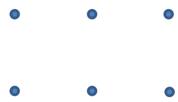
הסתברות

שאלה 1

הנקודות שבאיור מסודרות במערך מלבני כך שהמרחק האנכי והמרחק האופקי של כל נקודה משכנתה הוא יחידה אחת.



א. מצאו את כל המרחקים האפשריים בין כל שתי נקודות שונות (מרחק = אורך הקטע הישר המחבר ביניהן).

ב. מה ההסתברות לבחור באופן אקראי שתי נקודות כך שהמרחק ביניהם הוא 1?

ג. מה ההסתברות שהמרחק בין שתי נקודות שנבחרות באקראי יהיה 2.5?

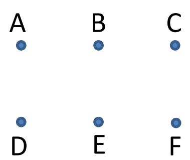
ד. אם ידוע כי אחת הנקודות שבחרנו היא הימנית העליונה, מה היא הסתברות שהנקודה השנייה היא במרחק גדול מ-2 ממנה?

ה. אם נבחר שלוש נקודות שונות באקראי, מה ההסתברות שנקודות אלה הן קדקודים של משולש ישר זווית?

ו. אם נבחר ארבע נקודות שונות באקראי, מה ההסתברות שהנקודות **אינן** קדקודים של מורבע?

פתרנות והערות

א-ב. מרחב ההסתברות של זוגות (לא סדורים) של נקודות שקול למרחב של קטעים (כי כל קטע קובע ונקבע על ידי זוג של שתי נקודות). להלן אפשרות למנייה שיטתית של הקטעים בין כל שתי נקודות בסידור הנתון: ניתן להתחיל מהנקודה השמאלית העליונה אשר ממנה יוצאים חמישה קטעים, ממשיכים עם נקודה שלידה (התקדמות בכיוון מחוגי השעון) אשר גם ממנה יוצאים חמישה קטעים אך אחד כבר נספר בצעד הקודם. אם ממשיכים כך עבור כל נקודה, מתקבל כי סך כל הקטעים הוא: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. דרך אחרת היא: מכל נקודה יוצאים חמישה קטעים, ישנן שש נקודות לכם קיימים 30 קטעים, אך כל קטע נספר פעמיים (פעם עבור קצהו האחד ופעם עבור קצהו השני), לכן יש לחלק מספר זה ב- 2, ובסך הכול ישנם 15 קטעים.
על מנת לעקוב אחר הספירה וחישובי ההסתברות, ניתן שמות לנקודות בסידור הנתון:



הסתברות	קטעים	אורך
$\frac{7}{15}$	7 AB, AD, BC, BE, CF, DE, EF	1
$\frac{4}{15}$	4 AE, BF, CE, BD	$\sqrt{2}$
$\frac{2}{15}$	2 AC, DF	2
$\frac{2}{15}$	2 AF, CD	$\sqrt{5}$

ג. בסידור הנתון לא קיימות שתי נקודות הנמצאות במרחק 2.5 זו מזו, ולכן ההסתברות היא אפס.

ד. בהינתן שאחת הנקודות היא הימנית העליונה (C), יש חמש אפשרויות לבחור בנקודה נוספת על מנת ליצור קטע. רק נקודה אחת (D) נמצאת במרחק גדול מ- 2 יחידות ממנה, כך שההסתברות לבחור בה היא $\frac{1}{5}$. ניתן לגשת לשאלה זו גם באמצעות הסתברות מותנית:

$$P(\text{מרחק} > 2 \mid \text{הנקודה C}) = \frac{1/15}{5/15} = 1/5$$

ה. ישנן 20 דרכים לבחור שלוש נקודות, מניין זהיר של המקרים מגלה שמתוכן יש 14 שלשות שיוצרות משולש ישר זווית: 8 משולשים שהניצבים הם באורך יחידה אחת, 4 משולשים בהם הניצבים הם באורך 1 ו- 2, ועוד שני משולשים בהם שני הניצבים הם באורך $\sqrt{2}$. לכן, ההסתברות היא $\frac{14}{20} = 70\%$. ניתן למנות אחרת: מתוך 20 הדרכים לבחור שלוש נקודות יש שתי אפשרויות של נקודות שלא יוצרות משולש (ABC ו- DEF) ועוד ארבעה משולשלים שאינם ישרי זווית (ABF, BCD, DEC ו- AFE), כך שההסתברות של המאורע המשלים למאורע שאנו מחפשים (שלשה של נקודות שאינה יוצרת משולש ישר זווית) היא $\frac{6}{20} = 30\%$.

ו. ישנן 15 דרכים לבחור ארבע נקודות מתוך שש הנקודות שבסידור. המצבים שאינם מאפשרים יצירת מרובע הם אלה בהם שלוש נקודות הן על ישר אחד. יש 6 מצבים כאלה (שלושה עבור הנקודות D, E ו- F, ועוד שלושה עבור הנקודות A, B, ו- C). לכן ההסתברות לכך היא $\frac{6}{15} = 40\%$.

שאלה 2

רן ואלעד משחקים שש-בש בעזרת שתי קוביות וירטואליות המוטלות באמצעות יישומון במחשב. כל ילד בתורו מקבל מהמחשב תוצאה של הטלה וירטואלית - שני מספרים בין 1 ל-6. כעבור שעתיים של משחק אלעד עוצר את המשחק בטענה שהיישומון לא הוגן כי במשך כל המשחק לא יצא הזוג $(6,6)$ אפילו פעם אחת.

א. אם היישומון הוגן, מה ההסתברות שבהטלה אקראית יתקבל המספר 6 בשתי הקוביות?

ב. רן ואלעד תכננו ניסוי - להטיל את הקוביות מאה פעמים ולבדוק כמה פעמים יתקבל המספר 6 בשתי הקוביות. אם היישומון הוגן, בערך בכמה הטלות, מתוך מאה, צפוי להתקבל המספר 6 בשתי הקוביות?

ג. מה ההסתברות שבמאה הטלות של זוג קוביות הוגנות לא יתקבל המספר 6 בשתי הקוביות אפילו פעם אחת?

ד. אלעד רוצה לשלוח תלונה ליצרן היישומון בטענה שבמאה הטלות קובייה לא התקבל המספר 6 בשתי הקוביות אפילו פעם אחת. האם לדעתכם התלונה מוצדקת? כמה פעמים הייתם מציעים להטיל את הקוביות הווירטואליות כדי לבסס את הטענה שהיישומון לא הוגן? הסבירו את השיקולים שלכם.

פתרונות והערות

הסעיפים השונים בשאלה זו מתייחסים לסוגיות הבאות:

- הקשר בין הסתברות ושכיחות בניסוי חוזר.
- ההסתברות שלא תתקבל ההטלה הרצויה בהטלה בודדת היא גדולה $\left({}^{35}\!/_{36}\right)$, אבל מה נקבל אם נעלה מספר זה בחזקת 100? על סמך ידע בשברים, ידוע כי המספר יקטן, אפילו בהרבה, אך מומלץ לחשב כדי לקבל את סדרי הגודל.
- התנסות במתן נימוקים, בביסוס ובניסוחם בשפה מתמטית.

א. ${}^{1}\!/_{6} \times {}^{1}\!/_{6} = {}^{1}\!/_{36}$.

ב. $100 \times {}^{1}\!/_{36} = 2.78$. צפוי להתקבל המספר 6 בשתי הקוביות ביחד בערך 3 פעמים.

ג. ההסתברות שבהטלה בודדת לא יתקבל 6 בשתי הקוביות היא ${}^{35}\!/_{36} = 0.972$.
ההסתברות שבמאה הטלות לא יתקבל המספר 6 בשתי הקוביות ביחד היא $\left({}^{35}\!/_{36}\right)^{100} = 0.0598 \approx 6\%$.

ד. מאורע שמתרחש בהסתברות של 6% איננו מאד נדיר. יצרן היישומון יכול לטעון ש- 6% מהמשתמשים שעורכים את הניסוי (מאה הטלות) ביישומון הוגן צפויים לא לקבל את המספר 6 בשתי הקוביות ביחד אפילו פעם אחת. לתלמידים אין כלים סטטיסטיים לקבוע

קשר בין רמת וודאות לבין מספר הטלות. תשובה אפשרית יכולה להיות: אם נטיל חמש מאות פעם והתוצאה לא התקבלה אפילו פעם אחת, אז כנראה היישומון לא הוגן. זאת כיוון שאם היה הוגן, ההסתברות שתוצאה זו לא תתקבל אפילו פעם אחת היא $0.0000008 \approx (^{35}/_{36})^{500}$. הסתברות זאת היא מאד קטנה - פחות ממקרה אחד למיליון. לכן, אם זה המקרה, ניתן לחשוד שהיישומון אינו הוגן.

