שאלות משלבות

שאלה 1

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$.

א. מצאו שלוש נקודות על הגרף של הפונקציה כך שהן יהוו קדקודים של משולש ישר זווית.

ב. מצאו שלוש נקודות על הגרף של הפונקציה כך שהן יהוו קדקודים של משולש שווה צלעות.

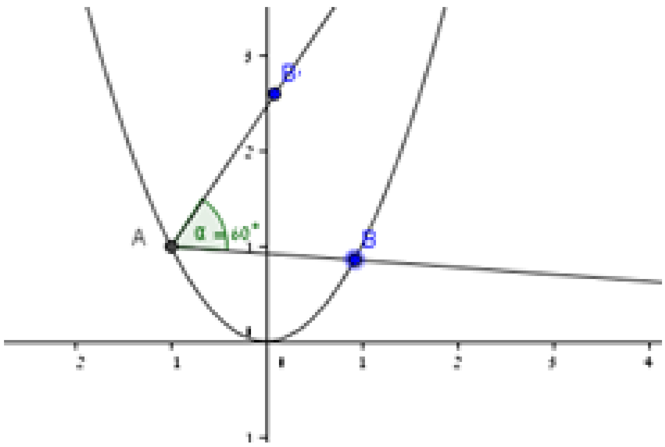
ג. מצאו ארבע נקודות על גרף הפונקציה כך שהן יהוו קדקודים של טרפז שווה שוקיים.

ד. מצאו חמש נקודות על גרף הפונקציה כך שהן יהוו קדקודים של מחומש כלשהו.

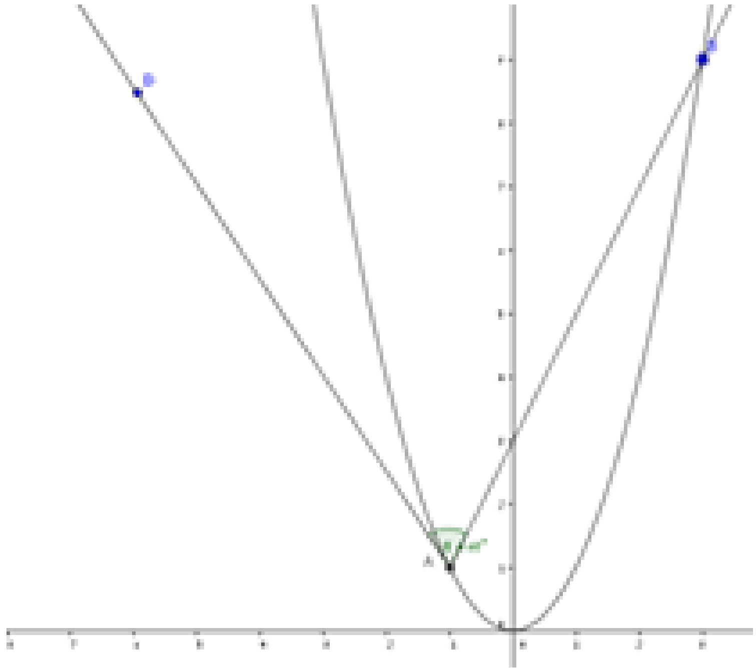
פתרונות והערות

א. טבעי לחפש פתרון לבעיה זאת כאשר אחת הנקודות היא ראשית הצירים. שוקיים בעלי שיפוע ±1 יוצרים ביניהם זווית ישרה. קודקודי משולש כזה הם (1 ,1-); (1 ,1); (0 ,0).
דרך אחרת היא לבחור נקודה כלשהי על גרף הפונקציה, להעביר דרכה שני ישרים מאונכים ולמצוא את נקודות החיתוך בין הישירים לפרבולה. שלוש הנקודות יקבעו משולש ישר זווית.
רצוי לתת לתלמידים להתנסות בדרך כזו, גם אם זה כרוך בהדרכה בכל שלב.

