8 . מקומות גיאומטריים מהמעלה השנייה   מדריך למורה

מבוא

ביחידה זו נביא מבט מאחד על הפרבולה, האליפסה וההיפרבולה. בדומה לחקירת הגיאומטריה של פרבולה באמצעות ה"מיתר המוקדי" (מיתר העובר דרך המוקד ומאונך לציר הפרבולה) נחקור את הגיאומטריה של אליפסה והיפרבולה באמצעות מיתרים מוקדיים. בעקבות החקירה נציג את שלוש העקומות כמקומות גיאומטריים של נקודות שיחס מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישר נתון (מדריך) הוא גודל קבוע e (אקסצנטריות). נראה זאת גם לגבי שניוניות (עקומות המייצגות משוואה בשני משתנים מהמעלה השנייה) בעלות ציר סימטריה משופע.

רשימת הפעילויות:

פעילות 8.1 – גיאומטריה של אליפסה

פעילות 8.2 – גיאומטריה של היפרבולה

פעילות 8.3 – מבט מאחד

פעילות 8.4 – ציר סימטריה משופע

פעילות 8.1 – גיאומטריה של אליפסה

א. שרטטו את האליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ וסמנו את המוקדים. מהי האקסצנטריות?

הוסיפו לשרטוט את המיתר העובר דרך המוקד הימני (שיסומן F1) ומאונך לציר הראשי של האליפסה. נקרא לו "המיתר המוקדי". (יש כמובן מיתר דומה העובר דרך המוקד השני.)

חשבו את שיפועי המשיקים לאליפסה בקצות המיתר המוקדי.

מה מצאתם?

ב. שרטטו את המשיקים לאליפסה בקצות המיתר המוקדי.

תוכלו להיעזר בתוכנה למציאת משוואת משיק לגרף של פונקציה סתומה:

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-1,\ x,\ y,\ 4,\ 1.8\right)=$$

באיזו נקודה נחתכים המשיקים?

העבירו מיתר באליפסה העובר דרך המוקד הימני ודרך הנקודה (3 , ___) שעל האליפסה.

שרטטו את זוג המשיקים לאליפסה בקצות מיתר זה ומצאו את נקודת החיתוך שלהם.

מהי משוואת הישר שעליו נפגשו שני זוגות המשיקים?

חשבו את המרחקים מנקודת קצה של המיתר אל המוקד ואל הישר שבו נפגשו זוגות המשיקים.

מה היחס בין המרחקים? מהי השערתכם בשלב זה?

ג. נכליל את הממצאים שהתקבלו בסעיף הקודם. הגדירו שיעור x של נקודה כללית P על האליפסה הנתונה =:x1. נגביל אותו כך שיוכל להוות שיעור ראשון של נקודה על האליפסה הנתונה שבה, כזכור a = 5. קבעו את תחום הערכים שלו: $x1 :\in \text{Real}[-5,5]$

חשבו את שיעורי y המתאימים ל- x1. השלימו את שיעור y [___ ,P:=[x1

חשבו את המנה: $\frac{|P-F1|}{6.25-x1}=$

מה המשמעות הגיאומטרית של המונה? __________ ושל המכנה?__________

מה משמעות התוצאה?

בהסתמך על מה שלמדנו ביחידה 6 מה לדעתכם יתקבל, כאשר תשרטטו את הגרף הנתון ע"י המשוואה:

$$|[x,\ y]-F1|=\frac{4}{5}\cdot|x-6.25|$$

בדקו והסבירו.

ד. שרטטו שוב את האליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

הציבו 2x במקום x ו- 2y במקום y ושרטטו.

הציבו $\frac{x}{1.5}$ במקום x ו- $\frac{y}{1.5}$ במקום y ושרטטו.

מה קיבלתם? מהי האקסצנטריות של כל אחת מהאליפסות שהתקבלו?

שרטטו אליפסה נוספת בעלת אקסצנטריות $\frac{4}{5}$.

מהי מסקנתכם?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name8.1.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 8.1

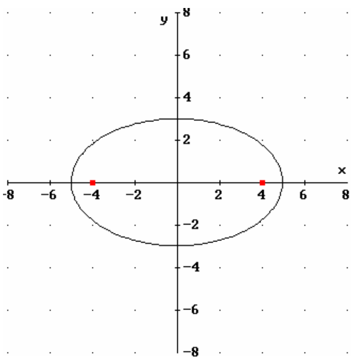
ראו גם קובץ: Solution8.1.dfw

במהלך עיסוקנו בפרבולה (יחידה 5) הכרנו את המיתר המוקדי (מיתר העובר דרך המוקד ומאונך לציר הראשי). בפעילות זו נבנה מיתרים מוקדיים באליפסה ונבחן את תכונותיהם. בדרך זו נעמיק את ההבנה בנושא האליפסה, וגם נסלול את הדרך לפיתוח מבט מאחד על מקומות גיאומטריים מהמעלה השנייה.

א. נתונה משוואת אליפסה קנונית: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

באליפסה זו: $a=\sqrt{25}=5$, $b=\sqrt{9}=3$, $c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

מוקדי האליפסה: (4 , 0) (-4 , 0)



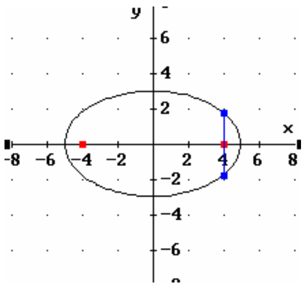
האקסצנטריות: $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

המיתר המוקדי של האליפסה, הוא המיתר העובר דרך מוקד האליפסה (הימני או השמאלי) ומאונך לציר הראשי שלה. המוקד הימני של האליפסה הוא F1:=[4, 0] . כדי למצוא את קצות המיתר המוקדי, נציב x=4 במשוואת האליפסה.

$$\text{SOLVE}\left(\frac{4^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,\ y\right)$$

$$y = -\frac{9}{5} \vee y = \frac{9}{5}$$

נוסיף את המיתר המוקדי לשרטוט:



נחשב את שיפועי המשיקים לאליפסה בקצות המיתר המוקדי כנגזרת של פונקציה סתומה. נגזרת זו קלה לחישוב. נוכל גם להיעזר בתוכנה (לחישוב או לבדיקה) בפקודה לחישוב שיפוע של משיק לגרף של פונקציה סתומה.

$$\text{IMP\_DIF}\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1,\ x,\ y\right) = -\frac{9 \cdot x}{25 \cdot y}$$

נציב בנגזרת שמצאנו את שיעורי הנקודה שאת שיפוע המשיק בה אנו מעוניינים למצוא:

(1.8 , 4) (4 , -1.8). ונקבל את השיפועים בקצות המיתר המוקדי (בהתאמה): $-\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}$.