<u>שאלה 3</u>

דנה, שרון ומיכל צריכות לבחור באקראי שני מספרים שלמים <u>שונים</u> מתוך קבוצת ששת המספרים הטבעיים הרשומים על קוביית משחק רגילה $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. הן עושות זאת בשלוש דרכים שונות:

- דנה מטילה זוג קוביות הוגנות, ואם מתקבל פעמיים אותו מספר היא מטילה שוב את שתי הקוביות עד שיתקבלו שני מספרים שונים.

- שרון מחליטה שהיא תבחר את המספרים בנפרד. היא מטילה קובייה אחת, ואח"כ מטילה את השנייה עד שיתקבל מספר שונה מזה שהתקבל בקובייה הראשונה.

- מיכל מחליטה שהיא תבחר תחילה את המספר הקטן מבין השניים, ומטילה קובייה אחת. אם מתקבל 6 (שלא יכול להיות המספר הקטן ביותר), היא מטילה שוב עד שיוצא מספר קטן יותר. אח"כ היא בוחרת את המספר הגדול על ידי הטלת הקובייה שוב ושוב, עד שמתקבל מספר גדול יותר מהמספר הראשון שהיא בחרה.

חשבו מה ההסתברות לתוצאות הבאות בשלוש שיטות ההטלה השונות: א) שתיים וחמש, ב) שלוש וארבע, ג) חמש ושש. באילו שתי שיטות ההסתברויות זהות? האם שתי השיטות האלה שקולות, כלומר, שההסתברות **<u>לכל</u>** תוצאה בשיטה אחת שווה להסתברות לאותה תוצאה בשיטה האחרת? אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, הוכיחו.

<u>פתרונות והערות</u>

שאלה זו ממחישה סוגיה שלא תמיד זוכה לתשומת לב בהוראת הנושא. כאשר תוצאה נבחרת "באקראי", לא ברור האם כל שיטות הבחירה שקולות. בדרך כלל כל הדרכים ה"סבירות" לבצע בחירה אקראית הן שקולות. אך בדוגמא של שאלה זו זה לא המקרה.

בשיטה של דנה יש 30 תוצאות שוות הסתברות (כל 36 האפשרויות פחות ששת המקרים לתוצאה זהה בשתי הקוביות). כל תוצאה יכולה להתקבל בשני אופנים, ולכן ההסתברות לכל אחת משלושת התוצאות שבשאלה היא $2/_{30} = 1/_{15} = 0.0667$.

שרון בוחרת את המספרים אחד אחרי השני, ולכן לכאורה צריך להפריד בין שתי אפשרויות. למשל, במקרה של התוצאה חמש ושש ההסתברות שיתקבל תחילה 5 ואח"כ 6 היא $1/_6 \times 1/_5 = 1/_{30}$. ההסתברות שיתקבל תחילה 6 ואח"כ 5 היא גם $1/_6 \times 1/_5 = 1/_{30}$, ולכן, ההסתברות לחמש ושש היא: $2/_{30} = 1/_{15} = 0.0667$. השיקול זהה עבור שתי התוצאות האחרות (שלוש וארבע, ושתיים וחמש).

בשיטה של מיכל ההסתברויות שונות. התוצאה חמש ושש מתקבלת רק אם המספר הראשון היה 5 והשני 6 (כי המספר השני בהכרח גדול יותר). ההסתברות למספר ראשון 5 היא $1/_5$, כי כל התוצאות שוות הסתברות, למעט התוצאה 6 שההסתברות לה היא 0. בהינתן שהמספר הראשון הוא 5, השני חייב להיות 6, כי ממשיכים להטיל את הקובייה עד שיוצא מספר גדול מ- 5. לכן ההסתברות לחמש ושש היא $1/_5 \times 1 = 1/_5 = 0.2$. באופן דומה,

ההסתברות לתוצאה שלוש וארבע היא $0.0667 = {}^{1}\!/_{15} = {}^{1}\!/_{3} \times {}^{1}\!/_{5}$ (כמו בשיטות של דנה ושל שרון). זאת כיוון שההסתברות של המספר הראשון להיות 3 היא ${}^{1}\!/_{5}$, ובהינתן שהמספר הראשון היה 3, ההסתברות של השני להיות 4 היא ${}^{1}\!/_{3}$, כיוון שרק שלושה מספרים באים בחשבון - אלה שגדולים מ- 3. ההסתברות לתוצאה שתיים וחמש היא $0.05 = {}^{1}\!/_{20} = {}^{1}\!/_{4} \times {}^{1}\!/_{5}$. זאת כיוון שההסתברות של המספר הראשון להיות 2 היא ${}^{1}\!/_{5}$, ובהינתן שהמספר הראשון היה 2, ההסתברות של השני להיות 5 היא ${}^{1}\!/_{4}$, כיוון שרק ארבעה מספרים באים בחשבון - אלה שגדולים מ- 2.

השיטות של שרון ודנה שקולות. את זאת ניתן להסביר כך: בשתי השיטות יש אותן שלושים התוצאות האפשריות שהן שוות הסתברות. אך, בסעיף הקודם ראינו שהשיטה של מיכל שונה מהותית.

שאלה 4

בשנות השבעים של המאה העשרים, ילדים שיחקו בהפסקות במשחק הימורים "שבע פי שלושה", על פי הכללים הבאים: לוח קרטון מחולק לשלושה אזורים המסומנים "קטן מ- 7", "גדול מ- 7", "בדיוק 7". שחקן מהמר מול "בנק". המהמר מניח מספר כלשהו של גוגואים על אחד האזורים, וזורק שתי קוביות משחק רגילות.

- אם הניח באזור "קטן מ- 7" ויצא צירוף קוביות שסכומם קטן מ- 7, הוא מקבל חזרה את הגוגואים שלו ובנוסף אותו מספר גוגואים מהבנק. אם לא יצא קטן מ- 7 הוא מפסיד את הגוגואים שהניח.
- אם הניח באזור "גדול מ- 7" ויצא צירוף קוביות שסכומם גדול מ- 7, הוא מקבל חזרה את הגוגואים שלו ובנוסף אותו מספר גוגואים מהבנק. אם לא יצא גדול מ- 7 הוא מפסיד את הגוגואים.
- אם הניח באזור "בדיוק 7" ויצא צירוף קוביות שסכומם 7, הוא מקבל חזרה את הגוגואים שלו ובנוסף כמות גוגואים שהיא פי שלושה מאלה שהניח. אם לא יצא 7 הוא מפסיד את הגוגואים.

א. מה ההסתברות לזכות אם מהמרים על "קטן מ- 7"? האם לדעתכם כדאי להניח 10 גוגואים על אזור זה של הלוח?

ב. מה ההסתברות לזכות אם מהמרים על "גדול מ- 7"? כמה גוגואים הייתם מהמרים על אזור זה של הלוח?

ג. מה ההסתברות לזכות אם מהמרים על "בדיוק 7"? האם, לדעתכם, כדאי להמר על אפשרות זו פעם אחת? האם כדאי להמר עליה 100 פעמים?

ד. שמעון שם לב שאחרי שחבריו למדו הסתברות, הם הפסיקו להמר על "בדיוק 7". הוא הכריז על משחק חדש "7 פי 7", שבו אם הנחת מספר גוגואים על "בדיוק 7" וכך יצא, זכית בפי 7 גוגואים מהמספר הגוגואים שהנחת. מה דעתכם על משחק זה? האם הייתם מהמרים על "בדיוק 7" פעם אחת? 100 פעמים?

פתרונות והערות

שאלה זו מתמקדת באופן עקיף ברעיון של "תוחלת". בסעיפים א' ו- ב' המצב יחסית פשוט. גודל הזכייה האפשרית שווה לגודל ההפסד האפשרי, ואשפר לטעון שכדאי להמר אם ההסתברות לזכות גדולה מ- $1/2$, ולא כדאי אם ההסתברות קטנה מ- $1/2$. במושגים מתקדמים יותר, נאמר שתוחלת הזכייה חיובית אם ההסתברות לזכות גדולה מ- $1/2$.

