אלגברה – טכניקה בהקשר

שאלה 1

ידוע כי אורך אלכסון של מלבן נתון הוא 13 ס"מ ושטחו 60 סמ"ר.

א. מצאו את היקף המלבן.

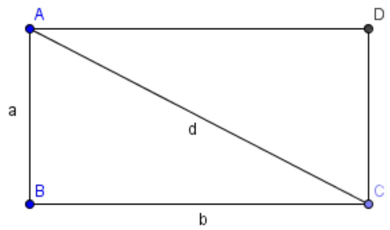
ב. דני טוען כי הוא יכול לחשב את ההיקף על פי נוסחה $P = 2\sqrt{d^2 + 2A}$, כאשר P הוא ההיקף, d הוא אורך האלכסון ו- A הוא השטח. בדקו שאכן לפי נוסחתו מתקבל ההיקף שמצאתם בסעיף הקודם.

ג. הסבירו מדוע הנוסחה של דני נכונה.

ד. מצאו את אורכי צלעות המלבן.

ה. יוסי טוען כי על פי הנוסחה של דני ,עבור מלבנים בעלי אותו היקף ,ככל שהשטח גדל אורך האלכסון קטן .תנו דוגמאות והסבירו האם הטענה נכונה.

<u>פתרונות והערות</u>



א. להלן שתי דרכים אפשריות למציאת היקף המלבן: הראשונה מוצאת תחילה את אורכי הצלעות של המלבן ומתבססת על פתרון מערכת משוואות לא לינאריות, ואילו השנייה מתבססת על נוסחאות הכפל המקוצר.

- <u>דרך ראשונה</u>: כיוון שנתונים האלכסון והשטח, ניתן לכתוב שתי משוואות עם שני נעלמים a ו- b (אורכי צלעות המלבן), כך: $a^2 + b^2 = 13^2 = 169$ ו- $ab = 60$. נציב במשוואה הראשונה $b = \frac{60}{a}$ ונקבל $a^2 + (\frac{60}{a})^2 = 169$. על ידי פישוט, מתקבלת המשוואה דו-ריבועית, $(a^2)^2 - 169(a^2) + 60^2=0$ והפתרונות הם: $a^2 = 25$ או $a^2 = 144$. ומכאן נקבעים אורכי הצלעות של המלבן היחיד הקיים: 5 ו-12 ס"מ, והיקף המלבן הוא 34 ס"מ.
- <u>דרך שנייה</u>: נקודת המוצא הן אותן שתי המשוואות הנתונות $a^2 + b^2 = 13^2 = 169$ ו- $ab = 60$. ניתן לקשור ביניהן על ידי הנוסחה $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, ולכן $(a + b)^2 = 13^2 + 2 \times 60$. כלומר, $(a + b)^2 = 289$, ולכן $a + b = 17$, ומכאן שההיקף הוא 34. מעניין להיווכח כי, בדרך זו, מוצאים את ההיקף מבלי לדעת את אורכי הצלעות.

ב – ג. הנוסחה היא הכללה של הדרך השנייה לעיל, ואכן מתקבלת אותה תוצאה.

ד. אם פותרים סעיף א לעיל בדרך הראשונה, אורכי הצלעות כבר נמצאו. אם פותרים בדרך השנייה, כותבים משוואה ריבועית, למשל, $a(17-a)=60$. למשוואה זו שני הפתרונות 5 ו- 12 אשר קובעים מלבן יחיד.