כלומר:

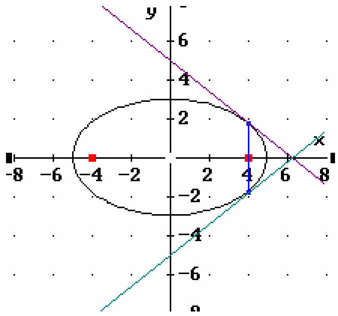
הערך המוחלט של שיפוע המשיק לאליפסה במקרה פרטי זה בקצות המיתר המוקדי שווה לאקסצנטריות של האליפסה! בדיקה לגבי דוגמאות נוספות תחזק את ההשערה על הקשר בין שיפוע המשיק לאליפסה בקצות המיתר המוקדי לאקסצנטריות של האליפסה, והצבת שיעורי נקודת קצה של המיתר המוקדי באליפסה בעלת משוואה קנונית כללית $(\frac{b^2}{a})$ בנוסחת השיפוע של משיק לגרף של אליפסה בנקודה עליה $(-\frac{b^2x}{a^2y})$ תאשר זאת.

ב. נבנה את המשיקים לאליפסה בקצות המיתר המוקדי. נוכל שוב להיעזר בתוכנה, בפקודה למציאת משיק לגרף של פונקציה סתומה:

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-1,\ x,\ y,\ 4,\ 1.8\right)=\frac{25-4\cdot x}{5}$$

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-1,\ x,\ y,\ 4,\ -1.8\right)=\frac{4\cdot x-25}{5}$$

נוסיף את המשיקים לשרטוט



נחשב את הקואורדינטות של נקודת המפגש של שני המשיקים לאליפסה בקצות המיתר המוקדי:

$$y=\frac{25-4\cdot x}{5}\wedge y=\frac{4\cdot x-25}{5}$$

$$\text{SOLVE}\left(y=\frac{25-4\cdot x}{5}\wedge y=\frac{4\cdot x-25}{5},\ [x,\ y]\right)$$

$$x=\frac{25}{4}\wedge y=0$$

נעביר מיתר נוסף באליפסה, העובר דרך המוקד הימני (0 , 4) ודרך נקודה על האליפסה ששיעור ה- y שלה הוא 3. כדי למצוא את קצותיו של מיתר זה, נציב במשוואת האליפסה y = 3 ונקבל: x = 0 .

אחד מקצות המיתר הוא: (3 , 0)

משוואת המיתר (לפי שתי הנקודות שעליו): $y=-\frac{3}{4}\cdot x+3$

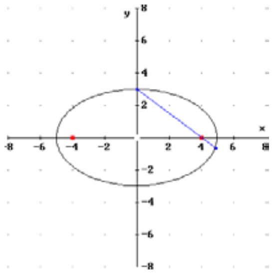
כדי למצוא את קצהו השני של המיתר נפתור את מערכת המשוואות:

$$y=-\frac{3}{4}\cdot x+3\wedge\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\text{SOLVE}\left(y=-\frac{3}{4}\cdot x+3\wedge\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1,\ [x,\ y]\right)$$

$$\left(x=\frac{200}{41}\wedge y=-\frac{27}{41}\right)\vee(x=0\wedge y=3)$$

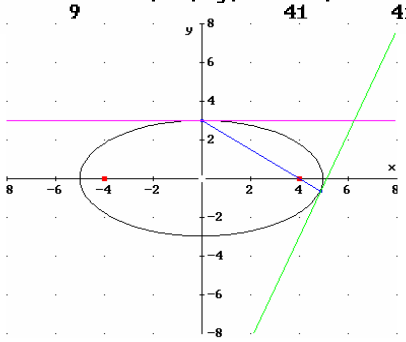
נשרטט את המיתר:



נמצא את משוואות המשיקים לאליפסה בקצות המיתר בעזרת הפקודה לחישוב משוואת משיק לגרף של פונקציה סתומה ונוסיף את המשיקים לשרטוט:

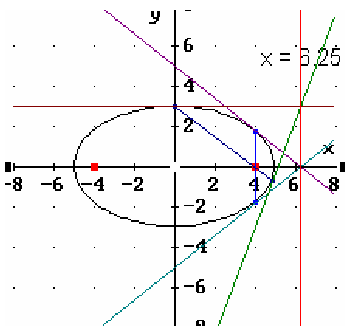
$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-1,\ x,\ y,\ 0,\ 3\right)=3$$

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-1,\ x,\ y,\ \frac{200}{41},\ -\frac{27}{41}\right)=\frac{8\cdot x-41}{3}$$



שימו לב שאחד מקצות המיתר הוא קצה הציר המשני של האליפסה, ואכן קיבלנו משיק מקביל לציר הראשי. נחשב את שיעורי נקודת המפגש שלהם: $x=\frac{25}{4},\ y=3$

מתברר כי שני זוגות המשיקים בקצות המיתרים המוקדיים נפגשים על הישר שמשוואתו היא: $x=\frac{25}{4}(=\frac{a^2}{c})$ כלומר על המדריך הימני של האליפסה. חישוב המרחקים של קצה מיתר מוקדי אל המוקד ואל המדריך בשתי הדוגמאות מצביע על כך שהיחס ביניהם שווה לאקסצנטריות: $\frac{1.8}{2.25}=\frac{4}{5}$ ו- $\frac{5}{6.25}=\frac{4}{5}$.



נעבור לקצה השני של המיתר המוקדי שקצהו האחד הוא בנקודה ששיעוריה (0, 3).

$$\left[\frac{200}{41}, -\frac{27}{41}\right]$$

מרחק הקצה מן המוקד:

$$\left|\left[\frac{200}{41}, -\frac{27}{41}\right] - [4, 0]\right| = \frac{45}{41}$$

מרחק מן הקצה הזה אל הישר שעליו נפגשו המשיקים:

$$\left|\frac{200}{41} - \frac{25}{4}\right| = \frac{225}{164}$$

ואכן נשמר אותו יחס:

$$\frac{45}{41} = \frac{4}{5}\cdot\frac{225}{164}$$

ג. ברצוננו להראות כי המקום הגיאומטרי של נקודות מפגש של משיקים לאליפסה בקצות מיתרים העוברים דרך המוקד הוא הישר המדריך לאליפסה הנתונה.

נעבור למקרה כללי. נגדיר משתנה =:x1 ונגביל אותו כמו קודם.

```
x1 :=
x1 :ε Real [-5, 5]
```

נחשב את שיעור ה- y של נקודה כללית על האליפסה, P , ששיעורה הראשון הוא x1.