בסעיפים ג' ו- ד' המצב יותר מורכב. הסיכוי לזכות ב- "בדיוק 7" הוא קטן ($1/6$). יהיו אולי תלמידים שיטענו שבכזה מצב לא כדאי להמר. בסעיף ג' תוחלת הזכייה היא שלילית ובסעיף ד' חיובית (הזכייה הגדולה מפצה על הסיכוי הקטן), אבל התלמידים אינם מכירים את המושג

תוחלת, וגם אם כן מכירים, יתכן ושיקולים של הימנעות מסיכון חזקים יותר משיקולים מתמטיים של תוחלת. השאלה "האם הייתם מהמרים מאה פעמים" היא דרך לא פורמאלית להעלות שיקולים של תוחלת. אם נהמר מאה פעמים נצפה לזכות כשישית מהפעמים. אם הזכייה גדולה פי ששה מההפסד, יש לשער שלא נרוויח יותר מדי ולא נפסיד יותר מדי. אם הזכייה היא רק פי שלושה מההפסד (סעיף ג'), יש לצפות שנפסיד לאורך זמן, ואם הזכייה היא פי שבעה מההפסד (סעיף ד'), יש לשער שנצא מורווחים לאורך זמן.

א. ב- 15 מבין 36 התוצאות שוות ההסתברות האפשריות סכום הקוביות הוא קטן מ- 7, ולכן ההסתברות לזכות היא $15/36 \approx 0.42$. כאשר מהמרים על "קטן מ- 7" גודל הזכייה (אם זוכים) שווה בדיוק לגודל ההפסד (אם מפסידים). המשחק הוא לרעת המהמר, ואם המטרה היא לזכות לאורך זמן בגוגואים, לא כדאי להמר על אפשרות זו.

ב. גם במקרה זה יש אותה ההסתברות לזכות, כי באופן סימטרי יש 15 צירופי קוביות שסכומן גדול מ- 7. גם כאן לא כדאי להמר אם המטרה היא לזכות לאורך זמן.

ג. ב- 6 מתוך 36 הטלות אפשריות, סכום הקוביות שווה ל- 7, ולכן ההסתברות לכך היא $1/6$. אמנם הזכייה גדולה פי שלושה מההפסד, אבל זה לא מפצה על סיכוי הזכייה הנמוך. רווח של "פי ששה" היה מפצה על הסיכון.

ד. המשחק של שמעון הוא לרעת הבנק, כי הסיכוי שייצא 7 הוא $1/6$, ולכן לאורך זמן צפוי שהמהמרים על "בדיוק 7" יזכו כ- $1/6$ מהפעמים. אם בכל פעם ירוויחו פי שבעה ממה שהימרו, לאורך זמן יזכו ביותר גוגואים מאשר המספר של גוגואים שיפסידו.

<u>שאלה 5</u>

במסגרת פרויקט מנהיגות עליכם לראיין מועמד למנכ"ל של חברה. להלן תעתיק הראיון:

מראיין: כמה ילדים יש לך?

מרואיין: 7.

א. מה ההסתברות שיש למרואיין שני בנים?

ב. מה ההסתברות שיש למרואיין שתי בנות?

ג. מה ההסתברות שיש למרואיין בת אחת ובן אחד?

ד. מה ההסתברות שהצעיר/ה מבין ילדי המועמד הוא בן?

ה. מה ההסתברות שהמבוגר/ת מבין הילדים בת והצעיר/ה בן?

הראיון ממשיך כך:

מראיין: האם נוכל לשוחח בטלפון עם בת שלך?

מרואיין: כן, למה לא?

מסתבר שלמרואיין יש לפחות בת אחת. ענו שוב על חמש השאלות הקודמות:

ו. מה ההסתברות שיש לו שני בנים?

ז. מה ההסתברות שיש לו שתי בנות?

ח. מה ההסתברות שיש לו בן אחד ובת אחת?

ט. מה ההסתברות שהצעיר/ה מבין ילדי המועמד הוא בן?

י. מה ההסתברות שהמבוגר/ת מבין הילדים בת והצעיר/ה בן?

<u>פתרונות והערות</u>

א. בהנחה שבנים ובנות מתפלגים באופן שווה ובלתי תלוי, במקרה של שני ילדים במשפחה ארבעת המקרים הבאים הם שווי הסתברות: בן-בן, בן-בת, בת-בן, בת-בת. לכן ההסתברות לשני בנים היא $1/_4$. יתכן ויהיו תלמידים שיטענו שהתשובה היא $1/_3$, כיוון שיראו לנגד עיניהם רק שלוש אפשרויות: שני בנים, שתי בנות, וילד אחד מכל מין. מענה אפשרי לטענה זאת הוא שהאפשרויות אינן שוות הסתברות. "ילד אחד מכל מין" סביר יותר משני בנים, כי יש שני מצבים שונים של "בן ובת" - בן-בת או בת-בן.

ב. ההסתברות שיש למרואיין שתי בנות היא $1/_4$ והשיקולים הם זהים לאלה שפורטו בשאלה הקודמת.

ג. $1/_2$ (ראו הסבר בסעיף א לעיל).

ד. ניתן להסתכל על שאלה זו בשני אופנים: (א) מין הצעיר מבין השניים בלתי תלוי במין המבוגר, ולכן יש שתי אפשרויות שוות הסתברות; (ב) כאמור יש ארבע אפשרויות שוות הסתברות, ובשתיים מהן הצעיר הוא בן.

ה. סעיף זה מהווה הזדמנות נוספת לעמוד על ההבדל בין "בן ובת" (בלי סדר כלשהו ולכן ההסתברות $1/_2$) ו- "המבוגר/ת בת והצעיר/ה בן" (ההסתברות ההסתברות $1/_2$). אם כיתות מתקדמות אפשר להדגיש שאין שום דבר שמייחד את ההפרדה של "מבוגר/ת-צעיר/ה". כל תכונה שהיא בלתי תלויה במין הייתה נותנת תוצאה דומה, למשל "הילד/ה עם העניים הבהירות יותר בת והילד/ה עם העניים הכהות יותר בן". תכונות שיש ביניהן קשר למין לא נותנות תוצאה דומה, למשל, אם נניח שבנים הם בממוצע גבוהים יותר מבנות, הרי שההסתברות של "הגבוה/ה מבין השניים בן והנמוכ/ה בת" גדולה יותר מההסתברות של "הגבוה/ה מבין השניים בת והנמוכ/ה בן", ולכן הסתברויות אלה כבר אינן $1/_4$.

ו. עם קבלת המידע הנוסף, שלמרואיין יש לפחות בת אחת, נוצר מצב של הסתברות מותנית. את כל ההסתברויות המותנות אפשר לחשב על ידי צמצום מרחב האפשרויות שוות ההסתברות ומניית מקרי ה"הצלחה" מבין כל המקרים. מתוך ארבע האפשרויות שוות ההסתברות המקוריות (בן-בן, בן-בת, בת-בן, בת-בת), המידע החדש (יש לפחות בת אחת) פוסל את האפשרות של בן-בן (ההסתברות שלה היא אפס), ונשארות שלוש אפשרויות שוות הסתברות, וההסתברות לכל אחת מהן היא $1/_3$.

ז. $1/_3$.

ח. $2/_3$.

ט. $1/_3$.

י. $1/_3$.

שאלה 6[1]

יסמין ויואב משחקים במשחק מזל לפי הכללים הבאים: בכל סיבוב מטילים קובייה הוגנת. יסמין מנצחת במשחק כאשר מתקבל 6. יואב לעומת זאת צובר נקודה אחת כל פעם <u>שלא</u> מתקבל 6, וזוכה כאשר הוא צובר חמש נקודות.

א. מה מספר ההטלות הגדול ביותר האפשרי במשחק?

ב. במשחק מסוים, הקובייה הוטלה ארבע פעמים והתקבלו המספרים 2, 1, 3, 1. חשבו את ההסתברויות של יסמין ושל יואב לנצח במשחק זה.

ג. יסמין ויואב החליטו לשחק שוב. מה הסיכוי של כל אחד מהשחקנים לנצח?

ד. מה תהייה תשובתכם לשאלה הקודמת אם יואב צריך לצבור ארבע נקודות? ומה אם הוא צריך לצבור שש נקודות?

ה. הציעו גרסה חדשה של המשחק שתהפוך אותו להוגן עד כמה שאפשר. מה הסיכויים של כל אחד מהשחקנים לנצח במשחק שהצעתם?

פתרונות והערות

א. המשחק יסתיים לאחר חמש הטלות לכל היותר.

ב. במצב המתואר יסמין תנצח אם בהטלה הבאה יתקבל 6 (הסתברות $1/6$), ויואב ינצח בכל מקרה אחר (הסתברות $5/6$).

