איך נלמד את הכפל במספרים שליליים?

מאת: אברהם הרכבי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

מאמר זה מסכם את עבודת המוסמך שנעשתה בהדרכתם
של פרופ' מ. ברוקהיימר וד"ר רות בן צבי,
במחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

מבוא

בתחילת המאה הקודמת עדיין ניתן היה למצוא ספרי אלגברה אשר נמנעו מטיפול במספרים שליליים. ההגדרה המתמטית של המספרים השליליים, וכן הופעתם בתוכנית הלימודים, הינן חדשות למדי. לתשומת לב מיוחדת בספרות המקצועית, זכה הנושא *כפל במספרים שליליים*, כיוון שהוא אחד המושגים הראשונים שאינם אינטואיטיבי כלל עבור התלמיד בבית הספר. סקר של ספרי לימוד, מעלה מספר רב מאד של שיטות להוראת הנושא; אך כמעט ואין הערכה השוואתית ביניהן, אשר בעזרתה יוכל המורה לבחור בשיטה "הטובה" ביותר, כלומר השיטה שתקנה לתלמידים מיומנות חישוב והבנה כאחד. במאמר זה נביא הצעה למיון הגישות הקיימות ונתאר ניסוי השוואתי שנערך ביניהן.

מיון הגישות

בספרי הלימוד ניתן למצוא מגוון רב של שיטות ללימוד כפל במספרים שליליים. בדיקה יסודית יותר מעלה שרבות מהן שונות בפרטים בלבד, ולא בגישה עצמה. להלן נציע מיון לגישות השונות בו נתבסס בעיקר על הבדלים בדרכי חשיבה ובמבנה הדידקטי האופייני לכל גישה.

1. *שינון הכללים*

הכללים ניתנים ללא הסבר או הצדקה.
ספרים רבים, במיוחד ה"מיושנים" במובן הדידקטי, מציגים את הנושא בדרך זאת. אך הגישה איננה ענין היסטורי בלבד: גם ספרים חדשים יחסית משתמשים בה (לדוגמא: אבירי-תשי"ל); ולהיפך, ישנם ספרים ממאות קודמות שגישתם אחרת, כפי שנראה להלן.

ברור שניתן להקנות כללים בדרך זאת, אך מתעוררות מספר שאלות:

- האם הצגת הכלל ללא כל הסבר, אינה פוגעת בהתיחסות התלמידים למתמטיקה?
- האם הקניית מיומנות החישוב "מינוס כפול מינוס שווה פלוס" היא המטרה העיקרית?
- האם יש השלכות מתמטיות לטווח ארוך לדרך בה נלמד הנושא?

ועוד.

2. *גילוי חוקיות מתמטית (אינדוקציה)*

בקטגוריה זאת אנו כוללים את ההצגות ה"אינדוקטיביות" על כל גווניהן: בסיס השיטה הוא גילוי חוקיות מסוימת בקבוצת המספרים החיוביים, והרחבתה לקבוצת המספרים השליליים.

לדוגמא:

התלמיד מתבקש להשלים את הסדרה הבאה:

$$(+4)\cdot(+2) \;=$$

$$(+3)\cdot(+2) \;=$$

$$(+2)\cdot(+2) \;=$$

$$(+1)\cdot(+2) \;=$$

ראשית עליו להרחיב אותה "למעלה", במטרה לגלות את החוקיות בסדרת המכפלות ואת החוקיות בסדרת התוצאות. אחרי כן הוא מתבקש להרחיב את מה שגילה, כלפי "מטה" לכיוון השליליים. ההרחבה תוביל אותו ל: $(-1)\cdot(+2) = -2$ וכו'. אם נציג את סדרת המכפלות כך שהגורם ה"יורד" הוא השני והגורם הקבוע הוא הראשון, ההרחבה תוביל אותנו, למשל, ל $(+2)\cdot(-1) = -2$ (ללא כל צורך להניח קיום חוק החילוף).