ה. כאשר ההיקף קבוע, הוא קובע את הסכום של ריבוע האלכסון ושל פעמיים השטח. לכן (פעמיים) השטח הוא מקסימאלי כאשר (ריבוע) האלכסון מינימאלי. ניתן לראות זאת גם מהנוסחה $\mathrm{P}=2\sqrt{\mathrm{d}^2+2\mathrm{A}}$, גידול ב- A מחייב הקנטת d כדי לשמור על P קבוע. בכיתות מתקדמות ניתן להוכיח כי מתקבל שטח מקסימאלי כאשר המלבן הוא ריבוע. הוכחה: נקודת המוצא היא $(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2 \geq 0$, כלומר, הריבוע מתאפיין בכך שאורכי שתי צלעותיו הם שורש השטח, ולכן ממשפט פיתגורס $d^2=2A$. $a^2+b^2 \geq 2ab$, אך, בהקשר של הבעיה ניתן לכתוב אי-שוויון זה כ- $d^2 \geq 2A$. כלומר, האלכסון הקטן ביותר מתקבל כאשר $d^2=2A$, כלומר כשהמלבן הוא ריבוע.

שאלה 2

אריאל בודק זוגות מספרים שסכומם 100 ומחשב את מכפלתם.

א. מצאו שלושה זוגות מספרים כאלה ורשמו את מכפלותיהם.

ב. סמנו ב- x את אחד המספרים וכתבו פונקציה המתארת את מכפלת שני המספרים.

ג. שרטטו את גרף הפונקציה ומצאו את שיעורי קדקוד הפרבולה. הסבירו מה משמעותם בהקשר של הבעיה.

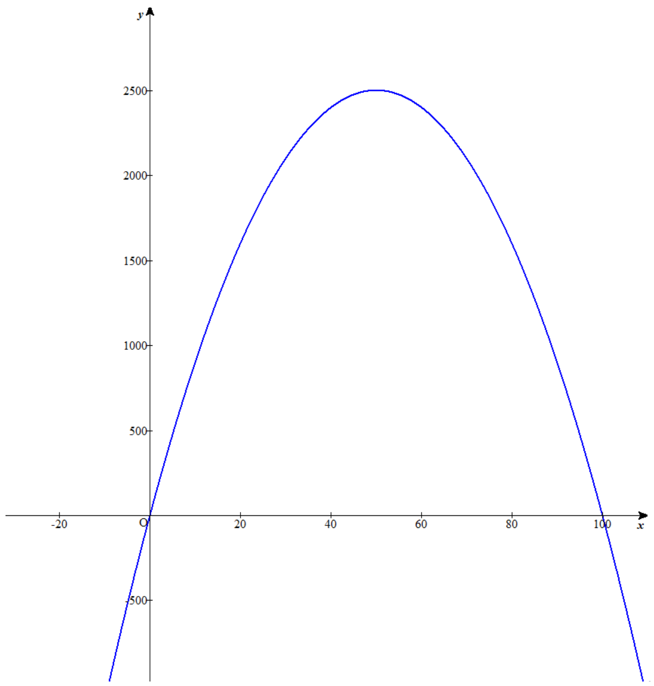
ד. מצאו את שני המספרים אם ידוע כי המכפלה היא 2499.

פתרונות והערות

א. 91 ו- 99, מכפלתם 819; 20.5 ו- 79.5, מכפלתם 1629.75; $\sqrt{7}$ ו- $100-\sqrt{7}$, מכפלתם $100\sqrt{7}-\sqrt{7}$ (≈ 261.92)

ב. $f(x) = x(100-x)$

ג.



שיעורי הקדקוד הם $(50,50)$ ואלה שני המספרים אשר סכומם 100 ואשר נותנים את המכפלה הגדולה ביותר.

ד. $2499 = 2500 - 1 = 50^2 - 1 = (50-1)(50+1) = 49 \times 51$

שאלה 3[1]

ערן חושב שהוא גילה "חוק חילוף" חדש: במכפלה של שני מספרים דו-ספרתיים, הוא מצא דוגמא בה החלפת מקומן של האחדות והעשרות שומר על התוצאה. למשל:

$$42 \times 36 = 24 \times 63$$

א. בדקו את החישוב של ערן.

ב. האם "חוק החילוף" החדש נכון תמיד? הסבירו.

ג. מצאו דוגמאות נוספות שמקיימות את החוק.

ד. הציעו דרך למצוא את כל הדוגמאות האפשריות.

