عندما يكون $x = 2$ تكون قيمة الدالة $s(x)$ مساوية 0.

$s(x) = x^4 + c$

نعوّض $x = 2$ و $s(x) = 0$: $0 = 2^4 + c$

أكمل.

$c =$

سجل الدالة: $s(x) =$

ب) جد قيمة c اذا كان $s(1) = 0$، وسجل الدالة.

جـ) جد قيمة c اذا كان $s(3) = 2$، وسجل الدالة.

د) سجّل دالة من العائلة $s(x)$ اذا علمت ان خطها البياني يمر في النقطة $(0, 12)$.

قواعد لايجاد دوال أصلية

6. سجل عائلة الدوال الأصلية لكل واحدة من الدوال الآتية.

اشتق وافحص.

أ) $f(x) = 3x^3$

ب) $f(x) = 6x^2$

جـ) $f(x) = 5x^2$

د) $f(x) = -x^3$

اذا حصلت بعد الاشتقاق على الدالة $f(x)$ ***، فانك قد نفّذت القاعدة التالية:***

اذا كانت $s(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$، فانه ان نضرب $f(x)$ في عدد ما يجب ان نضرب $s(x)$ ، عائلة الدوال الأصلية في نفس العدد.

بالنسبة لدوال القوى اذا كانت $f(x) = \boxed{k} \cdot x^n$ (n طبيعي)

فان $s(x) = \boxed{k} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

7. سجل عائلة الدوال الأصلية لكل واحدة من الدوال الآتية. اشتق وافحص.

أ) $f(x) = 3x^2 + 2x$ د) $f(x) = 3x^2 + 2$

ب) $f(x) = x^2 + x$ هـ) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

جـ) $f(x) = 4x^3 + 6x$

اذا حصلت بعد الاشتقاق على الدالة $f(x)$ فانك قد نفّذت القاعدة التالية:

عائلة الدوال الأصلية لمجموع من الدوال مساوية لمجموع الدوال الأصلية.

8. سجّل عائلة الدوال $s(x)$ الأصلية للدالة $f(x) = 6x^2 - 2x$ اشتق وافحص.

أ) معلوم ان احدى دوال العائلة تمر في النقطة $(0, 3)$ سجل هذه الدالة.

ب) جد قيمة c اذا كان $s(2) = 0$ وسجل الدالة.

جـ) جد قيمة c اذا كان $s(-2) = 0$ وسجل الدالة.

د) جد قيمة c اذا كان $s(1) = 3$ وسجل الدالة.

تمارين

9. جد عائلة الدوال الأصلية لكل واحدة من الدوال المعطاة.

أ) $f(x) = x^{12}$ هـ) $f(x) = x^5$

ب) $f(x) = x^{20}$ و) $f(x) = x^{19}$

جـ) $f(x) = x^7$ ز) $f(x) = 1$

د) $f(x) = 6$ ح) $f(x) = 0$

اشارات وأسماء

اذا كان $s'(x) = f(x)$ فان $s(x)$ هذه هي عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x)$.

توجد اشارة مباشرة بمساعدة $f(x)$ تبين عائلة الدوال الأصلية $s(x)$ وهي:

$s(x) = \int f(x)\mathbf{dx}$ (نسجل dx لأسباب رياضية لن نفصّلها هنا).

ونقرأ هذه: "التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ ".

تستعمل الاشارة $\int \square \cdot dx$ لترمز الى عائلة الدوال الأصلية $s(x)$.

مثلاً، لنرمز أن $s(x) = 2x^4 + c$ هي عائلة الدوال الأصلية

للدالة $f(x) = 8x^3$ نسجل: $\int 8x^3dx = 2x^4 + c$

1. جد التكامل:

مثال: $\int (x^2 + 3)dx = \frac{x^3}{3} + 3x + c$

أ) $\int 3x^2\,dx$

ب) $\int (3x^2 + 4)dx$

جـ) $\int (6x^3 + 2x)dx$

د) $\int (6x^4 + 2x + 1)dx$

هـ) $\int (8x^3 + x)dx$

و) $\int (9x^2 + x + 4)dx$

2. افحص بواسطة الاشتقاق وبيّن اذا كان صحيحاً أم لا (بامكانك في البداية، ان تسجل أي عدد تشاء بدلاً من c.)

أ) $\int (x^2 + x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$

ب) $\int (3x^2 + 4)dx = x^3 + 4x + c$

جـ) $\int x^2dx = 2x + c$

د) $\int (2x + 1)dx = x^2 + c$

3. أ) استعمل اشارة التكامل وجد عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = x^3$.

ب) سجّل وجد تكاملاً غير محدود للدالة $f(x) = x^4 + 3x^3$.

جـ) استعمل اشارة التكامل وجد عائلة الدوال الأصلية للدالة $f(x) = -x^3 + 2x + 1$.

4. أ) معلوم أن $s'(x) = 4x + 7$. جد عائلة الدوال الأصلية للدالة $s(x)$.

ب) جد الدالة $s(x)$ اذا علمت ان الخط البياني لها يمر في $(0, 1)$.

5. بما أن مجال الدالة يجب ان يكون متصلاً، عليك الاهتمام في ايجاد التكامل الآتي فقط في احد المجالين $x > 0$ أو $x < 0$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{لذلك} \qquad \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$$

افحص بواسطة الاشتقاق وبيّن اذا كان صحيحاً أم لا.

أ) $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + c$

ب) $\int \left(\frac{1}{x^2} + 4\right) dx = -\frac{1}{x} + 4x + c$

جـ) $\int \left(3 - \frac{5}{x^2}\right)dx = 3x + \frac{5}{x} + c$

د) $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = x + \frac{1}{x^2} + c$

6. نفّذ القسمة ثم جد التكامل.

مثال: $\int \frac{2x^2 + 3}{x^2}dx = \int \left(2 + \frac{3}{x^2}\right)dx = 2x - \frac{3}{x} + c$

أ) $\int \frac{2 - 3x^4}{x^2}dx$

ب) $\int \frac{x^4 - x}{x^3}dx$

جـ) $\int \frac{5x + 2x^3}{x^2}dx$

د) $\int \frac{5x^4 + x^3}{x^2}dx$

7. لكل $x > 0$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ لذلك $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + c$

احسب وافحص بواسطة الاشتقاق.

أ) $\int 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ جـ) $\int \frac{4}{\sqrt{x}}dx$

ب) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ د) $\int (\frac{6}{\sqrt{x}} + 1)dx$

تمارين

8. جد التكامل.

أ) $\int \frac{-1}{x^2}dx$ و) $\int \frac{5}{x^2}dx$

ب) $\int (\frac{1}{x^2} + x)dx$ ز) $\int (4 - \frac{3}{x^2})dx$

جـ) $\int (\frac{1}{x^2} + 1)dx$ ح) $\int (\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2})dx$

د) $\int (\frac{1}{x^2} + x + 1)dx$ ط) $\int \frac{x^4 - x}{x^3}dx$

هـ) $\int \frac{4x^4 - x}{x}dx$ ي) $\int \frac{2x^4 - 5x^2}{x^4}dx$

9. أ) جد عائلة الدوال: $s(x) = \int (x^2 - \frac{3}{x^2})dx$

ب) احسب قيمة c اذا علم أن $s(3) = 0$ وسجل الدالة الناتجة.

جـ) احسب قيمة c اذا علم أن $s(-1) = 0$ وسجل الدالة الناتجة.

د) احسب قيمة c اذا علم أن $s(2) = 0$ وسجل الدالة الناتجة.

هـ) احسب قيمة c اذا علم ان الخط البياني للدالة يمر في $(1, 0)$ وسجل الدالة الناتجة.

و) احسب قيمة c اذا علم ان الخط البياني للدالة يمر في $(-2, 1)$ وسجل الدالة الناتجة.

10. أ) جد $s(x) = \int (x - \frac{4}{x^2})dx$

ب) احسب قيمة c اذا علم أن $s(4) = 0$.

جـ) احسب قيمة c اذا علم أن $s(10) = 0$.

11. جد التكامل.

أ) $\int (-\frac{1}{2\sqrt{x}})dx$

ب) $\int \frac{4}{\sqrt{x}}dx$

جـ) $\int (\frac{4}{\sqrt{x}} + x)dx$

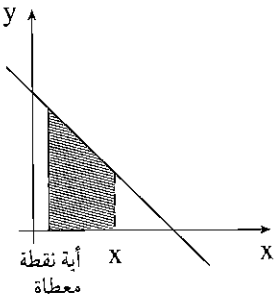
د) $\int (\frac{4}{\sqrt{x}} + 3)dx$

هـ) $\int (\frac{6}{\sqrt{x}} - 2x + 1)dx$

و) $\int (\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2})dx$

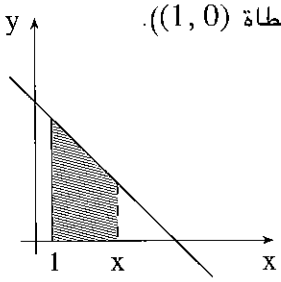
العودة الى حساب المساحات

1. أ) ما هي عائلة الدوال التي تبيّن
المساحة المظللة عندما $f(x) = -x + 3$.
سجل بواسطة التكامل ثم جد $s(x)$.

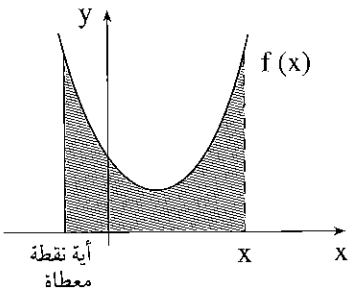


$s(x) =$.

ب) نعود الآن الى طريقة الحساب السابقة:
عبّر عن مساحة شبه المنحرف (النقطة المعطاة $(1, 0)$).
قارن مع $s(x)$ التي وجدتها في البند (أ)
بيّن قيمة c في هذه الحالة.



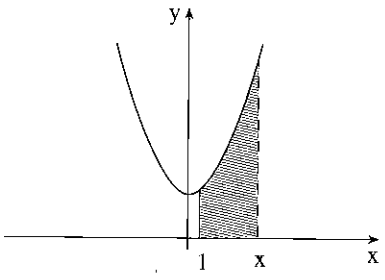
2. جد عائلة الدوال $s(x)$ التي تبيّن
المساحة المظللة عندما
$f(x) = 3x^2 - 6x + 4$
(سجّل بواسطة التكامل).



لا يمكن حساب قيمة c هنا، كما فعلنا في التمارين السابقة عندما استعنا بمساحة شبه المنحرف.

في البنود السابقة، تعلمت كيف تحسب c تبعاً لموقع نقطة معطاة على الخط البياني للدالة. ستتعلم في هذا البند، كيف تجد قيمة c تبعاً لنقطة على المحور x، منها يقام العمود الذي يبيّن بداية حساب المساحة. ان تحديد قيمة c يمكّنك من حساب مساحة محصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x وعمودين على المحور.

3. أ) جد التكامل $\int (3x^2 + 4)dx$



يعني: $s(x) =$

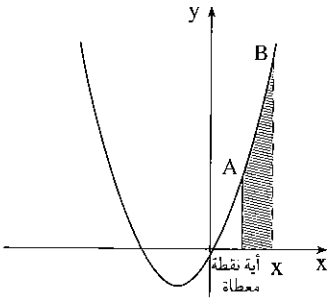
ب) عند التفتيش عن دالة المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(1, 0)$ **حينئذ يكون معلوماً أن $s(1) = 0$.** فسر لماذا.

عوّض وجد قيمة c في هذه الحالة، ثم سجل الدالة الناتجة.

جـ) **احسب** المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(1, 0)$ حتى العمود من النقطة $(10, 0)$.

د) احسب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(1, 0)$ حتى العمود من النقطة $(20, 0)$.