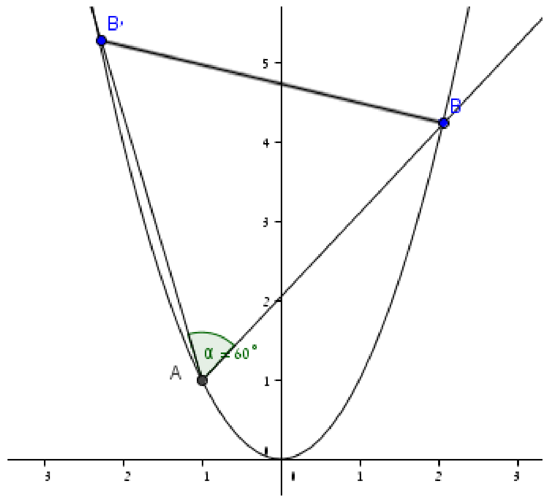
ב. טבעי לחפש פתרון לבעיה זאת כאשר אחת הנקודות היא ראשית הצירים. תחת ההנחה הזאת ניתן לפתור בדרך אנליטית או בשיטת ניחוש ובדיקה. אם תלמידים ישרטטו גרף די מדויק, הנקודות $(\sqrt{3},3)$, $(-\sqrt{3},3)$ נראות מתאימות, ובדיקה מראה שהן אכן יוצרות, יחד עם הראשית, משולש שווה צלעות. יש להדגיש ששיטת הניחוש והבדיקה היא לחלוטין לגיטימית.
פתרון אנליטי יכול להיראות כך: נסמן את קודקודי המשולש $A(0,0)$ $B(\sqrt{x},x)$ $C(-\sqrt{x},x)$ ונניח שהוא שווה צלעות. אורך הצלע BC הוא $2\sqrt{x}$ ואורך הצלע AB הוא $\sqrt{x^2+x}$. השוואת ביטויים אלה מראה כי $x=3$.
ניתן למצוא שלוש נקודות אחרות כך שיהוו קדקודים של משולש שווה צלעות, אך הבעיה לא פשוטה, ומומלץ להיעזר בתוכנה של גיאומטריה דינמית ולהיווכח שקיימים אינסוף משולשים כאלה. נבחר קדקוד A כלשהו על "זרוע" אחת של הגרף, ונבחר נקודה B על הזרוע השנייה (ראו שרטוט).



נסמן ב- 'B את הנקודה שיוצרת משולש שווה צלעות יחד עם A ו- B. בשרטוט הנקודה 'B נמצאת בין זרועות הפרבולה. אם נבחר את הנקודה B די גבוהה, ניווכח שהנקודה 'B נמצאת מחוץ לזרועות הפרבולה.



מכאן ברור שתוך כדי גרירת הנקודה B לאורך גרף הפרבולה, יהיה רגע שבו הנקודה 'B חותכת את הזרוע השנייה ויוצרת משולש שווה צלעות.



משיקול זה ברור שיש אינסוף משולשים שווי צלעות שקדקודיהם על גרף הפונקציה.

ג. כל שני זוגות של נקודות סימטריות ביחס לציר ה- y, יהוו קדקודים של טרפז שווה שוקיים.

ד. כל חמש נקודות על גרף הפונקציה יהוו קדקודים של מחומש.

שאלה 2

א. יוני רוצה לבנות משולש שווה שוקיים בו סכום השורשים של אורכי שתי צלעות שווה לשורש של אורך הצלע השלישית. עזרו ליוני.

ב. כעת יוני מבקש לבנות משולש <u>שאיננו</u> שווה שוקיים, ושבו יש צלע ששורש אורכה שווה לסכום השורשים של אורכי שתי הצלעות הנותרות. כיצד תעזרו לו הפעם?

פתרונות והערות

א. שאלה זו דורשת: א) קריאה זהירה של התנאים ובדיקת המקרים האפשריים, ב) תרגום המקרים האפשריים למשוואות, ג) פתרון המשוואות ו-ד) פירוש התוצאות על פי שיקולים גיאומטריים. יש שני מצבים אפשריים:

- סכום שורש אורך שוק ושורש אורך הבסיס שווה לשורש אורך השוק השנייה: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a}$
- סכום השורשים של אורכי השוקיים שווה לשורש אורך הבסיס: $\sqrt{a}+\sqrt{a}=\sqrt{b}$

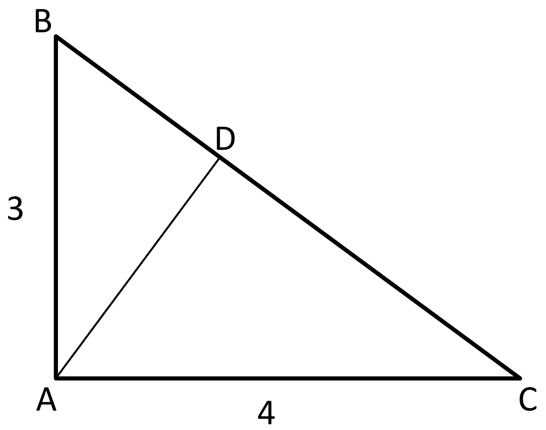
במקרה הראשון, $\sqrt{b}=0 \Rightarrow b=0$ ולכן לא קיים משולש.

במקרה השני, $2\sqrt{a}=\sqrt{b} \rightarrow 4a=b$ וגם במקרה זה אינו קיים משולש כי אורך הבסיס גדול מסכום שתי הצלעות השוות.

ב. התנאי של "שווה שוקיים" איננו מהותי לבעיה. נניח כי המשולש שונה צלעות ולכן צריך להתקיים ש- $\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$. מהעלאת שני האגפים בריבוע מתקבל השוויון $c=(a+b)+2\sqrt{ab}$. כלומר צלע c ארוכה יותר מסכום אורכי הצלעות a ו- b, וזה לא יתכן.

