9. עוד מקומות גיאומטריים   מדריך למורה

מבוא

מקומות גיאומטריים הוא אחד הנושאים היפים ביותר בתכנית הלימודים בגיאומטריה. ביחידה זו נחקור מקומות גיאומטריים פחות מוכרים. לשם כך נשלב כלים גרפיים ואלגבריים ונבנה בשלבים את ההוכחות בשיטות של גיאומטריה אנליטית. בפעילות הרביעית נציג משפט מפתיע מתחילת המאה ה-19 על *תשע* נקודות הקשורות למשולש ונמצאות על *מעגל אחד*, ובעקבות חקירה נוספת של משפט זה בכלים טכנולוגיים נגלה מקומות גיאומטריים חדשים. תוך כדי הוכחת המשפטים הדרושים לחקירה נרחיב את שיטות העבודה בגיאומטריה אנליטית.

רשימת הפעילויות:

פעילות 9.1 – הפרש ריבועי המרחקים משתי נקודות הוא גודל קבוע

פעילות 9.2 – סכום מרחקים קבוע מנקודה וישר

פעילות 9.3 – אמצעי המיתרים היוצאים מנקודה על מעגל

פעילות 9.4 – מעגל תשע הנקודות (משפט פויירבאך)

פעילות 9.5 – שאלות נוספות על מעגל תשע הנקודות

פעילות 9.1 – הפרש ריבועי המרחקים אל שתי נקודות הוא גודל קבוע

א. הגדירו שתי נקודות A:=[-4, 4] B:=[4, -2]
מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות אשר הפרש ריבועי המרחקים שלהן אל A ו- B הוא 30.

ב. סמנו ב- M את נקודת האמצע של הקטע AB.
מצאו נקודה D המשותפת לישר AB ולמקום הגיאומטרי שמצאתם בסעיף א'.
מהו המרחק של הנקודה D אל הנקודה M?

ג. מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות אשר הפרש ריבועי המרחקים שלהן אל A ו- B (הנתונות) הוא c (מספר חיובי). מצאו נקודה H המשותפת לישר AB ולמקום הגיאומטרי. מהו המרחק של הנקודה H אל הנקודה M. מהו הקשר בין אורך הקטע MH ואורך הקטע AB?

ד. מהו הקשר בין אורך קטע A1B1 ואורך קטע M1H1 הנבנה כמו בסעיפים הקודמים?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.1.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 9.1

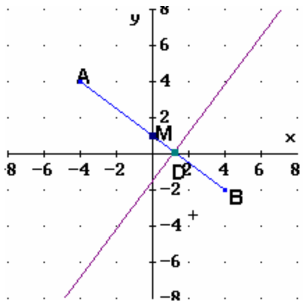
ראו גם קובץ: solution9.1.dfw

א. רושמים את התנאי למקום הגיאומטרי $|P - A|^2 - |P - B|^2 = 30$ ומקבלים על-ידי פישוט

משוואת ישר: $y=\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}$. משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות הנתונות A, B היא:

$y=-\frac{3}{4}x+1$, שני הישרים מאונכים זה לזה.

ב. שיעורי אמצע הקטע: M(0,1). שיעורי נקודת החיתוך של שני הישרים: D(1.2, 0.1).
המרחק מ- M ל- D הוא 1.5.



ג. נגדיר את הפרמטר c כמספר חיובי: $c :\in \mathrm{Real}(0,\infty)$ ונמצא את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות שהפרש ריבועי המרחקים שלהן אל A ו- B הוא c. מתקבלת משוואה של קו ישר.
נמצא את שיעורי נקודת החיתוך H של שני הישרים ונחשב את המרחק בין M ל- H.

$$H := \left[\frac{c}{25}, \frac{100 - 3\cdot c}{100}\right]$$

$$|M - H| = \frac{c}{20}$$

$$\mathrm{SOLVE}(|P - A|^2 - |P - B|^2 = c,\ y)$$

$$y = \frac{16\cdot x - c + 12}{12}$$

ד. במקרה הכללי נקבל $|M\text{-}H|=\frac{c}{2|A\text{-}B|}$. ראו הוכחה פורמלית בקובץ *Derive*.

אפשר כמובן להראות את הקשר בחישוב גיאומטרי: נסמן ב- L את אורך הקטע AB, ב- L1 ו- L2 את אורכי הקטעים שנקבעו על-ידי H (נניח כי L1>L2), וב- d את אורך הקטע MH.

מתקיים: $(L1 + L2)\cdot(L1 - L2) = c$ (מדוע?)

ולכן: $L\cdot(0.5L + d - (0.5L - d)) = c$

$L\cdot 2d = c$

כלומר: $d=\frac{c}{2L}$

פעילות 9.2 – סכום מרחקים קבוע מנקודה וישר

א. נתונים נקודה M:=[3, 1] וישר L:= x + 5 =0.
מצאו לפחות שש נקודות שסכום מרחקיהן אל הנקודה ואל הישר הנתונים הוא 10.

ב. מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן אל הנקודה והישר הנתונים הוא 10.
רשמו משוואה מתאימה ושרטטו את העקומה המתארת אותה. מהי צורת העקומה?

ג. מצאו משוואות מתאימות לשני חלקי העקומה.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.2.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 9.2

ראו גם קובץ: solution9.2.dfw

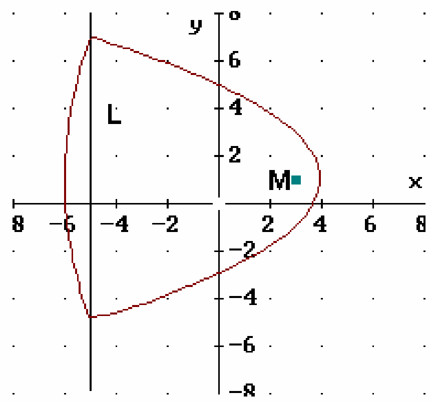
בשאלה זו חוקרים מקום גיאומטרי של נקודות שסכום מרחקיהן אל ישר ונקודה נתונים הוא קבוע.
מתברר כי המקום הגיאומטרי מורכב מקטעים של שתי פרבולות.