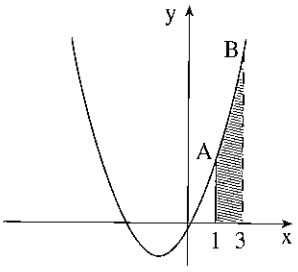
4. أ) جد التكامل $\int (x^2 + 2x)dx$



ب) جد دالة المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(1, 0)$.

(يعني $s(1) =$ ☐.)

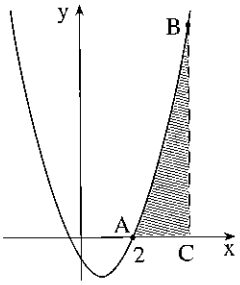
جـ) احسب المساحة حتى العمود من النقطة $(3, 0)$.



د) صل النقطتين A وَ B واحسب مساحة شبه المنحرف الناتج.

هـ) قارن مع المساحة التي حصلت عليها في البند (جـ).

5. أ) جد التكامل $\int (3x^2 - 5x - 2)dx$.



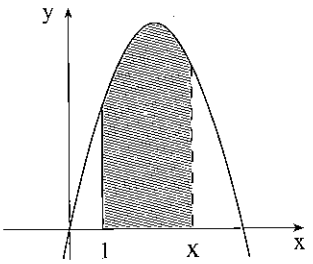
ب) أمامك رسم تقريبي للخط البياني
$f(x) = 3x^2 - 5x - 2$.
جد دالة المساحة بدءاً من النقطة $(2, 0)$
يعني $s(2) = 0$. جد قيمة c وسجل الدالة.

جـ) احسب المساحة بدءاً من النقطة $(2, 0)$ حتى العمود من النقطة $(5, 0)$.

د) ارسم القطعة AB واحسب CB ، AC ومساحة ΔABC.
قارن مع المساحة التي حصلت عليها من البند (جـ) وافحص معقولية النتيجتين.

6. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = -x^2 + 6x$

أ) جد دالة المساحة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة (جد تكاملاً واحسب قيمة c وسجل دالة المساحة).



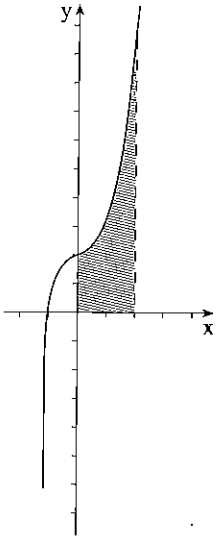
ب) احسب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(1, 0)$ حتى العمود من النقطة $(5, 0)$.

جـ) احسب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(1, 0)$ حتى نقطة التقاطع الثانية للدالة مع المحور x.

7. أ) الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = x^3 + 2$.

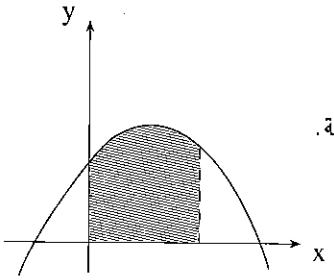
جد دالة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة.



ب) الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$

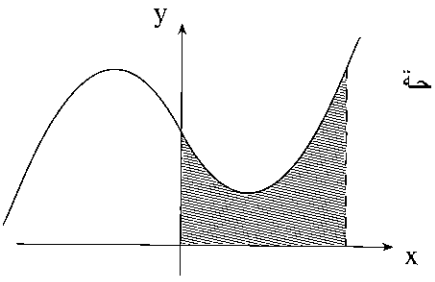
جد دالة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة.



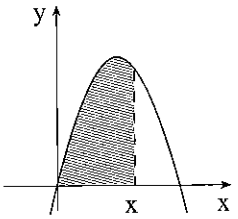
جـ) الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = x^3 - 3x + 4$

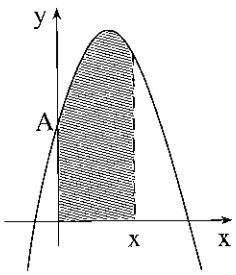
جد دالة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة. (بدءاً من المحور y.)



8. أ) الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = -x^2 + 4x$.
جد دالة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة.

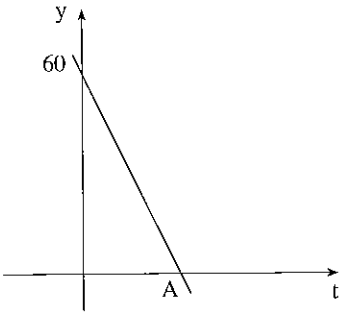


ب) الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = -x^2 + 4x + 5$
جد دالة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة.



جـ) ارسم موازياً للمحور x من النقطة A. أشر الى نقطة تقاطع الموازي والمستقيم المتقطع بالحرف B ، ينتج مستطيل. ما مساحته؟ ما هي العلاقة بين دالة المساحة التي سجلتها في البندين أ وَ ب ومساحة المستطيل؟ (عندما يُقصد في البندين نفس قيمة x.)

9. الدالة $v(t)$ تبيّن سرعة طابة قذفت الى أعلى.
$v(t) = -10t + 60$، t الزمن منذ لحظة القذف.
أ) فسر لماذا تكون الدالة تنازلية؟
ب) كما رأيت في بداية موضوع التكامل، اذا كانت الدالة تبيّن السرعة فان المساحة "المحصورة" تبيّن المسافة. جد دالة المسافة $s(t)$.

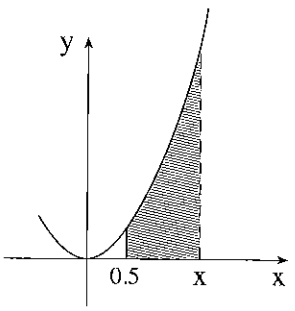


(فسّر لماذا $s(0) = 0$ واستعن بهذا المعطى في ايجاد قيمة c.)
جـ) ما هي المسافة التي قطعتها الطابة في الثانية الأولى؟
د) ماذا تبيّن النقطة A؟
هـ) بعد مرور كم ثانية وصلت الطابة الى أعلى ارتفاع؟ عيّن على على المحور t. ما هو أعلى ارتفاع؟

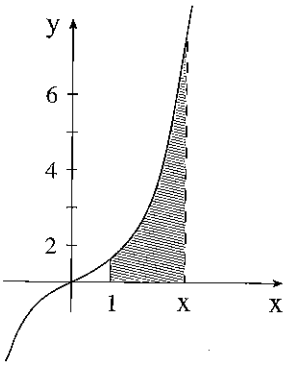
تمارين

10. جد دوال المساحة في الأشكال الآتية.

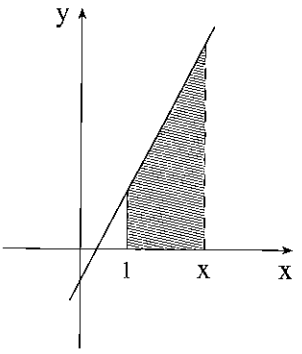
أ) $f(x) = x^2$



ب) $f(x) = x^3$

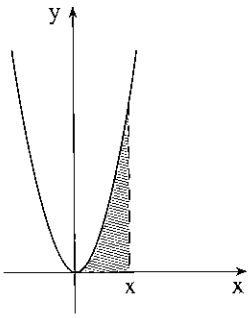


جـ) $f(x) = 2x - 1$



د) احسب مساحة شبه المنحرف المظلل من البند (جـ)، دون استعمال التكامل، وقارن مع الاجابة عن البند (جـ).

11. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = 3x^2$.



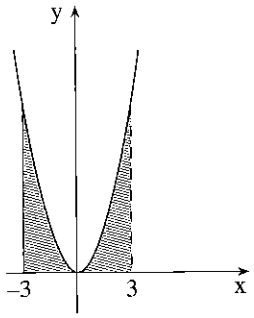
أ) جد دالة تبيّن المساحة المظللة.

ب) احسب $s(3)$.

ما هي المساحة التي تبينها $s(3)$؟

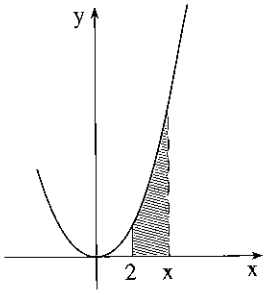
جـ) جد المساحة حتى العمود من النقطة $(6, 0)$.

د) احسب المساحة المظللة.



12. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

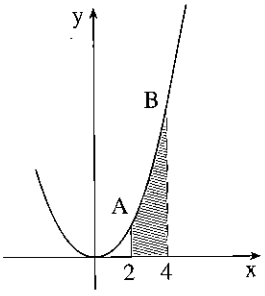


أ) جد دالة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة.

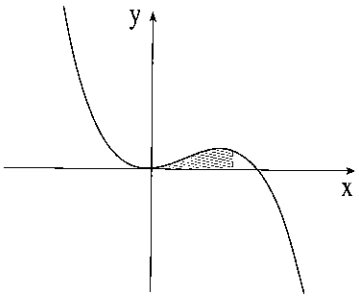
ب) احسب $s(4)$.

جـ) صل النقطتين A وَ B، واحسب مساحة شبه المنحرف الناتج.

هل المساحة المظللة أصغر أم أكبر من مساحة شبه المنحرف؟



13. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = x^2 - x^3$.

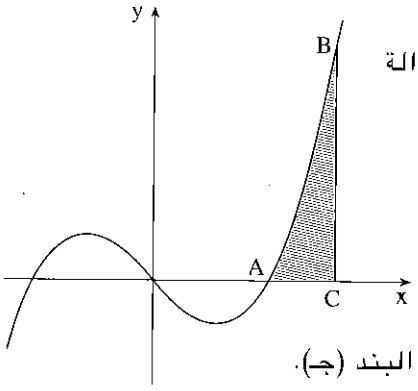


أ) جد دالة $s(x)$، التي تبيّن المساحة المظللة.

ب) جد نقطتي تقاطع الدالة $f(x)$ مع المحور x.

جـ) ظلّل واحسب المساحة المحصورة بين نقطتي تقاطع الخط البياني مع المحور x.

14. أ) جد نقط تقاطع الخط البياني للدالة $f(x) = x^3 - x$ مع المحور x.



ب) جد دالة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة.

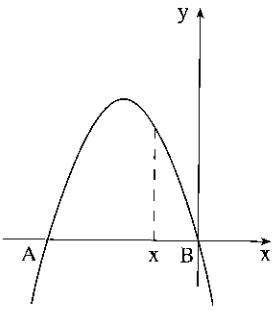
جـ) احسب $s(4)$.

د) ارسم القطعة AB واحسب مساحة ΔABC (عندما $x = 4$).

قارن مع $s(4)$ الذي وجدتها في البند (جـ).

هل تظهر النتيجتان معقولتين؟

15. أ) جد نقطتي تقاطع الخط البياني للدالة $f(x) = -x^2 - 4x$ مع المحور x.



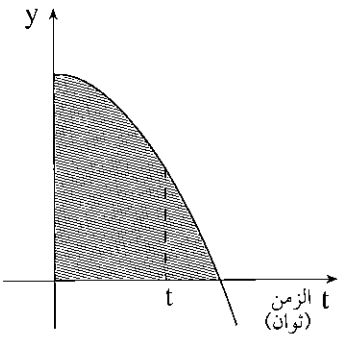
ب) سجل دالة $s(x)$ التي تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x بدءاً من النقطة A، حتى العمود من نقطة عامة $(x, 0)$ واقعة على امتداد المحور.

جـ) ظلّل واحسب المساحة المذكورة أعلاه من النقطة A حتى النقطة B.

16. الدالة $v(t)$ تبيّن سرعة سيارة بعد t ثوان من تشغيل الكوابح (البريكات). $v(t) = 30 - 1.2t^2$ (تقاس السرعة بأمتار في الثانية).

أ) كم كانت سرعة السيارة في لحظة تشغيل الكوابح؟

ب) كم من الوقت استغرقه توقّف السيارة؟
سجّل قيماً ملائمة في نقطتي التقاطع مع المحورين.