ג. על מנת שיואב ינצח צריך חמש הטלות רצופות בהן מתקבלים מספרים שונים מ- 6. ההסתברות להטלה אחת כזאת היא $5/6$ ולכן ההסתברות שכל חמש ההטלות הראשונות יהיו כאלה היא $(5/6)^5 \approx 0.42$. ניתן לחשב את ההסתברות שיסמין תנצח בדרך ישירה או בדרך עקיפה. הדרך הישירה כרוכה בחישוב ארוך: ההסתברות שהיא תנצח בהטלה הראשונה היא $1/6$, ההסתברות שלא תנצח בראשונה אבל תנצח בשנייה היא $5/6 \times 1/6$, ההסתברות שלא תנצח בשתי ההטלות הראשונות אבל תנצח בשלישית היא $(5/6)^2 \times 1/6$, וכן הלאה עד ההסתברות לנצח בהטלה החמישית. לבסוף, יש לחבר את ההסתברויות של חמשת המאורעות הזרים האלה. הדרך העקיפה לחישוב זה היא כמעט מידית: אם יואב לא מנצח, הרי שיסמין מנצחת (אין במשחק הזה מצב של תיקו), ולכן ההסתברות שיסמין תנצח משלימה ל- 1 את ההסתברות שיואב ינצח, כלומר ההסתברות של יסמין לנצח היא $1 - 0.42 = 0.58$.

[1] בהשראת התרגיל הפותח בחוברת "פרקי מתמטיקה: הסתברות" – מהדורה ניסויית, מאת נ. הדס, א. הרכבי ורינה מירסקי, הוצאת מכון ויצמן למדע, 1991.

ד. אם יואב צריך לצבור רק ארבע נקודות, ההסתברות שינצח היא $0.48 \approx {}^4({}^5\!/_6)$. אם הוא צריך לצבור שש נקודות, ההסתברות שינצח היא $0.33 \approx {}^6({}^5\!/_6)$. כלומר, אם יואב צריך לצבור רק ארבע נקודות, המשחק יותר הוגן אבל עדיין ליסמין יש סיכוי גדול יותר לנצח.

ה. כאן יש מקום ליצירתיות. אם משנים רק את מספר הנקודות שיואב צריך לצבור, הרי ש-ארבע נקודות נותן משחק די הוגן - 48% סיכוי ליואב ו- 52% ליסמין. אם יואב צריך לצבור רק שלוש נקודות, סיכויו לנצח גדלים לכמעט 58%. אפשר להציע שינויים לכללי המשחק כך שיהפכו אותו להוגן. למשל, להתחיל את המשחק בהטלת מטבע שלפיה יוחלט איזה שחקן צובר נקודות ואיזה שחקן מייחל ל- 6, או לחילופין לשחק פעם עם צבירה של ארבע נקודות ופעם אם צבירה של שלוש.

שאלה 7

לסביבון הוגן יש סיכוי שווה לעצור על כל אחד מצדדיו: **נ**, **ג**, **ה**, **פ**. מסובבים את הסביבון פעמיים. חשבו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:

א. בשתי הפעמים יתקבל **נ**.

ב. בפעם הראשונה יתקבל **נ** ובפעם השנייה **ג**.

ג. באחת הפעמים יתקבל **נ** ובאחת הפעמים **ג**.

ד. תתקבל אותה התוצאה בשתי הפעמים.

ה. תתקבלנה תוצאות שונות בשתי הפעמים.

פתרונות והערות

א. $(1/4)^2 = 0.0625$.

ב. $(1/4)^2 = 0.0625$. תוצאה זו עשויה להפתיע תלמידים אם משווים אותה לתוצאה של הסעיף הקודם.

ג. $2 \times (1/4)^2 = 0.125$. זאת כיוון שיש לקחת בחשבון **נ-ג** וגם **ג-נ**.

ד. $1/4$. אפשר למנות ארבע תוצאות כאלה (**נ-נ**, **ג- ג**, **ה-ה**, **פ-פ**) מתוך שש עשרה אפשרויות שוות הסתברות. טיעון אחר: לא משנה מה מתקבל בפעם הראשונה, ההסתברות שבפעם השנייה יתקבל אותו הדבר היא $1/4$.

ה. דרך אחת לחשב את ההסתברות היא למנות בכמה מתוך שש עשרה התוצאות שוות ההסתברות, הסיבוב השני מניב תוצאה שונה מהראשון. התשובה היא 12 מתוך 16, וההסתברות היא $3/4$. דרך יעילה יותר משתמשת בעקרון ההשלמה. אם ההסתברות להטלות זהות היא $1/4$ (סעיף ד'), ההסתברות להטלות שונות היא $3/4$. שיקול אחר: התוצאה השנייה בלתי תלויה בראשונה. לכל תוצאה ראשונה (**נ**/**ג**/**ה**/**פ**), לתוצאה השנייה יש הסתברות $3/4$ להיות שונה ממנה.

<u>שאלה 8</u>

בכיתה 20 בנות ו- 10 בנים. בוחרים באקראי תלמיד או תלמידה לתפקיד יושב ראש וועד הכיתה ותלמיד או תלמידה למועצת התלמידים.

א. מה ההסתברות שייבחר בן לתפקיד הראשון?

ב. מה ההסתברות שייבחר אותו/ה תלמיד/ה לשני התפקידים?

ג. מה ההסתברות שתיבחר בת לשני התפקידים?

ד. מה ההסתברות שייבחר בן לשני התפקידים?

ה. מה ההסתברות שייבחר בן לתפקיד יושב ראש וועד כיתה ובת למועצת תלמידים?

ו. מה ההסתברות שייבחרו בן אחד ובת אחת.

<u>פתרונות והערות</u>

א. ההסתברות היא השכיחות היחסית של הבנים בכיתה: $^1/_3$.

ב. ניסוח השאלה לא פוסל אפשרות כזאת, כלומר אנחנו במצב שמכונה לעיתים "עם החזרות". הכוונה היא לתת לתלמידים הזדמנות לעמוד על ההבדל בין "עם/בלי החזרות" במגוון של מצבים. ההסתברות שהגרלה שנייה תניב אותה תוצאה כמו הראשונה היא $^1/_{30}$.

ג. $0.444 \approx (\frac{2}{3})^2$.

ד. $0.111 \approx (\frac{1}{3})^2$.

ה. $0.222 \approx \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$.

ו. ההסתברות היא פי שניים ההסתברות בסעיף הקודם, כלומר $0.444 \approx 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$, כי יש שתי אפשרויות שוות הסתברות: בן-בת או בת-בן. יש לנו הזדמנות לבדוק את עצמנו: המאורעות המתוארים בסעיפים ג, ד, ו הם זרים ומשלימים, לכן שסכום ההסתברויות של שלושתם הוא אחייב להיות 1 (0.999 בגלל טעויות עיגול).

<u>שאלה 9 (המשך לשאלה הקודמת)</u>

(שאלת המשך) הכיתה החליטה לא לאפשר לתלמיד אחד למלא את שני התפקידים, אבל התלבטה כיצד לבצע את הבחירה האקראית.

א. הציעו כיצד כדאי לערוך את ההגרלה כך שתהייה הוגנת, כלומר שלכל תלמיד/ה יהיה אותו סיכוי להיבחר לכל אחד מהתפקידים, אבל לא ייבחר אותו תלמיד/ה לשני התפקידים.

ב. מה ההסתברות שתיבחר בת לשני התפקידים?

ג. מה ההסתברות שייבחר בן לשני התפקידים?

ד. מה ההסתברות שייבחר בן לתפקיד הראשון ובת לתפקיד השני?

ה. מה ההסתברות שייבחר בן לאחד התפקידים ובת לאחד התפקידים?

<u>פתרונות והערות</u>

א. יש כאן מקום ליצירתיות, אבל יש לשים לב שלא כל שיטה שיש בא אקראיות מבטיחה סיכוי שווה לכל התלמידים. שיטה אפשרית: להכין פתק לכל תוצאה אפשרית של ההגרלה (מי לתפקיד הראשון ומי לתפקיד השני), ולבחור באקראי פתק אחד. יהיו $30 \cdot 29 = 870$ פתקים כאלה. שיטה זאת אינה יעילה. שיטה אחרת היא לערוך הגרלה מבין כל תלמידי הכיתה על תפקיד הראשון (למשל לבחור פתק אחד מתוך 30), ואח"כ להגריל מבין הפתקים הנותרים נציג לתפקיד השני. אפשר לקיים דיון על השאלה כיצד יודעים ששתי השיטות "שקולות".

