האם תוכל/י לפתור את הבעיה הבאה?

מהו המספר בן 6 ספרות הגדול ביותר,
שסכום ספרותיו הוא 37?

מאת: רוחמה אבן ואברהם קריימר
מכון ויצמן למדע, רחובות.

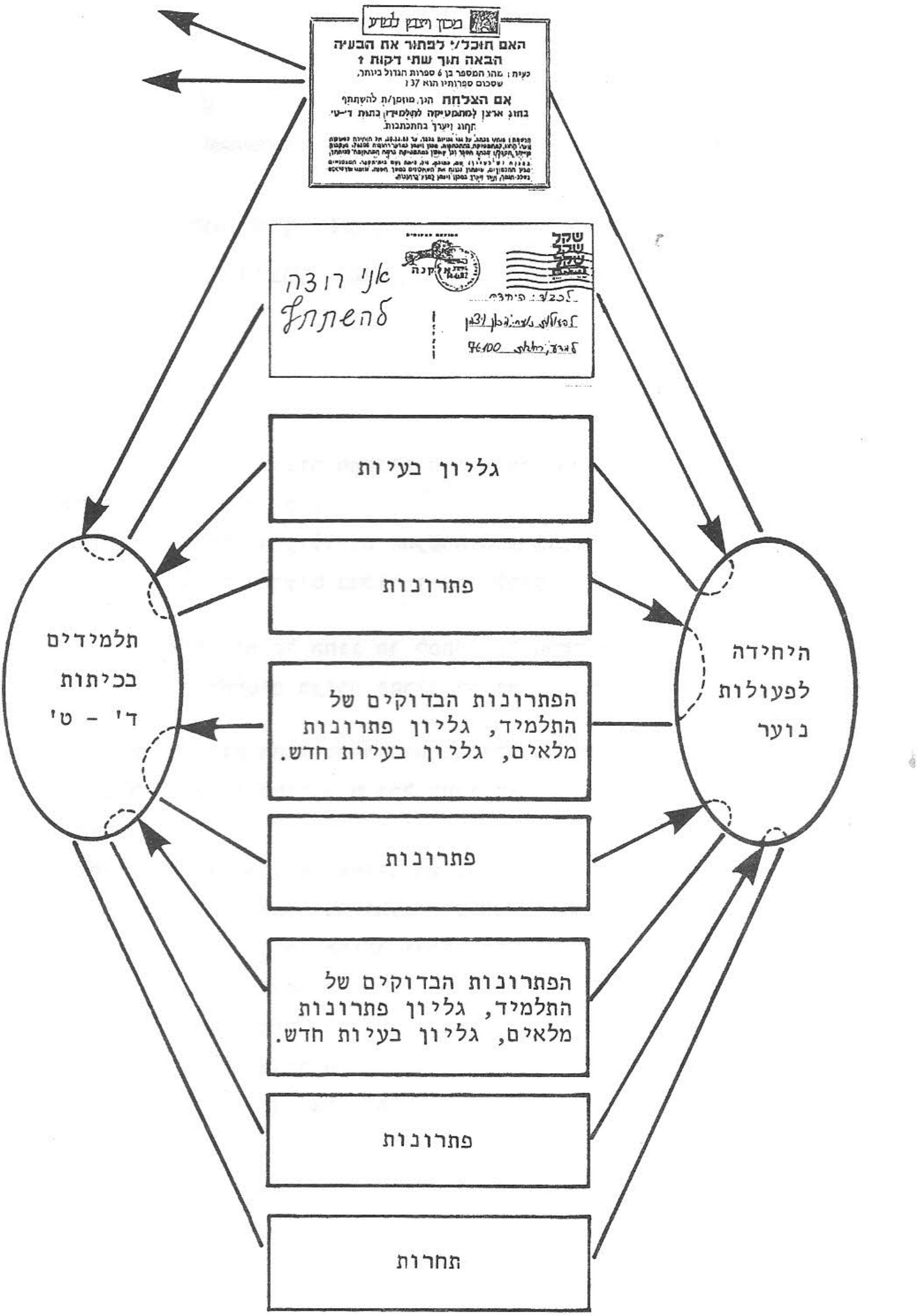
הקדמה

בשלוש השנים האחרונות מתקיים חוג ארצי למתמטיקה בהתכתבות, המיועד לתלמידי כיתות ד'-ט'.
חוג זה הוא חלק מפעילויות ההעשרה הנערכות מטעם היחידה לפעולות נוער, במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע.