אחרי מספר הרחבות ניתן להכליל: כפל בין שני מספרים, האחד חיובי והאחד שלילי יתן כתוצאה מספר שלילי, אשר ערכו המוחלט הוא הכפל בין הערכים המוחלטים. על סמך זה, ניתן לבנות סדרות חדשות:

$$(-1)\cdot(+3) = (-3)$$

$$(-1)\cdot(+2) = (-2)$$

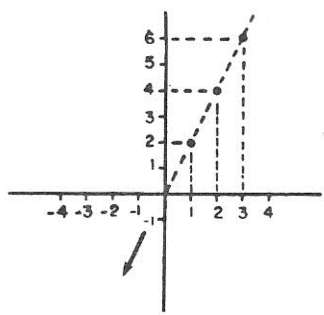
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

ולבקש מהתלמיד להרחיב את סדרת המכפלות והתוצאות. מכאן הוא יסיק שכפל מספר שלילי במספר שלילי נותן כתוצאה מספר חיובי.

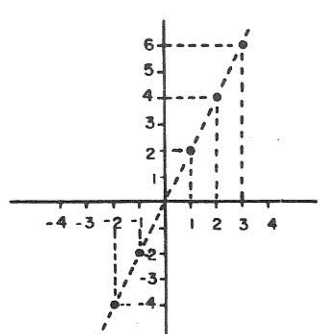
קיימות הצגות אלטרנטיביות לעיקרון גילוי חוקיות והרחבתה. באחת מהן משתמשים בלוח כפל הכולל ארבעה אזורים בהתאם לארבעת המקרים. אזור אחד מלא, והתלמיד משלים את שאר שלושת האזורים על פי החוקיות שמצא.

•	+3	+2	+1	0	−1	−2	−3
+3	+9	+6	+3	0 ...			
+2	+6	+4	+2	0			
+1	+3	+2	+1	0			
0	0	0	0	0			
−1		⋮					
−2							
−3							

אפשרות נוספת היא להשתמש במערכת צירים בה משרטטים את ה"קו המכפילי". למשל כפל ב (+2):



אם נמשיך את הקו נקבל, $(-1)\cdot(+2) = (-2)$



נציין כי בגישה האינדוקטיבית התלמיד מתבסס על ידע קודם ו"מרחיב" אותו. באופן כזה, הוא "טועם את טעמה" של פעילות מתמטית. אולם קיימת "סכנה": תלמידים "מגלים", לפעמים, חוקיות אחרת מהרצויה (לדוגמא: במקום לגלות שהקו המכפיל הוא $y = 2x$ היו יכולים להציע $y = 2|x|$, כלומר $(-1)\cdot(+2) = +2$ ועל ידי כך מביכים את המורה שאינו יכול לומר: "לא נכון".

מעניין לציין שניתן למצוא גישה כזאת בספרים מן המאה ה 18; לדוגמא: Saunderson (1749); ובימינו, למשל, ב: משלר (תשכ"ט), תכנית רחובות (תשכ"ח) ועוד.

3. דידוקציה

גישה זאת מתבססת על העקרון של החלת חוקים הקיימים בקבוצה מצומצמת, על קבוצה מורחבת. במקרה שלנו, נניח שחוק החילוף, כפל ב 0, חוק הפילוג וכיוצ"ב, החלים על מספרים טבעיים, יחולו גם על השליליים. על סמך הנחה זו, יכולים ל"הוכיח" את הכללים. לדוגמא:

$$(+2)\cdot 0 = 0$$

$$(+2)\cdot[(+4) + (-4)] = 0$$

$$(+2)\cdot(+4) + (+2)\cdot(-4) = 0$$

$$(+8) \quad + \quad ? \quad = 0$$

מכאן מסיקים כי $(+2)\cdot(-4) = -8$

גישה זאת יוצרת רושם של מתמטיקה "טהורה". היא מבוססת על עיקרון בעל ערך דידקטי רב המכונה "חוק הקביעות של החוקים הפורמלים" (Principle of Permanence of Formal Laws). עיקרון זה נוסח במפורש, לראשונה, לקראת אמצע המאה ה 19, על ידי המתמטיקאי האנגלי Peacock. אך עלינו להיות ערים לעובדה שעקרון זה איננו תמיד נכון. ניתן להביא דוגמאות נגדיות, למשל: הטענה $c < b \Leftarrow ac < ab$, אינה "עוברת" מקבוצת החיוביים לקבוצת השליליים.

קיימות גירסאות שונות של הגישה הזאת; ביניהן זאת המופיעה בתוכנית רחובות (תשכ"ח), ועוד.