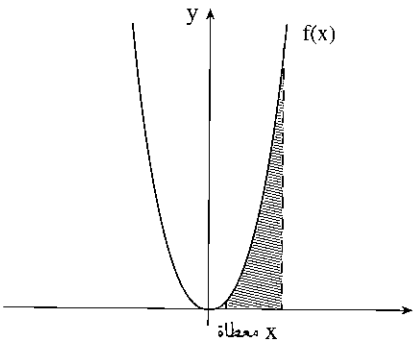
جـ) ماذا تبيّن المساحة المظللة؟

د) سجّل دالة تبيّن المساحة المظللة بدءًا من المحور y حتى العمود من نقطة عامة (جد تكاملاً وقيمة ملائمة لِ c.)

هـ) احسب المساحة المظللة.
عن ماذا تعبّر المساحة بالنسبة لفحوى المسألة؟

تحسين في حساب المساحة

1. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = 3x^2$.



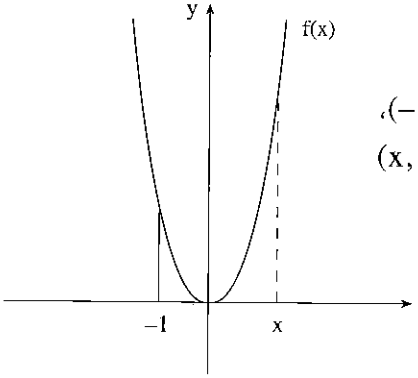
أ) سجل عائلة الدوال $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة.

ب) لو نحسب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(1, 0)$ فان $s(1) = 0$.

عوّض وجد قيمة c وسجل الدالة $s(x)$ في هذه الحالة.

جـ) جد قيمة c عند حساب المساحة بدءاً من العمود على المحور x من النقطة $(0.5, 0)$.

سجّل الدالة $s(x)$ في هذه الحالة.



د) خطط المساحة بدءاً من العمود على المحور x من النقطة $(-1, 0)$، حتى العمود من نقطة عامة $(x, 0)$ واقعة على امتداد المحور.

جد قيمة c وسجّل الدالة $s(x)$ في هذه الحالة.

سجّل الدوال الثلاث التي حصلت عليها من البنود ب، جـ، د.

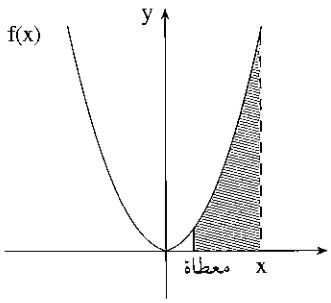
$s(x) =$

$s(x) =$

$s(x) =$

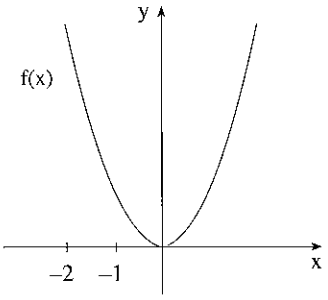
ماذا يمكنك ان تقول عن الخطوط البيانية للدوال الثلاث؟

2. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = x^2$



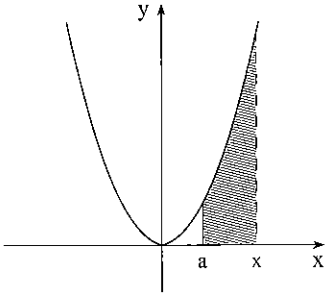
أ) سجل عائلة الدوال $s(x)$ التي تبيّن المساحة المظللة.

ب) خطّط المساحة بدءاً من العمود على المحور x من النقطة $(-2, 0)$ حتى العمود من نقطة عامة $(x, 0)$ واقعة على امتداد المحور.
جد قيمة c وسجل $s(x)$ في هذه الحالة.



جـ) جد قيمة c عند حساب المساحة بدءاً من العمود على المحور x من النقطة $(2, 0)$.
سجّل الدالة $s(x)$ في هذه الحالة. خطّط.

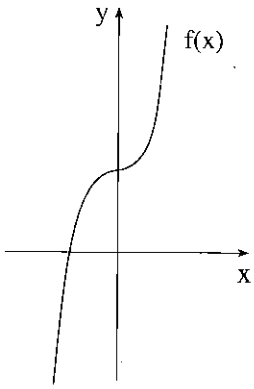
د) بيّن أنه عند حساب المساحة بدءاً من العمود على المحور x من نقطة $(a, 0)$، فان $c = \frac{a^3}{3}$.



في هذه الحالة، تكون عائلة الدوال من الصورة:

$$s(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

3. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = x^3 + 3$.



أ) جد عائلة الدوال $s(x)$:

$$s(x) = \int (x^3 + 3)dx$$

ب) جد قيمة c عند حساب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(1, 0)$ حتى نقطة عامة $(x, 0)$ واقعة على امتداد المحور.
خطط مساحة ملائمة على الشكل البياني.

جـ) جد قيمة c عند حساب المساحة بدءاً من العمود على المحور x من النقطة $(-1, 0)$.
سجل الدالة $s(x)$ في هذه الحالة.

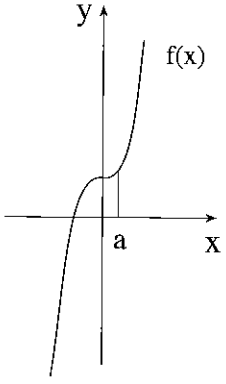
د) جد قيمة c عند حساب المساحة بدءاً من المحور y.

هـ) عبّر عن c عند حساب المساحة بدءاً من العمود ومن نقطة $(a, 0)$.
(كل المساحة الواقعة فوق المحور x.)
سجّل $s(x)$ من جديد (بمساعدة a.)

و) عوّض $a = 1$ وقارن مع النتيجة التي حصلت عليها من البند (ب).

4. معطاة عائلة دوال المساحة: $s(x) = 2x^4 + c$
عبّر عن c بواسطة a، عند حساب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(a, 0)$. سجل عائلة الدوال $s(x)$ بمساعدة a.

5. اذا كانت $f(x) = 4x^3 + 1$، فان $s(x) = x^4 + x + c$.



أ) افحص بواسطة الاشتقاق.

ب) عبّر عن c بواسطة a، عند حساب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(a , 0)$.

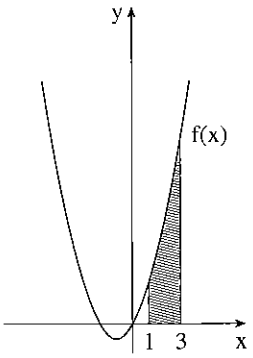
جـ) سجل الدالة $s(x)$ عندما $a = 2$.

د) سجل الدالة $s(x)$ عندما $a = -2$.

هـ) سجل الدالة $s(x)$ عند حساب المساحة بدءاً من المحور y.

و) ما هي العلاقة بين الخطوط البيانية $s(x)$ التي حصلت عليها في البنود جـ، د، هـ؟

6. عائلة دوال المساحة الملائمة للدالة $f(x)$ المرسومة هي $s(x) = x^3 + x^2 + c$



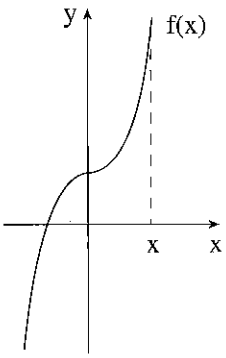
أ) عبّر عن c (بواسطة a) عند حساب المساحة بدءاً من العمود على المحور x من النقطة $(a, 0)$ وسجل الدالة $s(x)$.

ب) سجل الدالة عندما $a = 1$.

جـ) احسب المساحة المظللة.

تمارين

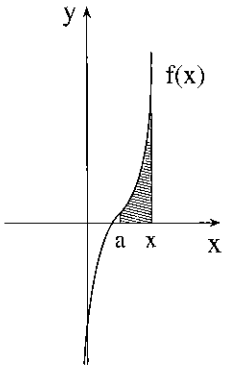
7. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = 2x^3 + 2$.



أ) جد عائلة دوال المساحة $s(x)$.

ب) - احسب قيمة c عند حساب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(1, 0)$.

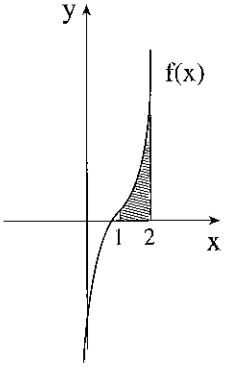
- احسب قيمة c عند حساب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(-1, 0)$.



- احسب قيمة c عند حساب المساحة بدءاً من المحور y.

8. عائلة دوال **المساحة** الملائمة للدالة $f(x)$ المرسومة هي $s(x) = (2x - 1)^4 + c$

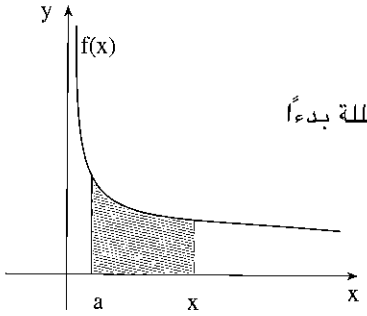
أ) عبّر عن c، بواسطة a، عند حساب المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(a , 0)$ وسجل الدالة $s(x)$.



ب) سجل الدالة عندما $a = 1$.

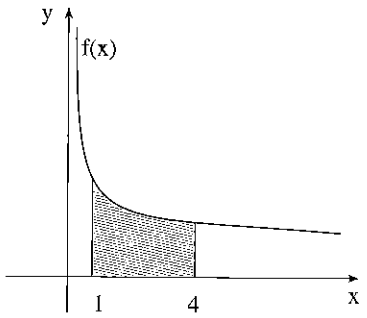
جـ) احسب المساحة المظللة.

9. عائلة دوال **المساحة** الملائمة للدالة
$f(x)$ المرسومة هي $s(x) = \sqrt{x} + c$.

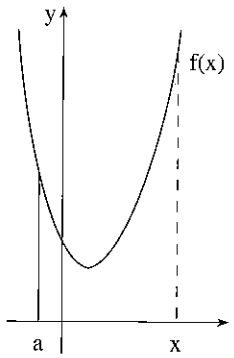


أ) عبّر عن c، عند حساب المساحة المظللة بدءاً من العمود من النقطة $(a\ ,\ 0)$
وسجل $s(x)$ بمساعدة a.

ب) احسب المساحة المظللة.

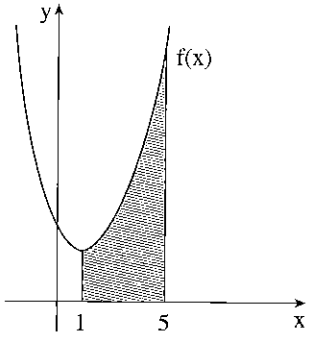


10. الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = x^2 - 2x + 2$.



أ) جد عائلة الدوال $s(x)$ التي تبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x)$ والمحور x والعمود على المحور من نقطة معطاة $(a\ ,\ 0)$ والعمود من نقطة عامة $(x\ ,\ 0)$ واقعة على امتداد المحور.
(عبّر عن c بواسطة a.)

ب) أكمل $s(x) =$



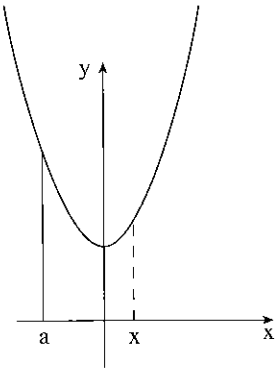
جـ) سجل الدالة $s(x)$ عندما $a = -1$.

د) سجل الدالة $s(x)$ عندما $a = 1$.

هـ) احسب المساحة المظللة.

عن تحسين الحساب أيضاً

1. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = 3x^2 + 1$.



أ) جد عائلة دوال المساحة.

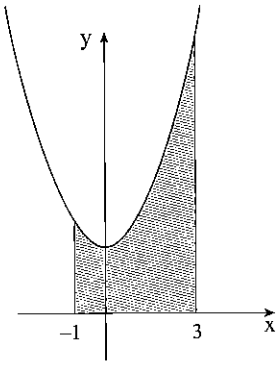
ب) عبّر عن c عند حساب المساحة بدءاً من العمود من النقطة (a, 0).

أكمل: $s(x) =$

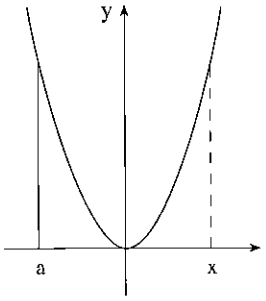
جـ) سجل الدالة $s(x)$ عندما $a = -2$.

د) سجل الدالة $s(x)$ عندما $a = -1$.

هـ) احسب المساحة المظللة.

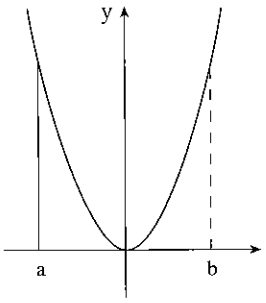


2. اذا كانت $f(x) = 3x^2$ فان عائلة دوال المساحة هي $s(x) = x^3 + c$.



أ) عبّر عن c بواسطة a عند حساب المساحة بدءاً من العمود على المحور x من النقطة (a , 0).

أكمل: $s(x) =$

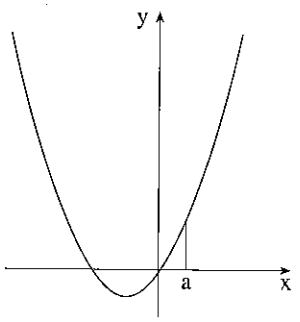


ب) عبّر بواسطة a وَ b عن المساحة بدءاً من العمود على المحور x من النقطة (a , 0) حتى العمود على المحور من النقطة (b , 0).

جـ) احسب المساحة اذا كان $a = -1$, $b = 3$.

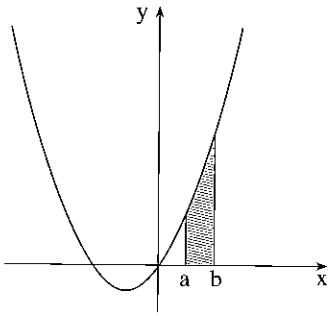
3. اذا كانت $f(x) = x^2 + 2x$,

فان $s(x) = \int (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$



أ) عبّر عن المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(a\ ,0)$. (عبّر أولاً عن c بواسطة a.)

أكمل: $s(x) =$

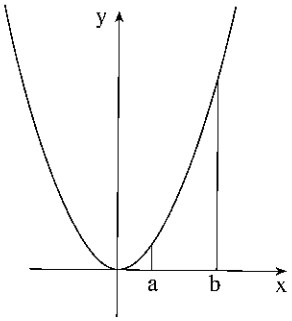


ب) عبّر عن المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(a\ ,0)$ حتى العمود من النقطة $(b,\ 0)$.

جـ) احسب المساحة اذا كان $a = 1$, $b = 4$.

4. الخط البياني المرسوم هو للدالة

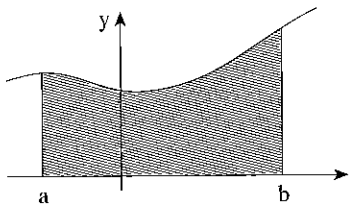
$f(x) = x^2$



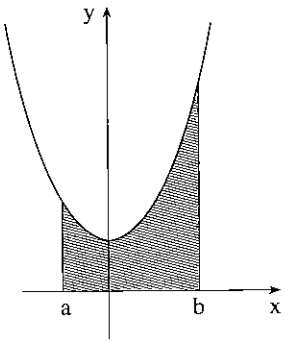
أ) جد: $s(x) = \int x^2\,dx =$

ب) عبّر عن المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(a,\ 0)$ حتى العمود من النقطة $(b,\ 0)$.

اذا أعطيت دالة $f(x)$ موجبة في المجال المعني فانه لايجاد المساحة المظللة، علينا أن نجد دالة أصلية ونعوّض ونحسب قيمة الدالة الأصلية عندما $x = b$ ونطرح منها قيمتها عندما $x = a$.



5. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = x^2 + 1$.

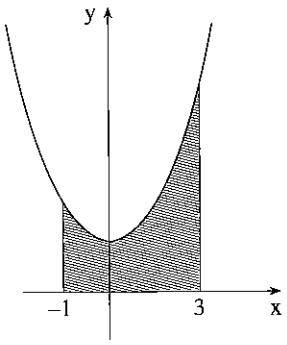


أ) جد: $s(x) = \int (x^2 + 1)dx =$

ب) عبّر عن المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(a , 0)$ حتى العمود من النقطة $(b , 0)$.

( ) - ( ) = المساحة

جـ) احسب المساحة المظللة.



6. معطاة الدالة $f(x) = -3x^2 + 3$.

أ) جد نقطتي تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x وعيّنهما في هيئة المحاور. هل للقطع المكافيء نهاية صغرى أم نهاية عظمى؟
ارسم شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.

ب) جد: $\int (-3x^2 + 3)dx =$

جـ) عبّر عن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور من النقطتين $(a\ ,\ 0)$ وَ $(b\ ,\ 0)$.
(a وَ b من المجال حيث الدالة موجبة).

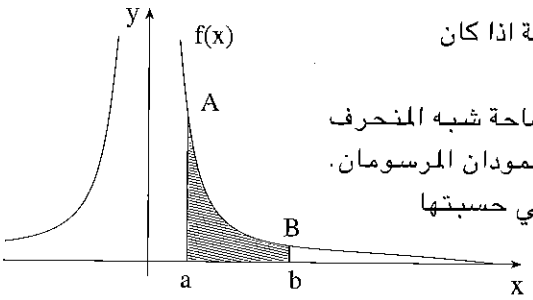
د) ظلّل وجد المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x.
(بين نقطتي التقاطع مع المحور.)

7. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

أ) عبّر عن المساحة المظللة.

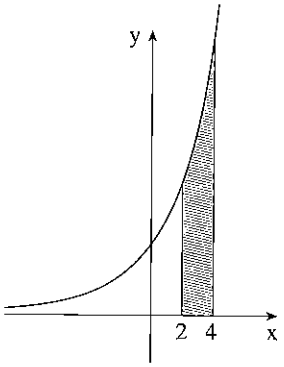
ب) احسب المساحة المظللة اذا كان
$a = 1$ وَ $b = 4$.

جـ) صل AB واحسب مساحة شبه المنحرف الذي قاعدتاه هما العمودان المرسومان.
قارن مع المساحة التي حسبتها في البند (أ).

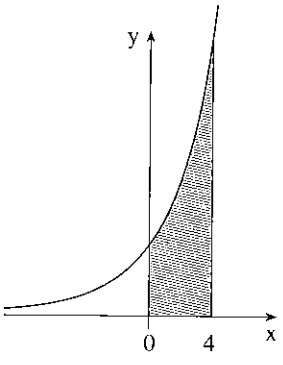


8. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالة $f(x) = 2e^x$.
احسب المساحة المظللة.

أ)

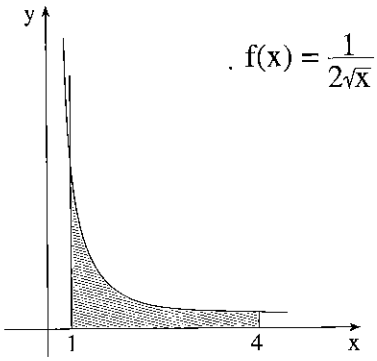


ب)



9. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}$.

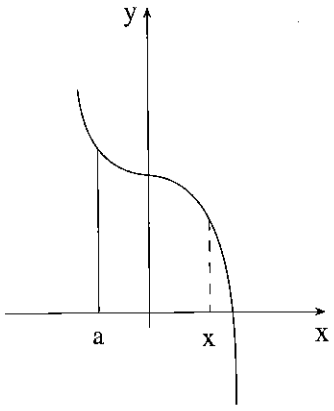
سجل واحسب المساحة المظللة.



تمارين

10. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = -2x^3 + 4$

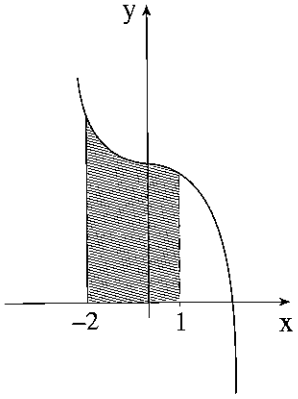


أ) جد: $s(x) = \int (-2x^3 + 4)dx$

ب) عبّر عن المساحة بدءاً من العمود من النقطة (a , 0).

جـ) عبّر عن المساحة بدءاً من العمود من النقطة (a , 0) حتى العمود من النقطة(b, 0).

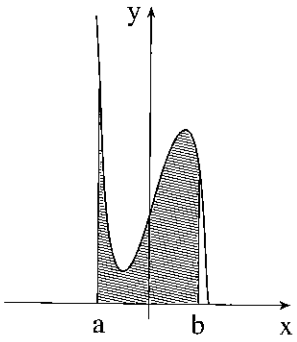
(من المجال حيث تكون الدالة موجبة).



د) احسب المساحة المظللة.

11. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = -2x^3 + 4x + 3$.

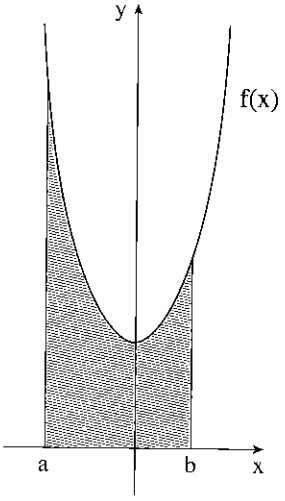


أ) عبّر عن المساحة المظللة بمساعدة a وَ b.
(جد تكاملاً أولاً).

ب) احسب المساحة اذا كان $a = -3$, $b = 1$.

12. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = 3x^2 + 2$

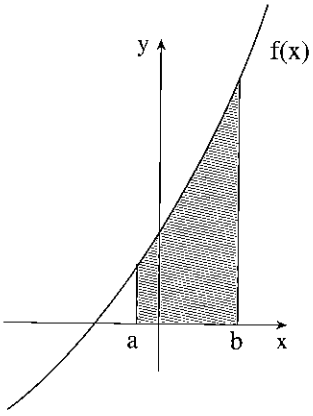


أ) عبّر عن المساحة المظللة بمساعدة a وَ b.

ب) احسب المساحة اذا كان العمودان من النقطتين $(0, 0)$ وَ $(1, 0)$.

13. الخط البياني المرسوم هو للدالة

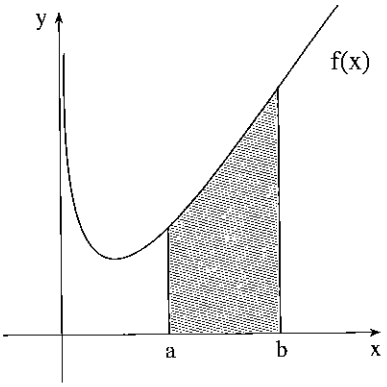
$f(x) = e^x + x$



أ) عبّر عن المساحة المظللة بمساعدة a وَ b.

ب) احسب المساحة اذا كان العمودان من النقطتين $(-0.5, 0)$ وَ $(2, 0)$

14. معطاة الدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x$



أ) عبّر عن المساحة المظللة بمساعدة a وَ b.

ب) عبّر عن المساحة المظللة

اذا كان $a = 1$ وَ $b = 4$.

15. أ) جد نقط تقاطع الخط البياني للدالة $f(x) = -x^2 + 3x$ مع المحور x.

ب) ارسم شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة وظلل المساحة المحصورة بين الخط البياني والمحور x.

جـ) احسب المساحة المظللة من البند (ب).

16. أ) ارسم شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة $f(x) = x^2 + 4$.

ب) خطّط واحسب المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمود على المحور x من النقطة $(-3, 0)$ والعمود على المحور x من النقطة $(3, 0)$.

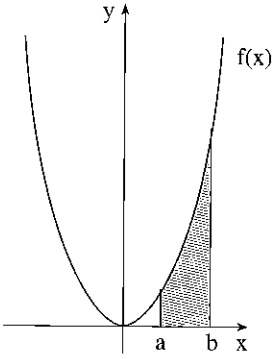
اشارات ومصطلحات أخرى

اذا كان $f(x) = 3x^2$ ،

فان $s(x) = \int 3x^2dx = x^3 + c$ ،

والتعبير الذي يبيّن المساحة هو:

$s(b) - s(a) = b^3 - a^3$



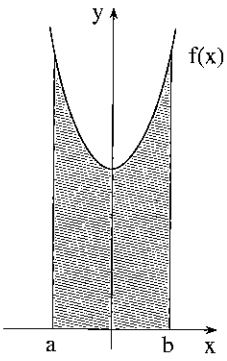
الفرق بين قيمة الدالة الأصلية عندما $x = b$ وقيمتها عندما $x = a$

يدعى التكامل المحدود من a الى b. ويرمز اليه $\int_a^b f(x)dx$

1. اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2$ نسجّل هكذا:

$$\int_a^b (3x^2 + 2)dx = \left[x^3 + 2x\right]_a^b =$$

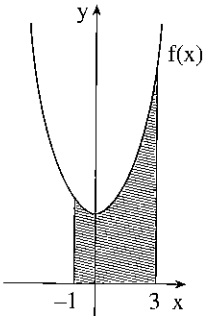
$$(b^3 + 2b) - (a^3 + 2a)$$



والمساحة المظللة في الشكل أدناه هي:

$$\int_{-1}^{3} (3x^2 + 2)dx = \left[x^3 + 2x\right]_{-1}^{3} =$$

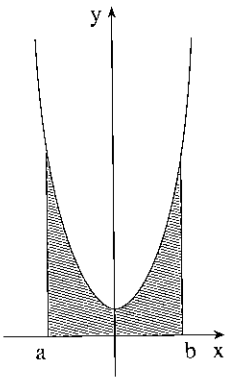
$$= (3^3 + 2 \cdot 3) - ((-1)^3 + 2 \cdot (-1)) =$$



تابع الحساب.

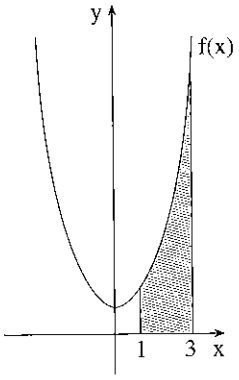
2. الخط البياني المرسوم هو الدالة

$f(x) = x^2 + 1$.



أ) سجل المساحة المظللة بواسطة **تكامل محدود** وعبّر عن $s(b) - s(a)$.

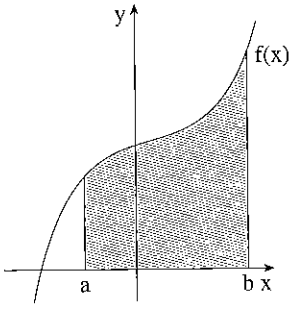
ب) عوّض $a = 1$ وَ $b = 3$ واحسب المساحة المظللة.



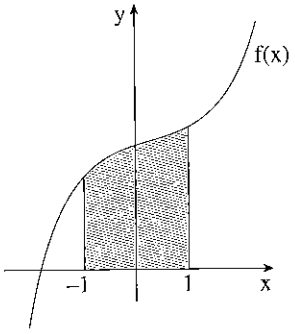
3. الخط البياني المرسوم هو الدالة

$f(x) = 2x^3 + 4$.

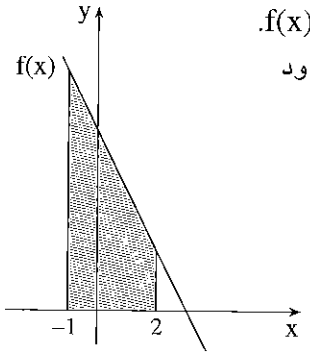
أ) سجل المساحة المظللة بواسطة **تكامل محدود** وعبّر عن $s(b) - s(a)$.



ب) عوّض $a = -1$ وَ $b = 1$ واحسب المساحة المظللة.



4. الخط البياني المرسوم هو الدالة $f(x) = -2x + 6$.



أ) سجل المساحة المظللة بواسطة تكامل محدود واحسب مقدارها.

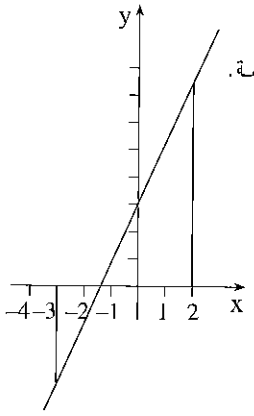
ب) احسب: $\int_0^3 (-2x + 6)dx =$

ظلّل مساحة ملائمة.

جـ) احسب المساحة بدون تكامل وافحص اجابتك من البند (ب).

5. أ) احسب: $\int_{-1.5}^{2} (2x + 3)dx$ ظلل مساحة ملائمة.

ب) احسب: $\int_{-3}^{-1.5} (2x + 3)dx$



جـ) - ظلل المثلث الناتج في الربع الثالث واحسب مساحة المثلثين المحصورين بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور من النقطتين $(-3, 0)$ وَ $(2, 0)$.

- هل العدد الذي وجدته من البند (ب) يبيّن المساحة بدءاً من العمود من النقطة $(-3, 0)$ حتى العمود من النقطة $(2, 0)$؟ فسّر.

التكامل المحدود من a حتى b: $\int_a^b f(x)dx$ هو عدد يبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور من النقطتين $(a, 0)$ وَ $(b, 0)$ شرط أن يكون المجال المعني حيث الدالة موجبة (الخط البياني في المجال فوق x).

(تكون أحياناً، $(a, 0)$ وَ/ أو $(b, 0)$ نقطتي تقاطع الخط البياني مع المحور x).

في البند التالي، ستتعلم كيف تحسب المساحة حتى عندما تكون واقعة في مجال، حيث الدالة سالبة في كل المجال أو جزء منه.

6. أ) احسب: (i $\int_1^3 (4x-2)dx$ (ii $\int_0^3 (4x-2)dx$

ب) جد نقط تقاطع الخط البياني للدالة $f(x) = 4x - 2$ مع المحورين، وارسم الخط المستقيم.

جـ) أي التكاملين اللذين حسبتهما يبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور من "الحدين" a وَ b المسجلين؟

7. أ) احسب التكاملات المحدودة الآتية:

(i $\int_3^5 (x^2 - x - 2)dx$ (iii $\int_{-1}^2 (x^2 - x - 2)dx$

(ii $\int_{-1}^2 (x^2 - x - 2)dx$ (iv $\int_{-2}^1 (x^2 - x - 2)dx$

ب) جد نقط تقاطع الخط البياني للدالة $f(x) = x^2 - x - 2$ مع المحور x وارسم شكلاً تقريبياً للدالة.

جـ) أي التكاملات المحدودة التي حسبتها يبيّن المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور من "الحدين" المسجلين؟

تمارين

8. احسب التكاملات المحدودة.

أ) $\int_{-2}^{4}(4x-2)dx$

ب) $\int_{-2}^{0}(4x-2)dx$

جـ) $\int_{0}^{1}(3x^2+2)dx$

د) $\int_{0}^{3}(x-2)^2dx$

هـ) $\int_{0}^{2}(6x^2-4x)dx$

و) $\int_{0}^{2}(3x^2-x)dx$

ز) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{x^2})dx$

ح) $\int_{1}^{2}\frac{2}{x^2}dx$

ط) $\int_{1}^{2}\frac{x^2-4}{x^2}dx$

ي) $\int_{1}^{3}\frac{2x^4+x}{x^3}dx$

ي أ) $\int_{1}^{4}\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

ي ب) $\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

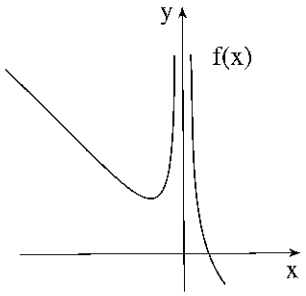
ي جـ) $\int_{0}^{2}2e^xdx$

ي د) $\int_{-1}^{3}(e^x+1)dx$

9. أ) جد نقط تقاطع القطع المكافيء $f(x) = x^2 - 2x - 8$ مع المحور x، وارسم شكلاً تقريبياً لخطه البياني.

ب) احسب التكاملات المحدودة وبيّن بالنسبة لكل واحد منها، هل يبيّن المساحة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين من "الحدين" المسجلين.

(i) $\int_0^5 (x^2 - 2x - 8)dx$ (ii) $\int_4^5 (x^2 - 2x - 8)dx$



10. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = \frac{1}{x^2} - x \quad (x \neq 0)$

أ) جد نقطة تقاطع الخط البياني مع المحور x.

ب) احسب التكاملات المحدودة وبيّن بالنسبة لكل واحد منها، هل يبيّن المساحة بين الخط البياني للدالة والمحور x ، والعمودين من "الحدين" المسجلين.

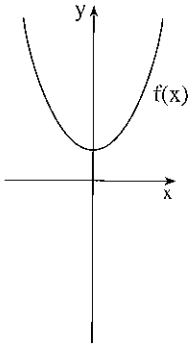
اذا كان التكامل المحدود لا يبيّن المساحة – فسّر لماذا!

(i) $\int_{0.5}^{2} (\frac{1}{x^2} - x)dx$ (iii) $\int_{1}^{2} (\frac{1}{x^2} - x)dx$

(ii) $\int_{-2}^{-0.5} (\frac{1}{x^2} - x)dx$ (iv) $\int_{-2}^{-1} (\frac{1}{x^2} - x)dx$

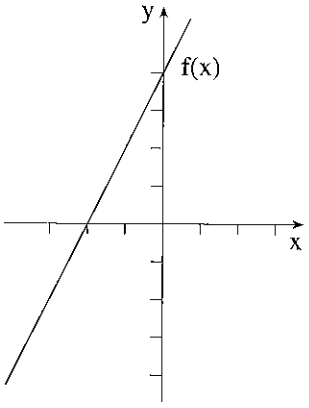
واذا كان الخط البياني للدالة تحت المحور؟

1. أ) الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = x^2 + 1$.



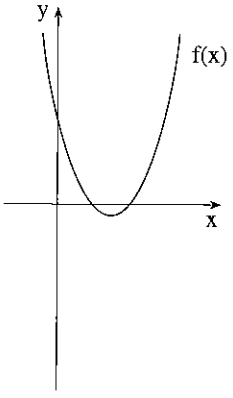
ارسم في نفس هيئة المحاور، الخط البياني
للدالة $g(x) = -(x^2 + 1)$.

ب) الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = 2x + 4$.



ارسم في نفس هيئة المحاور،
الخط البياني للدالة $g(x) = -2x - 4$

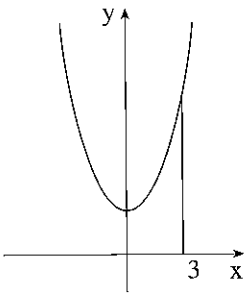
جـ) الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = x^2 - 4x + 3$.



ارسم في نفس هيئة المحاور، الخط البياني
للدالة $g(x) = -x^2 + 4x - 3$.

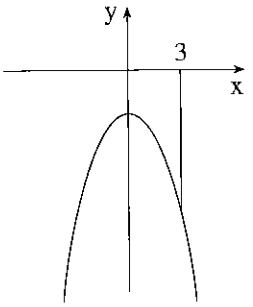
ع"ذ

2. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = 3x^2 + 2$.



أ) – احسب: $\int_0^3 (3x^2 + 2)dx$

– ظلل مساحة ملائمة.

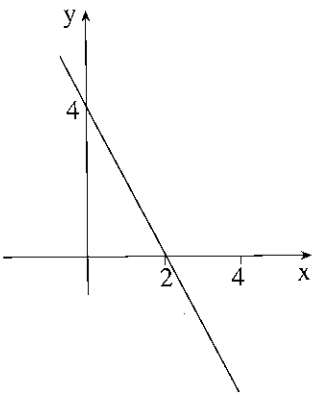


ب) احسب: $\int_0^3 (-3x^2 - 2)dx$

جـ) ظلل المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $-f(x)$ والمحور y والعمودين على المحور x من النقطتين $(0, 0)$ و $(3, 0)$.
ما هي المساحة، حسب رأيك؟
هل العدد الذي حصلت عليه من البند (ب) يبيّن المساحة؟ فسّر؟

ع"ذ

3. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = -2x + 4$.



أ) احسب: $\int_2^4 (-2x + 4)dx$

ب) بيّن في الشكل، المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x ونقطة تقاطع الدالة مع المحور x والعمود على المحور من النقطة $(4, 0)$. ما هي المساحة، حسب رأيك؟

اذا كان الخط البياني للدالة كله تحت المحور x ، في المجال الذي نحسب فيه المساحة فان التكامل المحدود هو عدد سالب. لكنا نبيّن المساحة بعدد موجب أي بمضاد التكامل المحدود.

4. أ) جد نقطتي تقاطع الخط البياني للدالة $f(x) = 3x^2 - 3$ مع المحور x، وارسم شكلاً تقريبياً له.

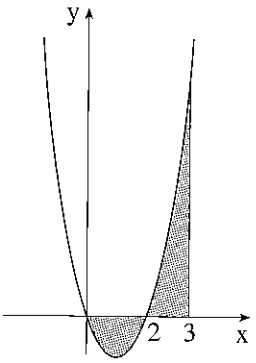
ب) احسب المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والجزء من المحور x الواقع بين نقطتي التقاطع.

5. معطاة الدالة $f(x) = 3x^2 - 6x$.

أ) احسب: $\int_0^3 (3x^2 - 6x)dx$

هل العدد الذي حصلت عليه يبيّن المساحة المظللة؟ فسّر.

ب) – احسب: $\int_0^2 (3x^2 - 6x)dx$

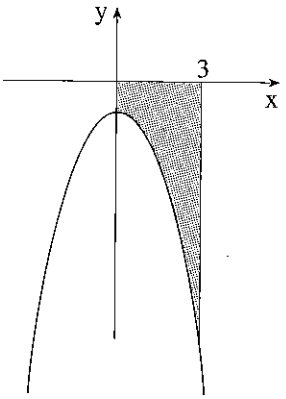


– ما هي المساحة المظللة المحصورة تحت المحور x؟

جـ) احسب المساحة المظللة المحصورة فوق المحور x (من نقطة تقاطع الخط البياني مع المحور والعمود على المحور من النقطة (3, 0)).

د) كم هي المساحة المظللة كلها؟ قارن مع اجابتك من البند (أ).

عند ايجاد المساحة المحصورة بين الخط البياني لدالة والمحور x وعمودين على المحور x، اذا كان جزء من المساحة فوق المحور وجزء آخر تحته فاننا نحسب كل جزء من المساحة على انفراد ثم نجمع.



تمارين

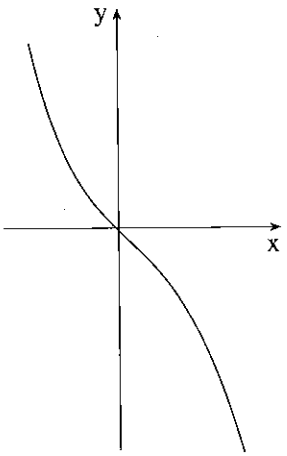
6. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = -x^2 - 1$.

احسب المساحة المظللة.

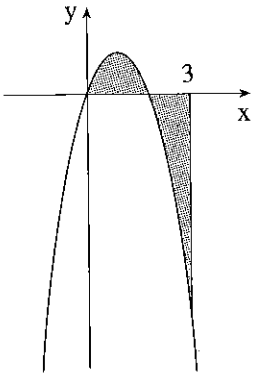
7. جد نقطتي تقاطع الخط البياني للدالة $f(x) = x^2 - 1.5x - 1$ مع المحور x.
ارسم شكلاً تقريبياً للخط البياني للدالة.
ظلل واحسب المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والجزء من المحور x الواقع بين نقطتي التقاطع.

8. الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = -x^3 - x$.



ظلل واحسب المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x، بدءاً من نقطة الأصل حتى العمود على المحور x من النقطة (2, 0).

9. الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = -x^2 + 2x$.

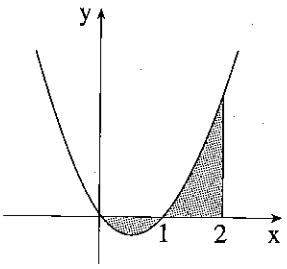


أ) هل $\int_0^3 (-x^2 + 2x)dx$ يبيّن المساحة المظللة؟

ب) جد نقطتي تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x.

جـ) احسب المساحة المظللة.

10. الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = x^2 - x$.



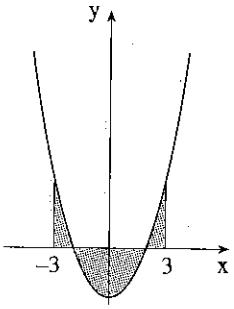
أ) احسب التكامل المحدود

$$\int_0^2 (x^2 - x)dx$$

ب) هل العدد الذي حصلت عليه يبيّن المساحة المظللة؟ فسّر.

جـ) احسب المساحة المظللة.

11. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = x^2 - 4$.

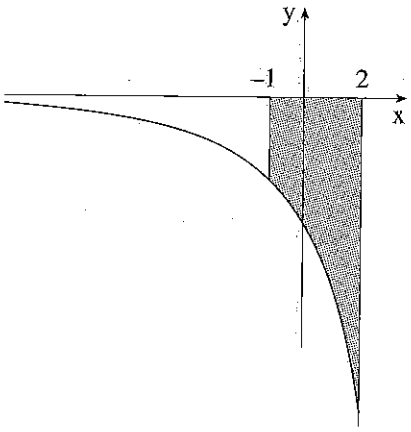


أ) جد نقطتي تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x.

ب) احسب المساحة المظللة.

اقتراح: بامكانك تحسين طريقة الحساب، ان تستغل صفات التماثل وتجد مساحات متساوية أولاً.

12. الخط البياني المرسوم هو للدالة
$f(x) = -5e^x$.

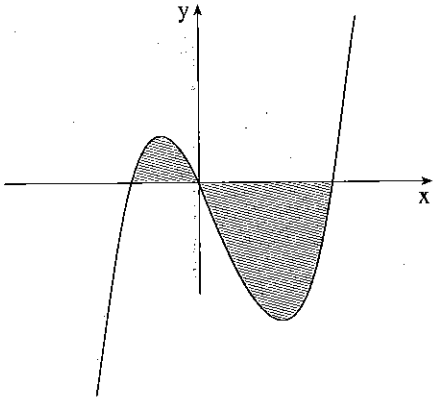


احسب المساحة المظللة.

13. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

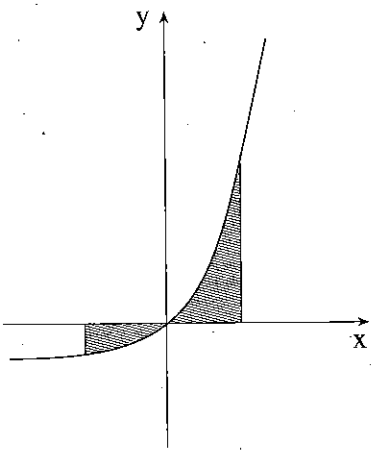
احسب المساحة المظللة.



14. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = e^x - 1$.

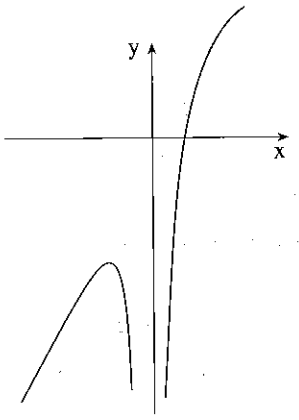
احسب المساحة المظللة.



15. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$ $(x \neq 0)$

- جد نقطة تقاطع الخط البياني للدالة مع المحور x.
- ظلل واحسب المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والعمودين على المحور من النقطتين $(0.5, 0)$ و $(2, 0)$.

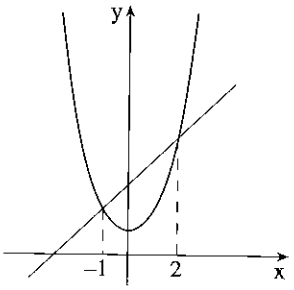


المساحة بين خطين بيانيين لدالتين

1. أمامك في الشكل، الخطان البيانيان للدالتين:

$$f(x) = x^2 + 1$$

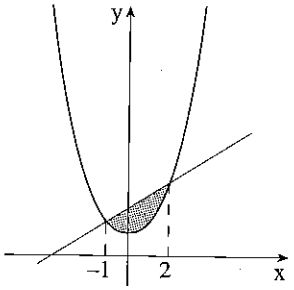
$$g(x) = x + 3$$



أ) لوّن واحسب المساحة التي يبيّنها

$$\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx$$

ب) لوّن بلون آخر واحسب المساحة التي يبينها $\int_{-1}^{2} (x + 3)dx$

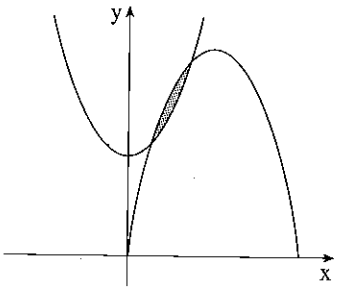


جـ) احسب المساحة المظللة.

2. أمامك في الشكل، الخطان البيانيان للدالتين:

(i $f(x) = x^2 + 4$.

(ii $g(x) = -x^2 + 6x$.



أ) ناظر لكل دالة خطها البياني.
جد نقطتي تقاطع الخطين البيانيين
وأنزل عمودين منهما على المحور x .

ب) سجل بواسطة تكامل محدود،
المساحة المحصورة بين الخط البياني
للدالة $g(x)$ والمحور x والعمودين اللذين رسمتهما. لوّن هذه المساحة.

جـ) سجل بواسطة تكامل محدود، المساحة المحصورة بين الخط البياني
للدالة $f(x)$ والمحور x والعمودين اللذين رسمتهما. لوّن مساحة ملائمة.

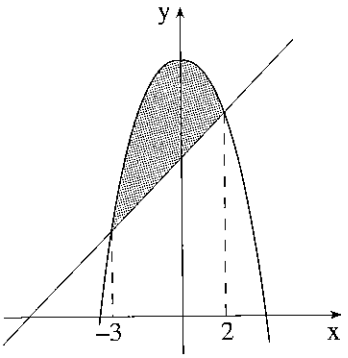
د) سجل بواسطة الفرق بين تكاملين، المساحة المخططة بين الخطين البيانيين
للدالتين.

هـ) احسب المساحة المحصورة بين الخطين البيانيين للدالتين.

3. أمامك في الشكل، الخطان البيانيان للدالتين

$f(x) = 14 - x^2$

$g(x) = x + 8$



عند حساب المساحة المظللة، يمكن طرح الدالتين قبل حساب التكاملين، وبذلك نبسّط الحساب.

$$\int_{-3}^{2}(14 - x^2)dx - \int_{-3}^{2}(x + 8)dx = \int_{-3}^{2}\left[(14 - x^2) - (x + 8)\right]dx =$$

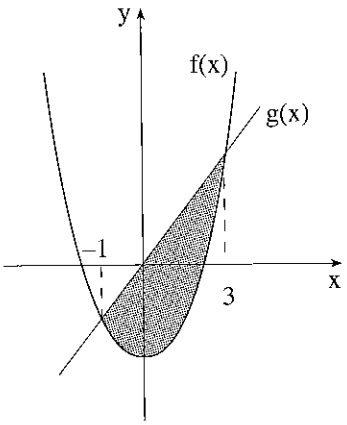
$$= \int_{-3}^{-2}(\qquad\qquad)dx =$$

فك الأقواس:

احسب المساحة.

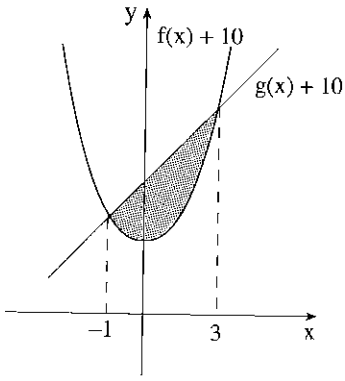
واذا كان جزء من الخط البياني تحت المحور؟

4. أمامك في الشكل الخطان البيانيين للدالتين $f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = 2x$



المطلوب حساب المساحة المظللة المحصورة بين الخطين البيانيين للدالتين.
الحساب بواسطة الفصل بين المساحتين فوق المحور وتحته، كل على انفراد، يكون صعباً ومعقداً.فيما يلي سنرى كيف يمكن ان نحسب المساحة بطريقة قصيرة وسهلة (كما فعلنا في التمرين 3).

أ) ننفّذ على الخطين البيانيين ازاحة الى أعلى (نفس الازاحة) بموازاة المحور y ، بحيث تصبح المساحة المطلوبة فوق المحور. مثلاً ازاحة 10 وحدات.



هل هذه الازاحة تغير المساحة؟

نحصل على دالتين جديدتين:

$$f(x) + 10 = x^2 - 3 + 10$$

$$g(x) + 10 = 2x + 10$$

والمساحة:

$$\int_{-1}^{3} (2x + 10\,dx) - \int_{-1}^{3} (x^2 - 3 + 10)dx = \int_{-1}^{3} [(2x + 10) - (x^2 - 3 - 10)]dx$$

$$\int_{-1}^{3} [2x - x^2 + 3]\,dx = \int_{-1}^{3} [2x - (x^2 + 3)]\,dx$$

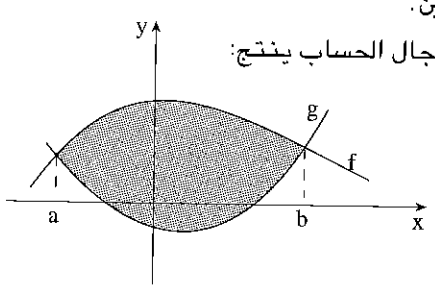
وهذا بالضبط: $\int_{-1}^{3} [g(x) - f(x)]\,dx$

ب) فسّر ماذا يحدث عند ازاحة الدالتين 7 وحدات الى أعلى.

عند حساب المساحة المحصورة بين خطين بيانيين لدالتين، فاننا نحسب التكامل المحدود للفرق بين الدالتين.

عندما تقع $f(x)$ فوق $g(x)$ في مجال الحساب ينتج:

$$\int_{a}^{b} [f(x) - g(x)]\,dx$$

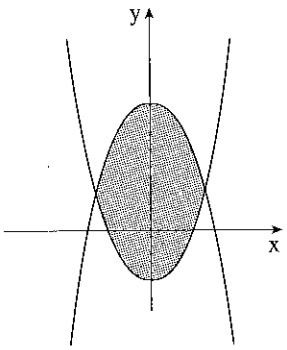


5. أ) جد نقطتي تقاطع الدالتين

$f(x) = x^2 - 3$

$g(x) = -x^2 + 5$

وعيّن على المحور x.



ب) سجل حدّين للتكامل الذي يبيّن المساحة المظللة واحسبه.

$$\int [(-x^2 + 5) - (x^2 - 3)]dx$$

6. في الشكل أمامك، يظهر الخطان البيانيان لدالتين: دالة معينة g(x)، ودالة f(x) الناتجة من ازاحة g(x) 3 وحدات الى أعلى.

أ) ماذا يمكنك ان تقول عن مساحة الشكلين المظللين أ و ب؟

ب) ما هي مساحة المستطيل؟ (الشكل أ).

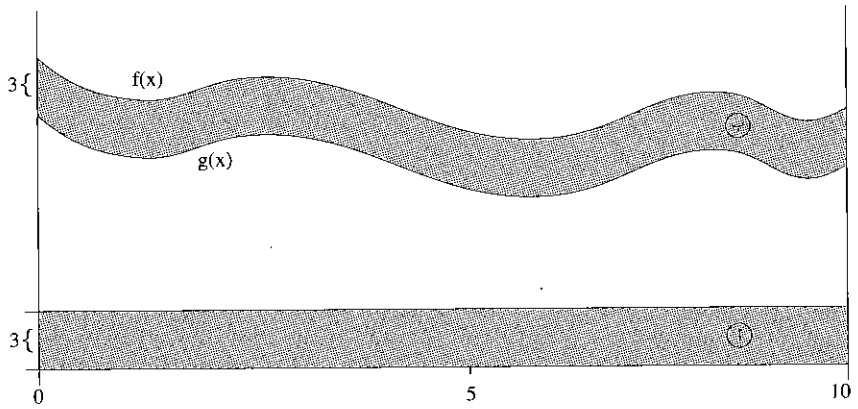
جـ) نحسب مساحة الشكل (ب): $\int_0^{10} [f(x) - g(x)]\,dx$ = مساحة الشكل (ب).

i) عبّر عن f(x) بواسطة g(x): $f(x) =$

ii) عوّض في التكامل أعلاه وأكمل الحساب.

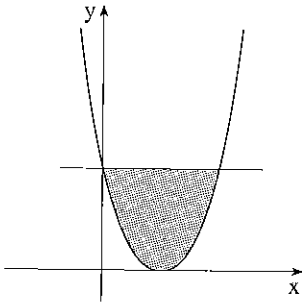
$\int_0^{10} [f(x) - g(x)]\,dx =$ = مساحة الشكل (ب).

د) افحص اجابتك عن البند (أ).



تمارين

7. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:



$$f(x) = (x - 2)^2$$

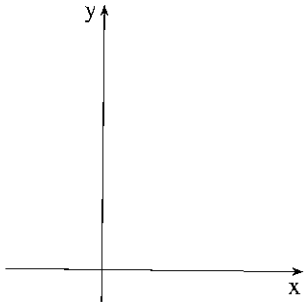
$$g(x) = 4$$

أ) احسب نقطتي تقاطع الخطين البيانيين.

ب) سجل المساحة المظللة كتكامل محدود لفرق الدالتين.
(انتبه لترتيب طرح الدالتين).

جـ) احسب المساحة المظللة.

⚠ د) ارسم بالتقريب، خطين بيانيين ملائمين لازاحة الدالتين وحدتين الى أعلى، وسجل الدالتين الجديدتين.

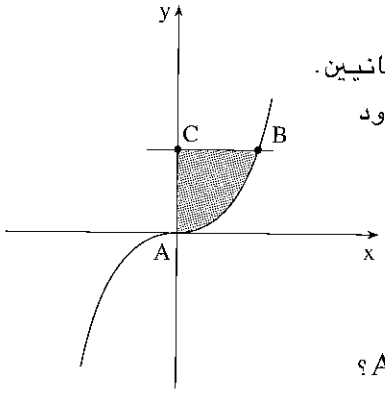


$f(x) - 2 =$

$g(x) - 2 =$

ظلل المساحة المحصورة بين الخطين البيانيين الجديدين، وجد المساحة.

8. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:



$$f(x) = x^3$$

$$g(x) = 1$$

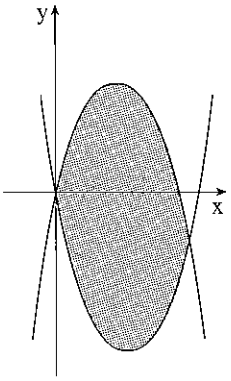
أ) احسب نقطتي تقاطع الخطين البيانيين.

ب) سجل المساحة المظللة كتكامل محدود لفرق الدالتين.

جـ) احسب المساحة.

د) صل AB، واحسب مساحة المثلث ABC.
كم تزيد المساحة التي وجدتها في البند (جـ) عن مساحة المثلث ABC؟

9. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:



$$f(x) = x^2 - 6x$$

$$g(x) = -x^2 + 4x$$

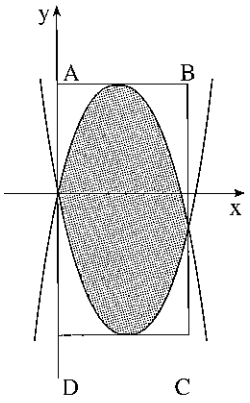
أ) ناظر لكل دالة خطها البياني.

ب) احسب نقطتي تقاطع الخطين البيانيين.

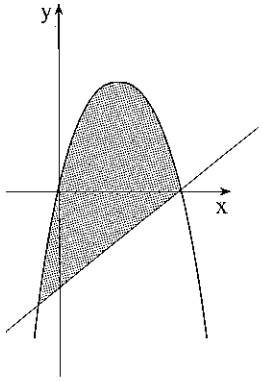
جـ) سجل المساحة كتكامل محدود لفرق الدالتين.

د) احسب المساحة المظللة.

هـ) جد رأسي القطعين المكافئين، واحسب مساحة المستطيل المرسوم (ABCD).
كم تقل المساحة التي حسبتها في البند (جـ) عن مساحة المستطيل؟



10. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:



$$f(x) = -x^2 + 6x$$

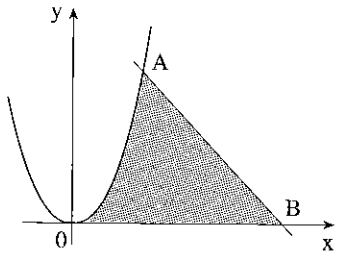
$$g(x) = x - 6$$

أ) احسب نقطتي تقاطع الخطين البيانيين.

ب) احسب المساحة المظللة.

قليلاً عن جمع المساحات

1. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين: $f(x) = x^2$
$g(x) = -x + 6$

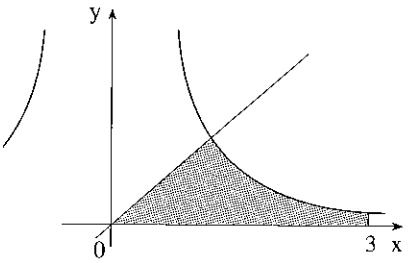


أ) جد احداثيات النقطتين A وَ B.

المساحة المظللة هي في الواقع دمج لمساحتين: المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $f(x)$، والمحور x والعمود النازل على المحور x من النقطة A، والمساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة $g(x)$ والمحور x والعمود النازل على المحور x من النقطة A.

ب) لحساب المساحة المظللة، أنزل من A عموداً على المحور x.
- احسب المساحة المظللة بدءاً من نقطة الأصل حتى العمود.
- احسب المساحة المظللة بدءاً من العمود حتى النقطة B.
- احسب كل المساحة المظللة.

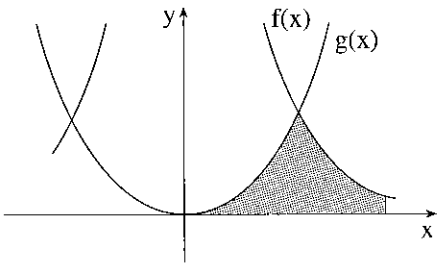
2. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين: $f(x) = \frac{1}{x^2}$
$g(x) = x$



احسب المساحة المظللة.
(احسب أولاً، نقطة تقاطع الدالتين).

3. احسب المساحة المحصورة بين المحور x ونقطة الأصل والعمود على المحور x من النقطة (3, 0) والخطين البيانيين للدالتين.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$g(x) = x^2$$



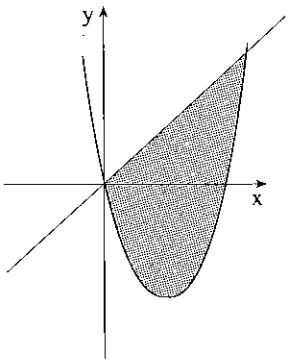
تمارين

4. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:

$$f(x) = x^2 - 4x$$
$$g(x) = x$$

أ) احسب نقطتي تقاطع الخطين البيانيين.

ب) احسب المساحة المظللة.

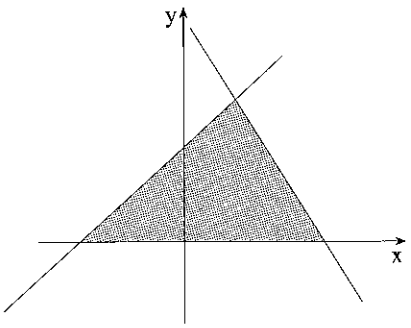


5. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:

$$f(x) = x + 2$$
$$g(x) = -2x + 5$$

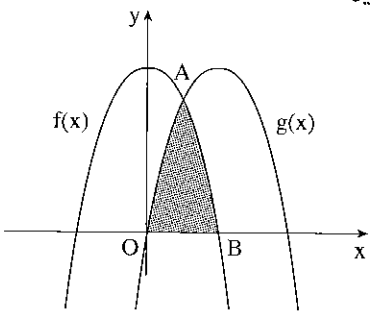
أ) ناظر خطاً بيانياً لكل دالة، واحسب نقطة تقاطع الخطين البيانيين، وكذلك نقطة تقاطع كل خط بياني مع المحور x.

ب) احسب المساحة المظللة.



6. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:

$$f(x) = -x^2 + 4$$
$$g(x) = -x^2 + 4x$$



أ) احسب احداثيات النقطتين A وَ B.

ب) احسب المساحة المظللة.

جـ) حسب رافع المساحة بالشكل الآتي: $S = 2\int_0^1 (-x^2 + 4)dx$.

احسب وافحص، هل حصل رافع على نتيجة صحيحة، وفسّر.

د) ارسم AB وَ AO . احسب مساحة المثلث AOB وقارن مع المساحة التي حسبتها في البند (ب).

7. أ) ارسم الخطين البيانيين للدالتين:

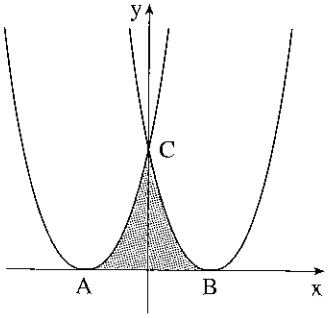
$$f(x) = x^2 - 4x$$
$$g(x) = 2x - 8$$

ب) جد نقط تقاطع الدالتين.

جـ) ظلل واحسب المساحة المحصورة بين الخطين البيانيين.

8. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:

$$f(x) = (x - 3)^2$$
$$g(x) = (x + 3)^2$$



أ) ناظر قانوناً لكل خط بياني.

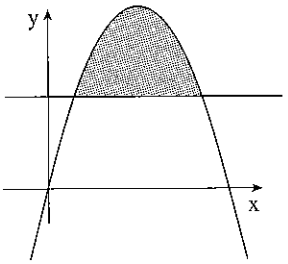
ب) احسب المساحة المظللة.

جـ) ارسم BC وَ AC . احسب مساحة المثلث ABC وقارن مع المساحة التي حسبتها في البند (أ).

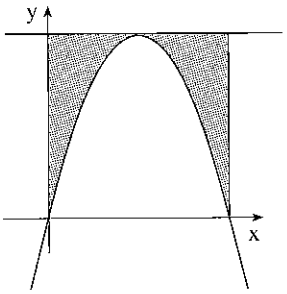
9. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين:

$f(x) = -x^2 + 4x$

$g(x) = 3$



أ) احسب المساحة المظللة.

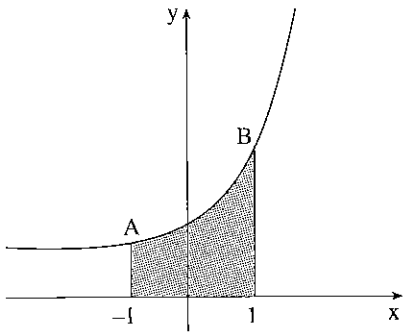


ب) من نقطة النهاية العظمى للقطع المكافيء، رسم مواز للمحور x. جد نقطة النهاية العظمى، وسجل معادلة المستقيم الموازي للمحور.

جـ) احسب المساحة المظللة.

10. الخط البياني المرسوم للدالة

$f(x) = 0.5e^x + 1$



أ) احسب المساحة المظللة.

ب) ارسم AB.

جـ) احسب مساحة شبه المنحرف الناتج، وقارن مع المساحة التي حسبتها في البند (أ).

تكامل الدالة المركبة

اذا كنت لم تتعلم بعد، ما هي الدالة المركبة وما هي مشتقتها، اترك هذا البند هنا. يظهر هذا البند أيضاً في كتاب التحليل في نهاية فصل الدالة المركبة.

1. اشتق الدوال الآتية:

أ) $y = e^{2x+3}$ ب) $y = e^{3x}$ جـ) $y = e^{-2x+1}$ د) $y = e^{-x}$

كل واحدة من الدوال التي في التمرين 1 هي دالة مركبة من الصورة $y = e^{f(x)}$ حيث $f(x)$ هي **دالة خطية**، ولذلك فان $f'(x)$ هي مقدار ثابت، أي عدد. في حالات دوال مركبة كهذه، يمكننا ايجاد تكاملها.

2. أ) $\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$

اشتق وافحص: $(\frac{e^{2x}}{2} + c)' =$

ب) $\int 3e^{4x-1}dx = \frac{3e^{4x-1}}{4} + c$

اشتق وافحص: $(\frac{3 \cdot e^{4x-1}}{4})' =$

جـ) جد: $\int e^{-x+2}\,dx$

اشتق النتيجة التي حصلت عليها وافحص.

3. جد التكامل.

أ) $\int e^{-2x}dx$

ب) $\int e^{3+2x}dx$

جـ) $\int 3e^{-x+1}dx$

د) $\int 2e^{2x+3}dx$

هـ) $\int -4e^{-x+2}dx$

و) $\int (2e^{-2x+1} + 2x)dx$

4. اشتق الدوال الآتية:

أ) $y = (2x + 3)^4$

ب) $y = (5x - 1)^3$

جـ) $y = (3 - x)^5$

د) $y = (2 - 3x)^2$

كل واحدة من الدوال التي في التمرين 4 هي دالة مركبة من الصورة $y = [f(x)]^n$ حيث $f(x)$ هي دالة خطية، ولذلك فان $f'(x)$ هي مقدار ثابت، أي عدد.

5. أ) $\int (2x + 4)^3dx = \frac{(2x + 4)^4}{4 \cdot \boxed{2}} + c$

اشتق وافحص.

فسّر سبب القسمة على 2.

ب) جد: $\int (5 - 2x)^4dx$

اشتق وافحص.

جـ) جد: $\int (0.5x + 1)^3dx$

اشتق وافحص.

6. جد التكامل.

أ) $\int (3-x)^3 dx$

ب) $\int (4x+1)^4 dx$

جـ) $\int (x+4)^5 dx$

د) $\int (0.1x-2)^3 dx$

هـ) $\int (-x-1)^4 dx$

و) $\int (-2x+3)^2 dx$

ز) $\int (7-3x)^5 dx$

ح) $\int (3-0.5x)^4 dx$

لذلك: $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ $\int (-\frac{1}{x^2})\,dx = \frac{1}{x} + c$

7. اشتق الدوال الآتية:

أ) $y = \frac{1}{2x+4}$

ب) $y = \frac{1}{x+1}$

جـ) $y = -\frac{1}{-x+1}$

د) $y = -\frac{1}{0.5x-2}$

كل واحدة من الدوال التي في التمرين 7 هي دالة مركبة من الصورة $y = \frac{1}{f(x)}$ حيث $f(x)$ هي دالة خطية، ولذلك فان $f'(x)$ هي مقدار ثابت، أي عدد.

8. أ) $\int -\frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(2x+1)} + c$ اشتق وافحص.

ب) $\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{x+2} + c$ اشتق وافحص.

9. جد التكامل.

أ) $\int -\frac{1}{(3x-2)^2}\,dx$

ب) $\int \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$

جـ) $\int \frac{1}{(0.5x-3)^2}\,dx$

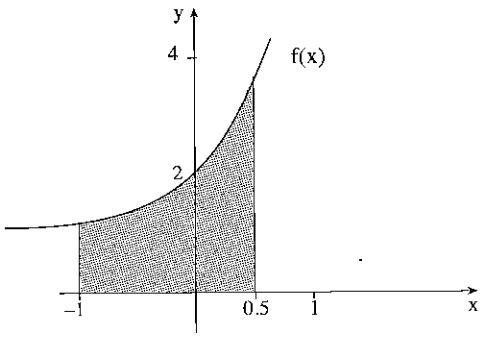
د) $\int \frac{-2}{(3x+1)^2}\,dx$

هـ) $\int \frac{1}{2\,(2x-1)^2}\,dx$

و) $\int \frac{-1}{(2x)^2}\,dx$

10. الخط البياني المرسوم هو للدالة $f(x) = e^{2x} + 1$

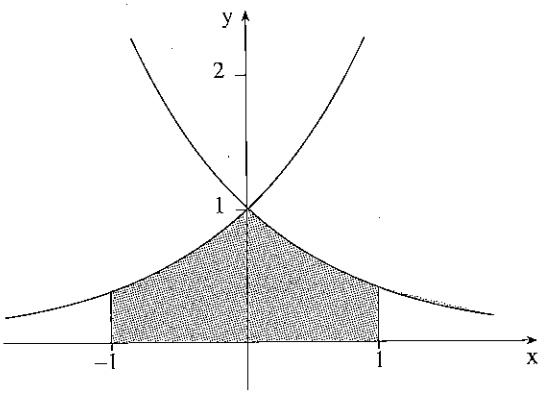
احسب المساحة المظللة.



11. الخطان البيانيان المرسومان هما للدالتين: $f(x) = e^x$

$g(x) = e^{-x}$

أ) ناظر لكل دالة خطها البياني.



ب) احسب المساحة المظللة.

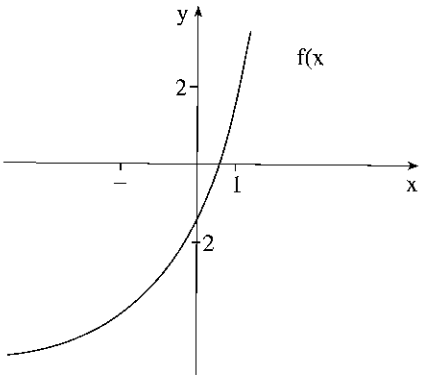
تمارين

12. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = e^{2x} - e$

أ) جد نقطة تقاطع الخط البياني مع المحور x.

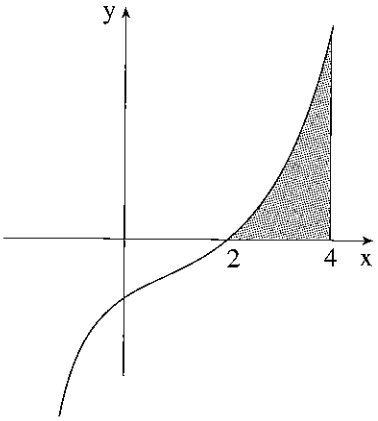
ب) ظلل واحسب المساحة المحصورة بين الخط البياني للدالة والمحور x والمحور y.



13. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = (0.5x - 1)^3$

احسب المساحة المظللة.



14. الخط البياني المرسوم هو للدالة

$f(x) = (-x - 1)^4$

احسب المساحة المظللة.