שאלה 3

נתון כי המשולש ABC הוא ישר זווית. אורך הניצב AB הוא 3 יחידות, ואורך הניצב AC הוא 4 יחידות. AD הוא מאונך ל- BC.

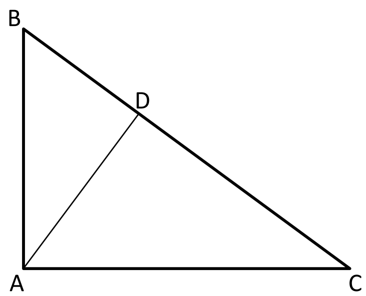


א. מצאו את האורכים של AD, BD ו- DC.

ב. בדקו כי האורך של AD שקיבלתם הוא הממוצע הגיאומטרי של האורכים של BD ו- DC, כלומר, $AD = \sqrt{BD \times DC}$

ג. חשבו את שטח המשולש ABC בשתי דרכים שונות ובדקו שמתקבלת אותה תוצאה.

ד. הוכיחו כי במשולש ישר זווית כלשהו, אורך הגובה ליתר הוא הממוצע הגיאומטרי של אורכי שני הקטעים ביתר הנוצרים על ידי הגובה.



במלים אחרות, כאשר ABC הוא ישר זווית, $AD \perp BC$ מתקיים כי $AD = \sqrt{BD \times DC}$

שאלה 4

בונים משוואה ריבועית $ax^2+bx+c=0$ בעזרת קוביית משחק הוגנת אשר על שש פאותיה רשומים המספרים: 3-, 3, 2-, 2, 1-, 1. מטילים את הקובייה שלוש פעמים: מציבים את תוצאת ההטלה הראשונה ב- a, את תוצאת ההטלה השנייה ב- b, ואת תוצאת ההטלה השלישית ב- c. למשל, אם ההטלות הן (לפי הסדר), 3, 1-, 3, תתקבל המשוואה הבאה: $3x^2-x+3=0$.

הוכיחו שההסתברות שלמשוואה המתקבלת יהיו שני פתרונות היא גדולה מ- $\frac{1}{2}$.

פתרונות והערות

לפני נתוני הבעיה, יש שש אפשרויות לכל אחת מהמקדמים, לכן יש בסך הכול $6^3=216$ משוואות אפשריות. לא יעיל לבדוק כל מקרה. למשוואה יהיו שני פתרונות, כאשר הדיסקרימיננטה חיובית, כלומר כאשר $b^2-4ac>0$. b^2 תמיד חיובי, ו- $-4ac$ חיובי כאשר ל- c ול- a סימנים שונים (אחד חיובי ואחד שלילי). ל- c סימן שונה מהסימן של a בהסתברות $\frac{1}{2}$ כי לכל ערך אפשרי של a יש שלושה ערכים של c שהם בעלי סימן הפוך, ובמצבים האלה יש למשוואה שני פתרונות. יש הסתברות גדולה מ- 0 שיהיו שני פתרונות גם אם ל- a ול- c אותו סימן, למשל כאשר $a=1$ ו- $b=2$ מתקבל $3^2-4\cdot1\cdot2>0$, כך שההסתברות לדיסקרימיננטה חיובית היא תמיד יותר גדולה מ- $\frac{1}{2}$.

שאלה 5

ברשותכם מטבע מיוחד שעל צד אחד שלו מסומן 1 ועל צדו האחר 1-. בונים פונקציה ריבועית מהצורה $f(x)=a(x-m)^2+n$ באופן הבא: מטילים את המטבע שלוש פעמים. תוצאת ההטלה הראשונה קובעת את הערך של a (1 או 1-), תוצאת ההטלה השנייה קובעת את הערך של b, ותוצאת ההטלה השלישית קובעת את הערך של c.

א. מה ההסתברות שגרף הפונקציה המתקבלת חותך את הישר $x=5$?

ב. מה ההסתברות שגרף הפונקציה המתקבלת חותך את הישר $y=-\frac{1}{2}$?

ג. כעת מרחיבים את מרחב ההסתברות. במקום מטבע שעליו המספרים 1, ו- 1-, נעזרים בקובייה שעל פאותיה המספרים 3-, 3, 2-, 2, 1-, 1. מה ההסתברות שגרף הפונקציה המתקבלת חותך את ציר ה- x?

פתרונות והערות

א. הפונקציה הריבועית מוגדרת עבור כל המספרים ובפרט עבור 5, לכן הגרף שלה תמיד יחתוך את הישר $x=5$ בנקודה $(5,f(5))$ ולכן ההסתברות היא 1.

