אלגברה – חזקות ושורשים

<u>שאלה 1</u>

בתרגילים הבאים ***m*** הוא מספר שלם (חיובי, שלילי או אפס). מצאו את הערכים של ***m*** בעזרת חוקי חזקות.

א. $3^{2m} = 6561$

ב. $2^m \times 3^m - 6 = 210$

ג. $3^{(m^2+2m)} = 1$

ד. $5^{(m^2+4m-21)} = 1$

ה. $2^{(m^2-3m-12)} = \frac{1}{4}$

ו. $(-1)^{2m} = 1$

ז. $2^{m^2} \times 4^m = \frac{1}{2}$

<u>שאלה 2</u>

בלי להשתמש במחשבון, קבעו איזה מספר גדול יותר בכל אחד מזוגות המספרים הבאים:

א. $\sqrt{10}+\sqrt{8}$; $\sqrt{18}$

ב. $\sqrt{11}+\sqrt{7}$; $\sqrt{10}+\sqrt{8}$

ג. $\sqrt{3}+\sqrt{12}$; $\sqrt{2}+\sqrt{18}$

ד. $\sqrt{12}-\sqrt{6}$; $\sqrt{13}-\sqrt{5}$

ה. $4+\sqrt{11}$; $5+\sqrt{2}$

ו. כתבו זוגות דומים של ביטויים שניתן להשוות את ערכם ללא מחשבון. הסבירו כיצד.

<u>פתרונות והערות</u>

ניתן לגשת לשאלה זו בכמה דרכים. ראשית, ניתן לנסות לאמוד תוצאות על ידי חישוב מנטלי מקורב. לדוגמא, בסעיף א ניתן להגיד כי $\sqrt{10}+\sqrt{8}$ הוא "שלוש וקצת ($\sqrt{10}$)" ועוד "שתיים וקצת ($\sqrt{8}$)" ולכן תוצאת הסכום היא מעל חמש, ואילו $\sqrt{18}$ הוא קטן מ-5. סוג של אומדן כזה ניתן להפעיל גם על סעיפים ג ו-ה, אך לא יעזור בהשוואה שבסעיפים ב ו-ד. רצוי לערוך דיון על כך עם התלמידים.

דרך אחרת לגשת לשאלה זו היא להתבסס על העיקרון הקובע כי יחס הסדר בין שני מספרים חיוביים כלשהם נשמר כאשר מעלים אותם בריבוע, ולכן ניתן להשוות את ריבועיהם כדי להסיק על הסדר ביניהם. ולמה להשוות את ריבועיהם? כי יישום של חוקים אלגבריים (כגון ריבוע של סכום וריבוע של הפרש) הופך את ההשוואה לקלה למדי.

א. $(\sqrt{10}+\sqrt{8})^2=18+2\sqrt{80}>18$

ב. $(\sqrt{11}+\sqrt{7})^2=18+2\sqrt{77}<(\sqrt{10}+\sqrt{8})^2=18+2\sqrt{80}$

ג. $(\sqrt{3}+\sqrt{12})^2=15+2\sqrt{36}<(\sqrt{2}+\sqrt{18})^2=20+2\sqrt{36}$

ד. $(\sqrt{12}-\sqrt{6})^2=18-2\sqrt{72}<(\sqrt{13}-\sqrt{5})^2=18-2\sqrt{65}$

ה. $(4+\sqrt{11})^2=27+2\sqrt{176}>(5+\sqrt{2})^2=27+2\sqrt{50}$

ו. בסעיף זה תלמידים מוזמנים "לפצח" את העיקרון עליו נבנו הסעיפים של השאלה. לשם כך, בכל סעיף ניעזר ב- a ו- b

א. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}>a+b$. ולכן דוגמאות נוספות אפשריות הן:
$\sqrt{5}+\sqrt{7}>\sqrt{12}$, $\sqrt{9}+\sqrt{16}>\sqrt{25}$

ב. אם הסכום $a+b$ קבוע (במקרה שלפנינו 11+7=10+8=18), אז ריבוע סכום השורשים הוא $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$ ולכן האיבר שקובע בהשוואה הוא המכפלה ab, שהיא גדלה ככל שההפרש בין a ו- b קטן. עובדה זו שקולה לעובדה שנדונה בשאלות אחרות המתייחסת לשטח מלבן אשר היקפו נתון. השטח גדול יותר ככל שהמלבן "קרוב" לריבוע. דוגמאות נוספות: $\sqrt{7}+\sqrt{4} > \sqrt{6}+\sqrt{5}$, $\sqrt{16}+\sqrt{2} < \sqrt{9}+\sqrt{9}$.

