שבבי שבבים

מערכת צירים מעגליים*

ישנן דרכים מגוונות להצגת נתונים: בעזרת טבלאות, דיאגרמות או תיאורים גרפיים במערכות צירים שונות. בדרך כלל רצוי לבחור בהצגה המדגישה את תכונותיהם המיוחדות של הנתונים.

לדוגמא, אם עוסקים בפונקציות בחשבון מודולרי, נרצה להבליט את אופיין הסופי ואת החזרות במעגל סגור. לפיכך, ננסה להציג אותן במערכת של שני צירים מעגליים.

חקירת הגרפים של משפחות שונות של פונקציות בחשבון מודולרי מאפשרת פעילות מתמטית לא שגרתית תוך כדי שילוב של רעיונות אלגבריים וגיאומטריים.

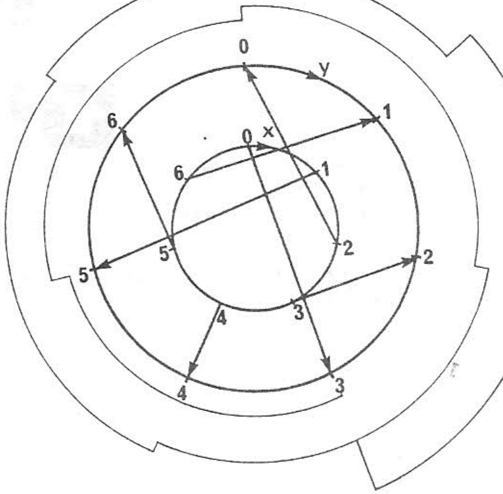
נבדוק כיצד ייראו הגרפים של פונקציות ליניאריות בהצגה במערכת צירים מעגליים. נבחר לדוגמא את הפונקציה:

$$y = 2x + 3 \pmod 7$$

נשתמש במערכת של שני מעגלים חד-מרכזיים. המעגל הפנימי ישמש כציר x והחיצוני כציר y (ציור 1). התחום והטווח של הפונקציה יהיו המספרים הממשיים שבין 0 ו 7 (לא כולל 7).

*החומר מבוסס על:

Bird, M.H. A new look at functions in modular arithmetic. The Mathematical Gazette, Vol 64, No 428, June 1980.



ציור 1: הגרף של $y = 2x + 3 \pmod 7$ במערכת צירים מעגליים

בציור מודגשת העובדה, כי התמונות של קשתות עוקבות באורך יחידה על המעגל הפנימי הן קשתות עוקבות באורך של שתי יחידות על המעגל החיצוני.
ההצגה הגרפית שלפנינו מאפשרת לגלות קשרים נוספים בין התכונות האלגבריות של הפונקציה והתכונות הגיאומטריות של התיאור הגרפי.

נקודות שבת וצירי סימטריה

לפונקציה $y = 2x + 3 \pmod 7$ יש נקודת שבת עבור הערך $x = 4$. בציור רואים כי הקוטר דרך $x = y = 4$ מהווה ציר סימטריה לגבי גרף הפונקציה. מעניין לבדוק אם בכל מקרה קיים קשר בין נקודות שבת של פונקציות לינאריות בחשבון מודולרי לבין צירי סימטריה של הגרפים שלהן.

נרשום תחילה באופן כללי את התנאי האלגברי לנקודת שבת, s:

$$as + b = s \pmod n \qquad (1)$$

נרשום עתה את התנאים לסימטריה של הגרף ביחס לישר העובר דרך $x = y = k$:

שני ערכים x_1 x_2 הם סימטריים ביחס לערך k, אם ורק אם מתקיימים:

$$x_1 + x_2 = 2k$$

הסבר: נסמן $x_1 = k - h$ $\qquad$ $x_2 = k + h$

במקרה של סימטריה של הגרף ביחס לערך k, אותו תנאי צריך להתקיים גם עבור ערכי ה-y המתאימים

$$y_1 + y_2 = 2k$$

נציב במשוואה האחרונה

$$y_1 = ax_1 + b \qquad y_2 = ax_2 + b$$

ונקבל:

$$ax_1 + b + ax_2 + b = a(x_1 + x_2) + 2b = 2k$$

אם כך, תנאי שקול לסימטריה בהצגה מעגלית הוא:

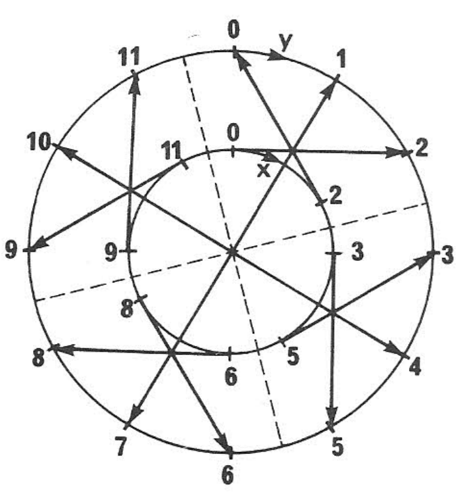
$$(2) \qquad 2ak + 2b = 2k \pmod{n}$$

אם נכפול פי 2 את משוואה *(1)* נקבל את משוואה *(2)*, לכן בכל מקרה התנאי לנקודת שבת גורר את התנאי לציר סימטריה, וכל קוטר דרך נקודת שבת הוא ציר סימטריה. האם יתכנו צירי סימטריה שאינם עוברים דרך נקודות שבת?
עבור מודולו n אי־זוגי ניתן לצמצם ב 2 את משוואה *(2)* ולקבל את משוואה *(1)*, לכן כל ציר סימטריה עובר דרך נקודת שבת. אך עבור מודולו n זוגי איננו יכולים לצמצם ב 2. אפשר להוכיח כי עבור n זוגי התנאי האלגברי השקול למשוואה *(2)* הוא:

$$(3) \qquad ak + b = k \pmod{\tfrac{n}{2}}$$

אולם אם מטפלים בנושא בכיתה, רצוי להפסיק לזמן מה את הטיפול האלגברי, ולהסתכל על השאלה מנקודת מבט גאומטרית. נתבונן בגרף של הדוגמא הבאה:

$$y = 5x + 2 \pmod{12}$$



ציור 2: הגרף של $y = 5x + 2 \pmod{12}$ במערכת צירים מעגליים

בציור 2 רואים ארבעה צירי סימטריה: דרך הנקודות 4 ו 10; דרך הנקודות 1 ו 7 וכן דרך הנקודות $2\frac{1}{2}$ ו $8\frac{1}{2}$ ודרך הנקודות $5\frac{1}{2}$ ו $11\frac{1}{2}$.

נפתור את משוואת התנאי לנקודת שבת:

$$5s + 2 = s \pmod{12}$$
$$4s + 2 = 0 \pmod{12}$$

ונקבל: $s_1 = 2\frac{1}{2} \quad s_2 = 5\frac{1}{2} \quad s_3 = 8\frac{1}{2} \quad s_4 = 11\frac{1}{2}$

נפתור את משוואת התנאי לציר סימטריה

$$10k + 4 = 2k$$
$$8k + 4 = 0$$

ונקבל בנוסף לארבעה הפתרונות שהם נקודות שבת, גם ארבעה פתרונות נוספים:

$$k_5 = 1 \quad k_6 = 4 \quad k_7 = 7 \quad k_8 = 10$$

נשים לב כי לגבי הפונקציה שבדוגמא זו

$$1 \longrightarrow 7 \quad 4 \longrightarrow 10 \quad 7 \longrightarrow 1 \quad 10 \longrightarrow 4$$

כלומר, בכל מקרה ההבדל בין x ו y לגבי הנקודות $k_8 - k_5$ הוא בדיוק $\frac{n}{2}$.
מכאן נבנה מערכת תנאים עבור צירי סימטריה בהצגה מעגלית

$$(4) \qquad ak + b = k + \frac{n}{2} \pmod{n} \quad \text{או} \quad ak + b = k \pmod{n}$$