מכיוון שהאליפסה נתונה על ידי משוואה קנונית, שתי הנקודות הן סימטריות לציר ה-x. נבחר אחת מהן כנקודה כללית על האליפסה (בחרנו את העליונה, בדקו שהתכונות המעניינות אותנו מתקיימות גם לגבי הנקודה התחתונה).

$$P := \left[x1, \frac{3\cdot\sqrt{(25 - x1^2)}}{5}\right]$$

המרחק בין נקודה על האליפסה לבין המוקד הוא |P – F1|. המרחק מנקודה על האליפסה אל הישר שעליו נפגשו המשיקים הוא x = 25/4 = 6.25 .

נחשב את היחס בין המרחקים:

$$\frac{|P - F1|}{6.25 - x1} = \frac{4}{5}$$

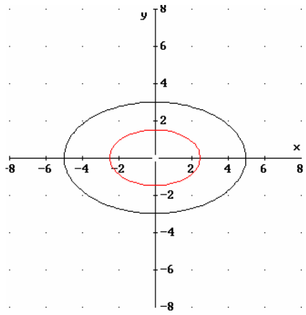
כל נקודה על האליפסה מקיימת את התנאי: היחס בין מרחק הנקודה מהמוקד לבין מרחקה אל המדריך שווה לאקסצנטריות. אם כן, קיבלנו הגדרה חלופית לאליפסה הנתונה כפי שהכרנו ביחידה 6:

$$|[x, y] - F1| = \frac{4}{5}\cdot|x - 6.25|$$

פשטו משוואה זו והראו כי היא שקולה למשוואה הקנונית הנתונה.

ד. נבצע הצבות במשוואת האליפסה הנתונה, כדי להראות כי כל האליפסות בעלות אותה אקסצנטריות הן אליפסות *דומות* (מתקבלות זו מזו על-ידי העתקת דמיון). נציב 2x במקום x ו- 2y במקום y ונשרטט:

$$\frac{(2\cdot x)^2}{25}+\frac{(2\cdot y)^2}{9}=1$$

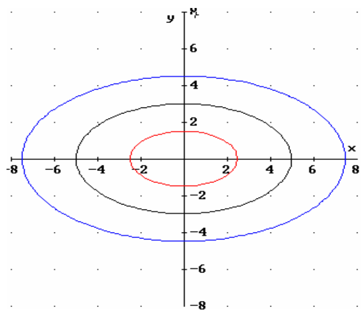


מההצבה התקבלה האליפסה הפנימית (בצבע אדום בשרטוט הנ"ל). מהשרטוט מתקבל הרושם שה"פרופורציה" של האליפסה נשמרה. נחשב את האקסצנטריות: נפשט את משוואת האליפסה שהתקבלה על ידי ההצבה, ונציג אותה בצורתה הקנונית: $\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$.

כאן, $a=\frac{5}{2};b=\frac{3}{2};c=\sqrt{\frac{25-9}{4}}=2$ האקסצנטריות: $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\frac{5}{2}}=\frac{4}{5}$

ננסה הצבה נוספת: x/1.5 במקום x ו- y/1.5 במקום y ונשרטט:

$$\frac{\left(\frac{x}{1.5}\right)^2}{25}+\frac{\left(\frac{y}{1.5}\right)^2}{9}=1$$



חישוב דומה יוכיח, כי גם כאן האקסצנטריות היא 4/5. אם כן, מהדוגמאות עולה ההשערה כי העתקות הדמיון ("ניפוח" ו"כיווץ") שומרות על האקסצנטריות. אפשר לתת הוכחה כללית בעזרת פרמטר, כלומר הצבה של kx במקום x ושל ky במקום y.

כדי למצוא עוד אליפסה בעלת אותה אקסצנטריות עלינו לבחור את המקדמים 'a ו- 'c כך שהיחס ביניהם יהיה 4/5. כלומר, $a'=k\cdot 5$ ו- $c'=k\cdot 4$. העתקת דמיון אכן שומרת על האקסצנטריות.

פעילות 8.2 – גיאומטריה של היפרבולה

שרטטו את ההיפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ וסמנו את המוקדים. מהי האקסצנטריות?

נסחו ופתרו מערכת תרגילים א – ד, כמו בפעילות 8.1 לגבי ההיפרבולה הנתונה.

סכמו את התוצאות.

התייחסו למשותף ולשונה בתכונות של שלוש העקומות: פרבולה, אליפסה והיפרבולה.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name8.2.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 8.2

ראו גם קובץ: Solution8.2.dfw

בפעילות הקודמת הוכחנו כי המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של זוגות משיקים לאליפסה בקצות מיתרים העוברים דרך המוקד הוא המדריך לאליפסה (נזכור שלאליפסה שני זוגות של מוקד-מדיך, כאן מדובר במדריך "המתאים" לאותו מוקד). הוכחנו גם כי העתקות דמיון שומרות על האקסצנטריות של האליפסה. נרצה לבדוק האם תכונות אלו מתקיימות גם בהיפרבולה. נשחזר את המהלך עבור ההיפרבולה שמשוואתה: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

בהיפרבולה הנתונה: $a=\sqrt{9}=3$, $b=\sqrt{16}=4$, $c=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

השיעורים של מוקדי ההיפרבולה הם (5 , 0) (-5 , 0) והאקסצנטריות היא $e=\frac{c}{a}(=\frac{5}{3})$.

א. נבנה את המיתר המוקדי של ההיפרבולה (בעצם יש שניים כאלה). המיתר המוקדי הימני עובר דרך המוקד הימני, F1 := [5 , 0] ומאונך לציר הראשי (כלומר על הישר שמשוואתו x = 5).

נמצא את שיעורי קצות המיתר.

$$\frac{5^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{5^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1,\ y\right)$$

$$y=-\frac{16}{3} \vee y=\frac{16}{3}$$

נשרטט את ההיפרבולה, נסמן את המוקדים ונבנה את המיתר המוקדי.

נחשב את שיפועי המשיקים בקצות המיתר המוקדי. ניעזר בפקודה לחישוב נגזרת של פונקציה סתומה.

$$\text{IMP\_DIF}\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1,\ x,\ y\right) = \frac{16 \cdot x}{9 \cdot y}$$

נציב בנוסחת השיפוע את ערכי קצות המיתר המוקדי (16/3 , 5) ו- (16/3- , 5) ונקבל שיפועי המשיקים להיפרבולה בקצות המיתר המוקדי. בהתאמה, הם שווים ל- 5/3 ו- 5/3-. כמו בפרבולה (יחידה 5) ובאליפסה (פעילות קודמת) שיפועי המשיקים לעקומה בקצות המיתר המוקדי שווים בערכם המוחלט לאקסצנטריות.

נעביר את המשיקים להיפרבולה בקצות המיתר המוקדי שלה. למציאת משוואות המשיקים ניעזר בתוכנה, בפקודה לחישוב משוואת משיק לגרף של פונקציה סתומה.