ב. כל מקדם יכול לקבל שני ערכים בלבד, לכן מתקבלות 8 פונקציות ריבועיות אפשרויות שהן שוות הסתברות. מתוך אפשרויות אלה, יש פונקציות בעלות מקסימום (הגרף של הפרבולה "פונה כלפי מטה") ויש פונקציות בעלות מינימום (הגרף של הפרבולה "פונה כלפי מעלה"). כל פרבולה עברה הזזה של יחידה אחת ימינה או שמאלה והזזה של יחידה אחת למעלה או למטה. הפרבולות שחותכות את הישר $y=-\frac{1}{2}$ הן: שתי הפרבולות בעלות מקסימום שעברו הזזה כלפי מעלה ושתי הפרבולות בעלות מינימום שעברו הזזה כלפי מטה (הן ירדו יחידה אחת, ולכן חותכות את הישר $y=-\frac{1}{2}$). ארבע הפרבולות האחרות לא חותכות את ציר ה- x.
לכן, ההסתברות היא $\frac{1}{2}$.

ג. כעת יש $6^3=216$ מקרים לבדוק. אבל נשים לב לכך שהתשובה לסעיף זה זהה לתשובה לסעיף הקודם. הגרף חותך את ציר ה- x אם: הפרבולה היא בעלת מקסימום ועברה הזזה כלפי מעלה או אם הפרבולה היא בעלת מינימום ועברה הזזה כלפי מטה. בשני המצבים האחרים הפרבולות לא חותכות את ציר ה- x. לערך של m (גודל ההזזה הצידה) אין השפעה על קיום או אי קיום של נקודות חיתוך עם הציר. נשים לב שההסתברות של פרבולה עם מינימום שווה להסתברות של פרבולה עם מקסימום (ההסתברות היא $\frac{1}{2}$ כי המקדם a יכול לקבל שלושה ערכים חיוביים ושלושה שליליים). כמו כן, ההסתברות של הזזה כלפי מעלה שווה להסתברות של הזזה כלפי מטה (שתיהן שוות ל- $\frac{1}{2}$). כמו כן, כיוון הפרבולה וכיוון ההזזה בלתי תלויים, כי הם התקבלו על ידי הטלות קובייה נפרדות. לכן, ההסתברות לקבל פרבולה עם מקסימום שזזה כלפי מעלה היא $\frac{1}{4}$ וההסתברות לפרבולה עם מינימום שזזה כלפי מטה היא גם כן $\frac{1}{4}$, ולכן התשובה היא $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

שאלה 6

בונים משוואה ריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ בעזרת קוביית משחק הוגנת אשר על שש פאותיה רשומים המספרים: 2 ,1 ,0 ,0 ,1- ,2-. מטילים את הקובייה שלוש פעמים: מציבים את תוצאת ההטלה הראשונה ב- a, את תוצאת ההטלה השנייה ב- b, ואת תוצאת ההטלה השלישית ב- c.
לדוגמה אם תוצאות ההטלות היו 2- ,0 ,2-, הפונקציה המתקבלת היא $f(x) = -2x^2 - 2$.

א. מה ההסתברות שהפונקציה המתקבלת תהייה פונקציה ריבועית?

ב. מה ההסתברות שהפונקציה תהייה קווית?

ג. מה ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה ישר מקביל לציר ה- x?

ד. מה ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה ישר מקביל לציר ה- x, אם ידוע שהפונקציה היא קווית?

ה. מה ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה פרבולה בעלת מקסימום?

ו. מה ההסתברות שגרף הפונקציה יהיה פרבולה בעלת מקסימום, אם ידוע שהגרף הוא פרבולה?

ז. מה ההסתברות שגרף הפונקציה עובר בראשית הצירים?

ח. מה ההסתברות שגרף הפונקציה עובר בראשית הצירים אם ידוע שאיננו קו ישר?

ט. מה ההסתברות שלגרף הפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x = 1$ אם ידוע שהפונקציה היא ריבועית?

פתרונות והערות

במצב המתואר יש $6^3 = 216$ פונקציות אפשריות. דרך אחת לענות על השאלות מתבססת על מניית התוצאות ה"רצויות" וחישוב חלקן היחסי. אך נשים לב שבמקרים רבים (אולי בכולם) ניתן למקד את ההסתכלות באחד או שניים מן המקדמים בלבד.

א. הפונקציה היא ריבועית אם המקדם של x^2 איננו 0. 4 מתוך 6 הטלות אינן 0, ולכן ההסתברות היא $\frac{2}{3}$. בפתרון זה התעלמנו לחלוטין מערכי שני המקדמים האחרים כי אין להם השפעה על היות הפונקציה ריבועית או לא. בשפה מתמטית נאמר שהמאורע "הפונקציה היא ריבועית" הוא בלתי תלוי בערכי b ו- c.

ב. המאורע ש"הפונקציה היא לקווית" הוא המשלים של המאורע "פונקציה ריבועית", לכן ההסתברות שלו היא $\frac{1}{3}$.