פתרונות והערות

ב. הוא אינו נכות תמיד, כי, למשל, $18 \times 19 \neq 81 \times 91$.

ג. על מנת למצוא דוגמאות נוספות, יש לחקור מתי התופעה נכונה וזאת עושים בעזרת אלגברה:

$$(10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c) \quad \Rightarrow$$

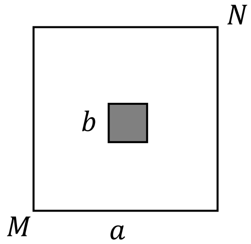
$$\Rightarrow \qquad 100ac + 10bc + 10ad + bd = 100bd + 10ad + 10bc + ac \;\Rightarrow$$

$$99ac = 99bd \;\;\Rightarrow\;\; ac = bd$$

[1] בהשראת המאמר: "כפול, הפוך וכפול" מאת ר. אבן ומ. ברוקהיימר, שבבים תיק מס '14. את המאמר השלם ניתן למצוא ב: http://stwww.weizmann.ac.il/menu/Disciplines/math_paper/14/14_2.pdf

שאלה 4

נתונה כיכר ריבועית שאורך צלעה הוא a. במרכזה יש ערוגה ריבועית שאורך צלעה הוא b, ואשר עליה אסור לדרוך (אך ניתן להלך על הצלעות שלה).



נועם, עדי וגיל הלכו מהפינה M לפינה N בשלושה מסלולים שונים (מבלי לדרוך על הערוגה האמצעית). כל אחד מהביטויים האלגבריים הבאים מבטא בהתאמה את המרחק שהלכו הילדים:

$$2a, \quad \sqrt{2}(a-b)+2b, \quad \sqrt{2}\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a-b}{2})^2}$$

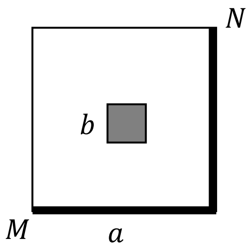
א. סמנו על התרשים את שלושת המסלולים.

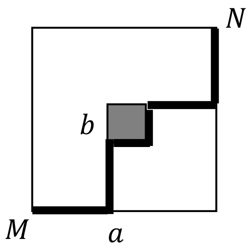
ב. סדרו את הביטויים מקטן לגדול. הסבירו.

ג. אם היה מותר לדרוך על הערוגה שבמרכז, מה היה אורך המסלול הקצר ביותר מפינה לפינה?

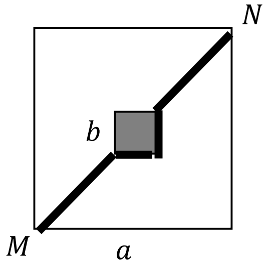
פתרונות והערות

א. להלן שתי אפשרויות למסלול שאורכו $2a$

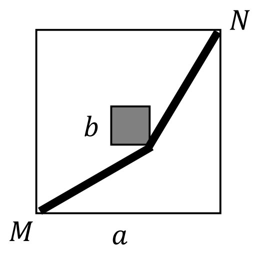




המסלול $\sqrt{2}(a-b)+2b$



המסלול , $\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$



ב. השוואת הביטויים האלגבריים יכולה להיות משימה טכנית ארוכה ולא קלה. אך ניתן להשוות בין הביטויים האלה על פי אורך המסלול שהם מייצגים. מהשרטוטים רואים כי המסלול המיוצג על ידי הביטוי $\sqrt{2}\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a-b}{2})^2}$ הוא הקצר ביותר, ואילו הביטוי המיוצג על ידי $2a$ הוא הארוך ביותר. ולכן:

$$\sqrt{2}\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{a-b}{2})^2} \quad < \quad \sqrt{2}(a-b)+2b \quad < 2a$$

ג. $\sqrt{2}a$

<u>שאלה 5</u>

תוך כדי משחקי חשבון, רני שם לב כי $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\div\frac{1}{6}$ (בדקו את החישוב!) ותהה האם יש עוד זוגות שברים כאלה (בהם המונה הוא אחד) אשר מקיימים שתוצאת החילוק ביניהם שווה לתוצאת החיבור ביניהם.