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1,\ x,\ y,\ 5,\ \frac{16}{3}\right) = \frac{5 \cdot x - 9}{3}$$

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1,\ x,\ y,\ 5,\ -\frac{16}{3}\right) = \frac{9 - 5 \cdot x}{3}$$

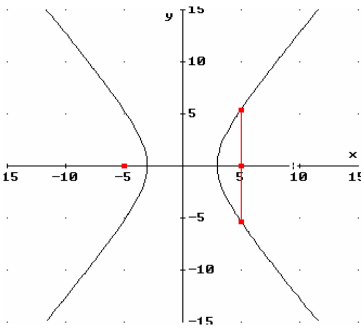
נקודת המפגש של המשיקים להיפרבולה בקצות המיתר המוקדי:

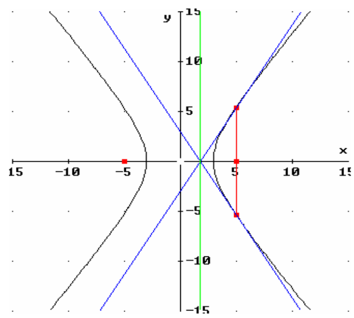
$$y = \frac{5 \cdot x - 9}{3} \wedge y = \frac{9 - 5 \cdot x}{3}$$

$$\text{SOLVE}\left(y = \frac{5 \cdot x - 9}{3} \wedge y = \frac{9 - 5 \cdot x}{3},\ [x,\ y]\right)$$

$$x = \frac{9}{5} \wedge y = 0$$

כצפוי, נקודת מפגש נמצאת על המדריך להיפרבולה שמשוואתו $d = \frac{a^2}{c} (= \frac{9}{5})$





שימו לב: לשרטוט של המדריך (ישר מקביל לציר y) ב- *Derive* יש לרשום x = 1.8.

ב. נעביר בהיפרבולה מיתר נוסף דרך המוקד הימני. נבחר לדוגמה את המיתר שקצהו בנקודה ששיעור ה - y שלה הוא 3. ראשית, נחשב את שיעור ה- x של הקצה. נציב y = 3 במשוואת ההיפרבולה.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{3^2}{16} = 1$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{x^2}{9} - \frac{3^2}{16} = 1, x\right)$$

$$x = -\frac{15}{4} \vee x = \frac{15}{4}$$

מכיוון שאנו רוצים מיתר העובר דרך הקודקוד הימני נבחר בנקודת הקצה ששיעוריה (15/4 , 3).
משוואת המיתר, לפי שתי הנקודות שעליו (נקודת הקצה שמצאנו והמוקד הימני) היא:

$$y = 12 - \frac{12}{5}\cdot x$$

כדי למצוא את שיעורי קצהו האחר של המיתר נפתור את מערכת המשוואות:

$$\text{SOLUTIONS}\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \wedge y = 12 - \frac{12}{5}\cdot x, [x, y]\right) = \begin{bmatrix} \frac{15}{4} & 3 \\ \frac{75}{7} & -\frac{96}{7} \end{bmatrix}$$

נמצא את משוואות המשיקים להיפרבולה בקצות המיתר העובר דרך המוקד:

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1, x, y, \frac{15}{4}, 3\right) = \frac{4\cdot(5\cdot x - 12)}{9}$$

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1, x, y, \frac{75}{7}, -\frac{96}{7}\right) = \frac{21 - 25\cdot x}{18}$$

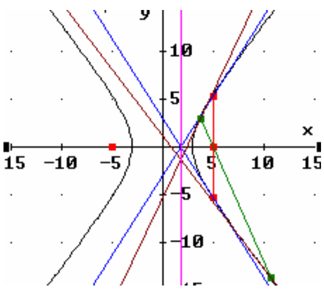
נחפש את נקודת המפגש של שני המשיקים:

$$y = \frac{4\cdot(5\cdot x - 12)}{9} \wedge y = \frac{21 - 25\cdot x}{18}$$

$$\text{SOLVE}\left(y = \frac{4\cdot(5\cdot x - 12)}{9} \wedge y = \frac{21 - 25\cdot x}{18}, [x, y]\right)$$

$$x = \frac{9}{5} \wedge y = -\frac{4}{3}$$

המשיקים נפגשים על המדריך הימני להיפרבולה.



המרחק בין קצה המיתר (3 , 15/4) לבין המוקד נתון ע"י:

$$\left|\left[\frac{15}{4}, 3\right] - [5, 0]\right| = \frac{13}{4}$$

המרחק בין קצה המיתר לבין הישר שעליו נפגשו המשיקים נתון ע"י:

$$\left|\frac{15}{4} - \frac{9}{5}\right| = \frac{39}{20}$$

ומקבלים שהיחס בין המרחקים הוא האקסצנטריות:

$$\frac{\frac{13}{4}}{\frac{39}{20}} = \frac{5}{3}$$

ג. מן הדוגמאות שהצגנו עולה ההשערה כי היחס בין מרחק נקודה על ההיפרבולה מן הקודקוד, לבין מרחקה אל המדריך קבוע ושווה ה לאקסצנטריות. נבדוק את נכונות ההשערה לגבי נקודה כללית על האליפסה הנתונה. נגדיר משתנה כללי x1:= .

נחלץ את y במשוואת ממשוואת ההיפרבולה, ונבטא את שיעור ה y של נקודה כללית על ההיפרבולה כפונקציה של שיעור ה-x:

$$y1 := \frac{4\cdot\sqrt{(x1^2 - 9)}}{3}$$

נחשב את יחס המרחקים של הנקודה מן המוקד ושל הנקודה מן המדריך:

$$\frac{|[x1, y1] - [5, 0]|}{x1 - \frac{9}{5}} = \frac{5}{3}$$

אם כן, הוכחנו את ההשערה לגבי ההיפרבולה הנתונה. כך קיבלנו הגדרה חלופית להיפרבולה זו:

$$|[x, y] - F1| = \frac{5}{3}\cdot\left|x - \frac{9}{5}\right|$$

נשרטט את העקומה המוגדרת ע"י המשוואה ונראה כי היא אכן אותה היפרבולה. נוכל לפשט את המשוואה ולהביאה לצורה הקנונית של המשוואה הנתונה.

עד כה מצאנו תכונות משותפות לשלוש העקומות: פרבולה, אליפסה והיפרבולה:

האקסצנטריות: $e = \frac{c}{a}$ משוואת המדריך: $d = \frac{a^2}{c}$

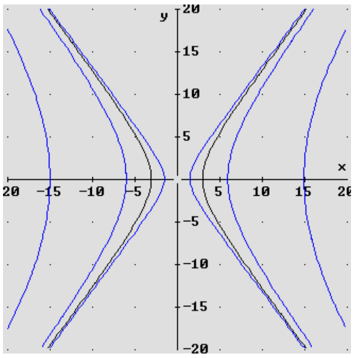
המדריך הוא המקום הגיאומטרי של נקודות מפגש של זוגות משיקים לעקומה בקצות מיתר מוקדי שלה. שיפועי המשיקים בקצות המיתר המוקדי שווים בערכם המוחלט לאקסצנטריות.