א. קל למצוא נקודות המקיימות את התנאי על הישרים y = 1 , x = -5 ו- x = 0

ב. נגדיר נקודה כללית P:= [x, y] נרשום את התנאי הנדרש ונשרטט.

$$[L := x + 5 = 0,\ M := [3, 1],\ P := [x, y]]$$

$$|x + 5| + |P - M| = 10$$



ג. לגבי הענף הימני מתקיים $x > -5$ ולכן נרשום את התנאי כך: $|P - M| = 10 - (x + 5)$

לגבי הענף השמאלי מתקיים $x < -5$ ולכן נרשום את התנאי כך: $|P - M| = 10 - (-x - 5)$

העלאה בריבוע של שני האגפים ופישוט נותנים משוואות של פרבולות:

$$4 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y - 15 = 0$$

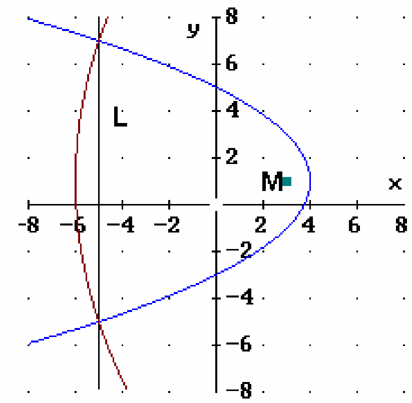
$$\text{SOLVE}(4 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y - 15 = 0,\ x)$$

$$x = -\frac{y^2 - 2 \cdot y - 15}{4}$$

$$-36 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y - 215 = 0$$

$$\text{SOLVE}(-36 \cdot x + y^2 - 2 \cdot y - 215 = 0,\ x)$$

$$x = \frac{y^2 - 2 \cdot y - 215}{36}$$



פעילות 9.3 – אמצעי המיתרים היוצאים מנקודה על המעגל

א. שרטטו מעגל שמרכזו **O** בראשית הצירים והרדיוס שלו 3 יחידות.
הגדירו נקודה קבועה על המעגל A:=[-3, 0].
הגדירו נקודה כלשהי על המעגל מעל ציר ה- x   A1:= [x, __________]
הגדירו נקודה כלשהי על המעגל מתחת ציר ה- x   A2:= [x, __________]
שרטטו מיתרים AA1 AA2 וסמנו את נקודות האמצע שלהן בצבע אחד לפי בחירתכם.
מהו לדעתכם המקום הגיאומטרי הנוצר על-ידי אמצעי המיתרים היוצאים מהנקודה הנתונה A?
בדקו על-ידי שרטוט אמצעי המיתרים (היעזרו בהוראה Vector)

ב. סמנו על-ידי R:=[x, y] נקודת אמצע של מיתר המחבר את הנקודה A עם נקודה כלשהי על המעגל שתסומן על-ידי T:=[p, q]. מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות R כאשר T רצה על כל המעגל.

ג. בחרו נקודה B בתוך המעגל ונקודה כלשהי T על המעגל. סמנו ב- R את אמצע הקטע BT.
מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות R כאשר T רצה על כל המעגל.

ד. בחרו נקודה C מחוץ למעגל הנתון ונקודה כלשהי T על המעגל. סמנו ב- R את אמצע הקטע BT. מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות R כאשר T רצה על כל המעגל.

ה. מהו הקשר בין המקומות הגיאומטריים שנוצרו בשאלות הקודמות והמעגל הנתון? הכלילו את הבעיה לנקודה כלשהי במישור.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.3.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 9.3

ראו גם קובץ: solution9.3.dfw

א. בפעילות זו עוסקים בבעיה שמופיעה בספרי הלימוד ומסווגת כבעיה שפתרונה מתבצע בעזרת משתני עזר. החידוש בהצגת הבעיה בסביבה טכנולוגית הוא באפשרות להדגים בשרטוט את המקום הגיאומטרי כאוסף של נקודות לפני שמוצאים את משוואת המקום הגיאומטרי. הנחיות לבניית ההדגמה ניתנות בסעיף הראשון. מגדירים את קצות המיתרים ומשרטטים את המיתרים:

$$x^2 + y^2 = 9$$

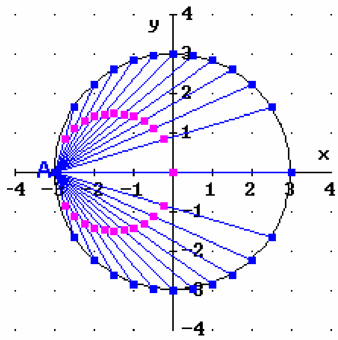
$$A := [-3,\ 0]$$

$$\left[A1 := \left[x,\ \sqrt{9 - x^2}\right],\ A2 := \left[x,\ -\sqrt{9 - x^2}\right]\right]$$

$$\mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} A & A1 \\ A & A2 \end{bmatrix},\ x,\ -2.5,\ 3,\ 0.5\right)$$

בניית אוסף הנקודות נעשית על-ידי ההוראה:

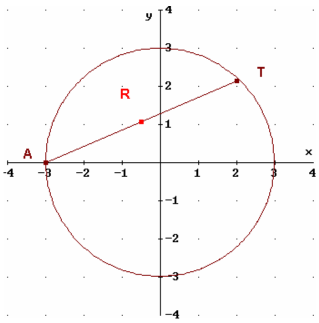
$$\mathrm{VECTOR}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{A + A1}{2} \\ \dfrac{A + A2}{2} \end{bmatrix},\ x,\ -2.5,\ 3,\ 0.5\right)$$

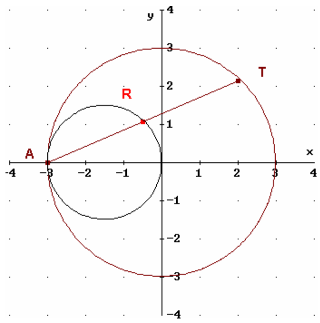


בשרטוט רואים כי נוצרים שני חצאי מעגל שאיחודם מעגל שלם (דהיינו הם נדבקים יפה), השרטוט ייתן "בקרה" לפותרים בחפשם את משוואת המקום הגיאומטרי.

ב. על מנת למצוא את משוואת המקום הגיאומטרי מגדירים נקודה כללית R:=[x, y] על המקום הגיאומטרי ונעזרים במשתני עזר, p ו- q, בהגדרת נקודה כללית על המעגל. מאחר ו- R היא אמצע הקטע AT מתקיים השוויון: $[x, y] = \frac{[-3,0]+[p,q]}{2}$. פתרון המשוואה עבור p, q הוא: $p = 2x + 3 \wedge q = 2y$. מאחר והנקודה T היא על המעגל הנתון מתקיים: $(2x+3)^2 + (2y)^2 = 9$.

פישוט המשוואה והשלמה לריבוע נותנים משוואת מעגל: $(x+1.5)^2 + y^2 = 1.5^2$.

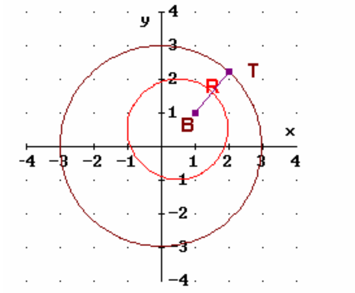




נשאלת השאלה מה הקשר בין המעגל שהתקבל ונתוני הבעיה. (דוגמה זו שבה רדיוס המעגל 3 ושיעור x של הנקודה A גם הוא 3 עלולה להטעות – אבל בסעיפים הבאים יתברר הקשר.)

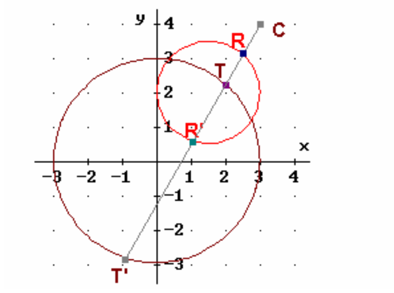
ג. חזרה על המהלך עבור נקודה B בתוך המעגל ששיעוריה (1, 1) נותן מעגל אחר:

$$4\cdot x^2 - 4\cdot x + 4\cdot y^2 - 4\cdot y - 7 = 0$$



ד. חזרה על המהלך עבור נקודה C מחוץ למעגל ששיעוריה (3, 4) נותן מעגל נוסף:

$$4\cdot x^2 - 12\cdot x + 4\cdot y^2 - 16\cdot y + 16 = 0$$



ה. בהדרגה מתברר הקשר בין המעגל הנתון, נקודת המוצא של המיתרים והמקום הגיאומטרי של אמצעי המיתרים. חזרה על השלבים למציאת המקום הגיאומטרי עבור מעגל כללי $x^2+y^2=r^2$ ונקודה ששיעוריה מסומנים על-ידי $(x\_, y\_)$ נותן את המשוואה: $(x-\frac{x\_}{2})^2+(y-\frac{y\_}{2})^2=(\frac{r}{2})^2$, שמבהירה את הקשר בין מרכיבי הבעיה.

פעילות 9.4 – מעגל תשע הנקודות (מעגל פויירבאך)

בראשית המאה ה- 19 גילו מתמטיקאים שהתעניינו בגיאומטריה משפט מפתיע הטוען כי *לכל* משולש קשורות *תשע* נקודות הנמצאות על מעגל אחד. נקודות אלו הן: אמצעי הצלעות של המשולש, הנקודות בהם פוגשים הגבהים את הצלעות, ואמצעי הקטעים המחברים את נקודת החיתוך של הגבהים עם קדקודי המשולש.

המשפט המעניין נקרא על שם אחד החוקרים, קארל וילהלם פויירבאך (Feurbach).

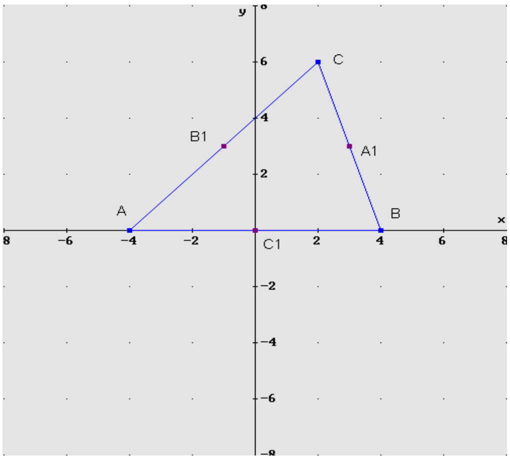
אשרו את נכונות המשפט לגבי המשולש שקדקודיו [A:= [-4, 0], B:= [4, 0], C:=[2, 6]

הדרכה:

א. שרטטו את המשולש, חשבו את השיעורים של אמצעי הצלעות A1, B1, C1 וסמנו את אמצעי הצלעות בשרטוט.