נוכיח כי המערכת *(4)* שקולה למשוואה *(2)* ואמנם,

אם $2c = 2d \pmod{n}$

פירושו כי

$$2c - 2d = (2t + 1)\cdot n \qquad \text{או} \qquad 2c - 2d = 2t\cdot n$$

t - מספר שלם

ואזי

$$c - d = \frac{n}{2} + t\cdot n \qquad \text{או} \qquad c - d = t\cdot n$$

כלומר

$$c = d + \frac{n}{2} \pmod{n} \quad \text{או} \qquad c = d \pmod{n}$$

הכיוון ההפוך של ההוכחה, מתקבל אם קוראים אותה בסדר הפוך מלמטה למעלה.

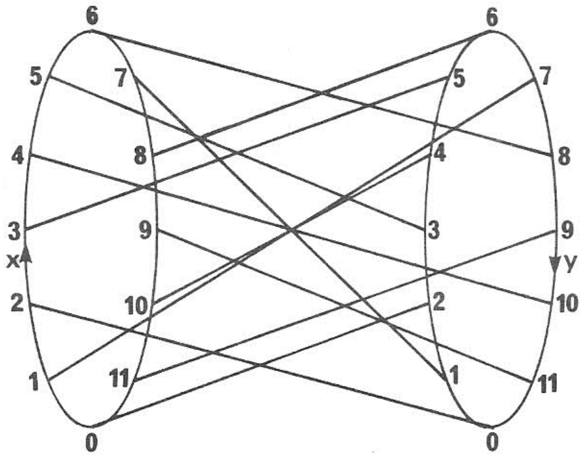
הערה: אפשר לאחד את מערכת התנאים *(4)* ולקבל את משוואה *(3)*.

פעילות נוספת

התבוננות בגרף שבציור מגלה כי בכל מקרה $x \leftrightarrow y$, כלומר הפונקציה $y = 5x + 2 \pmod{12}$ היא הפוכה לעצמה. ואמנם, $5(5x + 2) + 2 = x \pmod{12}$.

העובדה, כי פונקציה זו הפוכה לעצמה, מובלטת יותר, כאשר בוחרים במערכת צירים מעגליים במרחב (ציור 3).

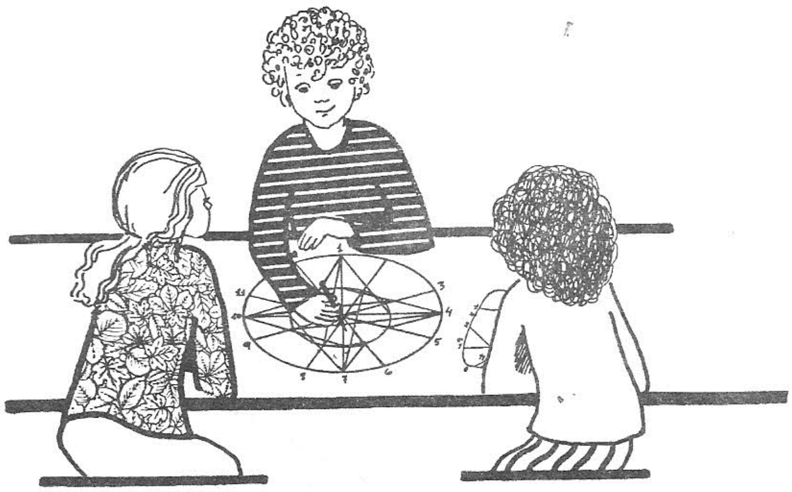
בגרף מרחבי זה, ישנה סימטריה ביחס למישור המקביל למישורי המעגלים הנמצא בחצי המרחק ביניהם.



ציור 3: הגרף של $y = 5x + 2 \pmod{12}$ בהצגה מעגלית מרחבית

מי שמתעניין יוכל לחפש את התנאי האלגברי הכללי להיות פונקציה לינארית בחשבון מודולרי הפוכה לעצמה.

ראינו לעיל כי שימוש במערכת צירים מעגליים מאפשר לנו לעסוק בצורה מעניינת ובלתי שגרתית בפונקציות בחשבון מודולרי מנקודות ראות אלגברית וגיאומטרית. הנושא הוא פתוח למדי ואפשר להמשיך לשרטט ולחקור. אם נבחר למשל, פונקציות $y = ax + b \pmod n$ שעבורן a הוא גורם של n, נקבל דוגמאות לא טריוויאליות לפונקציות שאינן חד חד ערכיות, אשר הגרפים שלהן יכולים להיות מענינים גם מבחינה אסתטית (על טעם ועל ריח...).



שברו את הכלים
או: איך לחנך תלמידים לשנוא מתמטיקה*

בתחילת שנת הלימודים הצטרפה מורה חדשה למתמטיקה לצוות בית הספר. המורים הותיקים, ספק ברצינות ספק בבדיחות, הדריכו אותה בצרור עצות.

חזרה על חומר קודם - עד חנוכה
למניעת פיגור - שיעורים בכמות הגרנה
במיוחד לקראת כל חופשה.

חומר לראש - הרבה תרגילים מכל נוסחה
לעבור על כל תרגיל בספר - זו חובה!
לחסכון בזמן - פתרון יחיד לשאלה,
אי אפשר שכל אחד יסביר את התשובה.

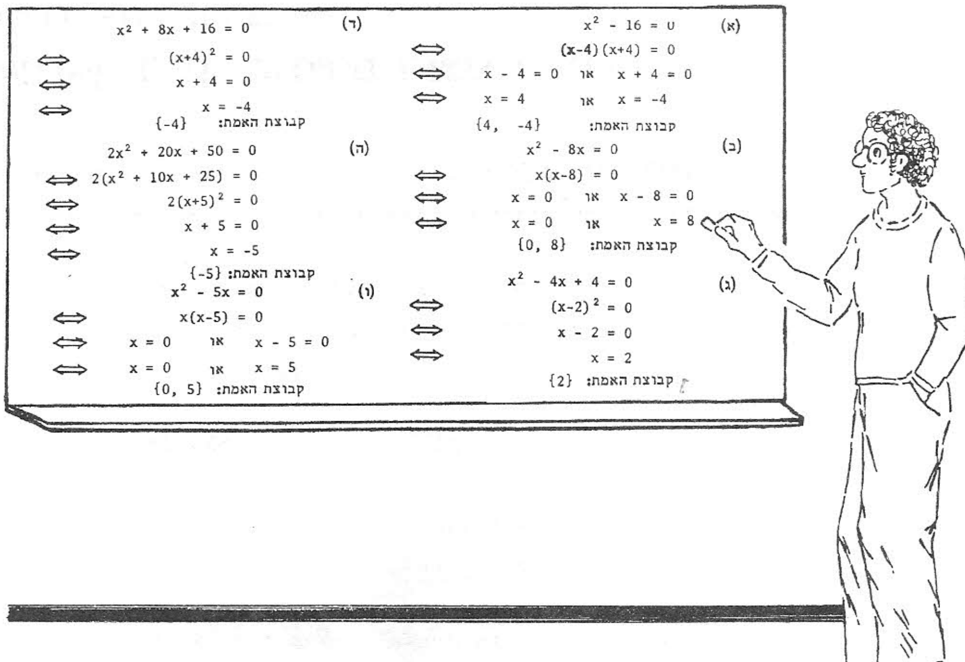
תלמיד אינו מבין? שיפתח את המחשבה!
חומר מיוחד לטובים - גורם לקנאה,
דאגה לחלשים - תסכול ומריבה.

משחק מתמטי בכיתה - זו לא רמה
יחס רציני למקצוע - לזאת הכוונה!
לסדר ומשמעת עצה ידועה:
קנס של עשרה תרגילים על כל הפרעה.

---

*מבוסס על:

Oberlin, L.: How to Teach Children to Hate Mathematics
School Science and Mathematics, March 1982.



"לעבור על כל תרגיל בספר - זו חובה!"