π - k מק - קי?

מאת: מקסים ברוקהיימר, צביה מרקוביץ
מכון ויצמן למדע, רחובות

1. קוריוז?

בעיתון Scripta Mathematica משנת 1953 הופיעה הערה תחת הכותרת CURIOSA.

CURIOSA

338. A Thought-Provoking Procedure. Adriaen Metius in his book *Arithmeticae et geometricae practica* published in 1611 gives the values 355/113 for π. The author credits this result to his father, Adriaen Anthonisz (1527–1617). He further relates that his father proved that π lies between the two values

$$377/120 \quad (=3.1416666666\ldots \qquad \text{error} \quad 740\cdot 10^{-7})$$
$$333/106 \quad (=3.1415094339\ldots \qquad \text{error} \quad 832\cdot 10^{-7}),$$

and in order to find a closer value he added the numerators of the two fractions, added the denominators and obtained

$$\frac{710}{226} = \frac{355}{113}\ (=3.1415929\ldots \qquad \text{error} \qquad 3\cdot 10^{-7})$$

Thus a procedure which would cover even a Freshman with shame, Adriaen Anthonisz managed to turn into fame.

The curious part about it is that Anthonisz is not the only one to turn that kind of a trick. He has a serious rival in Valentius Otho (1550?–1605?) who is reputed to have been in possession of the approximation 355/113 in 1573. Otho used the two approximations 22/7, 377/120 which were known since ancient times, one due to Archimedes, the other to Ptolemy. He subtracted the numerators, subtracted the denominators and had the result

$$\frac{377-22}{120-7} = \frac{355}{113}$$

Does the result justify the "means?"

NEV. R. MIND

ראשית נסקור את הכתוב. נשים לב שמחבר המאמר חותם בכינוי NEV.R. MIND שהתרגום הפונטי שלו הוא "לא חשוב". הוא מספר על מתמטיקאי בשם Adriaen Anthonisz, אשר אחרי שהראה כי π נמצא בין שני הערכים:

$$\frac{377}{120} \qquad (= 3.1416666666\ldots)$$

$$\frac{333}{106} \qquad (= 3.1415094339\ldots)$$

ורצה למצוא ערך קרוב יותר ל π, חיבר את המונים ואת המכנים של שני השברים הנ"ל וקיבל:

$$\frac{710}{226} = \frac{355}{113} \qquad (= 3.1415929\ldots)$$

ואומנם ערך זה קרוב יותר ל π. כותב ההערה אומר שבעזרת פעולה זאת, המביישת אפילו בוגר תיכון, Adriaen Anthonisz הגיע לתהילה. כותב ההערה ממשיך ואומר שהדבר המוזר כאן הוא ש Anthonisz איננו היחיד שהשתמש ב"טריק" כזה. Otho מצא בשנת 1573 את הערך $\frac{355}{113}$ בדרך הבאה: הוא השתמש בשני ערכים של π שהיו ידועים מקודם, ב- $\frac{377}{120}$ שהיה ידוע לפחות מזמנו של Ptolemy (המאה השניה אחרי הספירה), וב- $\frac{22}{7}$ שהיה ידוע לפחות מימי ארכימדס (המאה השלישית לפני הספירה). הוא חיסר את המונים, חיסר את המכנים וקיבל:

$$\frac{377 - 22}{120 - 7} = \frac{355}{113}$$

כותב ההערה מסיים במשפט - "האם המטרה מקדשת את האמצעים?"

כותב ההערה "מלגלג" על הדמויות מההסטוריה. אבל, האם התהליך בו השתמש Anthonisz הוא באמת תהליך טיפשי? האם חיבור המונים והמכנים של שני שברים, כאשר מחפשים שבר הנמצא בין שני השברים, הוא תהליך המבייש אפילו בוגר תיכון? האם התהליך המובא כאן מזכיר לכם מישהו או משהו?

את השאלות הנ"ל כדאי להפנות ל...מק-קי.