4. מודלים

ספרי לימוד רבים משתמשים במודלים כדי להציג את המספרים השליליים, למרות שאין מודל ברור ופשוט לתאור כל התכונות והפעולות במספרים שליליים. לגבי כפל, נוכל להבחין בכמה סוגי מודלים. החל באלה המבוססים על משחקי לשון שקשרם למתמטיקה רופף ביותר, דרך מודלים המנסים לתאר בעזרת עצמים מוחשיים, וכלה בהמחשה באמצעות וקטורים.

דוגמאות למודלים שונים:

- משאבה יכולה לשאוב ולהזרים מים למיכל, ומסרטה מצלמת את הפעולה. נניח מהירות ההזרמה היא 4 ליטר מים לדקה, והמים מוזרמים במשך 3 דקות. הסרט מוקרן לאחר פיתוחו, ובו רואים שינוי של 12 ליטר. שינוי זה הינו הוספה $(+12) = (+4)\cdot(+3)$, אם המים הוזרמו לתוך המיכל והסרט מוקרן קדימה. אך אם הסרט מוקרן אחורה, במשך 3 דקות, רואים הפסד של מים, ומתקבל המקרה $(-12) = (+4)\cdot(-3)$. במודל זה, המקרה המעניין של $(-4)\cdot(-3)$, הוא שאיבה של 4 ליטר מים $[(-4)]$, כפי שרואים בסרט המוקרן אחורה במשך 3 דקות $[(-3)]$. במקרה זה רואים בסרט הוספה של 12 ליטר (UICSM, 1962).

- ישנה אפשרות לבנית מודלים באמצעות חצים בעלי אורך וכיוון (וקטורים). כפל במספר חיובי יתבטא כהגדלת הוקטור (או הקטנתו במקרה של כפל בחיובי קטן מ 1) ושמירה על כיוון. כפל במספר שלילי יתבטא, בנוסף, בהפיכת כיוון החץ (הטלויזיה הלימודית).

נציין שמודלים אמנם ממחישים, אך טמונים בהם מספר "סיכונים דידקטיים", למשל: באיזה מידה מסוגל הלומד לתרגם מהמודל ובחזרה? ועוד.

5. גישה מתמטית פורמלית

דרך אחת לגישה המתמטית הפורמלית היא להציג את המספרים השלמים כ"זוגות סדורים" של מספרים טבעיים. הזוג הסדור (a,b) הוא הצגה של המספר המתקבל מהחישוב $a - b$. מכאן שיש הרבה זוגות סדורים המייצגים אותו מספר ולכן מגדירים יחס שקילות (equivalence relation) בקבוצת הזוגות הסדורים. מספר שלם מוגדר כמחלקת שקילות (equivalence class), זאת אומרת, כאיבר של קבוצת המנה (quotient set).

את הכפל מגדירים כך: $(a,b)\cdot(c,d) = (ac + bd\ ,\ ad + bc)$

ומכאן נובעים כל הכללים.

נעשו נסיונות לעבד גישה זאת לתלמידים מתחילים, אך ספק אם הם יכולים להתמודד אתה ולהבין לעומק שיקולים פורמלים טהורים.
גישה כזאת, ניתן למצוא בכל טקסט ברמה אוניברסיטאית באלגברה או ביסודות האנליזה.

הערכה השוואתית

הסקירה דלעיל מראה את ריבוי הגישות (גם לאחר המיון) ומעוררת שאלות לגבי ערכן הדידקטי והמתמטי.
על מנת להשוות את השפעת הגישות השונות על הישגי התלמידים ועמדותיהם לנושא,החלטנו לערוך ניסוי.

בשנת הלימודים תשל"ט חיברנו ארבע יחידות לימוד שונות, כ"נציגות" ארבע הקטגוריות הראשונות. יחידות אלה נלמדו ב 32 כיתות ז', רמה א', הלומדות לפי תוכנית רחובות ("פרקי מתמטיקה: ספר א"). היחידות השתלבו במהלך הלימוד התקין והחליפו את הסעיף "כפל במספרי הזזה". יחידות הלימוד כללו: הצגת הכללים (לפי אחת הגישות) ותירגול (זהה לכולן). כל כיתה למדה לפי יחידה מסויימת אחת ועברה מבחן הישגים לפני ואחרי לימוד היחידה.
כמו כן הועברו שאלוני עמדות לפני ואחרי הלימוד.
הכיתות חולקו לכיתות טעונות טיפוח וכיתות מבוססות, על פי נתונים וקריטריונים של משרד החינוך והתרבות (מכאן ואילך - ב"ס הוא ט"ט, אם 50% ומעלה מתלמידיו הם טעוני טיפוח).