א. אריאל אמר כי המכנה של השבר השני לא יכול להיות 1. האם הוא צודק? הסבירו.

ב. מצאו את המכנה של השבר השני אם המכנה של השבר הראשון הוא 12.

ג. מצאו בעזרת אלגברה את כל המקרים האפשריים בהם מתקיימת תכונה זו.

ד. דני תהה האם התכונה מתקיימת גם עבור מספרים שלמים. הוא חיפש ומצא כי, למשל : $(-4)+2=(-4)\div 2=(-4)$. מצאו בעזרת אלגברה את כל המקרים האפשריים.

<u>פתרונות והערות</u>

א. אם המכנה של השבר השני הוא 1, אזי כל השבר שווה 1. לחלק ב-1 אינו משנה את המחולק, ואילו תוספת של אחד תמיד מגילה אותו, ולכן אף פעם לא יכול להתקיים שוויון.

ב. מתקבלת המשוואה הריבועית $\frac{1}{12}+\frac{1}{x}=\frac{1}{12}\div\frac{1}{x}$ אשר לה שני פתרונות 4 או (-3). ואכן $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\div\frac{1}{4}$ וגם $\frac{1}{12}+\frac{1}{(-3)}=\frac{1}{12}\div\frac{1}{(-3)}$.

ג. מתקבלת המשוואה $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}\div\frac{1}{y}$, ובעזרתה אפשר למצוא את כל הזוגות של המספרים שמקיים אותה: אם נבחר ערך כלשהו ל- y, הערכים המתאימים של x יהיו $x=y^2-y$.

ד. במקרה זה המשווה היא: $a+b=a\div b$ וממנה נגזר כי אם נבחר ערך כלשהו עבור b כך ש- $b\neq 1$, אם $a=\frac{b^2}{1-b}$, הזוגות יקיימו את התנאי. יש לשים לב כי תנאי זה כולל את כל המקרים שכבר נחקרו בסעיף ג.

שאלה 6

a, b, c, d הם ארבעה מספרים טבעיים עוקבים כלשהם. הוכיחו כי:

א. $bc - ad = 2$

ב. $bd - ac$ הוא תמיד מספר אי-זוגי.

ג. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ הוא תמיד מספר זוגי אך לא יכול להיות כפולה של 4.

ד. $abcd + 1$ הוא תמיד מספר ריבועי. הדרכה: הראו שהביטוי שווה ל- $((a+4)(a-1)+5)^2$.

פתרונות והערות

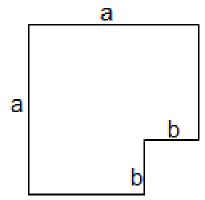
א. אם $a = n$, ניתן לכתוב את הביטוי כך ולהיווכח כי $(n+1)(n+2) - n(n+3) = 2$.
אם $a = n - 1$, $(n)(n+1) - (n-1)(n+2) = 2$

ב. אם $a = n$, $(n+1)(n+3) - n(n+2) = n^2 + 4n + 3 - n^2 - 2n = 4n + 3$.

ג. לאחר הצבת ביטויים של מספרים עוקבים, העלאתם בריבוע וכינוס איברים מתקבל הביטוי $4n^2 + 12n + 14$. בביטוי זה, שני האיברים הראשונים הם כפולות של 4 אך האיבר השלישי (14) איננו כפולה של 4.

שאלה 7

שטחו של המשושה שלפניכם הוא 32 סמ"ר.



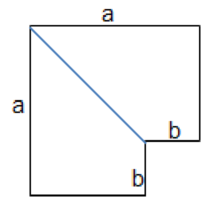
א. איזה מבין הערכים הבאים יכול להיות הערך של a: 5.5, $\sqrt{32}$, 7. נמקו.

ב. מה היקף המשושה?

ג. מה יכולים להיות הערכים של a, ו- b אם ידוע שהם מספרים טבעיים?

ד. מצאו את הערכים של a, ו- b אם ידוע כי השטח של המשושה הוא מחצית שטחו של הריבוע שצלעו a.

ה. מצאו את אורך האלכסון של המשושה המסומן.



פתרונות והערות

א. את שטח המשושה (הקעור) הנתון ניתן לחשב כהפרש של שני ריבועים, והביטוי המתקבל הוא $a^2 - b^2 = 32$. מכאן שאם $a = \sqrt{32}$, אז $b = 0$ ולא יהיה קיים משושה. כמו כן, בביטוי לשטח אין אפשרות ש- $a = 5.5$, שאכן ריבועו קטן מ- 32.

ב. ניתן לחשב את ההיקף של המשושה על ידי חיבור אורכי שש הצלעות שלו באופן הבא: $a + a + a - b + b + b + a - b$. סכום זה הוא $4a$, שהוא זהה להיקף הריבוע שצלעו a ! אבל זה לא מפתיע כי הקטע ש"חסר" בהיקף הריבוע הגדול הוא בדיוק הקטע שמתווסף באמצעות הצלעות של הריבוע הקטן.

ג. כיון ש- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 32$, יש לחפש מה הם זוגות הגורמים האפשריים של 32: 1 ו- 32, 2 ו- 16 ו- 4 ו- 8. על ידי פתרון שלוש מערכות משוואות, מתקבלים שלושה זוגות של מספרים אפשריים: $a = 16,\ b = 15$; $a = 9,\ b = 7$; ו- $a = 6,\ b = 2$.

ד. $a = 8,\ b = 4\sqrt{2}$

ה. $\sqrt{2}(a-b)$

שאלה 8

בסעיפים הבאים ניתן לחשב ערך של ביטויים מורכבים משני משתנים מבלי לדעת את ערכם של כל משתנה בנפרד.

א. חשבו את הערך של הביטוי $\frac{a^4}{b^4}$ אם ידוע כי: $\frac{a+13b}{3a-b}=3$ $\left(a\neq\frac{b}{3}, b\neq 0\right)$

ב. חשבו את הערך של $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$ אם ידוע כי $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2.9$ $(a\neq 0, b\neq 0)$

ג. חשבו את הערך של הביטוי a^2-b^2 אם ידוע כי:

$$\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2}-\frac{3}{b-a}=a+b \quad (a\neq b)$$

פתרונות והערות

בתרגילים אלה, ניתן לחשב ערך של ביטוי אלגברי עם שני משתנים על בסיס ערך של ביטוי אחר ומבלי לדעת את הערך של המשתנים המעורבים.

א. $\frac{a+13b}{3a-b}=3 \Rightarrow a+13b=9a-3b \Rightarrow 8a=16b \Rightarrow \frac{a}{b}=2 \Rightarrow \frac{a^4}{b^4}=16$

ב. $8.41=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})^2=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=8.41-2=6.41$

במקרה זה ניתן לפתור בדרך אחרת: רואים כי $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{b}{a}$ הם מספרים הופכיים, ולכן ניתן לייצג אותם כ- x ו- $\frac{1}{x}$ כאשר $x=\frac{a}{b}$. פתרון המשוואה הריבועית $x+\frac{1}{x}=2.9$ נותן $x=2.5$ (במקרה זה $\frac{1}{x}=0.4$) או $x=0.4$ (במקרה זה $\frac{1}{x}=2.5$). לכן לצורך התרגיל שלנו, הפתרון הוא יחיד כי בשני המקרים התוצאה של $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}$ היא זהה ושווה ל- $2.5^2+0.4^2=6.41$

ג. $\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2}-\frac{3}{b-a}=\frac{a-b+3(a-b)}{(a-b)^2}=\frac{4}{a-b}, \Rightarrow \frac{4}{a-b}=a+b \Rightarrow a^2-b^2=4$

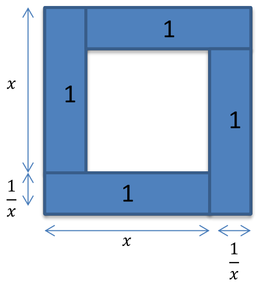
שאלה 9[2]

א. חשבו את הסכומים הבאים: $3+\frac{1}{3}$, $2+\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}+\frac{3}{4}$.