ג. גרף הפונקציה הוא ישר מקביל לציר ה- x אם הן המקדם של x^2 והן המקדם של x שווים ל- 0 והמקדם החופשי שונה מ- 0 (שכן גרף הפונקציה $\mathrm{f(x)} = 0$ מתלכד עם ציר ה- x ולכן לא נחשיב אותו כמקביל לו. שלושת המאורעות $a = 0$, $b = 0$ ו- $c \neq 0$ הם בלתי תלויים (כי הם תוצאה של הטלות מטבע שונות), ולכן ההסתברות היא $\frac{2}{27} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$.

ד. בחישוב ההסתברות המותנית אנחנו מצמצמים את התוצאות האפשריות לאלה שבהן $a = 0$ והתנאי הוא $b = 0$ ו- $c \neq 0$ וההסתברות היא $\frac{2}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$.

ה. גרף הפונקציה הוא פרבולה בעלת מקסימום אם $a < 0$. יש שתי אפשרויות כאלה מתוך שש אפשרויות שוות הסתברות, ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{3}$.

ו. מבין ארבע התוצאות האפשריות עבור a, בשתיים מהן מתקיים $a < 0$, ולכן ההסתברות המותנית היא $\frac{1}{2}$.

ז. גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים אם ורק אם $c = 0$, וההסתברות לכך היא $\frac{1}{3}$.

ח. הן כאשר $a = 0$ והן כאשר $a \neq 0$ גרף הפונקציה תעבור דרך ראשית הצירים כאשר $c = 0$, וההסתברות לכך היא $\frac{1}{3}$.

ט. לגרף של פונקציה ריבועית יש נקודת קיצון ב- $x = \frac{-b}{2a}$ $(a \neq 0)$. שני צירופים נותנים $\frac{-b}{2a} = 1$ והם $a = 1$, $b = -2$ ו- $a = -1$, $b = 2$. ההסתברות של $a = 1$ בהינתן ש- $a \neq 0$ היא $\frac{1}{4}$. ההסתברות של $b = -2$ היא $\frac{1}{6}$. ההסתברות שיתרחשו שני המאורעות הבלתי תלויים האלה ($a = 1$, $b = -2$) היא מכפלת ההסתברויות, כלומר $\frac{1}{24}$. זאת גם ההסתברות של האפשרות השנייה ($a = -1$, $b = 2$). מאורעות אלה זרים וכן ההסתברות לנקודת קיצון ב- $x = 1$ היא $\frac{1}{12} = \frac{2}{24}$.

שאלה 7

בונים שתי פונקציות אקראיות מהצורה $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = sx^2 + tx + u$ באופן הבא. על פאות של קובייה הוגנת מופיעים המספרים 2 ,1 ,0 ,0 ,1- ,2-. מטילים את הקובייה שש פעמים, כל פעם מגרילים את אחד המקדמים של אחת הפונקציות. לדוגמה אם תוצאות שלוש ההטלות הראשונות היו 2- ,0 ,2-, הפונקציה המתקבלת היא $f(x) = -2x^2 - 2$.

א. מה ההסתברות ששתי הפונקציות המתקבלות יהיו פונקציות ריבועיות?

ב. מה ההסתברות שפונקציה אחת תהייה קווית ואחת ריבועית?

ג. מה ההסתברות שלגרפים של שתי הפונקציות לא תהייה אף נקודה משותפת אם ידוע ששניהם קווים ישרים?

ד. מה ההסתברות שלשתי הפונקציות תהייה נקודה משותפת על ציר ה- y?

פתרונות והערות

א. כל פונקציה היא ריבועית אם המקדם של x^2 איננו 0, וזה מתרחש בהסתברות $\frac{2}{3}$ (4 תוצאות מתוך 6 תוצאות בלתי תלויות). שתי הפונקציות בלתי תלויות, ולכן ההסתברות ששתיהן תהיינה ריבועיות היא $\frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$.

ב. יש שתי אפשרויות למאורע הזה: הראשונה קווית והשנייה ריבועית, או להיפך. מאורעות אלה הם שווי הסתברות. ההסתברות של כל אחד מהם היא מכפלת ההסתברויות: $\frac{2}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$, ולכן ההסתברות הכוללת היא $\frac{4}{9} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}$.

ג. אם ידוע ששניהם קווים ישרים, הרי שהמקדמים של x^2 בשתי הפונקציות (a, ו- s) שווים ל- 0. לשתי פונקציות קוויות אין נקודות משותפות אם יש להן שיפועים שווים ונקודות חיתוך שונות עם ציר ה- y, כלומר $b = t$, $c \neq u$. על מנת לחשב את ההסתברות של $b = t$ ניעזר בטבלה שבה מסומנות 8 מתוך 36 האפשרויות שוות הסתברות.