המטרות העיקריות של החוג הן לפתח אצל המשתתפים את הכושר לפתרון בעיות, לפתח חשיבה מתמטית בעזרת פתרון בעיות ולהרחיב ולהעמיק את הידע המתמטי.

מודעות על קיום החוג מתפרסמות בתחילת כל שנה בעיתונות. באופן כזה נודע קיום החוג לתלמידים בכל רחבי הארץ והמעונינים פונים אלינו בבקשה להשתתף.
ניתן לומר, אם כן, שהמאפיין העיקרי של אוכלוסית התלמידים המשתתפים בחוג זה, הוא המוטיבציה הרבה והענין שלהם במתמטיקה.
לכל שכבת גיל (כיתה) מחובר גליון בעיות מתאים. גליונות הבעיות נשלחים למשתתפים בהתאם לרמת כיתתם, והם שולחים אלינו את פתרונותיהם. הפתרונות נבדקים ונשלחים חזרה לתלמידים בצירוף הערות אישיות לכל תשובה, וכן גליון פתרונות והסברים משוכפל, ושאלון חדש. לאחר שלושה שלבים כאלה, נערך, בסוף כל שנה, שלב הסיום בו מתחרים המצטיינים מבין המשתתפים.

בדיאגרמה הבאה מתואר מבנה החוג.



בחירת הבעיות

הבעיות נבחרות כך שניתן יהיה לפותרן בעזרת הידע הנלמד בבית הספר, אך האיסטרטגיה של הפתרון איננה ברורה מניסוח הבעיות, כך שהן מהוות אתגר ופתרונן דורש הפעלת מחשבה מקורית ושיטות לא שגרתיות. בחירת הבעיות נעשית תוך התחשבות בקשיים שיש לתלמידים. התוכן המתמטי כולל בסיסי ספירה, אחוזים, קבוצות, תבניות מספר ופסוק, תרגום, פונקציות, הנדסה, ריצופים ונושאים מתורת המספרים.

בניית מערכת בעיות הדרגתית

אחד העקרונות שהינחו אותנו בבחירת הבעיות היה בניית מערכת של בעיות הקשורות ביניהן אם על ידי נושא אחד ואם על ידי שיטת פתרון אחת. בכך ניסינו לתת כמה נקודות מבט לנושא מסוים, לפתח גישה או שיטה מסוימת, ולאפשר התגברות הדרגתית על קשיים. בעיות השייכות למערכת אחת ניתנות בכמה שלבים. באופן כזה, המשתתפים יכולים ללמוד מההערות שקיבלו על פתרונותיהם הקודמים, ומהפתרונות המשוכפלים שנשלחו אליהם.
נושאי המערכות נבחרו אחרי בדיקה מוקדמת של קשיים וצרכים של תלמידים. המערכות כוללות בעיות תרגום המביאות למערכות משוואות שבהן מספר הנעלמים גדול ממספר המשוואות; בעיות בנושא קבוצות, שפתרונן באמצעות דיאגרמות וון, קל יותר; בעיות העוסקות בריצופים; ובעיות שפתרונן באמצעות פונקציות קל יותר מאשר באמצעות תבניות פסוק. לפניכם שתי דוגמאות למערכות בעיות:

א) בעיות העוסקות בריצופים

רוב התלמידים לא מכירים את נושא הריצופים, ואינם רגילים להתייחס לתכונות הנדסיות דרך ריצופים במישור. לכן בנינו את מערכת הבעיות הבאה:

1. *ברצונכם לרצף משטח בעזרת מצולעים משוכללים חופפים, כך שקודקוד נוגע בקודקוד וצלע - בצלע. בעזרת אילו מצולעים משוכללים חופפים ניתן לרצף כך?*

   הערה: מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות זו לזו, וגם כל זוויותיו שוות זו לזו.