וודאו שההוראה Simplify Before Plotting (בתפריט Options בחלון הגרפי) מסומנת!

$$\left[A1 := \frac{B + C}{2},\ B1 := \frac{C + A}{2},\ C1 := \frac{A + B}{2}\right]$$



ב. מצאו את נקודות המפגש של הגבהים עם הצלעות: D (על AB), E (על BC), F (על AC).
סמנו אותן בשרטוט.

ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הגבהים H, וחשבו את השיעורים של אמצעי הקטעים המחברים אותה עם קדקודי המשולש (K, L, J). סמנו את אמצעי הקטעים האלה בשרטוט.

ד. הראו כי כל תשע הנקודות A1, B1, C1, D, E, F, J, K, L, נמצאות על מעגל אחד. מצאו את משוואת המעגל.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.4.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 9.4

ראו גם קובץ: solution9.4.dfw

א. המשפט המפתיע על מעגל תשע הנקודות הקשורות לכל משולש התגלה על-ידי מתמטיקאים במאה ה- 19: Jean-Victor Poncelet(1788-1867), Charles J. Brianchon (1785-1864) ו- Karl Wilhelm Feurbach (1800-1834). המשפט (והמעגל) נקרא על שם אחד החוקרים, קארל וילהלם פויירבאך שהוכיח טענה מפתיעה נוספת לגבי מעגל תשע הנקודות שנביא בהמשך (רק בחומר למורה).

לקריאה נוספת:

Pedoe, D. (1995). *Circles, A mathematical View*, Mathematical Association of America.

Wallace, E. C. and West, S. F. (1998). *Roads to Geometry*. Prentice Hall.

ובכן, לגבי משולש נתון הנקודות הבאות נמצאות על מעגל אחד: אמצעי הצלעות של המשולש, עקבי הגבהים (הנקודות בהן פוגשים הגבהים את הצלעות המשולש), ואמצעי הקטעים המחברים את נקודת החיתוך של הגבהים עם קדקודי המשולש.

ב. קדקודי המשולש הנתון (בסימון של התוכנה): A:= [-4, 0], B:= [4, 0], C:= [2, 6]

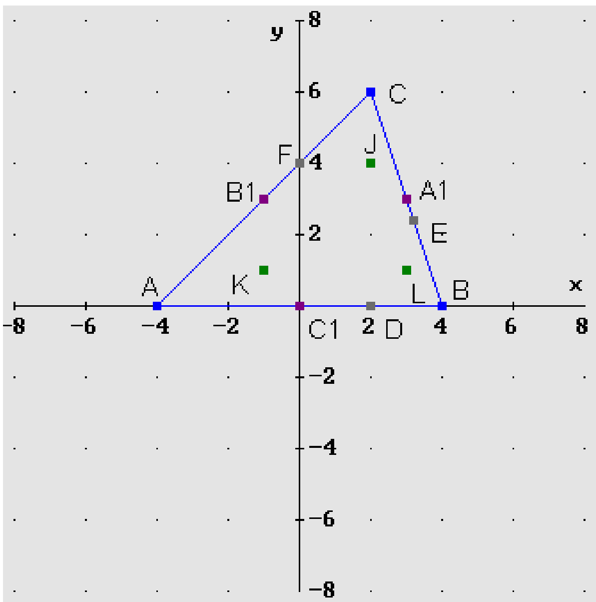
אמצעי הצלעות: A1:= [3, 3], B1:= [-1, 3], C1:= [0, 0]

משוואות הישרים עליהן נמצאות הצלעות: y = 0, y = x + 4, y = -3x + 12

עקבי הגבהים: D:= [2, 0], F:= [0, 4], E:= [3.2, 2.4]

ג. אמצעי הקטעים המחברים את מפגש הגבהים [2, 2] עם קדקודי המשולש:

K:= [-1, 1], L:= [3, 1], J:= [2, 4]

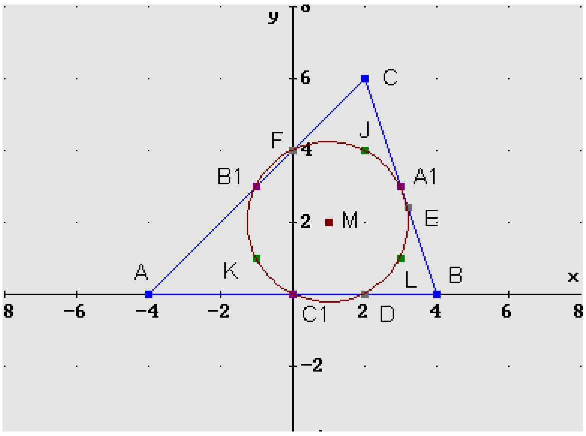


ד. שלוש נקודות שאינן על ישר אחד קובעות מעגל. נרשום מערכת של שלוש משוואות למציאת ריבוע הרדיוס של המעגל שיסומן r_sq (ריבוע - square), ושיעורי מרכז המעגל M(u, v) העובר דרך אמצעי הצלעות של המשולש הנתון, כלומר A1, B1, C1:

$$(A1-M)^2 = r\_sq \wedge (B1-M)^2 = r\_sq \wedge (C1-M)^2 = r\_sq$$

מפתרון המערכת מקבלים את משוואת המעגל:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5$$



בשרטוט נראה שאכן תשע הנקודות נמצאות על המעגל. אפשר להציב את שיעורי שש הנקודות האחרות במשוואת המעגל ולאשר ששיעורי הנקודות מקיימות את המשוואה ואפשר גם לחשב את משוואת המעגל הנקבע על-ידי שלוש הנקודות D,E,F (למשל) ואת משוואת המעגל הנקבע על-ידי שלוש הנקודות האחרות. בכל מקרה מתקבלת אותה משוואת מעגל.