	-2	-1	0	0	1	2
-2	+					
-1		+				
0			+	+		
0			+	+		
1					+	
2						+

אם כן ההסתברות של $b = t$ היא $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$. באופן דומה נמצא כי ההסתברות של $c \neq u$ היא $\frac{2}{9}$, שכן המאורעות "שני מקדמים מסוימים הם שווים" ו- "שני מקדמים מסוימים הם שונים" הם

מאורעות משלימים.   המאורעות $b = t$ ו- $c \neq u$ הם בלתי תלויים, ולכן ההסתברות ששניהם יתרחשו היא מכפלת ההסתברויות: $\frac{14}{81} = \frac{7}{9} \times \frac{2}{9}$.

ד. החיתוך של פונקציה עם ציר ה-y הוא בנקודה $(0, f(0))$. אם כן, התנאי הוא $f(0) = g(0)$, ששקול לתנאי $c = u$. ראינו בסעיף הקודם שההסתברות לכך היא $\frac{2}{9}$. יש לשים לב שההסתברות לא תלויה בערכים של המקדמים האחרים, ובפרט לא משתנה אם מוסיפים מידע לגבי הגרפים - מי מהם קו ישר ומי מהם פרבולה.

שאלה 8

א. מצאו ריבוע אשר היקפו (ביחידות אורך) שווה לשטחו (ביחידות שטח). מה אורך צלע הריבוע? מה היקפו? מה שטחו?

ב. האם יש ריבועים נוספים בעלי התכונה הזאת? אם כן - מצאו. אם לא - הוכיחו שאין.

ג. האם קיים מלבן שאינו ריבוע אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 16? אם כן - מה אורכי צלעותיו? אם לא - הוכיחו כי לא קיים כזה.

ד. האם קיים מלבן אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 18? אם כן - מה אורכי צלעותיו? אם לא - הוכיחו כי לא קיים כזה.

ה. האם קיים מלבן אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 30? אם כן - מה אורכי צלעותיו? אם לא - הוכיחו כי לא קיים כזה.

ו. האם קיים מלבן אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 14? אם כן - מה אורכי צלעותיו? אם לא - הוכיחו כי לא קיים כזה.

ז. השלימו והוכיחו את הטענה הבאה: אם ___ ≤ S אז קיים מלבן יחיד אשר היקפו S יחידות אורך ושטחו S יחידות שטח. אם ___ > S אז לא קיים מלבן כזה. במקרה ש- ___ = S אז _________________.

פתרונות והערות

א. אם נסמן את אורך צלע הריבוע ב- x, היקפו $4x$ ושטחו x^2. מהתנאי שהיקף הריבוע שווה לשטחו מתקבלת המשוואה $x^2 = 4x$. למשוואה זו פתרון יחיד בתחום השאלה (x חיובי), והוא $x = 4$. ההיקף הוא 16 יחידות אורך והשטח הוא 16 יחידות שטח.

ג. מערכת המשוואות המתקבלת היא:

$$a + b = 8$$
$$ab = 16$$

מהצבה של המשוואה הראשונה בשנייה מתקבל:

$$a(8 - a) = 16$$

למשוואה ריבועית זו פתרון יחיד:

$$\frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

ולכן המלבן היחיד ששטחו והיקפו שווים ל-16 הוא הריבוע שמצאנו בסעיף הקודם.

ד. מערכת המשוואות המתקבלת היא:

$$a + b = 9$$
$$ab = 18$$

מהצבה של המשוואה הראשונה בשנייה מתקבל:

$$a(9 - a) = 18$$

למשוואה ריבועית זו שני פתרונות:

$$\frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 18}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

ואכן למלבן שאורכי צלעותיו 3 ו- 6 יש היקף של 18 יחידות אורך ושטח של 18 יחידות שטח.

ה. מערכת המשוואות המתקבלת היא:

$$a + b = 15$$
$$ab = 30$$

מהצבה של המשוואה הראשונה בשנייה מתקבל:

$$a(15 - a) = 30$$

למשוואה ריבועית זו שני פתרונות:

$$\frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{105}}{2}$$

ואכן למלבן שאורכי צלעותיו $12.62 \approx \frac{15+\sqrt{105}}{2}$ ו- $2.38 \approx \frac{15-\sqrt{105}}{2}$ יש היקף של 30 יחידות אורך ושטח של 30 יחידות שטח.

ו. מערכת המשוואות המתקבלת היא:

$$a + b = 7$$
$$ab = 14$$

מהצבה של המשוואה הראשונה בשנייה מתקבל:

$$a(7 - a) = 14$$

למשוואה זו אין פתרונות.

ז. אם $S \geq 16$ אז קיים מלבן יחיד אשר היקפו S יחידות אורך ושטחו S יחידות שטח. אם $S < 16$ אז לא קיים מלבן כזה. במקרה ש- $S = 16$ המלבן הוא ריבוע.