ב. $\frac{20}{30} \times \frac{19}{29} \approx 0.437$. אנחנו רואים שההסתברות דומה מאד לזו בשאלה "עם החזרות" (0.444), אבל בכל זאת מעט יותר נמוכה, כי אחרי שנבחרה בת לתפקיד אחד, ההסתברות לבחירת בת אחרת (כאשר הראשונה כבר אינה עומדת לבחירה) קטנה מ- $\frac{20}{30}$ ל- $\frac{19}{29}$).

ג. $\frac{10}{30} \times \frac{9}{29} \approx 0.103$. גם במקרה זה, הדומה למקרה הקודם, ההסתברות מעט יותר קטנה מהמצב של "עם החזרות" (0.111).

ד. $\frac{10}{30} \times \frac{20}{29} \approx 0.230$. גם כאן ההסתברות דומה למצב של "עם החזרות" אבל מעט יותר גדולה. הסיבה: אחרי שנבחר בן לתפקיד אחד, ההסתברות שתיבחר בת לתפקיד השני עולה במקצת ($\frac{20}{29}$ במקום $\frac{20}{30}$).

ה. $2 \times \frac{10}{30} \times \frac{20}{29} \approx 0.460$. גם הפעם ניתן לבדוק כי סכום ההסתברויות בסעיפים ב, ג, ה הוא 1.

<u>שאלה 10</u>

על קוביית משחק מופיע המספר 1 על פאה אחת, 2 על שתי פאות ו- 3 על שלוש פאות.

א. מה ההסתברות שבהטלת קובייה יתקבל המספר 1? המספר 2? המספר 3?

ב. מטילים את הקובייה פעמיים. מה האפשרויות השונות לסכום שתי ההטלות ומה ההסתברויות שלהם?

ג. מה ההסתברות שסכום הקוביות יהיה 4 אם ידוע שההפרש בין שתי הקוביות זוגי?

<u>פתרונות והערות</u>

מטרת שאלה זו היא לתרגל מיצוי של מרחב אפשרויות ומניית תוצאות בסיטואציה פחות מוכרת וצפויה.

א. ההסתברות שבהטלת קובייה יתקבל 1 היא ${}^{1}/_{6}$. ההסתברות שיתקבל המספר 2 היא ${}^{2}/_{6} = {}^{1}/_{3}$. ההסתברות שיתקבל המספר 3 היא ${}^{1}/_{2}$. סכום ההסתברויות הוא 1.

ב. הטבלה הבאה מתארת את סכום הקוביות בכל אחת מ- 36 התוצאות האפשריות (שהן שוות ההסתברות) של הטלת שתי קוביות.

	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

את ההסתברויות נצמא על ידי מניית מספר המופעים של כל תוצאה בטבלה.

ההסתברות לסכום 2 היא $\frac{1}{36}$

ההסתברות לסכום 3 היא $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

ההסתברות לסכום 4 היא $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

ההסתברות לסכום 5 היא $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

ההסתברות לסכום 6 היא $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

ג. תחילה נשים לב שהפרש המספרים שעל שתי הקוביות הוא זוגי באותם המקרים בהם הסכום הקוביות זוגי (שני המספרים זוגיים או שניהם אי-זוגיים). מרחב האפשרויות מצטמצם מ- 36 ל- 20 תוצאות. ב- 10, מתוך 20 התוצאות הזוגיות, סכום הקוביות הוא 4, ולכן ההסתברות המותנית היא $\frac{1}{2}$.

<u>שאלה 11</u>

בסדרה של קוביות משחק מופיע המספר 1 על שתי פאות, 2 על פאה אחת, 3 על שתי פאות ו- 4 על פאה אחת. מטילים שתי קוביות כאלה.

א. מה האפשרויות השונות לסכום המספרים שמופיעים על שתי הקוביות?

ב. חשבו את ההסתברות לכל אחד מהסכומים האפשריים.

ג. מה ההסתברות שסכום מספרים המופיעים על הקוביות הוא 6, אם ידוע שההפרש בין המספרים הוא זוגי?

<u>פתרונות והערות</u>

א. הטבלה הבאה מתארת את סכום הקוביות בכל אחת מ- 36 התוצאות האפשריות של הטלת שתי קוביות.

	1	1	2	3	3	4
1	2	2	3	4	4	5
1	2	2	3	4	4	5
2	3	3	4	5	5	6
3	4	4	5	6	6	7
3	4	4	5	6	6	7
4	5	5	6	7	7	8

ב. את ההסתברויות נצמא על ידי מניית מספר המופעים של כל תוצאה בטבלה.

ההסתברות לסכום 2 היא $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$

ההסתברות לסכום 3 היא $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$

ההסתברות לסכום 4 היא $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$

ההסתברות לסכום 5 היא $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$

ההסתברות לסכום 6 היא $\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$

ההסתברות לסכום 7 היא $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$

ההסתברות לסכום 8 היא $\frac{1}{36}$

ג. תחילה נשים לב שהפרש המספרים שעל שתי הקוביות הוא זוגי באותם המקרים בהם הסכום הקוביות זוגי (שני המספרים זוגיים או שניהם אי-זוגיים). מרחב האפשרויות מצטמצם מ- 36 ל- 20 תוצאות. ב- 6 מתוך 20 התוצאות האלה, סכום הקוביות הוא 6, לכן ההסתברות המותנית היא $\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$.

<u>שאלה 12</u>

מטילים מטבע הוגנת שלוש פעמים. נסמן את התוצאות האפשריות לכל הטלה ב- H וב- T.

א. מה ההסתברות שתתקבל הסדרה HHT (H בשתי ההטלות הראשונות ו- T בהטלה השלישית)?

ב. מה ההסתברות שתתקבל סדרה ובה בדיוק בשתיים מתוך 3 ההטלות יתקבל H?

ג. הסבירו מדוע התשובות לסעיפים א ו- ב שונות.

<u>פתרונות והערות</u>

א. $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

ב. יש שלוש אפשרויות למאורע זה: HHT, HTH, THH. לכל אחד יש הסתברות $\frac{1}{8}$ ולכן ההסתברות היא $\frac{3}{8}$.

ג. בשאלה בסעיף א סדר ההטלות משנה (סדרת הטלות). שאלה ב מתארת מאורע שבו הסדר לא משנה, ולכן יש יותר תוצאות מתאימות, וההסתברות גבוהה יותר.

<u>שאלה 13</u>

במשחק לוח "מקס וסע" כל שחקן או שחקנית מטיל, לפי התור, שתי קוביות. את כלי המשחק מקדמים בהתאם לתוצאה <u>הגדולה</u> מבין שתי הקוביות. למשל, אם בהטלה התקבל 3 ו- 4, מתקדמים ארבעה צעדים. אם התוצאות זהות, מתקדמים כמספר הצעדים של התוצאה.

א. מה ההסתברות להתקדם צעד אחד בתור מסוים?

ב. מה ההסתברות להתקדם שני צעדים בתור מסוים?

ג. מה ההסתברות להתקדם 3 צעדים?

ד. מה ההסתברות להתקדם 4 צעדים?

ה. מה ההסתברות להתקדם 5 צעדים?

ו. מה ההסתברות להתקדם 6 צעדים?

ז. ערן צריך להתקדם <u>לפחות</u> 3 צעדים על מנת לנצח. מה ההסתברות שזה יקרה?

ח. יעל צריכה להתקדם <u>לפחות</u> 4 צעדים על מנת לנצח. מה ההסתברות שזה יקרה?

ט. מה ההסתברות להתקדם לפחות צעד אחד?

<u>פתרונות והערות</u>

את התוצאות נוח לרכז בעזרת טבלה בה 36 התוצאות האפשריות, בה בכל תא בטבלה מצוין המקסימום של שתי הקוביות.

מקסימום	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

ניתן לענות על השאלות על ידי התבוננות בטבלה

א. ההסתברות להתקדם רק צעד אחד בתור מסוים היא: $\frac{1}{6}$.

ב. ההסתברות להתקדם שני צעדים היא: $\frac{1}{12} = \frac{3}{36}$

ג. ההסתברות להתקדם 3 צעדים: $\frac{5}{36}$

ד. ההסתברות להתקדם 4 צעדים: $\frac{7}{36}$

ה. ההסתברות להתקדם 5 צעדים: $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$

ו. ההסתברות להתקדם 6 צעדים: $\frac{11}{36}$

ז. ההסתברות להתקדם לפחות 3 צעדים: $\frac{8}{9} = \frac{32}{36}$

ח. ההסתברות להתקדם לפחות 4 צעדים: $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$

ט. ההסתברות שנתקדם לפחות צעד אחד היא 1.