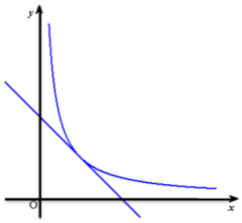
ב. הוכיחו, בעזרת אלגברה, כי עבור כל מספר חיובי סכום המספר וההופכי לו הוא תמיד גדול מ- 2 או שווה ל- 2.

ג. להלן ארבע הוכחות, כל אחת ניתנת בעזרת תמונה אחת. הסבירו כל הוכחה.

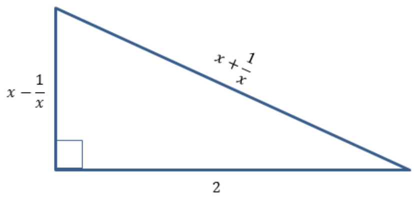
הוכחה 1



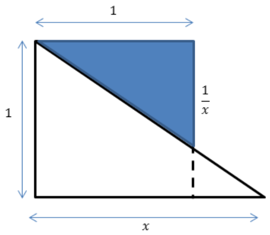
הוכחה 2



הוכחה 3
$x \geq 1$



הוכחה 4
$x \geq 1$



ד. עבור אלו ערכים של a, ו- b מתקיים כי $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=2$?

---

[2] בהשראת הספר:
Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking by Roger B. Nelsen (Oct. 1993).

שאלה 10[3]

א. ליונתן יש שיטה לחשב 45^2:

<table>
<tr><td colspan="2">$45^2 = ?$</td></tr>
<tr><td>$5^2 = 25$
(ריבוע של ספרת האחדות)</td><td>$4 \times 5 = 20$
(מכפלת הספרות)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$45^2 = 2025$
(צירוף של התוצאות לעיל)</td></tr>
</table>

בדקו עבור אלו מספרים דו-ספרתיים השיטה של יונתן עובדת? הסבירו.

ד. דלית הכניסה שינוי לשיטה של יונתן והסבירה את השיטה שלה בעזרת הדוגמה הבאה:

<table>
<tr><td colspan="2">$35^2 = ?$</td></tr>
<tr><td>$5^2 = 25$
(ריבוע של ספרת האחדות)</td><td>$3 \times 4 = 12$
(מכפלת ספרת העשרות במספר העוקב לה)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$35^2 = 1225$
(צירוף של התוצאות לעיל)</td></tr>
</table>

בדקו עבור אילו מספרים דו-ספרתיים השיטה של דלית עובדת? הסבירו.

ה. דודתה המתמטיקאית של דלית הציעה לה לבחון את השיטה הבאה בא שני הגורמים הם דו-ספרתיים ובעלי אותה ספרת העשרות:

<table>
<tr><td colspan="2">52×58</td></tr>
<tr><td>$2 \times 8 = 16$
(מכפלה של ספרות האחדות)</td><td>$5 \times (5 + 1) = 30$
(מכפלת ספרת העשרות במספר העוקב לה)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$52 \times 58 = 3016$
(צירוף של התוצאות לעיל)</td></tr>
</table>

בדקו עבור אילו מספרים דו-ספרתיים השיטה של דלית עובדת? הסבירו.

ד. דודתה הציעה לה שיטה קלה נוספת לחישוב מכפלות כמו למשל 17×12:

1.	מחברים אותו עם ספרת האחדות של המספר השני	$2 + 17 = 19$ או $2 + 17 = 19$
2.	מוסיפים לתוצאה 0 מימין	190
3.	מחברים את התוצאה למכפלת ספרות האחדות	$190 + 2 \times 7 = 204$

בדקו עבור אילו מספרים דו-ספרתיים השיטה של דלית עובדת? הסבירו.

[3] בהשראת שיחה בין המורה למתמטיקה אחמד פרחאת לג'סון קופר.

שאלה 11

טענה: "סכום ההופכיים של שני מספרים (שונים מאפס) שווה להופכי של סכומם". האם הטענה נכונה תמיד, נכונה במקרים מסוימים, או אף פעם לא נכונה?

פתרונות והערות

אפשר תחילה לנסות את הטענה על מספרים נבחרים, כולל זוגות של מספרים בעלי אותו סימן או סימן הפוך. הקושי למצוא דוגמה שמאשרת את הטענה משמשת שתי מטרות: לתת תחושה מדוע השוויון אינו מתקיים (כולל תחושה איזה ביטוי גדול יותר) ומשמש זרז למצוא הוכחה לכך שהטענה לא נכונה עבור אף זוג מספרים.

פתרון אפשרי: הייצוג האלגברי של הטענה הוא: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$. מכאן כבר ניתן לראות כי המגבלות $a \neq 0$ ו $b \neq 0$ הן לא היחידות, בנוסף יש לציין כי $a \neq -b$, כלומר שהמספרים לא יכולים להיות נגדיים. מעבר למכנה משותף, מוביל ל-: $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, כלומר $(a+b)^2=ab$.
אבל, שוויון זה יכול להתקיים אך ורק אם $ab>0$. במקרה זה, תמיד מתקיימת שרשרת האי-שוויונות הבאה: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2>2ab>ab$, ולכן לא קיים זוג מספרים שמקיים את הטענה.

שאלה 12

פתרו את המשוואות הבאות רק על ידי שיקולים וללא ביצוע חישובים אלגבריים.

א. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=1.1$

ב. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=0$

ג. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=-1$

ד. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=x^2-11$

ה. $\frac{x^2-11}{x^2+11}=x^2+11$

פתרונות והערות

שאלה זו נועדה להרגיל תלמידים להסתכל תחילה על המשוואות, לנסות להבין את התנאי שהן מציבות ולנסות לפתור אותן על פי שיקולים כאשר הדבר ניתן.

א. אין פתרונות. המונה תמיד קטן מהמכנה, ולכן המנה תמיד קטנה מ- 1.1.

ב. מנה שווה לאפס כאשר המונה שלה שווה לאפס, כלומר $x=\pm\sqrt{11}$.

ג. כדי ששבר יהיה שווה ל- -1, המונה והמכנה שלו צריכים להיות מספרים נגדיים. במקרה זה, המרחק בין המונה והמכנה הוא 22, וזוג הנגדיים היחיד שהם במרחק 22 הם 11 ו- -11 כלומר כאשר $x=0$. זאת ניתן היה גם לראות מהסתכלות בשבר.

ד. כדי שיהי פתרון, המכנה של השבר צריך להיות 1, אך הוא אף פעם לא קטן מ- 11.

ה. אין פתרון. כדי להיווכח בזה נשווה את שני האגפים אחרי שנכפול במכנה.

$$x^2-11=(x^2+11)^2$$

אגף שמאל קטן מ- x^2, ואגף ימין תמיד גדול מ- x^2, כי: $x^2<x^2+11<(x^2+11)^2$.
אי-השוויון האחרון מוצדק שכן העלה של מספר בריבוע "מגדילה" אותו, כל עוד המספר גדול מ- 1, וכאן המספר שמועלה בריבוע הוא לפחות 11.

שאלה 13

הוכיחו כי:

א. סכום שלושה מספרים טבעיים עוקבים הוא כפולה של 3.

ב. מכפלה של שלושה מספרים טבעיים עוקבים הוא כפולה של 3.

ג. סכום של אחד עשר מספרים טבעיים עוקבים הוא כפולה של 11.

ד. 302 וגם 30002 הם סכום של ריבועים של שלושה מספרים עוקבים, אך 3002 אינו כזה. בשני המקרים הראשונים מצאו את הסכומים.

שאלה 14

האם הנכם מכירים מספרים ראשוניים גדולים מ- 19? ובכן להלן הוכחה שאין כאלה! מצאו את הטעות בהוכחה.

משפט: לא קיימים מספרים ראשוניים גדולים מ- 19

הוכחה: ניקח מספר n כלשהו, כך ש $n > 19$

אם n זוגי, אזי הוא לא ראשוני.

אם n אי-זוגי, אזי המספרים $\frac{n+1}{2}$ ו- $\frac{n-1}{2}$ הם מספרים טבעיים, ולכן מתקיים השוויון הבא

$$n = (\frac{n+1}{2})^2 - (\frac{n-1}{2})^2$$

וזה ביטוי מהצורה $n = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

כלומר ביטאנו את n כמכפלה של שני גורמים ולכן הוא איננו ראשוני.

פתרונות והערות

שאלה זו מחייבת את התלמידים לקרוא טקסט מתמטי קצר ולבדוק את נכונותו. במקרה זה, הטקסט עושה שימוש בתכונות אלגבריות פשוטות, אשר קל לעקוב אחריהן. הרבה תלמידים יחפשו תחילה שגיאת "חישוב" אך במהלך הטיעון לעיל אין כאלה. "הוכחה" זאת אכן מציגה כל מספר אי-זוגי (ולא רק הגדולים מ- 19) כמכפלה של שני מספרים שלמים, אך אחד משני המספרים האלה הוא $n = \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2}$ והשני הוא $1 = \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}$, כלומר, המספר מוצג כמכפלה של 1 במספר עצמו, דבר שלא עומד בסתירה להיות המספר ראשוני.

<u>שאלה 15</u>

כדי לקבל ממוצע חשבוני של שני מספרים חיוביים כלשהם מחברים אותם ומחלקים את התוצאה בשתיים. כדי לקבל ממוצע גיאומטרי בין שני מספרים חיוביים כלשהם מחשבים את השורש הריבועי של מכפלתם.

א. חשבו את הממוצע החשבוני והממוצע הגיאומטרי של זוגות המספרים הבאים: 9 ו-4; 18 ו-2; 28 ו-7.

ב. מצאו שלושה זוגות מספרים כך שהממוצע החשבוני של כל זוג הוא 12.

ג. מצאו שלושה זוגות מספרים כך שהממוצע הגיאומטרי שלהם הוא 12.

ד. נתון מלבן שצלעותיו 32 ס"מ ו-8 ס"מ. מה אורך צלע הריבוע ששטחו שווה לשטח המלבן הנתון? מה הקשר של שאלה זו לשאלות הקודמות?

ה. נתון מלבן שצלעותיו 6 ס"מ ו-8 ס"מ. האם שטח הריבוע שצלעו הוא הממוצע של צלעות המלבן הנתון גדול, קטן או שווה לשטח של המלבן? הסבירו.

ו. הוכיחו כי הממוצע החשבוני של שני מספרים חיוביים שונים הוא תמיד גדול מהממוצע הגיאומטרי שלהם.

<u>שאלה 16</u>

א. מצאו את ריבוע הממוצע החשבוני ואת הממוצע החשבוני של הריבועים של הזוגות הבאים: 4 ו-8; 10 ו-20; 31 ו-33. באלו מקרים ריבוע הממוצע קטן מממוצע הריבועים?

ב. הראו כי עבור שני מספרים חיוביים שונים a ו- b הממוצע החשבוני של הריבועים שלהם הוא תמיד גדול יותר מהריבוע של הממוצע החשבוני שלהם.

ג. חשבו בכמה גדול יותר ממוצע הריבועים של שני מספרים חיוביים כלשהם מריבוע הממוצע שלהם.

ד. האם המסקנה שהסקתם בסעיף ב לעיל תקפה גם לממוצע הגיאומטרי בין שני מספרים חיוביים כלשהם? הסבירו.