העקומה היא מקום גיאומטרי של הנקודות שהיחס בין מרחקן מן המוקד לבין מרחקן מן המדריך הוא קבוע ושווה לאקסצנטריות.

ד. בפעילות הקודמת בצענו העתקות דמיון של אליפסות, וראינו כי הן שומרות על האקצסנטריות של האליפסה. ביחידה 5 הוכחנו כי כל הפרבולות דומות. עתה נבדוק העתקות דמיון של היפרבולות.

נציב במשוואת ההיפרבולה הנתונה ax במקום x , ו ay במקום y (כאשר a הוא מספר ממשי שונה מ-0), ונשרטט את ההיפרבולות המתקבלות עבור שלושה ערכים שונים של a. נוכל לשרטט כמה היפרבולות כאלו בבת אחת בעזרת הפקודה Vector:

$$\mathrm{VECTOR}\left(\frac{(a\cdot x)^2}{9}-\frac{(a\cdot y)^2}{16}-1=0,\ a,\ [0.2,\ 0.5,\ 2]\right)$$



ככל ש- a קטן נקבל היפרבולה 'שטוחה' יותר, וככל ש- a גדול יותר, ההיפרבולה נפוחה יותר?
בדומה לאליפסה, גם בהיפרבולה, העתקת דמיון שומרת על ערך האקסצנטריות.

פעילות 8.3 – מבט מאחד

נשרטט ונחקור מקומות גיאומטריים של נקודות במישור שיחס מרחקיהן אל נקודה נתונה (מוקד) ואל ישר נתון (מדריך) הוא גודל קבוע e (הנקרא אקסצנטריות).

א. נבחר מוקד בראשית הצירים ומדריך שמשוואתו $x = -4$.

שרטטו את הגרפים המוגדרים ע"י המשוואה $||[x, y] – [0, 0]|| = e |x + 4|$ עבור

$e = 1$, $e = 3/4$, $e = 2$

סמנו את המוקד ואת המדריך.

פשטו כל אחת משלוש המשוואות ורשמו אותן כמשוואות במעלה שנייה שאגפן הימני אפס.

ב. בפעילות קודמות ראינו לגבי דוגמאות של פרבולה, אליפסה והיפרבולה כי שיפועי המשיקים בקצות "המיתר המוקדי" שווים בערכם המוחלט לאקסצנטריות.

הוכיחו כי הקשר בין שיפועי המשיקים בקצות המיתר המוקדי ונתוני המקום הגיאומטרי מתקיים לכל פרבולה, אליפסה והיפרבולה?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name8.3.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 8.3

ראו גם קבצים: Solution8.3.dfw   Solution 8.3animateD6.dfw

פעילות זו, כשמה כן היא, מעניקה מבט מאחד על שלוש העקומות שבהן עסקנו: פרבולה, אליפסה והיפרבולה. המטרה היא לרכז את הידע שצברנו אודות שלושתן, ולעמוד על התכונות המשותפות להן ועל ההבדלים ביניהן.

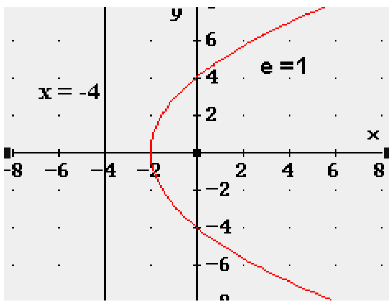
א. בפעילויות הקודמות ראינו כי היחס בין מרחקה של נקודה על העקומה אל המוקד, לבין מרחקה של הנקודה אל המדריך – קבוע, ושווה לאקסצנטריות.

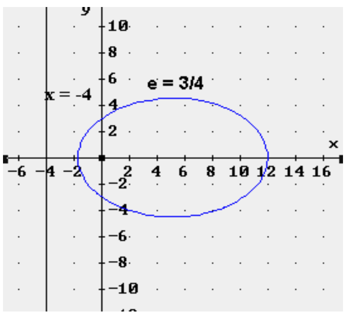
נבדוק כיצד משפיעה האקסצנטריות על אופייה של העקומה.

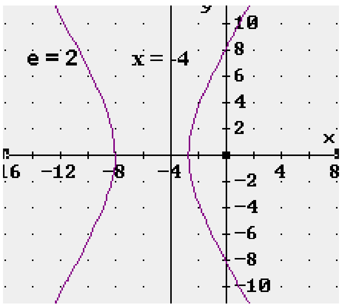
נגדיר מוקד בראשית הצירים   F := [0,0], מדריך על הישר שמשוואתו x = -4 ונקודה כללית על העקומה. P := [x, y].

המקום הגיאומטרי המבוקש מוגדר ע"י המשוואה: $|P-F|=e\cdot|x+4|$

נבחר $e=1$ ונקבל פרבולה, נבחר $e=\frac{3}{4}$ ונקבל אליפסה, נבחר $e=2$ ונקבל היפרבולה.







כדאי לבחור ערכים נוספים עבור e כרצוננו. עבור $e=1$ נקבל פרבולה, עבור $0<e<1$ נקבל אליפסה, ועבור $e>1$ נקבל היפרבולה. המעגל הוא מקרה גבולי של האליפסה ועבור $e=0$.

בגרסת 6 *Derive* תוכלו להדגים באנימציה Solution 8.3animateD6.dfw כיצד שינוי ערכו של היחס e משנה את צורת העקומה.

ב. בפעילויות הקודמות ראינו תכונה משותפת למקרים פרטיים של פרבולה, אליפסה והיפרבולה: שיפועי המשיקים בקצות המיתר המוקדי שווים בערכם המוחלט לאקסצנטריות. נוכל לחזור על התהליך עבור הפרבולה, האליפסה וההיפרבולה מהפעילות הקודמת ולאמת זאת עבור הדוגמאות הנתונות.

נוכיח כי שיפועי המשיקים בקצות המיתר המוקדי של *כל* פרבולה, אליפסה והיפרבולה שווים בערכם המוחלט לאקסצנטריות של העקומה. לשם כך נטפל כמובן במקרה הכללי של כל אחת מן העקומות.