ח. הוכחה: צריך להראות שבמשוואה הריבועית המתקבלת כאשר $S < 16$, הדיסקרימיננטה שלילית, וכאשר $S \geq 16$ הדיסקרמיננטה חיובית. נרשום את נוסחת המשוואה הריבועית, הפעם כאשר השטח הוא פרמטר S: $\frac{\frac{S}{2} \pm \sqrt{(\frac{S}{2})^2 - 4S}}{2}$. נחשוב על הדיסקרימיננטה כעל פונקציה d של משתנה S: $d(S) = (\frac{S}{2})^2 - 4S = \frac{1}{4}S(S - 16)$. מכאן ברור שהדיסקרימיננטה שלילית כאשר $S < 16$, מתאפסת כאשר $S = 16$, וחיובית כאשר $S > 16$.

<u>פתרון אלטרנטיבי</u>: ניתן לגשת לשאלה גם בצורה המדגישה את האופן בו שטח והיקף של מרובע משתנים כאשר משחקים עם אורכי הצלעות. לדוגמא, את סעיף א' אפשר לפתור על ידי כך ש- "נמתח" ריבוע למלבן מבלי לשנות את ההיקף. ניקח את הריבוע (היחיד) עם היקף 16, ונאריך זוג אחד של צלעות נגדיות ב- t ונקצר זוג שני של צלעות נגדיות ב- t. נקבל מלבן שהיקפו הוא 16 (וכל

המלבנים שהיקפם 16 מתקבלים בצורה זו) ואשר שטחו הוא $(4+t)(4-t)=16-t^2$.
מהמשוואה עולה מיד ששטח המלבן יהיה שווה 16 אם ורק אם $t=0$, כלומר, אם המלבן הוא ריבוע. לכן, המלבן היחיד בעל היקף ושטח השווים ל-16 הוא ריבוע. באופן דומה: נצא מהריבוע (היחיד) שהיקפו שווה ל-18 (שטחו 20.25) ושוב נבחן את שטח המלבן המתקבל מהארכת זוגות של צלעות נגדיות ב- t וב- $-t$ בהתאמה. שטח המלבן יהיה $20.25-t^2$ ופתרון המשוואה $20.25-t^2=18$ יראה שיש רק מלבן אחד (עד כדי חפיפה) שהיקפו ושטחו שווה 18. מהלך דומה ניתן לעשות עם ריבוע שהיקפו 30 ועם ריבוע שהיקפו 14. במקרה האחרון נסיק ששטחו של מלבן בעל היקף 14 שווה ל- $120.25-t^2$, ובפרט קטן מ-14, כלומר לא קיים מלבן ששטחו והיקפו שווים 14.

שאלה 9

א. מצאו את אורכי האלכסונים של מעוין אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 20.

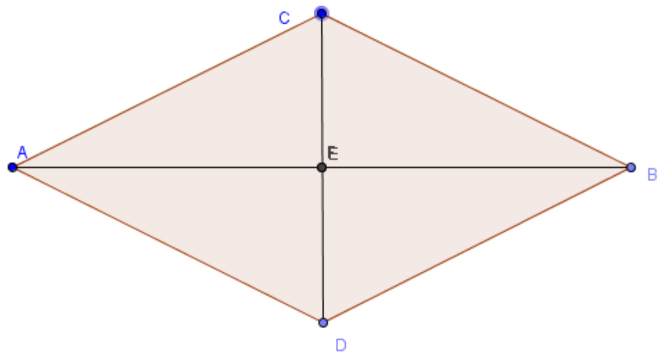
ב. מצאו את אורך הגובה של המעוין של הסעיף הקודם. (תזכורת: גובה של מקבילית הוא הקו המחבר שתי צלעות נגדיות של המקבילית - או המשכן - ויוצר איתן זוויות ישרות).

ג. מצאו את אורכי האלכסונים ואת גובהו של מעוין אשר היקפו (ביחידות אורך) ושטחו (ביחידות שטח) הם 9.

ד. האם עבור כל מספר נתון הן כהיקף והן כשטח מעוין (ביחידות המתאימות) תמיד קיים מעוין? אם כן הוכיחו, אם לא הסבירו.

פתרונות והערות

א. כיוון שהיקפו של המעוין הוא 20 יחידות אורך, אורך כל צלע הוא 5.



לכן מתקיים כי:

$$AE^2 + CE^2 = AC^2 = 25$$

כיוון ששטח המעוין הוא 20 יחידות שטח, מתקיים כי:

$$AE \cdot CE = 10$$

הצבת המשוואה השנייה בראשונה מניבה משוואה דו-ריבועית (ממעלה רביעית) אותה ניתן לפתור בעזרת פתרון של משוואה ריבועית תחילה:

$$AE^2 + \left(\frac{10}{AE}\right)^2 = 25$$

פתרון משוואה זו מראה כי $\mathrm{AE}^2 = \frac{25 \pm 15}{2}$ אשר נותן שני פתרונות חיוביים עבור מחצית האלכסון של המעוין: $\sqrt{5}$ ו- $\sqrt{20}$. כלומר, קיים רק מעוין אחד אשר אלכסוניו $\sqrt{20}$ (או $2\sqrt{5}$) ו- $2\sqrt{20}$ (או $4\sqrt{5}$).