א. *ממצאים הנוגעים לידע הקודם ולאינטואיציות*

בשאלון שהועבר לפני לימוד היחידה, נשאלו שתי שאלות שנועדו לבדוק את הידע הקודם של התלמידים. מטרת השאלות היתה לנפות את התלמידים שכבר למדו את הנושא, ולעמוד על האינטואיציות שיש לתלמידים המצהירים כי לא למדו את הנושא.

להלן שתי השאלות ושכיחות התשובות: (ענו 937 תלמידים)

1. *לפניך תרגיל כפל $(+3)\cdot(-2)$*

א) למדתי את הנושא ואני יודע שהתשובה היא ______________

שכיחות	תשובות
8.9%	(-6)
0.9%	אחרות

ב) לא לימדו אותי את הנושא אבל אני חושב שהתוצאה היא __________

שכיחות	תשובות
17.9%	(+6)
26.8%	(-6)
6.0%	(+4)
6.0%	אחרות

ג) לא לימדו אותי את הנושא ולכן אינני יודע מה התוצאה.

שכיחות
31.6%

2. *לפניך תרגיל כפל $(-5)\cdot(-4)$*

א) למדתי את הנושא ואני יודע שהתוצאה היא ______________

שכיחות	תשובות
7.8%	(+20)
2.2%	אחרות

ב) לא לימדו אותי את הנושא אבל אני חושב שהתוצאה היא __________

שכיחות	תשובות
17.2%	(+20)
45.3%	(-20)
2.8%	אחרות

ג) *לא לימדו אותי את הנושא ולכן אינני יודע מה התוצאה.*

<u>שכיחות</u>

22.7%

לא ענו בכלל 1.9%

התבוננות בנתונים מראה:

- כשליש מהתלמידים אשר בחרו בשאלה 1 באפשרות ג, עברו בשאלה 2 לאפשרות ב, ו"העזו לנחש". בשיחה עם מורים, הועלה ההסבר הבא: בשלב העברת המבחן, מחשבת התלמידים היתה עדיין מכוונת לכללי הסימנים של חיבור (במקרה ששניהם שליליים - החיבור שלילי, במקרה שאחד חיובי ואחד שלילי - לא ניתן לדעת מה התוצאה). הנחה זאת יכולה להסביר גם את השכיחות הגדולה לתשובה $(-20) = (-5)\cdot(-4)$.

- נראה שרוב התלמידים שבחרו באפשרות ב' בשתי השאלות, מצפים שהכפל בשליליים "יתנהג" ככפל המוכר להם לגבי ערכים מוחלטים, אך מתלבטים בקביעת הסימן. אך אין להתעלם ממספר רב של תלמידים ש"המציאו" לעצמם כללי כפל. ביניהם תשובה אחת חזרה אצל 56 תלמידים מכיתות שונות (כ 6% מכלל האוכלוסיה): $+4 = (+3)\cdot(-2)$. בניסיון לברר מה הוא ה"כלל" חזרנו על אותה שאלה, כשנה לאחר הניסוי. אחת התלמידות ענתה אותה תשובה והסבירה: 2 כפול 3, 6, פחות 2, ארבע.

ב. <u>*ממצאים בתחום ההישגים*</u>

לניתוח מבחן ההישגים שהועבר בסוף לימוד היחידה, השתמשנו בטכניקה סטטיסטית,המאפשרת "לנקות" את ההבדלים ההתחלתיים שהתגלו במבחן שהועבר לפני הלימוד. כיחידת מדידה בחרנו בכיתות. <u>לא</u> נתגלו הבדלים מובהקים (במבון הסטטיסטי) בין ממוצעי הכיתות הלומדות לפי שיטות שונות, אך נציין:

א. הכיתות שלמדו לפי השיטה "הדדוקטיבית" זכו לממוצע הגבוה ביותר.

ב. תחום הציונים הממוצעים היה בין 78 ל 87, בכל השיטות. עובדה זאת מראה שהתלמידים הגיעו לשליטה בחומר בשתי תת-האוכלוסיות.

ג. ממצאים בתחום העמדות

העברנו שאלון עמדות בו התבקש התלמיד לסמן את מידת הסכמתו (בסולם של 4 דרגות: מסכים בהחלט, מסכים, לא מסכים, לא מסכים בהחלט) לגבי 20 הצהרות נתונות, שבאו להצביע על יחס, קושי, הנאה וכו', בנושא הכפל.

להלן דוגמא של הצהרה, ממנה ניתן ללמוד על התיחסות התלמידים כלפי הנושא. (אנו מביאים הצהרה זאת בצירוף אחוז התלמידים שהביעו את הסכמתם לגביה).

ההצהרה	נראה לי משונה מדוע חיבור של שני מספרים שליליים נותן כתוצאה מספר שלילי		נראה לי משונה מדוע כפל מספר שלילי במספר שלילי נותן כתוצאה מספר חיובי
	לפני לימוד הנושא (כפל)	שיטה	אחרי לימוד הנושא (כפל)
תלמידים מבוססים	14%	שינון הכללים	53%
	14%	(אינדוקציה)	39%
	9%	(דדוקציה)	25%
	30%	(מודל)	33%
תלמידים ט"ט	32%	שינון הכללים	36%
	34%	(אינדוקציה)	34%
	19%	(דדוקציה)	31%
	20%	(מודל)	47%

(האוכלוסיה ~ 950 תלמידים)

יש לציין שכללי הכפל (במקרה של שני מספרים שליליים) נראים משונים יותר מאשר כללי החיבור לרוב התלמידים. ממצא זה תואם את המספר הרב של תלמידים אשר חשבו לפני לימוד הכללים ש $(-4)\cdot(-5) = (-20)$.

התבוננות בשכיחות התשובות אצל תלמידים מבוססים, מראה כי 53%, המספר הגדול ביותר, מבין אלה שלמדו לפי שיטת שינון הכללים מצהירים שכללי הכפל נראים להם משונים. גם אם נשווה לתשובות הקשורות לחיבור שני שליליים, השכיחות אצל אותם תלמידים היא היחידה שהוכפלה פי ארבע. לדעתנו, הם בטאו בכך את רצונם לקבל את ההסבר (או ההצדקה לכללים) שלא קיבלו ביחידה.

סיכום

היות וכל נושא לימודי במתמטיקה מורכב מהסבר ותירגול, העובדה שתלמידי רמות א' הגיעו לכלל שליטה בנושא הביאה אותנו לחשוב על מקום התירגול (הזהה) שנלווה לכל היחידות. ככל הנראה, תירגול זה הוא שעוזר לתלמיד לבצע היטב תרגילי כפל במספרים שליליים.
אולם, עלינו בתור מורים להיות מודעים לעובדה שנושא הכפל במספרים שליליים הוא אחד הראשונים המאפשר לנו להפגיש את התלמיד עם "שיקולים מתמטיים". לכן, אם השגיו של התלמיד "שווים" בכל שיטה, מחד, ועמדתו כלפי מתמטיקה עלולה להפגע בגלל הצגת נושא ללא תוספת הסבר או הצדקה, מאידך; מומלץ לבחור בגישה בה, בד בבד, מספקים את סקרנותו של הלומד ואת מטרות החינוך המתמטי, לדעתנו. הגישה הדדוקטיבית משלבת שני היבטים אלה.

••••••••••••••••••••

מקורות

Saunderson, N. The Elements of Algebra, Volume 1. Cambridge University Press, 1741, p. 56-58.

Beberman, M. & Vaughan, H.E. High School Mathematics. Unit 1. The Arithmetic of Real Numbers. (UICSM) University of Illinois Press, 1962, p. 17-19.

אבירי, ח. יסודות המתמטיקה המודרנית.
הוצאת המכון הישראלי להשכלה בכתב ליד המרכז לתרבות ולחינוך, תש"ל.

הטלויזיה הלימודית - תוכנית לכיתה ח'.

המחלקה להוראת המדעים - מכון ויצמן למדע - פרקי מתמטיקה, ספר א' בעולם המספרים. רחובות, תשכ"ח.

המחלקה להוראת המדעים - מכון ויצמן למדע - פרקים נבחרים במתמטיקה, ספר א': בעולם המספרים. רחובות, תשכ"ח.

משלר, מ. אלגברה לשנת הלימודים השביעית. עם עובד, תשכ"ט.