1) <u>פרבולה.</u> המשוואה הקנונית הכללית של פרבולה היא:

$$y^2 = 2\cdot k\cdot x$$

מוקד הפרבולה הוא בנקודה ששיעוריה הם (k/2 , 0). נציב במשוואת הפרבולה x = k/2 כדי לחשב את שיעורי קצות המיתר המוקדי. נחשב שיפועי המשיקים לפרבולה בקצות המיתר המוקדי:

$$\begin{bmatrix} \frac{k}{2} & k \\ \frac{k}{2} & -k \end{bmatrix}$$

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(y^2 - 2\cdot k\cdot x,\ x,\ y,\ \frac{k}{2},\ k\right) = x + \frac{k}{2}$$

קיבלנו: שיפוע המשיק לפרבולה בקצה המיתר המוקדי הוא 1, שווה לאקסצנטריות של פרבולה. ובקצה השני של המיתר המוקדי נקבל שיפוע משיק 1-.

2) <u>אליפסה</u>. המשוואה הקנונית הכללית של אליפסה:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

המוקד הימני של האליפסה הוא הנקודה ששיעוריה הם : $\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$.

המיתר המוקדי נמצא על הישר שמשוואתו היא: $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. נציב במשוואת האליפסה כדי למצוא את שיעורי קצות המיתר המוקדי.

$$\left[\sqrt{(a^2 - b^2)},\ \frac{b^2}{a}\right]$$

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,\ x,\ y,\ \sqrt{(a^2 - b^2)},\ \frac{b^2}{a}\right) = a - \frac{x\cdot\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$$

שיפוע המשיק לאליפסה בנקודה זו: c/a

שוב קיבלנו שיפוע המשיק שווה לאקסצנטריות. מטעמי סימטריה, המשיק לאליפסה בקצהו השני של המיתר המוקדי יהיה בעל שיפוע נגדי.

3) <u>היפרבולה.</u> המשוואה הקנונית הכללית של היפרבולה:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

המוקד הימני של ההיפרבולה הוא הנקודה ששיעוריה הם $\left(\sqrt{a^2+b^2},0\right)$. המיתר המוקדי נמצא על הישר שמשוואתו היא: $x=\sqrt{a^2+b^2}$. נציב במשוואת ההיפרבולה כדי למצוא את שיעורי קצה המיתר המוקדי.

$$\left[\sqrt{(a^2+b^2)},\ \frac{b^2}{a}\right]$$

שיפוע המשיק בנקודת הקצה: c/a

$$\text{IMP\_TANGENT}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1,\ x,\ y,\ \sqrt{(a^2+b^2)},\ \frac{b^2}{a}\right) = \frac{x\cdot\sqrt{(a^2+b^2)}}{a} - a$$

הוכחנו לגבי כל הפרבולות, האליפסות וההיפרבולות הקנוניות, כי שיפועי המשיקים לעקומות בקצות המיתר המוקדי שווים בערכם המוחלט לאקסצנטריות של העקומה.

פעילות 8.4 – ציר סימטריה משופע

ניעזר בתוכנה כדי לטפל גרפית ואלגברית בעקומות בעלות ציר סימטריה משופע.

נתונים: מדריך שמשוואתו $3x + 4y - 15 = 0$ ומוקד בנקודה ששיעוריה $(1, 1)$.

א. רשמו משוואת פרבולה כתנאי על מרחקים, שרטטו את המדריך, המוקד והפרבולה.
פשטו את המשוואה.
הוסיפו לשרטוט את ציר הסימטריה של הפרבולה ואת קדקודה.

ב. רשמו משוואת אליפסה בעלת אקסצנטריות $e = 3/4$ כתנאי על מרחקים.
שרטטו את המדריך, המוקד והאליפסה.
פשטו את המשוואה.
הוסיפו לשרטוט את ציר הסימטריה הראשי של האליפסה וסמנו עליו את קדקודיה.

ג. רשמו משוואת היפרבולה בעלת אקסצנטריות $e = 4/3$ כתנאי על מרחקים.
שרטטו את המדריך, המוקד וההיפרבולה.
פשטו את המשוואה.
הוסיפו לשרטוט את ציר הסימטריה הראשי של ההיפרבולה וסמנו עליו את קדקודיה.

ד. מהי זווית השיפוע (ביחס לכיוון החיובי של ציר- x) של המדריך לשלוש העקומות ששרטטתם?
בצעו העתקת הזזה והעתקת סיבוב של הפרבולה/אליפסה/היפרבולה כך שתתקבל עקומה חופפת בעלת משוואה קנונית.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name8.4.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 8.4

ראו גם קבצים: Solution8.4.dfw rotate-D6.dfw

עד כה עסקנו רק בעקומות הנתונות ע"י משוואות הקנוניות, עתה נפנה לטפל גם בעקומות שבהן ציר סימטריה משופע. נסמן מוקד: [1, 1] ומדריך שמשוואתו היא $3x + 4y - 15 = 0$, שיפוע המדריך הוא -3/4 . ציר הסימטריה (הראשי) מאונך למדריך, ולכן שיפועו 4/3. משוואת ציר הסימטריה לפי שיפוע ונקודה (המוקד הנתון):

$$y = \frac{4}{3}\cdot x - \frac{1}{3}$$

ניעזר באקסצנטריות - היחס בין מרחק נקודה מן המוקד לבין מרחקה אל המדריך - כדי לשרטט פרבולה, אליפסה והיפרבולה המתאימות לנתונים.

א. <u>פרבולה.</u> האקסצנטריות היא כמובן 1.

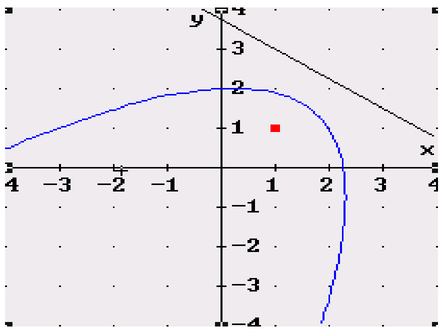
(תזכורת: הנוסחה לחישוב המרחק מנקודה A ששיעוריה הם (x , y) אל ישר L שמשוואתו היא ax+by+c=0 היא: $d(A,L) = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

המרחק מנקודה כללית (x , y) אל המדריך (המונח על הישר שמשוואתו: $3x + 4y - 15 = 0$),

הוא: $\dfrac{|3x+4y-15|}{\sqrt{9+16}}$, דהיינו $\dfrac{|3x+4y-15|}{5}$.

נכתוב את משוואת הפרבולה כמקום גיאומטרי של הנקודות שמרחקן מן המוקד שווה למרחקן אל המדריך, ונשרטט.

$$\frac{|3\cdot x + 4\cdot y - 15|}{5} = |[x, y] - [1, 1]|$$



מטרתנו עתה למצוא את שיעורי קדקוד הפרבולה.