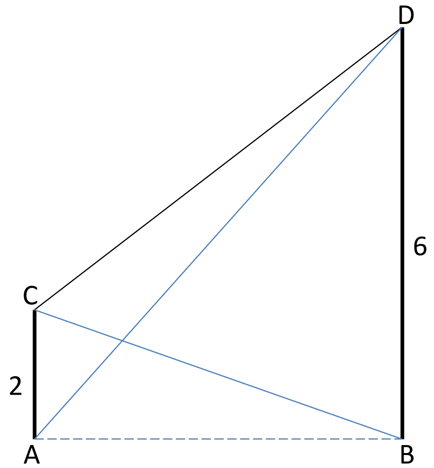
ב. חישוב שטח המקבילית הוא מכפלת אורך הבסיס באורך הגובה. השטח (נתון) הוא 20 והבסיס 5 (נתון, כי הוא רבע ההיקף), ולכן הגובה 4 יחידות אורך.

ג. מהלך הפתרון דומה: המשוואה שמתקבלת היא: $\mathrm{AE}^2+\left(\frac{6}{\mathrm{AE}}\right)^2=9$. אם מנסים לפתור מתקבלת תוצאה בלתי אפשרית: $AE^2=\frac{9\pm\sqrt{-63}}{2}$. לכן לא קיים מעוין כזה.

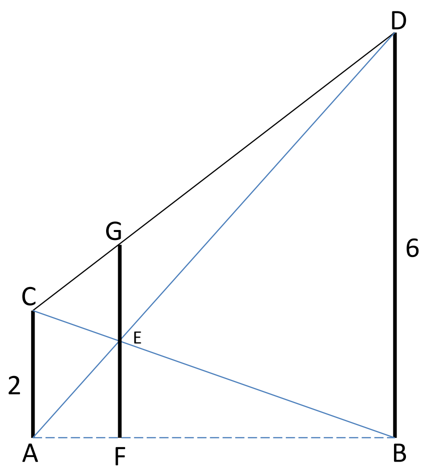
ד. על פי סעיף ג, ראינו כי לא תמיד קיים מעוין אשר מספר יחידות אורך של היקפו שווה למספר יחידות שטח של שטחו. ניתן לגלות כי רק כאשר $S\geq 16$ קיים מעוין יחיד אשר היקפו S יחידות אורך ושטחו S יחידות שטח. אם $\mathrm{S}=16$ המעוין הוא ריבוע.

שאלה 10[1]

באתר בנייה העמידו שני מוטות AC ו- BD, בגובה 2 מטר ו-6 מטר, וחיברו עם כבל את הקצה העליון של המוטות (קטע CD באיור). כמו כן, חיברו בכל כל קצה עליון עם הקצה התחתון של המוט השני (קטעים AD ו- CB באיור).



על מנת לחזק מבנה זה, הוסיפו מוט שלישי (GF), במקביל למוטות הקיימים ואשר עובר דרך נקודה E, כפי שמתואר באיור הבא:



א. שרטטו את התרשים על נייר משובץ ואמדו את אורך המוט GF. שרטטו שוב (עם אותם אורכים של AC ו- BD), אך הפעם הרחיקו קצת את המוטות ובדקו את השתנות אורך GF ביחס למרחק בין המוטות.

ב. חשבו את אורך GF.

ג. הכלילו כאשר אורך AC הוא a ואורך BD הוא b.

[1] בהשראת "פעילות 12 – מוטות הרמוניים" מתוך הספר *על השתנות גיאומטרית וגרפים* (1999), מאת א. הרכבי ונ. הדס, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע. רחובות.

שאלה 11

א. אורך צלע של ריבוע הוא 10 ס"מ. מגדילים כל אחת מהצלעות ב- 20%, בכמה אחוזים יגדל שטחו?

ב. אורך צלע ריבוע הוא 10 ס"מ. מגדילים כל אחת מהצלעות ב- 20%, בכמה אחוזים יגדל היקפו?

ג. x הוא אורך צלע של ריבוע. מגדילים זוג צלעות נגדיות ב- 10% ואת הזוג השני ב- 30%, בכמה אחוזים יגדל השטח?

ד. מגדילים זוג צלעות נגדיות של ריבוע ב- 50% ומקטינים את הזוג השני ב- 50%. האם השטח יגדל, יקטן או לא ישתנה? הסבירו.

ה. אורך צלע של ריבוע הוא 10 ס"מ. מגדילים זוג צלעות נגדיות ב- x אחוזים ומקטינים את הזוג השני ב- x אחוזים. הראו כי השטח קטֵן ומצאו בכמה אחוזים הוא קטן.

ו. הראו כי אורך האלכסון של המלבן שהתקבל בסעיף הקודם גדל בפחות מ x אחוזים (בהשוואה לאלכסון הריבוע).