<u>שאלה 14 (המשך לשאלה הקודמת)</u>

במשחק לוח "מקס וסע" כל שחקן או שחקנית מטיל, לפי התור, שתי קוביות. את כלי המשחק מקדמים בהתאם לתוצאה <u>הגדולה</u> מבין שתי הקוביות. למשל, אם בהטלה התקבל 3 ו- 4, מתקדמים ארבעה צעדים. אם התוצאות זהות, מתקדמים כמספר הצעדים של התוצאה.

א. מה ההסתברות שקובייה בודדת תראה 6? מה ההסתברות שהמקסימום של שתי קוביות יהיה 6?

ב. מה ההסתברות שקובייה בודדת תראה <u>לפחות</u> 5? מה ההסתברות שהמקסימום של שתי קוביות יהיה <u>לפחות</u> 5?

ג. מה ההסתברות שקובייה בודדת תראה <u>לפחות</u> 4? מה ההסתברות שהמקסימום של שתי קוביות יהיה <u>לפחות</u> 4?

ד. עומר התבוננה בתשובות לזוגות של השאלות הקודמות וחושבת שהיא רואה חוקיות מסוימת: בכל השאלות שבסעיפים הקודמים, ההסתברות בחלק השני בשאלה היא כמעט פי שניים מההסתברות בסעיף הראשון. האם עומר צודקת? אם כן - נסו להסביר מדוע. אם עומר טועה, הראו דוגמה נגדית.

<u>פתרונות והערות</u>

א. ההסתברות שקובייה בודדת תראה 6 היא $\frac{1}{6}$. את ההסתברות שהמקסימום של שתי קוביות יהיה 6 נברר בטבלה. ב- 11 מתוך 36 התוצאות שוות ההסתברות האפשריות המקסימום הוא 6, וההסתברות היא $\frac{11}{36}$.

ב. קובייה בודדת מראה לפחות 5 אם היא מראה 5 או 6. ההסתברות לכך היא $\frac{1}{3}$. ב- 20 מתוך 36 התוצאות שוות ההסתברות האפשריות המקסימום הוא לפחות 5 (כלומר 5 או 6), וההסתברות היא $\frac{5}{9}$.

ג. קובייה בודדת מראה לפחות 5 אם היא מראה 4, 5 או 6. ההסתברות לכך היא $\frac{1}{2}$. ב- 27 מתוך 36 התוצאות שוות ההסתברות האפשריות המקסימום הוא לפחות 4 (כלומר 4, 5 או 6), וההסתברות היא $\frac{3}{4}$.

ד. עומר צודקת. $\frac{11}{36}$ קטן במעט מפעמיים $\frac{1}{6}$ $(\frac{12}{36})$, $\frac{5}{9}$ קטן במעט מפעמיים $\frac{1}{3}$ $(\frac{6}{9})$, ו- $\frac{3}{4}$ קטן במעט מפעמיים $\frac{1}{2}$ (1). ניתן להסביר חוקיות זו בכמה אופנים.

i. נדון באפשרות הראשונה, שמקסימום שתי הקוביות הוא 6. כדי שזה יקרה, צריך שהראשונה תראה 6 (הסתברות $\frac{1}{6}$) או שהשנייה תראה 6 (הסתברות $\frac{1}{6}$). אם מאורעות אלו היו זרים, הינו מחברים את ההסתברויות ומקבלים $\frac{2}{6}$. אבל מאורעות

אלה "כמעט זרים" – האפשרות של $(6,6)$ משותפת לשניהם, ולכן ההסתברות מעט קטנה יותר מסכום ההסתברויות. באופן דומה נראה שהמאורעות "המספר הראשון לפחות 5" ו- "המספר השני הוא לפחות 5" גם הם "כמעט זרים", וכן הלאה.

ii. את אותה התופעה ניתן לראות גיאומטרית בטבלה. המאורע "קובייה ראשונה 6" מיוצג בשורה התחתונה של הטבלה, והמאורע "קובייה שנייה 6" מיוצג בעמודה הימנית של הטבלה). התוצאה $(6,6)$ משותפת לשורה ולעמודה, ולכן מספר התוצאות הוא 11 ולא 12. באופן דומה, המאורע "קובייה ראשונה לפחות 5" מיוצג בשתי השורות התחתונות של הטבלה, והמאורע קובייה שנייה לפחות 5" מיוצג בשתי העמודות הימניות. המשותף למאורעות "כמעט זרים" אלה הוא ריבוע 2×2 בפינה הימנית התחתונה בטבלה.

iii. הסבר אלגברי לתופעה מובא בשאלה הבאה.

<u>שאלה 15</u>

קופץ לרוחק משתתף בתחרות אתלטיקה קלה.

א. על מנת לעלות לשלב הבא הוא צריך לקפוץ לפחות 5.50 מטרים. **<u>יש לרשותו שני ניסיונות</u>**. הוא כבר קפץ מרחק כזה בעבר, ואף יודע שבכל קפיצה שלו יש הסתברות של 50% שיצליח. מה ההסתברות שיעלה לשלב הבא, אם נניח שתוצאת כל קפיצה בלתי תלויה בתוצאות קפיצות אחרות?

ב. הקופץ עלה שלב! בשלב הבא עליו לקפוץ לפחות 5.75 מטרים. שוב יש לרשותו שני ניסיונות. ההסתברות שיקפוץ לפחות 5.75 מטרים בקפיצה בודדת היא 30%. מה ההסתברות שיעבור גם את השלב הזה?

ג. נסמן ב- x את ההסתברות שקופץ לרוחק יצליח בקפיצה בודדת. מה ההסתברות שיצליח לפחות באחת משתי קפיצות בלתי תלויות?

<u>פתרונות והערות</u>

א. נוח יותר לעבוד עם מאורע משלים. על מנת <u>לא</u> לעלות לשלב הבא הקופץ צריך להיכשל בשתי קפיצות. ההסתברות להיכשל בכל אחת היא $\frac{1}{2}$, ולכן ההסתברות להיכשל בשתיהן היא $\frac{1}{4}$ (נתון שהמאורעות בלתי תלויים). אם כן, ההסתברות לעלות לשלב הבא היא $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

ב. ההסתברות להיכשל בשני הניסיונות היא $70\% \times 70\% = 49\%$. ההסתברות להצליח לפחות באחת משתי הקפיצות היא $100\% - 49\% = 51\%$.

ג. ההסתברות להיכשל בקפיצה בודדת היא $1-x$ ולכן ההסתברות להיכשל בשתי הקפיצות הבלתי תלויות היא $(1-x)^2$. המאורע של הצלחה בלפחות אחת הקפיצות היא המאורע המשלים, וההסתברות שלו היא $1-(1-x)^2 = 2x - x^2$.
כאן יש מענה אלגברי לשאלה קודמת שבה נטען כך: אם ההסתברות של קובייה בודדת להראות לפחות N היא x, אז ההסתברות שהמספר הגדול מבין שתי קוביות יהיה לפחות N היא "מעט פחות מפעמיים x ".

שאלה 16

בוחרים באקראי מספר בין 1 ל- 120.

א. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 (יהיה זוגי)?

ב. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 3?

ג. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4?

ד. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 6?

ה. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 וגם יתחלק ב- 3?

ו. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 או יתחלק ב- 3?

ז. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 3 וגם יתחלק ב- 6?

ח. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 3 או יתחלק ב- 6?

ט. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4 וגם יתחלק ב- 6?

י. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4 או יתחלק ב- 6?

כ. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4 אם ידוע שהוא מתחלק ב- 2?

ל. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 אם ידוע שהוא מתחלק ב- 3?

מ. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 4 אם ידוע שהוא מתחלק ב- 6?

נ. מה ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 3 אם ידוע שהוא מתחלק ב- 6?

פתרונות והערות

על סדרת שאלות זו אפשר לענות בדרכים רבות. ברמה הבסיסית ביותר יש כאן שאלות של שכיחות יחסית. לדוגמה (סעיף ב'): מבין המספרים הטבעיים עד 120 יש 40 מספרים שמתחלקים ב- 3, ולכן ההסתברות שמספר שנבחר באקראי יתחלק ב- 3 היא $\frac{1}{3}=\frac{40}{120}$, אבל אפשר לענות על שאלה זו בעזרת שיקולים שונים, למשל לשים לב שכל מספר שלישי מתחלק ב- 3, או באופן יותר מדויק: תכונת ההתחלקות ב- 3 היא מחזורית במחזור של שלוש (לא-לא-כן, לא-לא-כן), ובמספרים הטבעיים עד 120 יש מספר שלם של מחזורים כאלה.

חלק מהשאלות מזמנות גם עיסוק במושגים של אי תלות מאורעות. למשל סעיף ו': דרך סטנדרטית לענות על שאלה זו היא באמצעות שכיחות יחסית – 20 מבין 120 המספרים מתחלקים ב- 2 וב- 3. אבל אפשר לטעון שתכונות ההתחלקות ב- 2 וב- 3 הן בלתי תלויות כיוון שהמספרים 2 ו- 3 זרים. כלומר, ידיעה שמספר מתחלק ב- 2 לא משפיעה על סיכוייו להתחלק ב-3, ולהיפך. על פי שיקול זה, הסתברות היא $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$.

דברים דומים אמורים גם בשאלות של הסתברות מותנית. למשל סעיף מ'. שיטה סטנדרטית לענות על השאלה היא לצמצם את ההסתכלות במספרים שמתחלקים ב- 6 ולשאול מה השכיחות היחסית של המספרים מביניהם שמתחלקים ב- 4. דרך נוספת קושרת בין מושג האי-תלות ההסתברותית לזרות האלגברית. הידיעה שמספר מתחלק ב- 6 אומרת שהוא מתחלק ב- 2 וב- 3. ההתחלקות ב- 3 בלתי תלויה בהתחלקות ב- 4 (3 ו- 4 מספרים זרים), כך שהשאלה מצטמצמת לשאלת סיכויי ההתחלקות ב- 4 של מספרים המתחלקים ב- 2. כעת התשובה ברורה – חצי מהמספרים המתחלקים ב- 2 מתחלקים ב- 4.

תלמידים רבים עשויים לבלבל בין תלות הסתברותית ותלות סיבתית. מומלץ לנצל שאלות אלה לדון במשמעויות של אי-תלות כאשר היא רק הסתברותית ולא סיבתית, ולקשור נושא זה לנושאים אלגבריים בסיסיים כגון פירוק לגורמים ראשוניים, זרות, כפולה משותפת קטנה ביותר וכיוצא באלה.

א. ההסתברות שהמספר שנבחר יתחלק ב- 2 היא $\frac{1}{2} = \frac{60}{120}$. ניתן גם לטעון שכל מספר שני מתחלק ב- 2. על מנת לדייק בטיעון יש לשים לב ש- 120 עצמו הוא מספר זוגי. ההסתברות לבחור מספר שמתחלק ב- 2 מבין הטבעיים עד 120 היא מעט פחות מ- $\frac{1}{2}$.

ב. $\frac{1}{3} = \frac{40}{120}$.

ג. $\frac{1}{4} = \frac{30}{120}$.

ד. $\frac{1}{6} = \frac{20}{120}$.

ה. המספרים שמתחלקים ב- 2 וב- 3 הם בדיוק אלה שמתחלקים ב- 6, וכבר ראינו שההסתברות לכך היא $\frac{1}{6}$. דרך אחרת להסתכל על זה: המאורעות "מתחלק ב- 2" ו- "מתחלק ב- 3" הם בלתי תלויים כי 2 ו- 3 זרים. כלומר, היות מספר זוגי לא אומר לנו דבר על הסיכוי שלו להתחלק ב- 3, ולהיפך. חצי מהמספרים שמתחלקים ב- 3 הם זוגיים, וחצי אי-זוגיים. לכן ההסתברות להתחלק ב- 2 וב- 3 היא מכפלת ההסתברויות.

ו. המאורעות "מתחלק ב- 2" ו- "מתחלק ב- 3" אינם זרים (למשל 6 משותף לשניהם), ולכן לא נוכל לחבר הסתברויות. נוח לעבוד עם המאורע המשלים. ההסתברות <u>לא</u> להתחלק ב- 2 היא $\frac{1}{2}$ וההסתברות <u>לא</u> להתחלק ב- 3 היא $\frac{2}{3}$. ההסתברות לא להתחלק ב- 2 וגם לא להתחלק ב- 3 היא מכפלת ההסתברויות (כי המאורעות בלתי תלויים), כלומר $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$. להתחלק ב- 2 או ב- 3 הוא המאורע המשלים, שהסתברותו $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} - 1$. דרך אחרת

לענות על שאלה זו היא לשים לב שהתחלקות ב- 2 וב- 2 היא מחזורית במחזור 6. מבין המספרים 1 עד 6 יש ארבעה מספרים שמתחלקים ב- 2 או ב- 3 (2, 3, 4, 6), ודפוס זה חוזר על עצמו מחזורית. כלומר, מתוך כל רצף של ששה מספרים עוקבים, שני שליש מהם מתחלקים ב- 2 או ב- 3.

ז. המאורעות "מתחלק ב- 3" ו- מתחלק ב- 6" תלויים: כל מספר שמתחלק ב- 6 מתחלק ב- 3, ומחצית מהמספרים שמתחלקים ב- 3 מתחלקים ב- 6. לכן, המאורע "מתחלק ב- 3 וגם מתחלק ב- 6" זהה לחלוטין למאורע "מתחלק ב- 6", והסתברותו $\frac{1}{6}$.

ח. כאמור המאורעות "מתחלק ב- 3" ו- מתחלק ב- 6" אינם זרים: המאורע "מתחלק ב- 6 מוכל במאורע "מתחלק ב- 3" - כל מספר שמתחלק ב- 6 מתחלק גם ב- 3, וההסתברות שמספר יתחלק ב- 6 או ב- 3 היא $\frac{1}{6}$.

ט. המאורעות "מתחלק ב- 4" ו- מתחלק ב- 6" תלויים, אם כי לא כל מספר שמתחלק ב- 6 מתחלק ב- 4, ולא כל מספר שמתחלק ב- 4 מתחלק ב- 6. המספרים המתחלקים ב- 6 וב- 4 הם המספרים המתחלקים ב- 12 (הכפולה המשותפת הקטנה ביותר), וההסתברות לכך היא $\frac{1}{12}$.

י. כאמור, המאורעות "מתחלק ב- 4" ו- מתחלק ב- 6" אינם זרים, אבל אף אחד מהמאורעות אינו מוכל בשני – יש מספרים שמתחלקים ב- 6 ולא ב- 4, ויש מספרים שמתחלקים ב- 4 ולא ב- 6. נמקד את ההסתכלות שלנו במספרים מ- 1 עד 12 (הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של 4 ו- 6), שכן התחלקות ב-4 והתחלקות ב- 6 הן מחזוריות במחזור 12. מבין שנים עשר המספרים האלה יש שניים שמתחלקים ב- 6 (6 ו- 12) ושלושה מספרים שמתחלקים ב- 4 (4, 8, ו- 12), אבל יחד יש רק ארבעה כי 12 מתחלק בשניהם. אם כן, $\frac{4}{12}$ מהמספרים מתחלקים ב- 4 או ב- 6, ולכן ההסתברות לבחור מספר כזה היא $\frac{1}{3}$.

כ. מחצית המספרים המתחלקים ב- 2 מתחלקים גם ב- 4, ולכן ההסתברות המותנית היא $\frac{1}{2}$.

ל. המאורעות "מתחלק ב- 2" ו- "מתחלק ב- 3" בלתי תלויים, ולכן ההסתברות שיתחלק ב- 2 היא $\frac{1}{2}$ בלי קשר להתחלקות ב- 3. במילים אחרות – הידיעה שמספר מתחלק ב- 3 לא משפיעה על סיכוייו להתחלק ב- 2. זאת ניתן לראות גם על ידי צמצום מרחב האפשרויות. ארבעים מהמספרים הטבעיים עד 120 מתחלקים ב- 3. מתוכם עשרים מספרים מתחלקים ב- 2 (אלה שמתחלקים ב- 6), והשכיחות היחסית שלהם היא $\frac{1}{2}$.

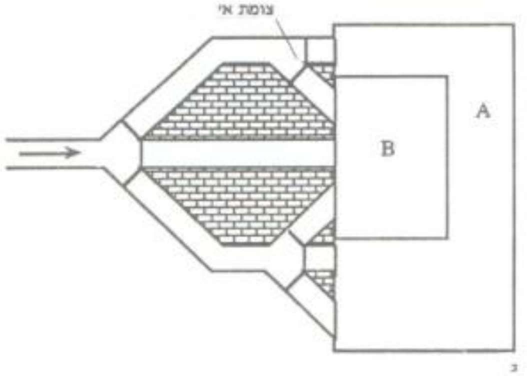
מ. תחילה נתבונן בשאלה באופן אלגברי. הידיעה שמספר מתחלק ב- 6 מבטיחה שהוא מתחלק ב- 2 וב- 3. עובדת התחלקותו ב- 3 לא רלוונטית לסיכויי התחלקותו ב- 4, אבל עובדת התחלקותו ב- 2 משפיעה על סיכויי התחלקותו ב- 4. חצי מהמספרים המתחלקים ב- 2 מתחלקים ב- 4 כך שההסתברות המותנית היא $\frac{1}{2}$. כעת נענה על ידי צמצום מרחב

ההסתברות. יש עשרים מספרים המתחלקים ב- 6, ומתוכם עשרה מספרים מתחלקים גם ב- 4 (הכפולות של 12 שהיא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של 6 ו- 4).
השכיחות היחסית שלהם היא $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.

נ. כל מספר שמתחלק ב- 6 מתחלק ב- 3, לכן ההסתברות היא 1.

שאלה 17[2]

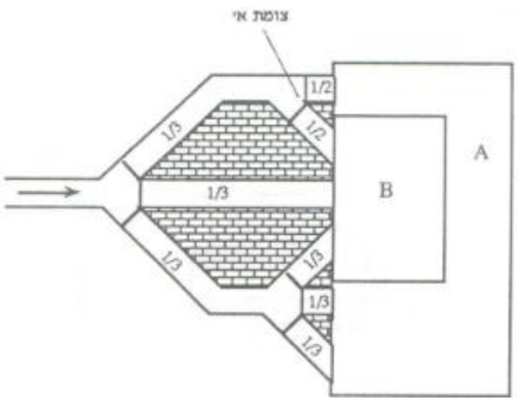
לפני שנים רבות חי מלך ולו בת יפיפייה. המלך הועיד את בתו לנסיך הממלכה השכנה, אך בת המלך אהבה עלם משפוטי העם. המלך החליט להשאיר לגורל ולחוכמתה של בתו את ההחלטה וקבע כדלהלן: אם העלם יגיע למקום הימצאותה של הנסיכה הוא יזכה בה, אחרת ייטרף על ידי נמר. לשם כך המלך הציג לבתו את המפה של הבניין הבא (ראו תרשים למטה) ואמרה לה כי עליה להחליט האם לעמוד באולם A או באולם B. לאחר החלטתה, יועמד נמר באולם השני. העלם יעבור במבוך, אם יגיע לנסיכה, יזכה בה, אחרת...



היכן כדאי לנסיכה לעמוד?

פתרונות והערות

בעיה זו ממחישה את השימוש במודל העץ כאשר מודל זה מומחש על בחירת מסלולים שווי הסתברות. להלן המפה של הבניין ובה מסומנות כל ההסתברויות:



ההסתברות להגיע לאולם A היא: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{14}{36}$.

ההסתברות להגיע לאולם B היא: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{22}{36}$. לכן כדאי לנסיכה לבחור לעמוד באולם B.

---

[2] תרגיל 7 (עמוד 45) בחוברת "פרקי מתמטיקה: הסתברות" – מהדורה ניסויית, מאת נ. הדס, א. הרכבי ורינה מירסקי, הוצאת מכון ויצמן למדע, 1991.

<u>שאלה 18</u>[3]

רותי משחקת פעמיים במשחר מזל. ידוע שההסתברות לזכות בשני המשחקים היא 0.0144.

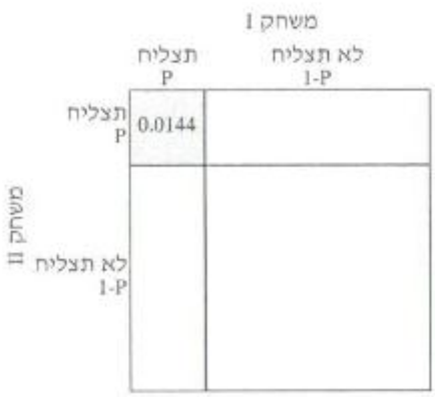
א. מה ההסתברות שרותי תזכה במשחק בודד?

ב. מה ההסתברות שהיא תזכה <u>בדיוק</u> במשחק אחד?

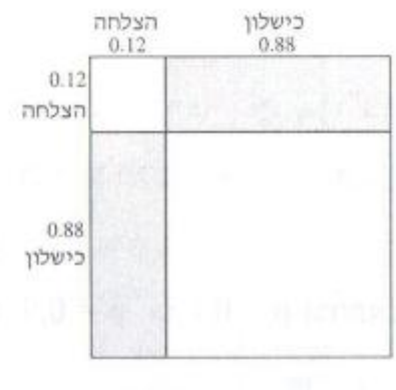
ג. מה ההסתברות שהיא תזכה <u>לפחות</u> במשחק אחד?

<u>פתרונות והערות</u>

א. הסתברות לזכייה בשני משחקים היא מכפלת ההסתברויות לזכות במשחק בודד, כלומר, $x^2 = 0.0144$, לכן $x = 0.12$. ניתן לייצג זאת בעזרת מודל השטח, כך:



ב. ניתן לבנות את מודל השטח על פי ההסתברות להצלחה (זכיה) או כישלון (אי-הצלחה), כך:



לזכות בדיוק במשחק אחד פירושו לזכות במשחק הראשון ולא זכות בשני, או לא לזכות בראשון ולזכות בשני. במודל השטח זה מיוצג על ידי המלבנים המושחרים, והחישוב הוא: $0.12 \times 0.88 + 0.88 \times 0.12 = 2 \times 0.12 \times 0.88 = 0.2112$.

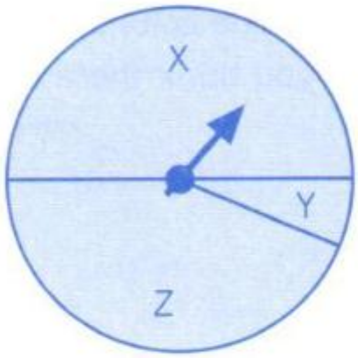
---

[3] תרגיל 15 (עמוד 78) מתוך החוברת "הסתברות – לתלמידי 3-4 יחידות לימוד" (מהדורת עיצוב), מאת נ. הדס וט. זסלסבקי, הוצאת מכון ויצמן למדע 1996.

ג. לזכות במשחק אחד לפחות כולל את האפשרות של לזכות במשחק אחד בדיוק או לזכות בשני משחקים גם יחד. כלומר, ניתן לחבר את התוצאות של שני הסעיפים הקודמים ומתקבלת ההסתברות $0.2112 + 0.0144 = 0.2256$. במודל השטח, זה מיוצג על ידי חיבור שלושת השטחים (שני המלבנים והריבוע הקטן). את החישוב ניתן גם לבצע על ידי חיסור המאורע המשלים כך: $1 - 0.88^2 = 0.2256$.

שאלה 19[4]

מסובבים את המחוג שבשעון זה פעמיים:



לאיזה מאורע יש הסתברות גדולה יותר:

- המחוג נעצר באזור X בפעם הראשונה ואינו נעצר באזור X בשפעם השנייה
- המחוג נעצר באזור Y בפעם הראשונה ואינו נעצר באזור Y בפעם השנייה.

[4] בהשראת תרגיל 86 מתוך הספרון:
Maths Medicine from Professor Smudge, Dexter Graphics, London (2000)

שאלה 20[5]

ב"מזל בורגר" מחלקים לכל לקוח טופס ובו חמישה ריבועים המכסים על חמישה ציורים, שניים מהם זהים. יש לגרד את הכיסוי של שני ריבועים בלבד. אם בשניהם מופיע אותו ציור מקבלים משקה חינם. מה הסתברות לזכות במשקה חינם?

פתרונות והערות

ההסתברות לקבל אחד משני הציורים הזהים בגירוד הראשון היא $\frac{2}{5}$. ההסתברות לקבל את הציור הזהה השני בגירוד השני הוא $\frac{1}{4}$. לכן ההסתברות לזכות בפרס היא $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

[5] תרגיל 10 (עמוד 76) מתוך החוברת "הסתברות – לתלמידי 3-4 יחידות לימוד" (מהדורת עיצוב), מאת נ. הדס וט. זסלסבקי, הוצאת מכון ויצמן למדע 1996.