קבלת החלטות בחנות פרחים

מאת: דוד בן חיים
אוניברסיטת חיפה -
בית הספר לחינוך של התנועה הקיבוצית, אורנים.

הצגת הבעיה

נער בחופשה מועסק על ידי חנות פרחים במסירת זרי פרחים. התשלום היומי הוצע לו לבחירה על פי שתי תכניות:

תכנית א: 15 שקלים לכל זר.

תכנית ב: 1 אגורה (0.01 שקל) עבור מסירת הזר הראשון,
2 אגורות עבור הזר השני,
4 אגורות עבור השלישי,
8 אגורות עבור הרביעי וכך הלאה.

איזו תכנית יעדיף הנער?

בעיה זו המוכרת בוריאציות שונות* הוצגה בכיתות שונות בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה ועוררה פעילות מתמטית רבת ענין. בתחילה מצביעים רוב התלמידים בכיתה עבור תכנית א' ורק אצל מעטים מתעורר ספק והם מציעים לחקור את הבעיה. דיון מודרך מביא לאיסוף וארגון נתונים. מסקנה האופיינית לבעיות מ"חיי יום יום" היא כי אין לבעיה פתרון חד משמעי והוא מותנה במספר היומי של הזרים הנשלחים. ניתן גם לדון בהצגות הגרפיות של שתי התכניות והשימוש במחשבון עשוי להועיל.

---

*ראה למשל, "מתמטיקה בשחמט" מאת א. קריימר, שבבים, תיק מס' 21.