לנוחותנו, נפשט קודם את משוואת הפרבולה. נעלה בריבוע את שני האגפים, נפתח סוגריים, נעביר אגפים, ונכנס איברים דומים:

$$\frac{(3\cdot x + 4\cdot y - 15)^2}{25} = x^2 - 2\cdot x + y^2 - 2\cdot y + 2$$

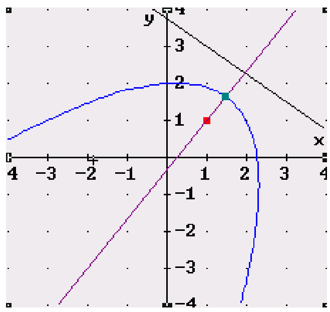
$$16\cdot x^2 - 24\cdot x\cdot y + 40\cdot x + 9\cdot y^2 + 70\cdot y - 175 = 0$$

עתה נפתור מערכת משוואות מתאימה למציאת שיעורי קדקוד ונשרטט:

$$16\cdot x^2 - 24\cdot x\cdot y + 40\cdot x + 9\cdot y^2 + 70\cdot y - 175 = 0 \wedge y = \frac{4}{3}\cdot x - \frac{1}{3}$$

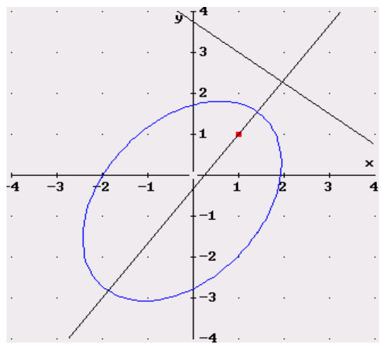
$$\text{SOLVE}\left(16\cdot x^2 - 24\cdot x\cdot y + 40\cdot x + 9\cdot y^2 + 70\cdot y - 175 = 0 \wedge y = \frac{4}{3}\cdot x - \frac{1}{3},\ [x,\ y]\right)$$

$$x = \frac{37}{25} \wedge y = \frac{41}{25}$$



ב. <u>אליפסה</u>. נחפש אליפסה בעלת אקסצנטריות 3/4, לאותם מוקד ומדריך (משופע) נתונים. נחזור על אותם שלבים. ראשית, נגדיר את האליפסה כתנאי על מרחקים, ונשרטט:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{|3\cdot x + 4\cdot y - 15|}{5} = |[x,\ y] - [1,\ 1]|$$



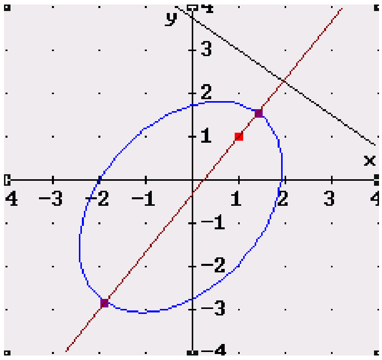
נפשט את משוואת האליפסה:

$$319\cdot x^2 - 216\cdot x\cdot y + 10\cdot x + 256\cdot y^2 + 280\cdot y - 1225 = 0$$

למציאת שיעורי הקודקודים של האליפסה, כותבים מערכת משוואות מתאימה ופותרים אותה. מקבלים:

$$\begin{bmatrix} -\frac{47}{25} & -\frac{71}{25} \\ \frac{247}{175} & \frac{271}{175} \end{bmatrix}$$

נוסיף את הנקודות לשרטוט:



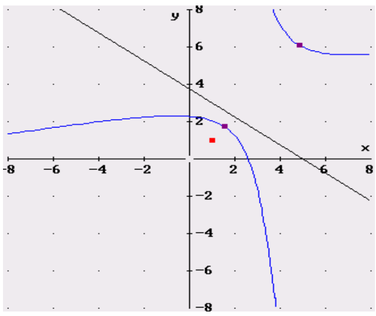
ג. <u>היפרבולה.</u> נחזור על המהלך עבור היפרבולה בעלת אקסצנטריות 4/3. משוואת המדריך ושיעורי המוקד נשמרים. כך גם משוואת ציר הסימטריה (החותך את ענפי ההיפרבולה).

נגדיר את ההיפרבולה כתנאי על מרחקים נפשט את המשוואה שהתקבלה:

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{|3\cdot x+4\cdot y-15|}{5}=|[x,\ y]-[1,\ 1]|$$

$$81\cdot x^2-384\cdot x\cdot y+990\cdot x-31\cdot y^2+1470\cdot y-3150=0$$

למציאת שיעורי הקודקודים כותבים מערכת משוואות מתאימה ופותרים אותה.



$$\begin{bmatrix} \frac{121}{25} & \frac{153}{25} \\ \frac{271}{175} & \frac{303}{175} \end{bmatrix}$$

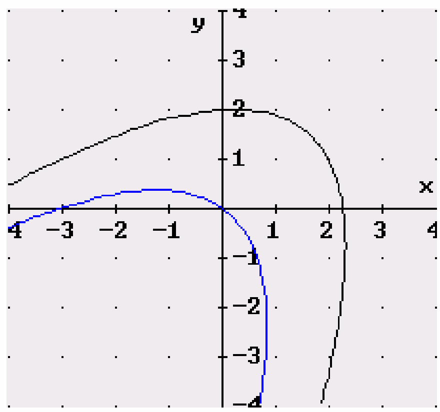
ד. אם המשוואה של עקומה אינה קנונית אפשר לשנות את מערכת הצירים על מנת שבמערכת חדשה תהיה לאותה עקומה משוואה קנונית. למשל לגבי פרבולה, בשלב ראשון בוחרים מערכת צירים חדשה שראשיתה נמצאת בדיוק בקודקוד של הפרבולה. אחר כך מגדירים מערכת צירים "חדשה עוד יותר" כך שאחד מציריה יהיה ציר הסימטריה של הפרבולה. הפרבולה עצמה לא משתנה, היא נשארה המקום הגיאומטרי של הנקודות שמרחקן אל ישר שווה למרחקן אל נקודה. העקומה אינה תלויה בבחירת מערכת הצירים – רק משוואת העקומה משתנה בהתאם.

משיקולים דידקטיים (התלמידים למדו להזיז פונקציות ממעלה שנייה בכיתה ט' או י') בחרנו לפעול בכיוון ההפוך – להזיז ולסובב את העקומה כך שתתקבל עקומה "חופפת" בעלת משוואה

קנונית שהרי בהעתקות הזזה וסיבוב נשמר המרחק מנקודה לנקודה ונשמרת תכונת המקבילות של ישרים.