2. *עירית רחובות רוצה לרצף ככר גדולה. ברשותה מספר גדול מאוד של מרצפות משני סוגים: ריבועים ומשולשים שווי צלעות. כל המרצפות מאותו הסוג - חופפות (שוות זו לזו). כמו כן, צלע*

הריבוע שווה לצלע המשולש. מסיבות טכניות הוחלט שקודקוד של מרצפת אחת יגע במרצפת אחרת אך ורק בקודקודה; כלומר, אבני הריצוף יגעו זו בזו כך: קודקוד בקודקוד וצלע בצלע. כדי שהריצוף יהיה אסתטי, הוחלט שסידור המרצפות סביב נקודת פגישתן יהיה זהה בכל נקודות הפגישה; כלומר, מספר המרצפות בכל נקודות הפגישה יהיה שווה, וכן גם סדר הנחתן. הרצפים יכולים להשתמש בסוג אחד של המרצפות, או בשני הסוגים יחד.

בכמה אופנים שונים יוכלו לרצף את הככר בהתאם לתנאים הנ"ל? שרטט אותם.

3. בשלב הקודם, עסקנו בבעית ריצוף ככר ברחובות בעזרת מרצפות משני סוגים: ריבועים ומשולשים שווי צלעות. (שאלה 6, שלב א'). בינתיים קיבלו הרצפים מרצפות מסוג נוסף: משושים משוכללים (כל הצלעות וכל הזוויות שוות). צלע המשושה שווה לצלע הריבוע ולצלע המשולש. כללי הריצוף נשארו כשהיו: כלומר, אבני הריצוף יגעו זו בזו כך: קודקוד בקודקוד וצלע בצלע. כמו כן, מספר המרצפות בכל נקודת פגישה יהיה שווה, וכן גם סדר הנחתן.
הרצפים יכולים להשתמש בסוג אחד של מרצפות, שני סוגים או בשלושתם.
בכמה אופנים שונים יוכלו לרצף את הככר בהתאם לתנאים הנ"ל? שרטט אותם (אין צורך לשרטט את הריצופים שכבר הוזכרו בשלב א').

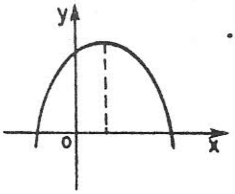
4. שלושה מצולעים משוכללים במישור, שמספר צלעותיהם x, y ו-z בהתאמה, הינם בעלי קודקוד משותף. סביב קודקוד זה, הם "ממלאים" את המישור, בלי להשאיר רווחים ביניהם.
הוכח שלכל x, y, z, המקיימים את התנאים לעיל, הסכום $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ הינו קבוע, ומצא את הסכום.
הערה: מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות זו לזו וגם כל זוויותיו שוות זו לזו.

ב. <u>בעיות שפתרונן באמצעות פונקציות קל יותר מאשר באמצעות תבניות פסוק</u>

בדיקה מוקדמת של תלמידים מכיתות ט' ו-י' הראתה כי רבים אינם רואים את הקשר בין תבנית פסוק ופונקציה, למרות שלעיתים קרובות השימוש בתכונות של פונקציות והגרפים שלהן מקל על פתרון בעיות העוסקות בתבניות פסוק. כדי לפתח גישה זו אצל תלמידי כיתות ט' שהשתתפו בחוג, בנינו את מערכת השאלות הבאה:

1. נתונה הפונקציה $y = (x-1)(x+1) - (x+4)x - x^2$
מצא את קודקוד הפרבולה, ובנה את הגרף שלה.

2. נתונה המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$. ידוע שהמקדמים מקיימים: $(a+b+c)c < 0$. הוכח שלמשוואה ישנם שני שורשים (פתרונות) ממשיים*.



3. לפניך גרף הפונקציה $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.
קבע האם a, b, c חיוביים, שליליים או 0.
הסבר את תשובתך.

4. ידוע כי למשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ אין שורשים (פתרונות) ממשיים, וכן כי $a + b + c < 0$.
האם c הינו חיובי או שלילי? הסבר!

5. הוכח כי אם a, b ו-c הם מספרים רציונליים המקיימים:

$$|a + c| = |b|$$

אזי למשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ ישנם שני שורשים רציונליים.

קשה לפתור את הבעיה השנייה, לדוגמא, באמצעות תבנית פסוק.
אך אם נעבור לשפת פונקציות, נוכל לדון בפונקציה $f(x) = ax^2 + bx + c$.
מהנתונים נסיק כי $(a+b+c)c = f(1)\cdot f(0) < 0$. מכאן כבר קל להשלים את הפיתרון.

קשיים של תלמידים

א. בעיות שאין להן פתרון

במהלך הלימודים הרגיל, התלמידים לא נפגשים בדרך כלל בבעיות שאין להן פתרון. מלבד הערך החינוכי לכך שלא לכל בעיה יש פתרון, ראינו חשיבות לכך שבדיקת התוצאה המתקבלת במקרה זה, איננה רק לצורך בדיקת טעות בחישובים, אלא מהווה חלק אינטגרלי מדרך הפתרון, ובלעדיה לא ניתן לפתור את הבעיה. להלן דוגמא של בעיה מסוג זה שניתנה לתלמידי כיתה ז':

קבוצת ילדים יצאה לטיול של 4 קילומטר. הם הלכו במהירות של 3 קמ"ש (קילומטרים בשעה) את שני הקילומטרים הראשונים. באיזו מהירות עליהם ללכת את שני הקילומטרים שנשארו, כך שבממוצע יעברו את כל 4 הקילומטרים במהירות של 6 קמ"ש?

תלמידים רבים ענו שהתשובה היא 9 קמ"ש, תוך התעלמות מחלק מהנתונים. מספר תלמידים ניסו להתגבר על המכשול בהציעם שהילדים הלכו את 2 הק"מ האחרונים בזמן 0 או במהירות אינסופית. כשליש מבין התלמידים ענו נכון, שלבעיה אין פתרון.

*דיון בפתרון בעיה זו נמצא במאמר של א. קריימר, פעולות מחשבתיות בפתרון בעיות מתמטיות, שבבים, תיק מס' 22.

ב. בעיות הכוללות מעבר מבעיה יומיומית לבעיה מתמטית

להלן שתי דוגמאות של בעיות המנוסחות כסיטואציה יומיומית, כאשר הקושי העיקרי הוא ניסוחן מחדש כבעיה מתמטית, כלומר, בניית מודל מתמטי מתאים.

בעיה א':
לרגל יום העצמאות של מדינת ישראל, שיגרה כל עיר ברכה לתושבי העיר הקרובה אליה ביותר. בהנחה כי המרחקים בין הערים שונים זה מזה, הוכח כי אף עיר לא קיבלה יותר מחמש ברכות כאלו ליום העצמאות.

בעיה ב':
אופה שבבעלותו שתי מאפיות החליט לבנות מחסן משותף לאחסון שקי הקמח. באיזה מקום יש לבנות את המחסן, כדי שההעברה היומית של שקי הקמח מהמחסן למאפיות תהיה הזולה ביותר? (בהנחה שבכל מאפיה צריכת הקמח היומית הינה קבועה).

הקושי העיקרי בבעיות מסוג זה הוא בניית מודל מתמטי המתאים לבעיה המנוסחת כסיטואציה מחיי היום-יום.
בעיה א' ניתנת לניסוח כבעיה הנדסית, ובעיה ב' - כבעיה של מציאת מינימום של פונקציה בעלת משתנה אחד.
אחד הקשיים המתעוררים אצל תלמידים המנסים לפתור את הבעיה ללא ניסוח מתמטי מוקדם, הוא שהם מתבססים על טענות שהן או לא מדויקות מבחינה מתמטית או לא מתאימות לסיטואציה המתוארת.