ג. אם המכפלה ab קבועה, (במקרה שלפנינו 3×12=2×18=36), אז ריבוע סכום השורשים הוא $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$ ולכן השוואה נקבעת על ידי הערך של $a+b$ בכל מקרה, שהוא קטן ככל שהיחס בין a ו- b קרוב ל- 1. עובדה זו שקולה לעובדה שנדונה בשאלות אחרות המתייחסת להיקף מלבן אשר שטחו נתון. ההיקף קטן יותר ככל שהמלבן "קרוב" לריבוע. דוגמאות נוספות: $\sqrt{8}+\sqrt{3} < \sqrt{12}+\sqrt{2}$, $\sqrt{4}+\sqrt{4} < \sqrt{2}+\sqrt{8}$.

ד. אם הסכום $a+b$ קבוע (במקרה שלפנינו 12+6=13+5=18), אז ריבוע הפרש השורשים הוא $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$ תלוי במכפלה ab, שהיא גדולה ככל שההפרש בין a ו- b קטן. דוגמה נוספות: $\sqrt{4}-\sqrt{7} < \sqrt{5}-\sqrt{6}$, $\sqrt{4}-\sqrt{21} < \sqrt{9}-\sqrt{16}$.

ה. סעיף זה הוא מקרה פרטי של סעיף א, כאשר a הוא ריבוע של מספר שלם (במקרה שלפנינו $16 = 4^2$, $25 = 5^2$). דוגמה נוספת: $\sqrt{2}+3 < \sqrt{7}+2$.

שאלה 3

בשני הסעיפים הבאים מופיעים האורכים של ניצב ושל יתר במשולש ישר זווית. קבעו מבלי להשתמש במחשבון איזה הוא אורך היתר, ומצאו את אורך הניצב השני.

א. $\sqrt{10}$; $\sqrt{8} + \sqrt{2}$

ב. $\sqrt{20} + \sqrt{2}$; $\sqrt{8} + \sqrt{5}$

ג. כתבו בעיות דומות (בשינוי המספרים) לשני הסעיפים הקודמים. הסבירו כיצד בניתם את הבעיות.

שאלה 4

א. תנו אומדן לערך הביטוי $\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}$.

ב. הוכיחו כי ערך הביטוי הוא מספר שלם.

ג. בנו ביטוי דומה עם מספרים שונים, כך שערכו הוא מספר שלם והוכיחו זאת.

פתרונות והערות

א. כיוון ש $7^2 = 49$ הקירוב הראשון שניתן לעשות הוא ש- $\sqrt{48}$ הוא מעט קטן מ-7. מכאן ש- $\sqrt{7+\sqrt{48}}$ הוא מעט קטן מ- $\sqrt{14}$. באופן דומה ניתן לאמוד כי $\sqrt{7-\sqrt{48}}$ הוא "קצת" יותר גדול מאפס. לכן, סכום שני האיברים הוא קרוב ל- 4.

ב. על מנת לברר מה הערך המדויק של הביטוי, נסמן אותו ב- A ונחשב:

$$A^2 = \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^2$$

$$= \left(7+\sqrt{48}\right)+2\sqrt{7+\sqrt{48}}\sqrt{7-\sqrt{48}}+\left(7-\sqrt{48}\right) = 14+2\sqrt{7+\sqrt{48}}\sqrt{7-\sqrt{48}}$$

מכאן נקבל ש:

$$A^2-14 = 2\sqrt{7+\sqrt{48}}\sqrt{7-\sqrt{48}} = 2\sqrt{\left(7+\sqrt{48}\right)\left(7-\sqrt{48}\right)} = 2\sqrt{49-48} = 2$$

מכאן נסיק כי $A^2 = 16$, וכיוון ש- A חיובי, נסיק כי $A = 4$.

ג. נעקוב אחרי ההוכחה הנ"ל בעזרת משתנים:

$$A = \sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

$$A^2 = 2a+2\sqrt{a+\sqrt{b}}\sqrt{a-\sqrt{b}}$$

$$A^2-2a = 2\sqrt{a^2-b}$$

A - הערך של הביטוי יהיה שלם אם יתקיימו שני תנאים:

a^2-b ריבוע של מספר שלם, שנסמן ב- p^2.

$A^2 = 2a+2p$ גם הוא ריבוע של מספר שלם.

בביטוי בסעיף א, נתון כי: $a = 7, \quad b = 48, \quad p = 1$

נדגים עוד אפשרויות. תחילה עוד ביטוי שבו $p = 1$. נבחר $A^2 = 2a + 2p = 36$ ונקבל $a = 17, b = 288$, ואכן מתקיים כי $\sqrt{17+\sqrt{288}} + \sqrt{17-\sqrt{288}} = 6$

על מנת להראות את הכלליות, נדגים עוד שני ביטויים עם ערכים שונים של p.

הפרמטרים: $A^2 = 16$, $p = 2$ נותנים $a = 6, b = 32$, ואכן $\sqrt{6+\sqrt{32}} + \sqrt{6-\sqrt{32}} = 4$

הפרמטרים: $A^2 = 36$, $p = 3$ נותנים $a = 15, b = 216$,
ואכן $\sqrt{15+\sqrt{216}} + \sqrt{15-\sqrt{216}} = 6$.