פתרון הבעיה

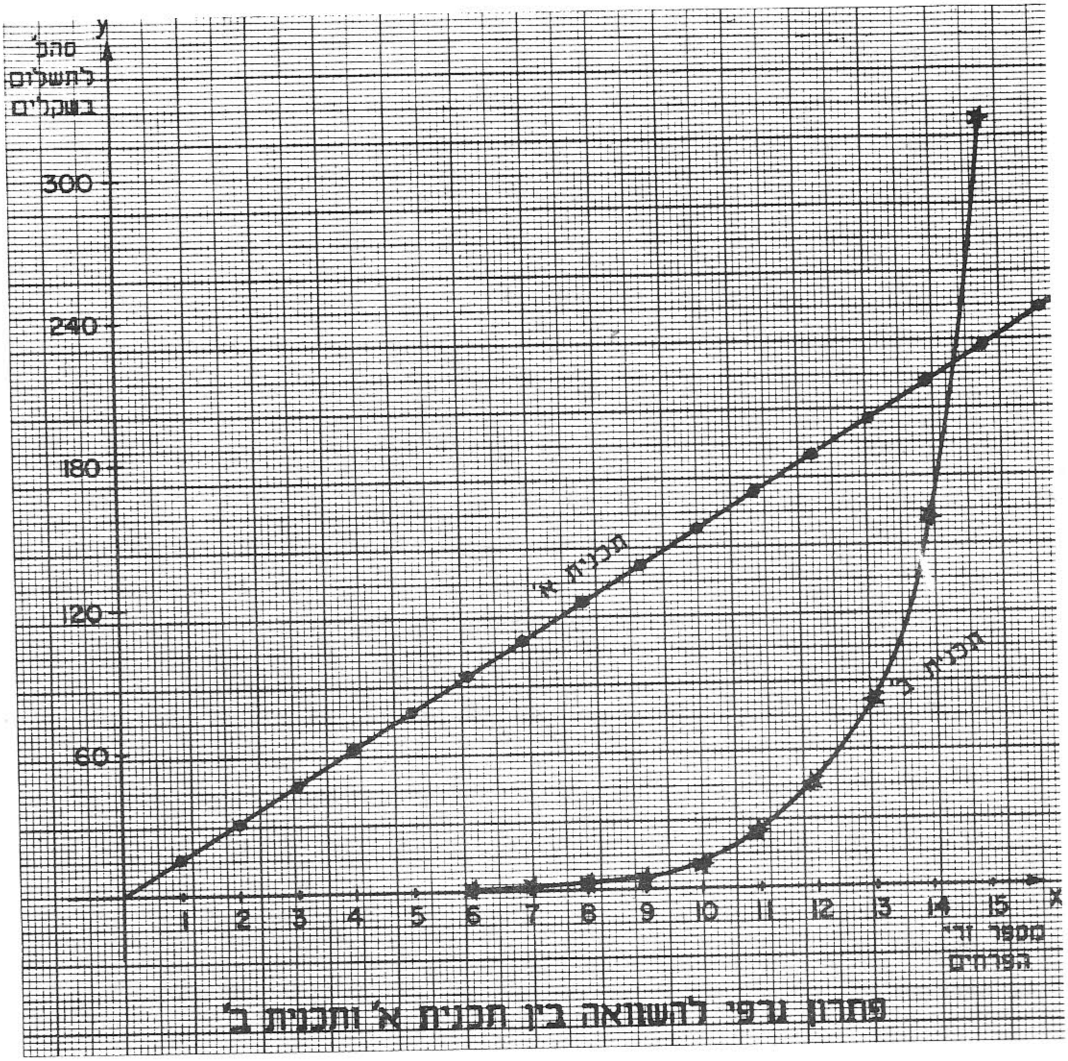
טבלת ארגון התוצאות

	תכנית א'		תכנית ב'	
זר מספר	תשלום עבור זר בשקלים	סה"כ לתשלום בשקלים	תשלום עבור זר בשקלים (אגורות)	סה"כ לתשלום בשקלים (אגורות)
1	15.00	15.00	0.01 (1)	0.01 (1)
2	15.00	30.00	0.02 (2)	0.03 (3)
3	15.00	45.00	0.04 (4)	0.07 (7)
4	15.00	60.00	0.08 (8)	0.15 (15)
5	15.00	75.00	0.16 (16)	0.31 (31)
⋮		⋮		⋮

אם נסמן את מספר הזרים ב-n, הרי התשלום הכולל בתכנית א' הוא פשוט: $15n$ שקלים, כאשר n הוא מספר הזרים.

בתכנית ב' התבנית מורכבת יותר: $2^n - 1$ אגורות. בדרך כלל, התלמידים מעדיפים לחשב תחילה את התשלום באגורות ורק לבסוף להפכו לשקלים. הצגת נתוני התשלום באגורות מוסיפה לתלמידים רמז חזותי באשר לקשר בין הסידרה 1, 3, 5, 7, 15, ... והסידרה 1, 2, 4, 8, 16, ... ברוב המקרים זה הוביל להכללה האלגברית של הכלל ל-n זרי פרחים. יש תלמידים המגלים תחילה כי התשלום עבור $n + 1$ זרים שווה לכפליים הסכום עבור n זרים בתוספת אגורה אחת, ולפיכך התשלום עבור 6 זרים יהיה $63 = 1 + 2 \cdot 31$.
את ההוכחה המצדיקה טענה זו הם מביאים בניסוח מדויק פחות או יותר באומרם כי, "מאחר והתשלום עבור כל זר נוסף גדול פי 2 מהקודם לו, הרי שאם נכפיל פי 2 את כל התשלומים עבור n הזרים הראשונים, נקבל את התשלומים עבור $n + 1$ הזרים מלבד עבור הזר הראשון, ולכן נוסיף עוד אגורה".

אפשר לנצל הזדמנות זו לניתוח ההבדל בין גידול לינארי (תכנית א') לבין גידול אקספוננציאלי (תכנית ב'). ההבדל נעשה מוחשי יותר אם נעזרים בהצגה גרפית. (רצוי לעודד את התלמידים להשתמש במחשבון לצורך מציאת הערכים של $2^n - 1$).



ברור מן הגרף, כי עד למשלוח של 14 זרי פרחים תכנית א' עדיפה ואילו עבור 15 זרי פרחים והלאה תכנית ב' עדיפה.

דיון

ההצגה הגרפית מעוררת הרבה שאלות בכיתה, כגון: איזה אורך יחידה על ציר ה-y יתאים לשתי התכניות, בהתחשב במה שקורה בגרף האקספוננציאלי עבור מספר חבילות קטן כאשר הגרף כמעט מתלכד עם ציר ה-x. התלמידים נפגשים בבעיה של סימון, באותה מערכת צירים, של נקודות המתאימות לתכנית א':

(1 ,15) , (2 ,30) , (3 ,45) , (4 ,60) , ...

לעומת הנקודות המתאימות לתכנית ב':

(1 ,0.01) , (2 ,0.03) , (3 ,0.07) , (4 ,0.15),...

במספר כיתות, התלמידים הציעו להתעלם מהתשלום האפסי לפי תכנית ב'

עד 6-7 זרי פרחים ולהתחיל לסמן את נקודות הגרף מ- $n = 7$ והלאה (כמו בשרטוט לעיל). שרטוט הגרף על נייר מילימטרי עוזר במקרה זה.
כמו כן, מתעוררת השאלה האם יש מובן לחיבור הנקודות, כאשר הבעיה היא של מקרים בדידים ולא רציפים (תחום ההגדרה של התבנית לעומת תחום ההגדרה של הבעיה).

ההצגה הגרפית מהווה הכנה טובה לפתרון משוואות מהסוג: $ax = b^x + c$ (באופן ספציפי $1500n = 2^n - 1$). גם ברמה מתמטית מתקדמת יותר נעזרים בהצגה גרפית לפתרון משוואות מהסוג הזה.

בכיתות החטיבה העליונה קיימת גם האפשרות לדון בסדרות השונות הנובעות מטבלת ארגון התוצאות: בעמודה הראשונה של תכנית א' (ראה טבלת ארגון התוצאות) מופיעה הסידרה הטריביאלית הקבועה - חשבונית בה $d = 0$ או הנדסית בה $q = 1$;
בעמודה השניה של תכנית א', מופיעה הסידרה החשבונית שבה $d = 15.00$, $a_1 = 15.00$;
בעמודה הראשונה באגורות של תכנית ב', מופיעה הסידרה ההנדסית שבה $q = 2$, $a_1 = 1$;
ואילו בעמודה השניה באגורות של תכנית ב', מופיעה הסידרה הכללית ..., 31, 15, 7, 3, 1, אשר האיבר הכללי שלה a_n, ניתן לחישוב בעזרת סכום הטור ההנדסי

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}$$

או בעזרת סידרת ההפרשים: $1, 3, 7, 15, 31, \dots$

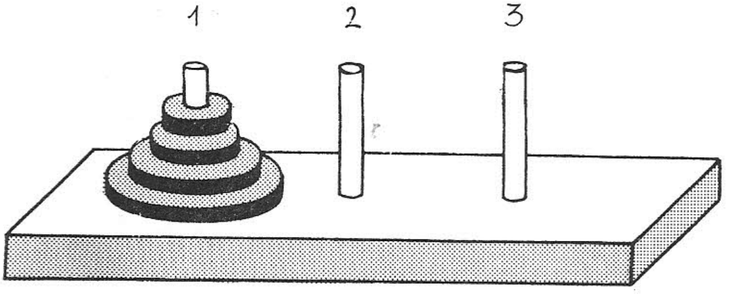
$$2, 4, 8, 16, \dots \quad *$$

(האיבר הכללי a_n שווה ל-a_1 של הסידרה + סכום $n - 1$ האיברים הראשונים של סידרת ההפרשים המסומנת ב- *: $a_n = a_1 + S^*_{n-1}$).

מתוך נסיון בכיתות השונות, העיסוק בביטויים 2^{n-1} ו- $2^n - 1$ מבהיר לתלמידים את ההבדל בין שני הביטויים.

בעיה אנלוגית - מגדל הנוי*

מגדל הנוי הוא "פזל" המורכב מלוח ועליו שלושה מוטות; ומספר טבעות (מעץ או פלסטיק), בגדלים מדורגים, מושחלות זו על גבי זו, לפי הגודל, על אחד המוטות.



יש להעביר את הטבעות ממוט אחד לאחר עד שהמבנה המקורי מתקבל על מוט 2 או מוט 3. את ההעברות יש לבצע לפי שני הכללים הבאים:

1. בכל העברה מותר להעביר טבעת אחת בלבד.
2. בשום שלב אין להניח טבעת כלשהי על טבעת קטנה ממנה.

בדרך כלל, משחק זה מוצג לתלמידים בצירוף השאלה הכללית: האם אתה יכול לבצע את ההעברה לפי הכללים? לעיתים, נשאלות שאלות נוספות, כגון: כמה העברות דרושות לשם כך? האם אתה יכול לבצע זאת במספר קטן יותר של העברות? וכו'.

בעיית ה"מגדל" מתאימה לטווח רחב של גילים. במיוחד ניתן לשלב אותה בהוראת המתמטיקה בכיתות חטיבת הביניים והעליונה. מצד אחד, זוהי בעיה קונקרטית, כאשר ההתמודדות עמה נעשית בעזרת מניפולציות מעשיות של הטבעות; ומצד שני, הבעיה היא מעבר לשלב הקונקרטי כאשר מדובר במציאת המספר המינימלי של העברות (אפילו שחקנים מנוסים, ה"יודעים" את השיטה, עשויים לטעות בביצוע המעשי ובספירת המספר המינימלי של ההעברות ל-8 או 9 טבעות).

ביצוע נכון נותן את הטבלה הבאה (המוכרת לנו מהבעיה הקודמת):

---

*סיפור אגדה בקשר למגדל הנוי מובא בסוף המאמר.

טבלת ארגון התוצאות

מספר הטבעות במגדל	המספר המינימלי של העברות
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
⋮	⋮

מתוך נסיון בכיתות, תלמידים רבים יכולים לנבא כי עבור 6 טבעות תהיה התוצאה $31 \cdot 2 + 1 = 63$. הנימוקים הם מהסוג הבא:
"במקרה של 6 טבעות, כאשר מגיעים להעברת הטבעת התחתונה, נשארים עם בעית 5 הטבעות. לכן ההעברה של 6 טבעות מורכבת מ-

א. העברת 5 העליונות.
ב. העברת הטבעת השישית.
ג. העברה חוזרת של 5 העליונות.

כלומר, פעמיים מספר ההעברות הדרושות לחמש טבעות בתוספת העברה אחת".

כדאי לשים לב, כי השיקולים הקונקרטיים כאן שונים במהותם מהשיקולים בבעית משלוח הפרחים. ברור כי כאשר מציגים את אחת הבעיות תחילה, התלמידים יכולים להעזר באנלוגיה לפתרון הבעיה האחרת.

התלמידים יכולים להשתמש בכלל כדי לחשב תוצאות נוספות, כגון: כמה העברות דרושות ל-10 טבעות? או, אם כל העברה נעשית בשניה אחת, כמה זמן דרוש להעברת מגדל של 10 טבעות? וכו'.
קיימות שאלות ניבוי נוספות שניתן לשאול בקשר לפתרון בעיית המגדל.
גם שאלות אלו דורשות מהתלמידים איסוף תוצאות וארגונן כדי לשער חוקיות ולבדוק אותה. למשל:

אם נתון מספר הטבעות במגדל, האם ניתן לקבוע כמה פעמים הטבעת התחתונה מוזזת? או, כמה פעמים הטבעת העליונה מוזזת? או הטבעת השניה מלמעלה? כמובן, שניתן גם לעורר את השאלה הכללית של כמה פעמים כל טבעת מוזזת. במגדל נתון, מספר ההזזות של כל טבעת, החל מהטבעת התחתונה, הוא $\{1, 2, 4, 8, 16, ...\}$; הטבעת הקטנה ביותר מוזזת בכל פעם שניה. גם קשר זה מוכר לנו מן הבעיה הקודמת.

סיכום

במהלך הוראת המתמטיקה בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה, יש חשיבות מרובה לשילוב הצגת בעיות פתוחות הדורשות מהתלמידים לאסוף נתונים, לשער השערות, לגלות חוקיות ולעשות הכללות. רצוי שהבעיות תהיינה כאלה, שניתן לפותרן בדרכים ואסטרטגיות מגוונות בנוסף לכך שתלמידים מרמות שונות יוכלו להתמודד ולגלות עניין בהן. התענינות התלמידים גוברת, אם יש מודל קונקרטי ואלמנט של משחק או אי ודאות בנוגע לתשובה חד משמעית. כמו כן, יש לשער שההבנה של התלמידים אודות המבנה של המתמטיקה ושימושיה תעמיק אם ניתן לפתור הבעיות בדרכים שונות ואם מתגלה חוקיות דומה במהלך הפתרון של שתי בעיות שונות.

האגדה אודות מגדל הנוי*

במקדש הגדול בבנארס (Benares), מתחת לכיפה המסמנת לפי האגדה את מרכז העולם, מונחת לוחית מבריקה ועליה קבועים שלושה מוטות העשויים יהלום, כל אחד בגובה Cubit (כ-50 ס"מ) ועוביו כעובי גוף הדבורה, על אחד מהמוטות, בעת בריאת העולם, הונחו ששים וארבע טבעות של זהב טהור, כשהגדולה בהן למטה והאחרות, מהגדולה לקטנה, זו על גבי זו. יום ולילה, ללא הפסק, על הנזירים להעביר הטבעות ממוט יהלום אחד לאחר בהתאם לחוקים הדורשים שהנזיר לא יזיז יותר מטבעת אחת בו זמנית והוא חייב להניח טבעת זו על מוט כך שאין טבעת קטנה ממנה מתחתיה. כאשר ששים וארבע הטבעות יועברו מהמוט עליו הונחו בראשונה לאחד מהמוטות האחרים, המגדל והמקדש יקרסו תחתיהם וייהפכו לאפר, והעולם יחזור לתוהו ובוהו.

הערה: לפי פתרון הבעיה ראינו שהנוסחא למספר ההעברות היא $2^n - 1$ כלומר דרושות $2^{64} - 1$ העברות נפרדות של הטבעות כדי לסיים את ההעברה של המגדל. מספר זה שווה ל 18,446,744,073,709,551,615. נניח שהנזירים עובדים יום ולילה ללא מנוחה או חופשה, וכל העברה נעשית בשניה אחת והם אינם טועים לעולם. מכיון ששנה אחת מכילה כ- 31,536,000 שניות יידרשו למעלה מ-580 מליארד שנים להשלים את המלאכה.

---

*סיפור אגדה בקשר למגדל הנוי מצוטט במספר מקורות למשל:

Mathematical Recreations and Problems of Past and Present Times - by W.W.R. Ball .
Mcmillan, London 1892, pp 78-79 .