השפעה

אחת ממטרות החוג היא לעודד תלמידים לעסוק באופן עצמאי במתמטיקה. ממכתבי הילדים המשתתפים, מסתבר שרבים מעסיקים את סביבתם הקרובה (הורים, מורים, שכנים וכו') בפתרון הבעיות. חלקם מבקשים הפנייה לספרות מתמטית, שם יוכלו למצוא הרחבה של הנושאים שהוצגו בבעיות.

דרך נוספת לבדיקת השפעת החוג על התלמידים היא בעזרת המשוב החוזר שיש לבדיקת התשובות של המשתתפים ולשליחת הפתרונות המשוכפלים לפותרים.
לדוגמא, בנתח את השפעת מערכת הבעיות והפתרונות הכוללת בעיות בנושא קבוצות, שפתרונן פשוט יותר באמצעות דיאגרמות וון.
בשלב הראשון בכיתה ד' נתנו את הבעיה הבאה:

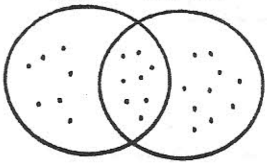
גלעד הזמין למסיבת יום הולדתו 25 ילדים. הוא חילק שתיה לכולם:
15 ילדים שתו מיץ פטל ו-18 שתו מיץ תפוזים.
כמה ילדים שתו גם מיץ פטל וגם מיץ תפוזים? הסבר.

הקושי העיקרי כאן הוא מציאת מספר האיברים של תת-קבוצה, כאשר נתונות שתי קבוצות שהחיתוך שלהן לא ריק.
בשלב הבא שלחנו למשתתפים את הפתרון לבעיה:

$33 = 18 + 15$. למסיבה באו 25 ילדים.

$33 - 25 = 8$

מכאן, 8 ילדים שתו את שני המיצים.
אפשר להסיק זאת גם בעזרת הדיאגרמה הבאה:



ובעיה נוספת:

בבית התרבות העירוני מתקיימים חוגים לילדים.
בסך הכל משתתפים בחוגים 70 ילדים. המורים בדקו את רשימות הילדים והתברר כי בחוג לציור רשומים 36 ילדים, בחוג לקרמיקה 28 ילדים, ובחוג לנגינה 21. כאשר בדקו את רשימות החוגים לציור ולקרמיקה התברר כי 11 ילדים רשומים בשתיהן. מרשימות החוגים לקרמיקה ולנגינה התברר כי 6 ילדים רשומים בשתיהן; ומרשימות החוגים לציור ולנגינה התברר כי 9 ילדים רשומים בשתיהן. כאשר הישוו את רשימות שלושת החוגים הנ"ל, התברר כי 4 ילדים רשומים בשלושתן.

א) כמה ילדים רשומים רק בחוג לציור?

ב) כמה ילדים לא משתתפים באף אחד משלושת החוגים הנ"ל?

הסבר תשובתך.

בבעיה זו, לא רק שיש שלוש קבוצות במקום שתיים, אלא ששלב החיסור השני מתבצע על החיסור הראשון.
כדי לבדוק האם ישנה השפעה למשוב שהתלמידים מקבלים מאיתנו, נתנו בשלב הראשון בכיתה ה', בעיה אקוויולנטית לבעיה שניתנה בשלב השני בכיתה ד'.
בעיה זו ניתנה לתלמידי כיתות ה' ללא שום הכנה.

נראה היה לנו שהדרך הנוחה ביותר לפתרון בעיות מסוג בעית 3 הקבוצות, היא בעזרת דיאגרמות וון. ובאמת, כפי שניתן לראות מהתוצאות המרוכזות בטבלה, כמעט כל תלמידי כיתה ה', אשר בחרו להשתמש בדיאגרמות וון (ללא הכוונה שלנו), אכן הצליחו לפתור נכון את הבעיה. מסיבה זו צרפנו פתרון בעזרת דיאגרמות וון לשלב הראשון בכיתה ד'.

טבלת התוצאות

כיתה	בעיה	מספר המשתתפים	אחוז הפותרים נכון	אחוז המשתמשים בדיאגרמות וון	אחוז הפותרים נכון מבין המשתמשים בדיאגרמות וון
ד'	2 קבוצות	122	96	0	0
ד'	3 קבוצות	79	27	46	47
ה'	3 קבוצות	118	31	14	94

מפתרונות תלמידי כיתות ד' בשלב השני, מסתבר שאכן היתה השפעה לפתרון שלנו על התלמידים. 46% מביניהם ניסו להשתמש בדיאגרמות וון, בעוד שרק 14% מתלמידי כיתות ה' עשו כן. אבל רק כמחצית מבין תלמידי כיתות ד' שניסו להשתמש בדיאגרמות וון, אכן הצליחו לפתור נכון את הבעיה. תוצאה זו נובעת, כנראה, מכך שתלמידים אלו השתמשו בכלי שהוגש להם מבלי שידעו איך להשתמש בו.

סיכום

מנסיוננו, החוג מאפשר לתלמידים מכל רחבי הארץ, לעסוק בשטח המעניין אותם. הקשר האישי באמצעות בדיקת כל פתרון והערת הערות לגבי כל תשובה, עוזרים ביצירת משוב מועיל למשתתפים. הבנייה ההדרגתית של בעיות כמו אלו שהוצגו כאן, נראית מועילה ומסייעת בהגשמת מטרות החוג. רצוי, כמובן להמשיך ולעקוב אחרי קשיים של תלמידים כדי לשפר את בניית מערכות הבעיות והפתרונות, על מנת שהמשתתפים יפיקו תועלת מירבית מהחוג.

לפניכם דוגמא לגליון בעיות וגליון פתרונות.

כיתה ז'

חוג ארצי במתמטיקה - שלב א' (תשמ"ד)

1. בחוג מסוים יש יותר מ-90% בנות. כן משתתפים בחוג 3 בנים.
כמה בנות, לכל הפחות, משתתפים בחוג? הסבר כיצד מצאת.

2. ליונית חבל שאורכו $\frac{16}{31}$ מטר. היא רוצה לחתוך ממנו $\frac{1}{2}$ מטר.
האם תוכל לעשות זאת, בלי עזרה של מכשירי מדידה? הסבר.

3. לפניך תרגיל חילוק. כל אות מסמנת ספרה שונה.
(אותיות שוות מסמנות ספרות שוות).
* מסמן ספרה כלשהי.
כתוב את התרגיל בעזרת מספרים.

```
       ח ט י
ז ד ה | א ב ג א ד ה
        * א * *
        * ח * *
        א * * *
        * * א *
        * ב * *
        = = = =
```

4. נתונים ארבעה מטבעות זהים בצורתם. אחד מהם מזויף ושונה במשקלו ממשקל שאר המטבעות.
ברשותך מאזניים בעלי שתי כפות, ללא משקולות.
   א. האם תוכל למצוא את המטבע המזויף באמצעות שתי שקילות בלבד? הסבר.
   ב. האם תוכל לדעת אם המטבע כבד או קל יותר משאר המטבעות?

5. מספר מסוים A מורכב מ-$2n$ ספרות: n ספרות "0" ו-n ספרות "1".
ידוע שהמספר A מתחלק ב-13.
   א. אילו ערכים טבעיים יכול n לקבל?
   ב. לכל n, מצא מספר A מתאים.

6. מהי השארית כאשר 10^{40} מחולק ב-99?

7. בתחנה המרכזית בת"א עלו אנשים לאוטובוס ריק. $\frac{2}{3}$ מהאנשים מצאו מקומות ישיבה, והשאר עמדו. בתחנה הראשונה גדל מספר האנשים שבאוטובוס ב-8%.
כמה אנשים עלו לאוטובוס בתחנה המרכזית? הסבר.
(הנח שבאוטובוס יכולים להדחס לכל היותר 85 אנשים.)

בהצלחה!

חוג ארצי במתמטיקה - שלב א' (תשמ"ד) - פתרונות

כיתה ז'

1. שלושת הבנים מהווים פחות מ-10%. לכן בחוג משתתפים יותר מ-30 ילדים. מכאן, לפחות 28 בנות משתתפות בחוג.

2. במקום לחתוך $\frac{1}{2}$ מטר חבל, אפשר לחתוך $\frac{1}{62}$ מטר, כי $\frac{16}{31} - \frac{1}{2} = \frac{1}{62}$.
$\frac{1}{62}$ מטר מהווה $\frac{1}{32}$ מ- $\frac{16}{31}$ מטר (כי $\frac{16}{31}\cdot\frac{1}{32} = \frac{1}{62}$). נקפל את החבל באמצעיתו, ונחזור על כך עוד 4 פעמים.

באופן כזה נוכל לחתוך $\frac{1}{32}$ מהחבל, כלומר $\frac{1}{62}$ מטר.

ואז ישאר חבל שאורכו $\frac{1}{2}$ מטר.

3.
$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{r}{986} & \\
\hline
340170 & 345 \\
\underline{3105} & \\
2967 & \\
\underline{2760} & \\
2070 & \\
\underline{2070} & \\
==== &
\end{array}
$$

4. נסמן את המטבעות: a, b, c, d.
שקילה I: נשווה משקליהם של a ו-b.
(i) אם משקליהם שונים, נשווה בשקילה II את משקליהם של a ו-c. בדרך זו נוכל לדעת איזה מטבע מזויף: a או b. כמו כן נוכל לדעת אם המטבע המזויף קל או כבד יותר.
(ii) אם משקל a שווה למשקל b, נשווה בשקילה II את משקליהם של a ו-c. בדרך זו נוכל לדעת איזה מטבע מזויף: c או d. אך אם d הוא המטבע המזויף, <u>לא</u> נוכל לדעת אם הוא קל או כבד יותר.

5. המספר הטבעי הקטן ביותר ש-n יכול לקבל הוא 2, והמספר A המתאים לו הוא A = 1001. ל- n = 3, מתאים A = 101010.
לכל n > 1 נוכל להתאים מספר A הבנוי מצירופי שני המספרים הנ"ל כדלקמן: אם n זוגי נבנה את A על ידי צירוף של $\frac{n}{2}$ פעמים המספר 1001:

$$A = \underbrace{10011001\ \ldots\ 1001}_{\text{ספרות } 2n}$$

אם n מספר אי-זוגי, נבנה את A על ידי צירוף של $\frac{n-3}{2}$ פעמים המספר 1001 ופעם המספר 101010. למשל:

$$A = \underbrace{10011001 \ \ldots \ 1001101010}_{\text{ספרות } 2n}$$

האם אפשר לצרף את 101010 באופן אחר?

דרך נוספת:

לכל $n > 1$ מתקיים:

$$\underbrace{77 \ldots 7}_{\text{ספרות } n} \times 13 = 10\underbrace{11 \ldots 1}_{\text{ספרות } n-2}01$$

במספר שקיבלנו, n ספרות של 1. לכן עלינו להוסיף עוד $n - 2$ אפסים ונקבל את המספר $10\underbrace{11 \ldots 1}_{n-2}01\underbrace{00 \ldots 0}_{n-2}$.

6. בהתחלה מחלקים 100 ב 99 ומקבלים שארית של 1. אליו מצטרפים שוב שני אפסים וכו'. כיוון שיש מספר זוגי של אפסים, השארית היא 1.

7. מספר האנשים שעלו לאוטובוס בתחנה המרכזית צריך להתחלק ב-3 וב-25 $(8\% = \frac{8}{100} = \frac{2}{25})$. לכן מספר זה הוא כפולה של 75. אילו היו עולים לאוטובוס יותר מ-75 אנשים, אזי בתחנה הראשונה היה מספרם גדול מ-85. לכן, בתחנה המרכזית עלו 75 אנשים לאוטובוס.