<u>שאלה 5</u>

מספר אמסטרונג מסדר 3 הוא מספר טבעי תלת ספרתי אשר שווה לסכום של החזקות השלישיות של ספרותיו.
למשל: 407 הוא מספר אמסטרונג מסדר 3 כי $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$.

א. כתבו בעזרת ביטוי אלגברי את התנאי לכך שמספר בעל שלוש ספרות הוא מספר אמסטרונג.

ב. הראו כי 153 הוא מספר אמסטרונג.

ג. הראו כי לא יתכן מספר אמסטרונג מסדר 3 אשר שתיים מספרותיו הן 8 ו-9.

ד. היעזרו בעובדה כי 370 הוא מספר אמסטרונג כדי למצוא מספר אמסטרונג חדש.

ה. מספר אמסטרונג מסדר 2 הוא מספר טבעי דו-ספרתי אשר שווה לסכום הריבועים של ספרותיו. הראו כי לא קיימים מספרים כאלה.

<u>שאלה 6</u>

המתמטיקאי האנגלי גודפרי הרולד הארדי (1877-1947) סיפר את האנקדוטה הבאה על ידידו המתמטיקאי ההודי סריניוואסה רמנוג'אן (1887-1920): "אני זוכר שנסעתי לבקרו במיטת חוליו. נסעתי במונית שמספרה 1729 והערתי שזה מספר משעמם למדי, ושאני מקווה שזה איננו סימן רע. 'לא', הוא ענה, 'זה מספר מעניין מאוד; זה המספר הקטן ביותר שניתן לבטאו כסכום של שתי חזקות שלישיות בשתי דרכים שונות".

א. אחת הדרכים לכתוב את 1729 כסכום של שתי חזקות שלישיות היא: $1^3 + 12^3$.
מצאו את הדרך השנייה.

ב. אם מרשים שאחד מבסיסי החזקה יהיה מספר שלילי, אזי 91 הוא המספר הקטן ביותר שניתן לרשום כסכום של שתי חזקות שלישיות בשתי דרכים שונות. אחת הדרכים היא $6^3 + (-5)^3$. מצאו את הדרך השנייה.

ג. דני מצא כי המספר הקטן ביותר שניתן לכתוב כסכום שני ריבועים שונים הוא 50. מצאו את שתי הדרכים.

ד. המספר 1729 הוא תוצאה של מכפלה של שני מספרים דו-ספרתיים האחד כתוב בסדר הפוך מהשני. מצאו את שני המספרים.

שאלה 7

להלן נוסחה לחישוב שטח של משולש שווה צלעות שאורך צלעו a:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

בעזרת נוסת שטח משולש, הוכיחו כי הנוסחה הזאת נכונה לכל משולש שווה צלעות.

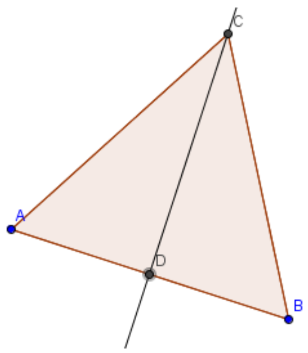
א- מצאו שתי דוגמאות לאורך צלע עבורו השטח הוא מספר שלם.

ב- הראו כי אם a הוא מספר שלם, השטח לא יכול להיות מספר שלם.

ג- האם יתכן משולש שווה צלעות בו המספר שמציין את אורך הצלע בס"מ הוא אותו המספר שמציין את השטח בסמ"ר? אם כן מצאו מספר כזה, ואם לא הסבירו מדוע לא קיים.

פתרונות והערות

א- שטח המשולש שווה לחצי אורך בסיס (BD) מוכפל באורך הגובה (CD). גובה במשולש שווה שוקיים (ולכן גם בשווה צלעות) הוא גם תיכון, ולכן $BD=\frac{a}{2}$. על פי משפט פיתגורס למשולש BCD,



$CD=\sqrt{a^2-(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. מכן ששטח המשולש הוא $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

ב- ניתן לבחור את שטח המשולש, להציב משוואה ולחשב את אורך הצלע. למשל, על מנת שהשטח יהיה שווה יחידת שטח אחת, נפתור את המשוואה $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=1$ ונקבל $a=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$.

באופן דומה נמצא שעבור שטח השווה ל- 2 יש לבחור $a=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$.

ג- מנוסחת השטח עולה כי $\frac{4S}{a^2}=\sqrt{3}$. אם S ו- a מספרים שלמים, היינו מקבלים ששורש שלוש הוא מספר רציונאלי, וזה, כידוע, איננו נכון.

ד- נציג שני טיעונים שונים לקיום מספר כזה. הטיעון הראשון הוא ישיר: למשוואה $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=a$ יש פתרון חיובי (יחיד) - $a=\frac{4}{\sqrt{3}}$.