משפט פויירבאך: מעגל תשע הנקודות משיק למעגל החסום במשולש וגם לשלושת המעגלים החיצוניים המשיקים לצלע אחת של המשולש ולהמשכי שתי הצלעות האחרות.

משפט מפתיע זה שפויירבאך גילה והוכיח לגבי מעגל תשע הנקודות נחשב לאחד המשפטים היפים ביותר בגיאומטריה, ובגללו נקרא מעגל תשע הנקודות על שמו. אנחנו נאשר את התכונה לגבי הדוגמה שלנו (ראו בקובץ solution9.4.dfw שורות #35-#60). נסתמך על כך שמשוואת אחת הצלעות במשולש הנתון היא y = 0, מרכז מעגל חסום נמצא במרחקים שווים מהצלעות ולכן הרדיוס בכל מעגל שווה לערך המוחלט של שיעור y של מרכז המעגל החסום. מרכזי המעגלים יתקבלו מפתרון מערכת המשוואות:

$$m2^2 = \frac{(m1 - m2 + 4)^2}{2} \wedge m2^2 = \frac{(3 \cdot m1 + m2 - 12)^2}{10}$$

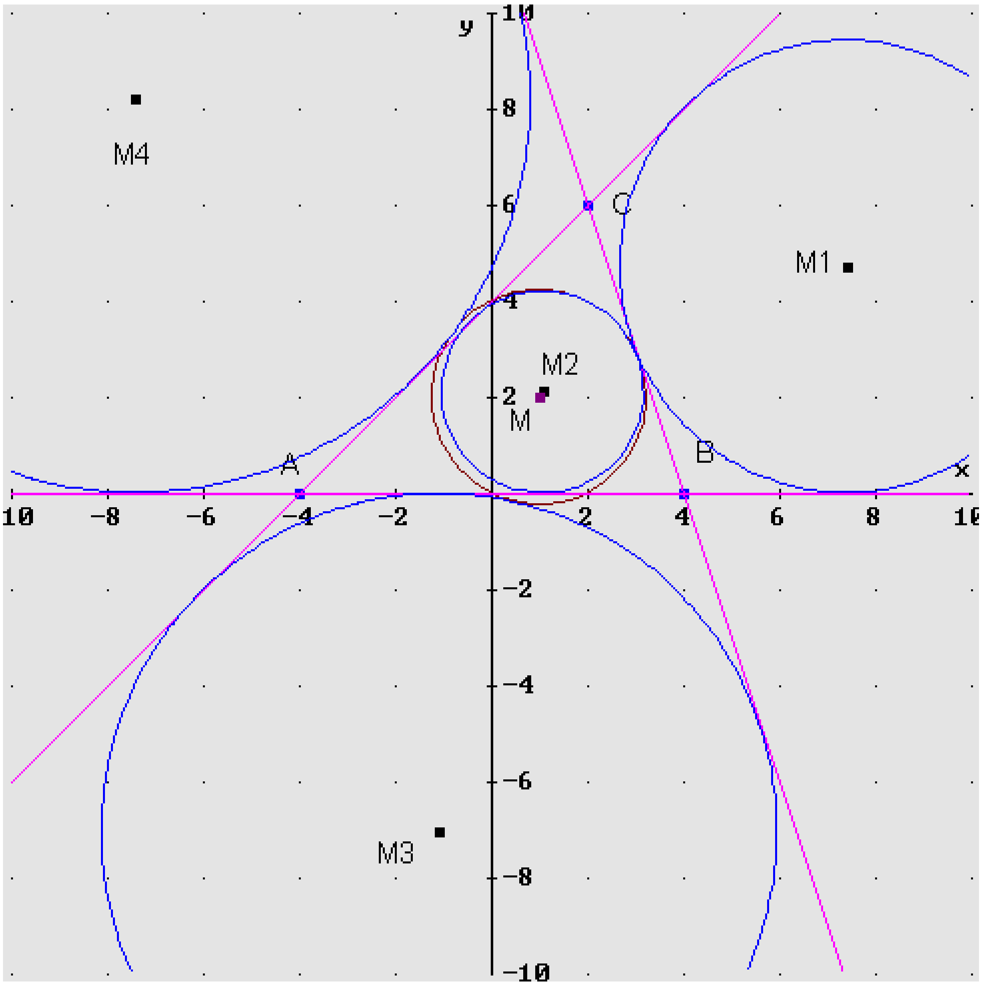
משוואות ארבעת המעגלים:

$$Cir1 := |[x, y] - M1| = |M1_2|$$

$$Cir2 := |[x, y] - M2| = |M2_2|$$

$$Cir3 := |[x, y] - M3| = |M3_2|$$

$$Cir4 := |[x, y] - M4| = |M4_2|$$



ארבעה המעגלים (בצבע כחול) נראים משיקים למעגל תשע הנקודות (בצבע חום) שמרכזו בנקודה ששיעוריה (1, 2).

פויירבאך עמל קשות כדי לחשב, בצורה כללית, את סכום הרדיוסים של שני מעגלים - והראה כי הסכום שווה למרחק בין מרכזי המעגלים. (במקרה של המעגל החסום במשולש יש לחשב את ההפרש.) בדוגמה הפרטית שלנו ובעזרת תוכנה מתמטית חיינו קלים יותר.

פעילות 9.5 – שאלות נוספות על מעגל תשע הנקודות

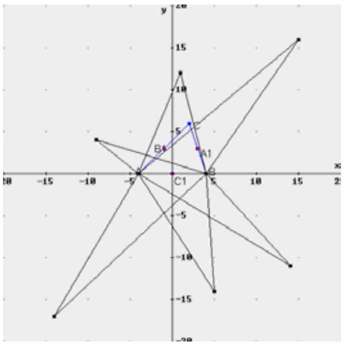
א. מהו המקום הגיאומטרי של המרכזים של מעגלי תשע הנקודות עבור משולשים המתקבלים אם מחליפים את הקדקוד C? נגריל (באופן אקראי) שיעורים עבור קדקוד C וננסה להעלות השערה.

הדרכה: הגדירו את הקדקוד C: C:= [u, v] ואת המרכז של מעגל תשע הנקודות: M:= [p, q]

כדי לשרטט מספר משולשים "באופן אקראי" נשתמש בפונקציה RANDOM של *Derive*:

רשמו RANDOM(0)= להפעלת מנגנון ליצירת מספרים אקראיים על בסיס הזמן שעבר מהתחלת הרצת התוכנה. להגרלת מספר אקראי בין 20- ל- 20 הגדירו: r:= -20 + RANDOM(41)

עתה הגרילו ושרטטו מספר משולשים בעזרת הביטוי: [A, B, [r,r], A].



הראו כי שיעורי המרכזים של מעגל פויירבאך עבור משולשים המתקבלים מהחלפת הקדקוד C לנקודה ששיעוריה (u, v), v ≠ 0 (מדוע?) מקיימים: $p=\frac{u}{2}\wedge q=-\frac{u^2-v^2-16}{4v}$

הגדירו: $F\_center(u,v):=[\frac{u}{2},-\frac{u^2-v^2-16}{4v}]$

רשמו את הביטוי F_center(r, r) ופשטו אותו מספר פעמים.

כדי לקבל נקודות רבות (של מרכזים של מעגלי-תשע-הנקודות) השתמשו בפונקציה vector:

vector(F_center(r, r), i , 1, 60)

שרטטו (זכרו להפעיל Simplify Before Plotting) את הביטוי מספר פעמים עד שתקבלו תמונה מקדימה סבירה של המקום הגיאומטרי המבוקש. מהי השערתכם לגבי התיאור האלגברי של המקום הגיאומטרי הזה? בדקו אותה.

תארו את המקום הגיאומטרי בדרך אלגברית. מה הקשר בינו לבין הצלע AB של המשולש?

ב. מצאו את המקום הגיאומטרי של המרכזים של מעגלי-תשע-הנקודות עבור משולשים המתקבלים מהזזת הקטע AB במישור על-ידי וקטור [s, t], t ≠ 6 (מדוע?). תארו את המקום הגיאומטרי בדרך אלגברית. מה הקשר בינו לבין הקדקוד C והצלע AB של המשולש?

```
[C := [2, 6], A := [-4, 0] + [s, t], B := [4, 0] + [s, t]]
```

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.5.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 9.5

ראו גם קובץ: solution9.5.dfw

א. כלים טכנולוגיים מסוג גיאומטריה דינמית או תוכנות סימבוליות-גרפיות מאפשרים בניית מעגל תשע נקודות למשולשים בקלות. יתרה מזאת ההנאה מ"קבלת תוצר" מעודדת את הלומדים להוסיף ולחקור את הבעיה. ואמנם, תוך כדי משחק בתוכנת גיאומטריה דינמית גילה West משפטים מפתיעים נוספים הקשורים למעגלי תשע נקודות.

West C. F. (2000). Discovering theorems in geometry: An interesting result concerning the nine-point circle. *New York State Mathematics Teachers' Journal*,
47 (2), 105-106.

בעקבות עבודתו נכתבה פעילות זו. בגיאומטריה דינמית חוקרים בעיה על-ידי גרירת נקודות והתבוננות בתוצרים המתקבלים ואחר-כך מעלים השערות ומנסים להוכיחן. בעזרת המנגנון להגרלת מספרים אקראיים של התוכנה Derive ניצור כעין הדמייה של תוצאת הגרירה, ותוך שימוש "כבד" ביכולת הסימבולית נשרטט במהירות דוגמאות רבות לפי הנדרש.

נבטא את שיעורי המרכז (p, q) של מעגל תשע הנקודות עבור משולשים המתקבלים מהזזת הקדקוד C לנקודה ששיעוריה (u, v) $v \neq 0$. (אם $v = 0$, שלוש הנקודות הן על ישר אחד.) במקרים בהם מתקבל משולש שווה שוקיים או שווה צלעות חלק מתשע הנקודות יכולות להתלכד.

```
[C := [u, v], M := [p, q]]
```

$$\mathrm{SOLVE}\left(\left(\frac{A+B}{2}-M\right)^2=\left(\frac{A+C}{2}-M\right)^2 \wedge \left(\frac{A+B}{2}-M\right)^2=\left(\frac{B+C}{2}-M\right)^2,\ [p,\ q]\right)$$

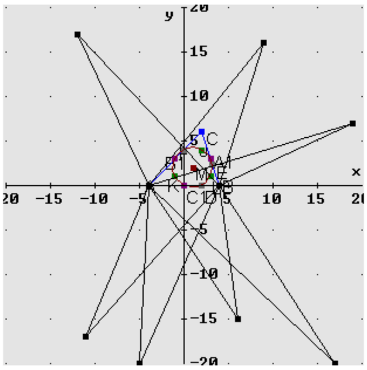
$$p=\frac{u}{2} \wedge q=-\frac{u^2-v^2-16}{4\cdot v}$$

$$\mathrm{F\_center}(u,\ v) := \left[\frac{u}{2},\ -\frac{u^2-v^2-16}{4\cdot v}\right]$$

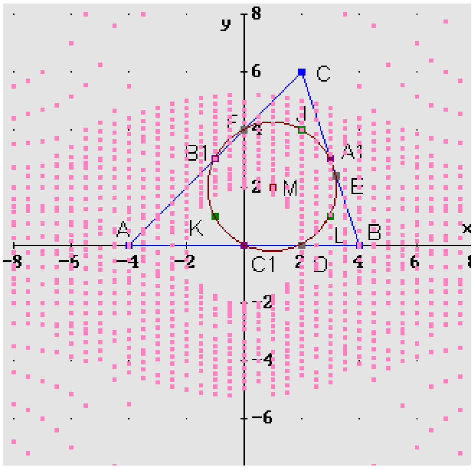
נפעיל את מנגנון ההגרלה של התוכנה על-ידי חישוב הביטוי: RANDOM(0) = ונגדיר מספר אקראי בין ‎-20‎ ל- 20 על-ידי שנגדיר r:= -20 + RANDOM(41).

הביטוי RANDOM(0) מפעיל את מנגנון יצירת מספרים אקראיים על בסיס הזמן שעבר מהתחלת הרצת התוכנה. הביטוי RANDOM(41) מייצר מספר אקראי מבין המספרים 0 עד 40.

"נגריל" (נגדיר באקראי) ונשרטט מספר משולשים על-ידי הביטוי [A, B, [r, r], A]:



נפשט את הביטוי F_center(r, r) ונקבל דוגמאות למרכזים של מעגל תשע נקודות. (יתכן שעל-ידי ההגרלה יתקבל הערך "אפס" עבור v , ומאחר ו- v מופיע במכנה של הביטוי המתאר את השיעור השני של המרכז - לא תהיה משמעות מספרית לשיעור השני ±∞.) חזרה מרובה על חישוב מרכזים אקראיים, באמצעות הפקודה vector, ושרטוטם תיתן תמונה כמו זו שלהלן:



מן השרטוט עולה ההשערה כי מרכזי המעגלים נמצאים על המעגל שמרכזו בראשית הצירים ואורך רדיוסו 2 ומחוץ לו. נוכיח זאת על-ידי מציאת תנאי לגבי p ו- q כך שיתקבל פתרון ממשי עבור u ו- v ממערכת המשוואות שהתקבלה לעיל:

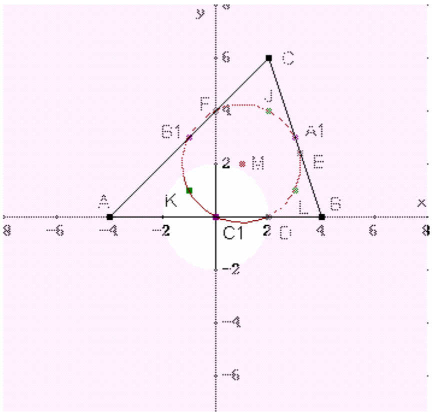
$$\#17:\quad p = \frac{u}{2} \wedge q = -\frac{u^2 - v^2 - 16}{4\cdot v}$$

$$\#18:\quad \text{SOLVE}\left(p = \frac{u}{2} \wedge q = -\frac{u^2 - v^2 - 16}{4\cdot v},\ [u, v]\right)$$

$$\#19:\quad \left(u = 2\cdot p \wedge v = 2\cdot\left(q - \sqrt{p^2 + q^2 - 4}\right) \wedge v \neq 0\right) \vee \left(u = 2\cdot p \wedge v = 2\cdot\left(\sqrt{p^2 + q^2 - 4} + q\right) \wedge v \neq 0\right)$$

ואכן, פתרון ממשי מתקבל כאשר הביטוי תחת סימן השורש אי-שלילי: $p^2 + q^2 \geq 4$.

אם כך המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים הוא על המעגל ומחוץ למעגל שמרכזו בראשית הצירים (אמצע הצלע AB) ואורך רדיוסו 2 (1/4*AB).

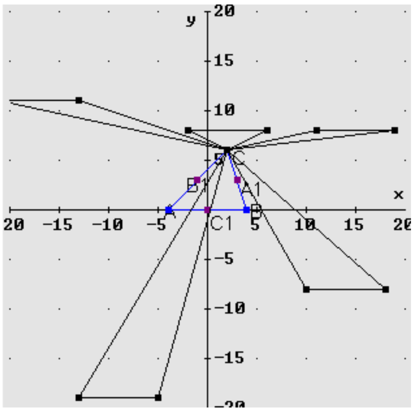


שימו לב, למרות שהדגמנו והוכחנו את ההשערה לגבי משולש שאחת מצלעותיו היא AB המסוימת שבחרנו – הטענה נכונה לכל משולש על-ידי בחירה מתאימה של מערכת הצירים.

ב. עתה ניצור משולשים אקראיים המתקבלים מהזזה של הצלע AB, נגדיר:

A:= [-4, 0] + [s, t]   B:= [4, 0] + [s, t]

"נגריל" מספר משולשים:



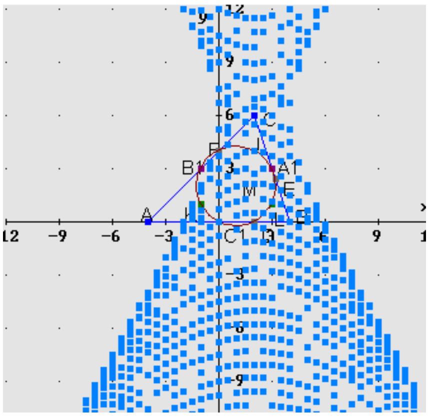
נבטא את שיעורי המרכזים של מעגלי פויירבאך (p, q) המתקבלים מהזזת הצלע על-ידי וקטור [s, t], t ≠ 6 (מדוע?).

$$\#26:\quad \mathrm{SOLVE}\left(\left(\frac{A+B}{2}-M\right)^2=\left(\frac{A+C}{2}-M\right)^2 \wedge \left(\frac{A+B}{2}-M\right)^2=\left(\frac{B+C}{2}-M\right)^2,\ [p,\ q]\right)$$

$$\#27:\quad p=\frac{s+2}{2} \wedge q=\frac{s^2-4\cdot s+3\cdot(t^2-4\cdot t-16)}{4\cdot(t-6)}$$

$$\#28:\quad \mathrm{F\_cent}(s,\ t):=\left[\frac{s+2}{2},\ \frac{s^2-4\cdot s+3\cdot(t^2-4\cdot t-16)}{4\cdot(t-6)}\right]$$

נדגים את מרכזי המעגלים על-ידי הגרלת הרבה דוגמאות ונחפש חוקיות. מהשרטוט עולה ההשערה כי מרכזי המעגלים הם על היפרבולה ומחוץ להיפרבולה שמרכזה בקדקוד C של המשולש.



מהשרטוט עולה ההשערה כי מרכזי המעגלים הם על היפרבולה ומחוץ להיפרבולה שמרכזה בקדקוד C של המשולש.

נוכיח זאת על-ידי מציאת תנאי לגבי p ו- q כך שיתקבל פתרון ממשי עבור s ו- t ממערכת המשוואות שהתקבלה לעיל:

$$\#30:\quad \mathrm{SOLVE}\left(p = \frac{s+2}{2} \wedge q = \frac{s^2 - 4\cdot s + 3\cdot(t^2 - 4\cdot t - 16)}{4\cdot(t-6)},\ [s,\ t]\right)$$

$$\#31:\quad \left(s = 2\cdot(p-1) \wedge t = -\frac{2\cdot(\sqrt{(-3\cdot p^2 + 12\cdot p + q^2 - 12\cdot q + 36)} - q - 3)}{3} \wedge t \neq 6\right)$$

$$\vee \left(s = 2\cdot(p-1) \wedge t = \frac{2\cdot(\sqrt{(-3\cdot p^2 + 12\cdot p + q^2 - 12\cdot q + 36)} + q + 3)}{3} \wedge t \neq 6\right)$$

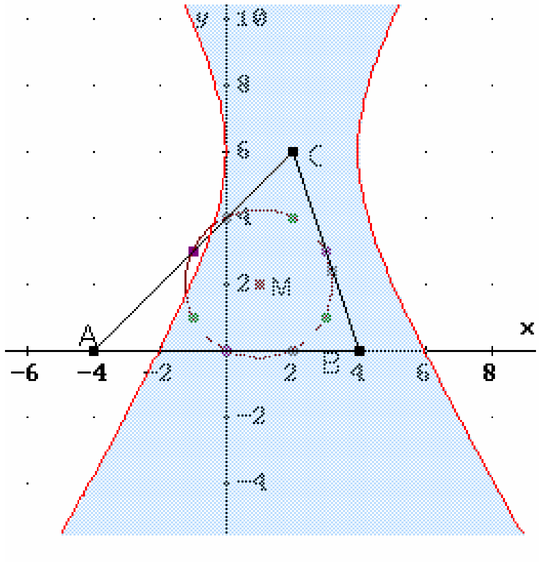
פתרון ממשי מתקבל כאשר הביטוי תחת סימן השורש אי-שלילי: $-3p^2 + 12p + q^2 - 12q + 36 \geq 0$

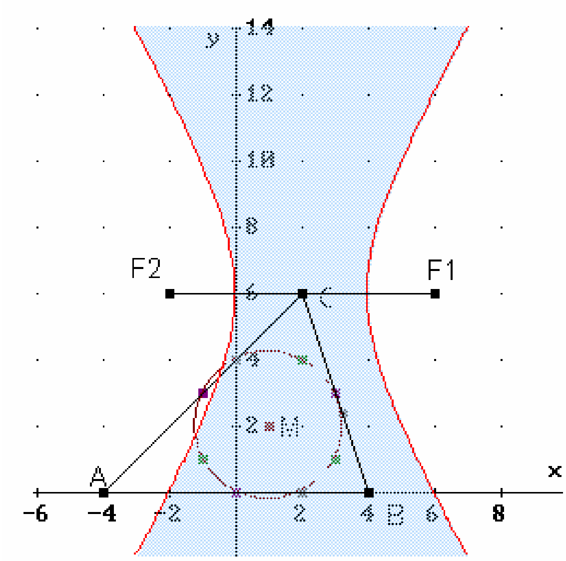
מרכזי המעגלים נמצאים על ההיפרבולה ומחוץ להיפרבולה שמשוואתה: $3(p-2)^2 - (q-6)^2 = 12$

מרכז ההיפרבולה ב- C, והמרחק בין שני המוקדים הוא 8 (שווה לאורך הצלע AB). המרחק בין קדקודי ההיפרבולה הוא 4 (מחצית אורך הצלע AB).

(כאמור לעיל בפעילויות בהן עסקנו ב"מעגל המדריך", לתלמידים צפויה בעיה בהבנה בגלל הסימונים p,q במשוואה במקום x,y שבמערכת הצירים בשרטוט.)

עלינו לוודא שהתוצאות אינן תלויות בשרטוט הספציפי. הסברנו לעיל כי הקביעה של AB היא כללית (ניתן לבחור מערכת צירים מתאימה) אם מחליפים את שיעורי הקדקוד C בשיעורים כלליים, למשל (g, h), וחוזרים על מהלך החישוב – מתקבלת אותה המסקנה לגבי המקום הגיאומטרי של המרכזים של מעגלי תשע הנקודות של המשולשים.


y
10
8
6
C
4
2
M
A
x
−6
−4
−2
2
B
4
6
8
−2
−4


y
14
12
10
8
F2
F1
6
C
4
2
M
A
x
−6
−4
−2
2
4
B
6
8