2. <u>מק-קי</u>

הסיפור על "משפט מק-קי" הופיע בשבבים מס' 2.
בשנת 1973 מק-קי היה נער בכיתה ח'. הבעיה שעמדה במרכזו של אחד משיעורי המתמטיקה בבית ספרו שבפלורידה, היתה למצוא שבר הנמצא בין שני שברים נתונים. למשל בין $\frac{1}{6}$ ל $\frac{1}{5}$. מק-קי חיבר את המונים ואת המכנים של שני השברים הנתונים: $\frac{1 + 1}{5 + 6}$, וקיבל $\frac{2}{11}$. להפתעת המורה, באמת $\frac{1}{6} < \frac{2}{11} < \frac{1}{5}$.
כך "נולד" ה"משפט של מק-קי", לפיו, כאשר נתונים $\frac{a}{b}$ ו $\frac{c}{d}$ (a, b, c, d שלמים וחיוביים) אזי:

$$\frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}$$

שתי הוכחות למשפט מק-קי ניתן למצוא במאמר בשבבים מס' 2. הפתעתו של המורה, וכנראה גם של כותב ההערה, נובעת אולי מכך, שהם מקשרים את התוצאה הנ"ל עם הטעות הנפוצה של תלמידים, הנוטים לחבר שברים בדרך זו. כ"חיבור" שברים יש לפעולה זו שתי בעיות. אחת, שזהו איננו החיבור המוסכם במתמטיקה. השניה, שניתן לבצע פעולה זו רק על מספרים רציונליים המוצגים

כשברים. במלים אחרות, אנו מתייחסים לספרן (*numeral*) ולא למספר (number).

לדוגמא:

אם $\frac{1}{4}$ ו $\frac{1}{2}$ מסמנים רק שברים אלו (ולא את המספרים הרציונליים שהם מייצגים), אזי ניתן להגדיר פעולה בינרית שנסמנה * באופן הבא:

$$\frac{1}{4} * \frac{1}{2} = \frac{1+1}{4+2} = \frac{2}{6}$$

שהיא הפעולה של מק-קי.

אבל אם ניקח במקום $\frac{1}{4}$ את השבר $\frac{2}{8}$ ששקול ל $\frac{1}{4}$ נקבל לפי פעולת מק-קי

$$\frac{2}{8} * \frac{1}{2} = \frac{2+1}{8+2} = \frac{3}{10}$$

ו $\frac{3}{10}$ לא שקול ל $\frac{2}{6}$ שקיבלנו קודם.

זאת אומרת, שפעולת מק-קי איננה יכולה להיות פעולה בינרית במספרים רציונליים. זוהי הסיבה המתמטית לכך שפעולה זו איננה נפוצה.

אם נחזור ל- Anthonisz, הרי שהוא השתמש בעצם בשיטת מק-קי. הוא ידע כי $\frac{377}{120} > \pi > \frac{333}{106}$, חיבר את המונים ואת המכנים וקיבל את השבר $\frac{355}{113}$ המקיים: $\frac{377}{120} > \frac{355}{113} > \frac{333}{106}$.

לעומת Anthonisz, התהליך בו השתמש Otho קצת יותר מסובך, היות והמשפט הכללי לא תופס: אם d, c, b, a שלמים וחיוביים, לא תמיד

$$\frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-d} < \frac{c}{d}$$

כאשר $a \neq c$, $\frac{a-c}{b-d}$ יהיה בתוך הקטע $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ רק אם $b > d$, ויהיה מחוץ לקטע אם $b < d$. כאשר $a = c$ תוצאת הפעולה הנ"ל היא אפס, ושוב נהיה מחוץ לקטע. אין לנו מידע נוסף (מלבד זה המצוי בהערה) על Otho, ויתכן שידע כל זאת כאשר החסיר את המונים והמכנים של שני השברים.

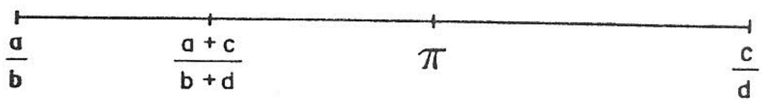
התהליך בו השתמש Anthonisz מעורר שתי שאלות:

א) האם הכיר את "שיטת מק-קי?"

ב) האם ידע ש- π נמצא בערך באמצע, בין $\frac{333}{106}$ ו $\frac{337}{120}$? שכן, אז יכול היה להיות בטוח ש $\frac{355}{113}$ יהיה ערך קרוב יותר ל π מאשר $\frac{333}{106}$ או $\frac{377}{120}$.

אם π נמצא ליד אחד הקצוות של הקטע $[\frac{a}{b}\ ,\ \frac{c}{d}]$, נניח ליד $\frac{c}{d}$, חיבור לפי שיטת מק-קי יכול לתת ערך הנמצא דווקא בקצה השני, ואז $\frac{c}{d}$ היווה ערך קרוב יותר ל π מאשר $\frac{a + c}{b + d}$.

אבל אם π נמצא בערך באמצע, לא חשוב היכן "יפול" $\frac{a + c}{b + d}$, הוא בודאי יהיה קרוב יותר ל-π מאשר $\frac{a}{b}$ או $\frac{c}{d}$.



הספר המוזכר ב-Curiosa אמנם איננו מצוי בידינו, אך סביר להניח ש-Adriaen Anthonisz הגיע לשני הערכים $\frac{333}{106}$ ו $\frac{377}{120}$ דרך קירוב המבוסס על שיטת ארכימדס, שיטה לפיה מקרבים את היקף המעגל בעזרת היקף של מצולע חוסם והיקף של מצולע חסום. לכן כנראה ידע ש π נמצא בערך ב"אמצע" הקטע, ולא קרוב לאחד הקצוות.

תשובה לשאלה האם הכיר Anthonisz את "שיטת מק-קי", ניתן למצוא בספרו של CAJORI, אשר אומר ש Nicolas Chuquet השתמש ב"שיטת מק-קי" בשנת 1484 כדי לקרב שורשים של משוואות. סביר אם כך להניח שתהליך מק-קי היה ידוע בין המתמטיקאים באירופה במאה ה-16, וגם ל-Anthonisz.
אם נחזור ל-CURIOSA, מסתבר שלא המטרה מקדשת את האמצעים, אלא האמצעים מקדשים את המטרה.

3. <u>k מק-קי</u>

"משפט מק-קי" יהיה לנו לעזר גם כאשר נרצה למצוא שבר בין $\frac{a}{b}$ ל $\frac{c}{d}$ אשר יהיה קרוב ל- $\frac{a}{b}$ או ל- $\frac{c}{d}$. נוכל להגיע לשבר כזה אם נחזור על תהליך מק-קי מספר פעמים.

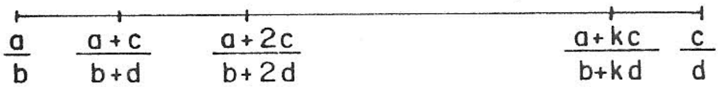
נניח כי השבר שברצוננו למצוא, קרוב ל- $\frac{c}{d}$.

ע"י תהליך מק-קי נקבל: $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

כאשר * מציין חיבור לפי מק-קי.

ע"י חיבור מק-קי נוסף נקבל: $\frac{a+c}{b+d} * \frac{c}{d} = \frac{a+2c}{b+2d}$

ולאחר k פעמים נקבל: $\frac{a+(k-1)c}{b+(k-1)d} * \frac{c}{d} = \frac{a+kc}{b+kd}$



כאשר k שואף לאינסוף:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a+kc}{b+kd} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{a}{k}+c}{\frac{b}{k}+d} = \frac{c}{d}$$

ובאופן דומה:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c+ka}{d+kb} = \frac{a}{b}$$

על-ידי בחירת k מתאים נוכל להתקרב כרצוננו ל- $\frac{c}{d}$ או ל- $\frac{a}{b}$.

4. π - k מק-קי?

"k מק-קי" מחזיר אותנו ל π.

הערך 3 עבור π היה ידוע בסין כבר במאה ה-12 לפני הספירה, והערך $\frac{22}{7}$ היה ידוע לפחות מזמנו של ארכימדס (המאה ה-3 לפני הספירה).

מעניין שאל כל הערכים של π, הנזכרים ב-CURIOSA, אפשר להגיע בהסתמך על כך ש- $3 < \pi < \frac{22}{7}$ ובשימוש ב- "k מק-קי":

$$\frac{333}{106} = \frac{3+15\cdot 22}{1+15\cdot 7}$$

$$\frac{355}{113} = \frac{3+16\cdot 22}{1+16\cdot 7}$$

$$\frac{377}{120} = \frac{3+17\cdot 22}{1+17\cdot 7}$$

בצורה כזו אפשר להגיע גם אל הערך $3\frac{10}{71}$ שהוצע על ידי ארכימדס:

$$3\frac{10}{71} = \frac{223}{71} = \frac{3 + 10\cdot 22}{1 + 10\cdot 7}$$

ואל הערך $\frac{157}{50}$ בו השתמש Liu Hui במאה ה-3 לספירה:

$$\frac{157}{50} = \frac{3 + 7\cdot 22}{1 + 7\cdot 7}$$

ואל הערך $\frac{1531}{484}$ שהוצע על-ידי Simon Ducheshe בשנת 1583:

$$\frac{1531}{484} = \frac{3 + 69\cdot 22}{1 + 69\cdot 7}$$

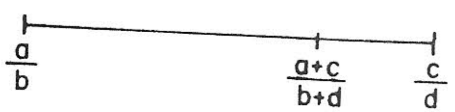
כנראה שבכל דור יש לפחות מק-קי אחד...

5. עוד על מק-קי

בעקבות "משפט מק-קי" מעניין לחקור את השאלה הבאה: היכן בקטע $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}]$ ימצא השבר $\frac{a + c}{b + d}$?

(ראה גם מאמרו של פרופ' ש. אביטל, הרהורים על "משפט מק-קי", שהופיע בשבבים מס' 3).

כדי למצוא זאת, נבדוק מהו המרחק בין $\frac{a + c}{b + d}$ לבין קצות הקטע.



$$\frac{a + c}{b + d} - \frac{a}{b} = \frac{ab + bc - ab - ad}{b(b + d)} = \frac{bc - ad}{b(b + d)} = \frac{\frac{c}{d} - \frac{a}{b}}{\frac{b + d}{d}} = L\beta$$

כאשר L הוא אורך הקטע $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}]$ ו $\beta = \frac{d}{b + d}$.

ולכן:

$$\frac{c}{d} - \frac{a + c}{b + d} = L(1 - \beta)$$

β מציין איזה חלק מהקטע מהווה המרחק בין $\frac{a + c}{b + d}$ לבין $\frac{a}{b}$.

כעת ניתן למצוא בקלות את התנאי לכך שהשבר שנקבל באמצעות חיבור מק-קי, ימצא בדיוק באמצע הקטע. מה שדרוש הוא $\beta = \frac{1}{2}$.

ואז:

$$\beta = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow b = d$$
$$\beta < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow b > d$$
$$\beta > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow b < d$$

כלומר, כאשר $b = d$, $\frac{a+c}{b+d}$ ימצא באמצע הקטע.

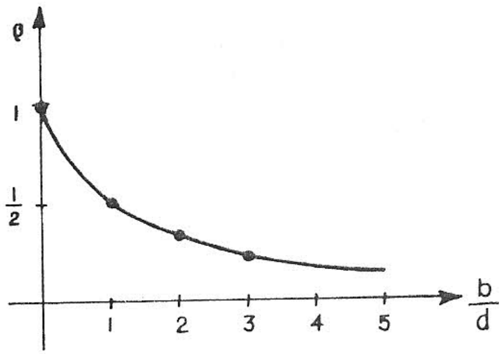
כאשר $b > d$, $\frac{a+c}{b+d}$ ימצא קרוב יותר ל- $\frac{a}{b}$.

$b < d$, $\frac{a+c}{b+d}$ ימצא קרוב יותר ל- $\frac{c}{d}$.

קיבלנו שמיקומו של $\frac{a+c}{b+d}$ בקטע, תלוי אך ורק במכנים של השברים $\frac{a}{b}$ ו $\frac{c}{d}$. וכך, אם נתונים שני הקטעים $[\frac{1}{8}, \frac{3}{4}]$ ו $[\frac{3}{8}, \frac{3}{4}]$, נקבל עבור שניהם אותו ה-β $(\beta = \frac{1}{3})$. כלומר, בשני המקרים, המרחק בין $\frac{a+c}{b+d}$ ל- $\frac{a}{b}$ מהווה $\frac{1}{3}$ מהקטע.

כדי להראות באופן גרפי את הקשר בין β לבין b ו d, נשרטט את β כפונקציה של $\frac{b}{d}$.

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{b}{d}}$$



המרחק בין $\frac{a+c}{b+d}$ לבין קצות הקטע תלוי גם במונים של $\frac{a}{b}$ ו $\frac{c}{d}$. לכן עבור שני הקטעים הקודמים נקבל תוצאות שונות.

ספרות

1. Cajori, F. *A History of Mathematics*, p. 136. New York: Macmillan, 1953.

2. Mind, Nev. R. "Curiosa No. 338". *Scripta Mathematica*, 19 (1953).