1. הפרבולה. ראשית, נבצע העתקת הזזה. נזיז את הפרבולה, כך שקדקודה יהיה בראשית הצירים. קדקוד הפרבולה שמצאנו הוא בנקודה (41/25 , 37/25) . לכן עלינו להזיז את כל נקודות הפרבולה 37/25 יחידות שמאלה ו- 41/25 יחידות כלפי מטה. נציב במשוואת הפרבולה x + 41/25 במקום x , y + 37/25 במקום y. נקבל פרבולה שקדקודה בראשית ובעלת ציר סימטריה ששיפועו 4/3- :

$$16 \cdot x^2 - 24 \cdot x \cdot y + 48 \cdot x + 9 \cdot y^2 + 64 \cdot y = 0$$



עתה נסובב את הפרבולה (כמו שעשינו בפעילות 5.5), כך שציר הסימטריה שלה יהיה ציר ה x.
שיפוע המדריך של שלוש העקומות ששרטטנו הוא, כאמור: 4/3- . נמצא את הזווית שבין המדריך לבין הכיוון החיובי של ציר ה- x בעזרת פונקציית הטנגנס.

$$\alpha = \mathrm{ATAN}\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$\mathrm{NSOLVE}\left(\alpha = \mathrm{ATAN}\left(-\frac{4}{3}\right),\ \alpha\right)$$

$$\alpha = -0.927295218$$

נגדיר לתוכנה את זווית הסיבוב הרצוי:

$$\alpha := \mathrm{ATAN}\left(-\frac{4}{3}\right)$$

ונציב במשוואת הפרבולה:

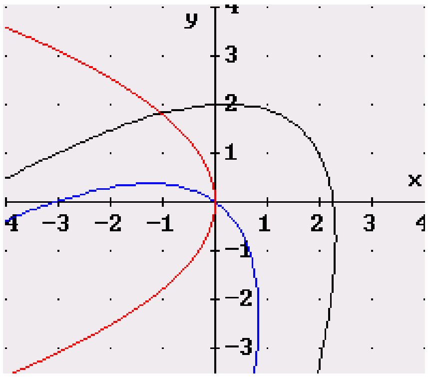
במקום x את $x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha)$ ובמקום y את $y \cdot \cos(\alpha) - x \cdot \sin\alpha$

(ראו הסברים בקובץ rotate-D6.dfw)

$$16 \cdot (x \cdot \mathrm{COS}(\alpha) + y \cdot \mathrm{SIN}(\alpha))^2 - 24 \cdot (x \cdot \mathrm{COS}(\alpha) + y \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)) \cdot (y \cdot \mathrm{COS}(\alpha) - x \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)) +$$
$$48 \cdot (x \cdot \mathrm{COS}(\alpha) + y \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)) + 9 \cdot (y \cdot \mathrm{COS}(\alpha) - x \cdot \mathrm{SIN}(\alpha))^2 + 64 \cdot (y \cdot \mathrm{COS}(\alpha) - x \cdot \mathrm{SIN}(\alpha)) = 0$$

נפשט את משוואת הפרבולה שהתקבלה, ונסדר אותה:

$$x = -\frac{5\cdot y^2}{16}$$



2) אליפסה. נחזור על המהלך עבור האליפסה שקיבלנו בסעיף הקודם:

$$319\cdot x^2 - 216\cdot x\cdot y + 10\cdot x + 256\cdot y^2 + 280\cdot y - 1225 = 0$$

ברצוננו להזיז את האליפסה כך שמרכזה יהיה בראשית הצירים. מרכז האליפסה הוא אמצע הקטע המחבר את שני המוקדים. מצאנו בסעיף ב את קודקודי האליפסה

נחשב את מרכז האליפסה ששרטטנו:

$$\left[-\frac{47}{25} \quad -\frac{71}{25} \right]$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\left[-\frac{47}{25}, -\frac{71}{25}\right] + \left[\frac{247}{175}, \frac{271}{175}\right]\right) = \left[-\frac{41}{175}, -\frac{113}{175}\right]$$

נבצע הזזה מתאימה, במשוואת האליפסה, מקום x נציב x - 41/175 ובמקום y נציב y – 113/175, ונפשט את המשוואה שהתקבלה:

$$319\cdot x^2 - 216\cdot x\cdot y + 256\cdot y^2 - \frac{9216}{7} = 0$$

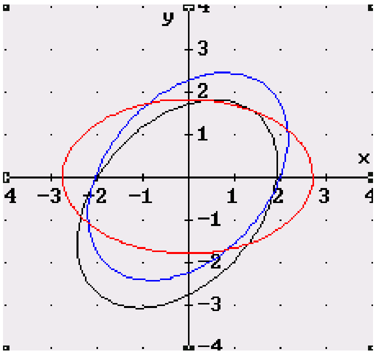
עתה נבצע העתקת סיבוב (באותה זווית שבה סובבנו את הפרבולה):

$$319\cdot(x\cdot COS(\alpha) + y\cdot SIN(\alpha))^2 - 216\cdot(x\cdot COS(\alpha) + y\cdot SIN(\alpha))\cdot(y\cdot COS(\alpha) - x\cdot SIN(\alpha)) +$$
$$256\cdot(y\cdot COS(\alpha) - x\cdot SIN(\alpha))^2 - \frac{9216}{7} = 0$$

קיבלנו משוואת אליפסה קנונית:

$$\frac{1225\cdot x^2}{9216} + \frac{175\cdot y^2}{576} - 1 = 0$$

נדגים בשרטוט את שלבי ההזזה והסיבוב:



3) <u>ההיפרבולה.</u> עבור משוואת ההיפרבולה מסעיף ג נמצא את מרכז ההיפרבולה (אמצע הקטע המחבר את הקודקודים):

$$81\cdot x^2 - 384\cdot x\cdot y + 990\cdot x - 31\cdot y^2 + 1470\cdot y - 3150 = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\left[\frac{121}{25}, \frac{153}{25}\right] + \left[\frac{271}{175}, \frac{303}{175}\right]\right) = \left[\frac{559}{175}, \frac{687}{175}\right]$$

ההזזה הנדרשת כדי שמרכז ההיפרבולה יהיה בראשית הצירים: במקום x נציב x + 559/175 ובמקום y נציב: y + 687/175 . נפשט את המשוואה שהתקבלה:

$$81\cdot x^2 - 384\cdot x\cdot y - 31\cdot y^2 + \frac{9216}{7} = 0$$

עתה נסובב את ההיפרבולה כדי שציר הסימטריה שלה יהיה ציר ה-x:

$$81\cdot(x\cdot \mathrm{COS}(\alpha) + y\cdot \mathrm{SIN}(\alpha))^2 - 384\cdot(x\cdot \mathrm{COS}(\alpha) + y\cdot \mathrm{SIN}(\alpha))\cdot(y\cdot \mathrm{COS}(\alpha) - x\cdot \mathrm{SIN}(\alpha)) -$$
$$31\cdot(y\cdot \mathrm{COS}(\alpha) - x\cdot \mathrm{SIN}(\alpha))^2 + \frac{9216}{7} = 0$$

$$\frac{1225\cdot x}{9216} - \frac{175\cdot y}{1024} - 1 = 0$$

נפשט את המשוואה ונסדר אותה בצורה של משוואת היפרבולה קנונית ונדגים בשרטוט את שלבי ההזזה והסיבוב: