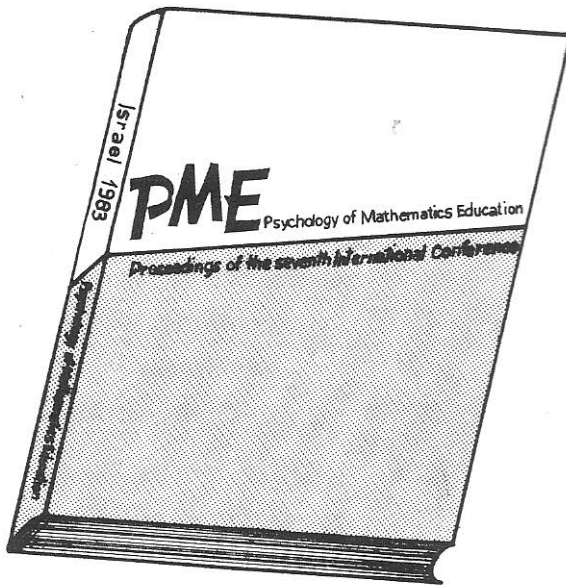


# על כסיכולוגיה והוראת מתמטיקה (PME)

מאת: רינה הרשקוביץ

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.



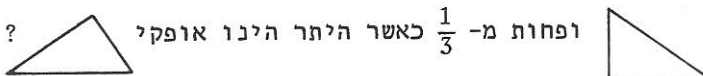
(א) איזה חלק מתלמידך בגיל 13 עשוי לשגות בהשוואת השברים העשרוניים:

0.62, 0.236, ו-0.4? מדוע יתכן כי 50% יבחרו כשבר הגדול ביותר

את 0.236?

(ב) מדוע רב כל כך מספר התלמידים שיאמרו בבחון כי  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  הם  $\frac{2}{5}$ , וזאת למרות ש- $\frac{2}{5}$  קטן מאחד המחוברים?

(ג) מדוע יזהו רוב התלמידים משולש ישר זווית כשניצביו הם במצב

"אופקי-אנכי", ופחות מ- $\frac{1}{3}$  כאשר היתר הינו אופקי? 

(ד) מדוע קשה כל כך לתלמידים הלומדים חשבון אנפליניטסימלי להבין את

המשמעות של הנגזרת כגבול, או את הרעיון של שטח כגבול של סכום,

או את המשמעות של שטחים "חיוביים" ו"שליליים"?

הערת המערכת:

רנה הרשקוביץ הינה חברה בועדה הבינלאומית של האגודה P.M.E, והיתה אחראית על ארגון הכנס הבינלאומי השביעי של האגודה בישראל, בקיץ 1983.

כל השאלות הנ"ל הן שאלות מחקר בחינוך מתמטי. אך המודעות לקיומן, ותשובות לשאלות הקשורות בהן, כמו:

מהם תהליכי הלמידה האחראים לחוסר הבנת מושגים מתמטיים מסוימים, או להיווצרות שגיאות אופיניות לגבי מושגים אחרים?

או, מהי דרך הלמידה האפקטיבית ביותר ללמד מושג מסוים, כך שהבנתו תהיה מכסימלית ומספר השגיאות לגביו מינימלי?

כל זה הינו רלוונטי ביותר לכל אחד מאתנו בהוראת מתמטיקה בכיתה.

ואכן, אחד משטחי המחקר המעניינים והחשובים בחינוך בכלל, ובחינוך המתמטי בפרט, הוא חקר תהליכי הלמידה והחשיבה של הלומד. כך, במשך עשרות השנים האחרונות, צמח בד בבד עם מחקרים הבודקים הישגי תלמידים או סקרי הערכה שונים, מחקר עמוק יותר העוסק בהתפתחות מושגים שונים אצל הילד, בחקר הדרכים בהם הוא פותר בעיות, בהתפתחות יכולת ההנמקה שלו, בחקר השגיאות האופיניות הקשורות בתהליך הלימוד וסיבותיהן, בהתפתחות הלשונית שלו וכד' ככל מה שיכול להקרא: "אספקטים פסיכולוגיים" של תהליך ההוראה והלמידה, או לגבי העוסקים בחינוך מתמטי: "אספקטים פסיכולוגיים" בתהליך למידת המתמטיקה.

לכל העוסקים בחינוך מתמטי בעולם, על כל השטחים והגוונים שבו, קיים ארגון-על הנקרא:

I.C.M.I - (International Commission of Mathematics Instruction).

ארגון זה מקיים מדי ארבע שנים כינוס בינלאומי במקום כלשהו בעולם. הכינוס נקרא:

I.C.M.E - (International Congress on Mathematical Education)

ועד עתה התקיימו ארבעה כנסים ענק כאלה, כאשר בכל אחד מהם משתתפים אלפי אנשים מרחבי העולם: הוגי דעות הקשורים בחינוך מתמטי, מפתחי תכניות לימודים חדשות, מתמטיקאים, מורים, פסיכולוגים וכד'...

בכינוס השלישי (ICME 3), שנתקיים ב-1976 בקארסלואה שבגרמניה, חשה קבוצת משתתפים כי יש צורך לתת תשומת לב מיוחדת למחקר האספקטים הפסיכולוגיים של החינוך המתמטי, קבוצה זו הקימה קבוצת עבודה בנושאים אלה שהפכה לאגודה בפני עצמה:

The International Group for the Psychology of Mathematics Education  
בראשי תיבות: IGPME או PME כפי שהיא נקראת כיום. האישיות הבולטת בקבוצה המייסדת, היה פרופ' אפרים פישביין מהחוג לחינוך באוניברסיטת תל-אביב. הוא כיהן כנשיא הראשון של האגודה ועתה הינו היחיד מחברי האגודה שנתמנה בה כחבר כבוד,

אחת הבעיות הרציניות של מחקר בחינוך, היא ניתוקו וחוסר השפעתו על תהליכי ההוראה והלמידה היומיומיים בכיתה. אם נשתמש במילים של פרופ' דוד ווילר מאוניברסיטת מונטריאול בקנדה, נאמר זאת כך: "העובדה שלמשאבי המחקר הטובים ביותר שלנו, איך השפעה ניכרת לעיך על החינוך שילדינו מקבלים, נשאת הבעיה היחידה אותה "בוער" וחשוב לפתור", (Wheeler, 1983).

האגודה PME מודעת לבעיה זו, ובין המטרות של אינטראקציה והחלפת אינפורמציה מדעית ברמה בינלאומית, בכל הקשור להיבטים פסיכולוגיים של הוראת המתמטיקה, היא כוללת גם את השימוש ברעיונות ובמימצאים הכלולים באינפורמציה זו במציאות היומיומית של ההוראה והלמידה של המתמטיקה בכיתה, וקוראת למחקר המבוסס על שיתוף פעולה בין פסיכולוגים, מתמטיקאים ומורים למתמטיקה.

באגודה חברים איפוא פסיכולוגים, מתמטיקאים, מורים למתמטיקה ולהוראת מתמטיקה, מפתחי ומעריכי תכניות לימודים, מרחבי העולם (עד עתה בעיקר מחלקו המערבי). משנת היווסדה עורכת האגודה כנסים בינלאומיים המתקיימים מדי קיץ בארץ כלשהי בעולם. העבודות המוצגות בכל כינוס מכונסות בספרי הכינוס (Proceedings). כך נוצרה סדרת ספרים, אשר בכל שנה מתעשרת בספר נוסף, המכנסת בתוכה חלק גדול מהעבודה הנעשית בשטח זה בעולם, ומהווה לכך מקור ספרות חשוב לכל העוסק בו.

ביולי שנה זו היה לישראל הכבוד לארגן ולארח את הכנס הבינלאומי השביעי של האגודה. הכנס נערך ב- 24-29 ביולי בבית ההארכה של שורש, אשר בהרי ירושלים. בוועדת הכינוס השתתפו, בנוסף לנשיא האגודה פרופ' ורניו מפריס, נציגים מרוב המוסדות להשכלה גבוהה בארץ אשר היו והינם חברים פעילים באגודה PME מזה שנים. חברי הוועדה, לפי סדר הא"ב, היו: ד"ר טומי דרליפוס, פרופ' טד אייזנברג, פרופ' אפריים פישבין, רנה הרשקוביץ, פרופ' פרלה -טר, פרופ' ג'ראר ורניו וד"ר שלמה וינר. השתתפו בכנס כ-110 חוקרים מחו"ל וכ-40 מישראל. המשתתפים הציגו יותר מ-70 עבודות הגות ומחקר הקשורות לפסיכולוגיה של הוראת מתמטיקה. השאלות אותן הצגנו בתחילת דברינו כאן היו אחדות מתוך רבות אחרות, אשר מחקר בהן הוצג במשך הכינוס, ובמשמעותן נערכו דיונים. בנוסף לכך הוזמנו חמישה חוקרים מובילים בשטח זה, לשאת חמש הרצאות מליאה בנושאים הנראים להם כמהותיים לעצם קיומה הייחודי של האגודה.

על כל העבודות שהוצגו תוכל לקרוא בספר הכינוס:  
The Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference for the  
Psychology of Mathematics Education. Israel, 1983.

את הספר תוכל לרכוש במחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע,

הכינוס הבא של האגודה PME יערך באוגוסט 1984 בסידני שבאוסטרליה ושבוע  
לאחריו יערך ה-ICME 5 באדלהיד שבאוסטרליה (24-30 באוגוסט 1984).

נביא עתה מספר דוגמאות מהעבודות שהוצגו:  
(כל התרגומים הקשורים בדוגמאות שנביא להלן הינם חופשיים ביותר).

פרופ' דוד ווילר (Wheeler, 1983) ממונטריאול אשר הרצה את אחת מהרצאות  
המליאה, הקדיש את הרצאתו לשאלה הבאה: "מהן צפיותינו לגבי התועלת  
העשויה לצמוח למורים למתמטיקה מתוך מחקר מתמטי?". הוא הציע ארבעה  
כיוונים:

1. מחקר מתמטי מגביר את מודעות המורים, בעיקר כאשר הוא מפתיע, ומספר  
לנו דברים עליהם לא חשבנו.
2. מחקר מתמטי נותן למורה מקורות ממשיים לעבודתו.
3. נותן למורה מסגרת תאורטית לעבודתו בכיתה.
4. ממחיש למורה את הדרכים בהן אפשר לטפל ב"למה?" גם בסיטואציה כה  
מסובכת כמו הלמידה בכיתה.

נמשיך בכיוון זה ונביא כאן דוגמא של עבודה שהוצגה בכנס, אשר ערך רב לה  
בחדר הכיתה. (במסגרת מצומצמת זו לא נביא דוגמאות לעבודות שעסקו בתאוריות  
למידה ותאוריות פסיכולוגיות כלליות. על עבודות מסוגים אלה תוכל לקרוא  
ב-Proceedings בסעיף: B. Learning Theories). הדוגמא שנביא עוסקת בתוכ  
מאוד ספציפי, ונשתדל להאיר את תרומתה להוראת המתמטיקה. אנו מאמינים כי  
במסגרת מצומצמת זו, דוגמא כזו יכולה להמחיש את תועלתו של המחקר למציאות  
ההוראה בכיתה טוב יותר מהצגת תאוריה כללית כלשהי. בכך אנו מצטרפים  
לדברים שנאמרו על ידי פרופ' ג'ראר ורניו (נשיא האגודה) בהרצאת מליאה  
בכנס. פרופ' ורניו טוען כי אי אפשר להסביר סיטואציה לימודית של תוכן  
מתמטי מסוים כלשהו, לפי תאוריה מסוימת אחת, אלא לפי אספקטים וצעדים רבים  
שהינם מסודרים רק בחלקם לפי תיאוריה אחת, ויותר מכל - התוכן המתמטי  
הנלמד עצמו, קובע במידה רבה מאוד את תהליכי למידתו.

נתחיל איפוא בדוגמא שלנו: (חלק ממנה צטטנו בתחילת דברינו).  
 ד"ר מ. סוואן (Swan, 1983) חקר את מקורות הטעויות הנפוצות לגבי שברים  
 עשרוניים וכך את מידת האפקטיביות של שתי דרכי הוראה בעקירת טעויות אלו.

בין המקורות לטעות שהוא מונה נמצאות:

1. טעויות הנובעות מאופן הקריאה של שברים עשרוניים. למשל המספר, 12.62 נקרא כשתים עשרה נקודה ששים ושתיים. וכך קורה שתלמידים מסתכלים על המספר כשני מספרים שונים זה מזה אשר ביניהם כתובה נקודה המשמשת מחסום בין המספרים.

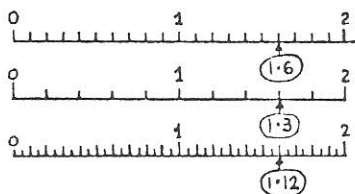
$$\text{כך מתקבלות שגיאות כמו: } 3.1 \times 10 = 30.10$$

$$\text{או: } 0.8 + 0.2 = 0.10$$

2. טעויות בהשוואת שברים. למשל: הרבה ילדים חשים כי יוכלו להשוות שברים עשרוניים פשוט על ידי בחינת "אורכם". מספר "ארוך" יותר (בעל ספרות רבות יותר) הינו הגדול יותר, כך מקבלים כי 0.236 גדול מ 0.62.

3. שימוש באפס כ"תופס מקום" (כמו במספרים שלמים). דבר זה מסביר מדוע בתרגיל הבא:  $\square + 0.4 + 3 + 70 = 73.45$  יכתבו תלמידים רבים במקום הריק את המספר 0.41.

4. טעויות בקריאת סקלות. "התאמת" מספר לנקודה לפי מספר "הקוים" המחלקים כל שנתה על הסקלה, יכולה לגרום לטעות כמו זו שבשרטוט:



5. אי תפיסת המושג של צפיפות המספרים העשרוניים (מחקרים הראו כי רק 12% מהתלמידים בגיל 12 ורק 20% מאלו שבגיל 15, יודעים כי בין 0.41 ל- 0.42 למשל, יש "הרבה", "מאות", או "אינסוף" מספרים עשרוניים נוספים.

ד"ר סוואן בדק שתי שיטות הוראה. בשתי השיטות לימדו אותם התכנים ואותן המטלות לשתי קבוצות מקבילות של תלמידים בגיל 12-13. המטלות היו בעיקר: - השלמת סדרות של מספרים עשרוניים בכתב ובע"פ, קריאת סקלות, והשוואת מספרים עשרוניים, הכוללים מספר שונה של ספרות, בעזרת ציר מספרים ובע"פ.

לפני הלימוד ערכו בשתי הקבוצות מבחן (pretest) ואותו מספר שעות לימוד בדיוק ניתן לשתי הקבוצות.

לפי השיטה הראשונה, לימד ד"ר סוואן ילדים בני 12-13 דרכים בהן אפשר להגיע על-ידי הבנה לתשובות הנכונות, ואחר כך נערך תרגול תוך שימוש בדרכים אלו. התלמידים לא נתבקשו בשום הזדמנות לערוך דיאגנוזה של השגיאות שלהם, או של חבריהם.

לפי השיטה השנייה, לה קרא "שיטת הקונפליקט", נתן ד"ר סוואן לתלמידים, בשלב ראשון בלימוד, משימה עליה היה עליהם לענות באופן אינטואיטיבי; למשל, השלמת סדרה עשרונית. כך נחשפו טעויות כמובן. בשלב זה לא נערך כל תיקון טעויות.

בשלב שני התלמידים ענו על אותה משימה אך בעזרת דרך כלשהי, שהוצעה להם על-ידי המורה. למשל, השלמת סדרה עשרונית, תוך שימוש במחשב כיס ו/או שימוש בציר מספרים.

תפקיד הדרך שהוצעה על-ידי המורה היתה לעורר קונפליקט לגבי שגיאות שבוצעו בשלב הראשון. בשלב שלישי דברו התלמידים על שגיאותיהם והגיעו למסקנות בקשר לתקונן, רק אחר כך בא שלב התרגול.

בשתי השיטות התקדמו התלמידים מרמה של 50%-45% הישג במבחן, לרמה של 80%-75% במבחן שלאחר הלימוד (posttest), וההישג נשאר קבוע לאורך זמן, הדבר מראה כי מודעות המורה לקשיים ולטעויות של תלמידיו בשטח מסוים, (במקרה שלפנינו, הבנת ערך המקום במספרים עשרוניים), והוראה המכוונת להתגבר על קשיים וטעויות אלה, מביאה לתוצאות חיוביות, שיטת הקונפליקט נמצאה אפקטיבית יותר.

ד"ר סוואן טוען כי אף על פי שהוראה לפי שיטת הקונפליקט הינה מסובכת יותר לתכנון ואף עורכת יותר זמן, שכרה בצדה כיון שהיא מעמיקה את הבנת המושג וכן מגבירה את המודעות להמנעות משגיאות, בזה תמה הדוגמא שהבאנו מכנס ה-PME.

כל אחד מאתנו בכיתתו נתקל ב"אספקטים פסיכולוגיים" בתהליך הוראת נושאים שונים במתמטיקה. פעמים רבות מטפל בהם בהצלחה באופן אינטואיטיבי, אך פעמים אחרות, רבות השאלות שקשה למצוא להן תשובה. יתכן כי הגברת המודעות שלנו לאספקטים כאלה, תתן בידינו את האפשרות להבין את קשיי הלמידה של תלמידינו, ולצפותם מראש. ההוראה שבבסיסה ידע כזה עשויה להיות יעילה יותר.

#### ספרות:

נביא כאן בפרוט את שמות העבודות שהזכרנו בדברינו, את העבודות בשלמותן תוכל לקרוא ב-Proceedings של הכינוס השביעי של ה-PME שנערך בשורש, 1983.

- 1) Wheeler D., Some problems that research in mathematics education should adress.
- 2) Vergnaud G., Let us discuss theory and methodology.
- 3) Swan M., Teaching decimal place value - a comparative study of "conflict" and "propositive only" approaches.