7. ההיפרבולה מדריך למורה

מבוא

מטרת יחידה זו הוא היכרות מעמיקה עם ההיפרבולה ועם תכונותיה. פעילות זו, כקודמתה שעסקה באליפסה, מתאימה לתלמידים שטרם למדו אודות ההיפרבולה, וירכשו את כל המידע אודותיה באמצעות הפעילויות.

כמו ביחידה הקודמת, נפתח בהגדרת ההיפרבולה כמקום גיאומטרי של נקודות אשר הפרש מרחקיהן אל שני מוקדים הוא מספר קבוע; נגיע מהגדרה זו להגדרה החלופית, השקולה לה, של היפרבולה בעזרת מוקד ומדריך; נחקור את המצב ההדדי בין ישרים לבין היפרבולה ונמצא תנאי אלגברי לכך שישר ישיק להיפרבולה. בחלק מהפעילויות התלמידים ינסחו את המטלות בעצמם, כשהם נעזרים במהלך שביצעו בקשר לאליפסה. תוך כדי הפעילויות מתברר במה דומות ובמה נבדלות אליפסה והיפרבולה.

בפעילות הרביעית נבנה ונחקור "מעגל מדריך" להיפרבולה, ובפעילות האחרונה ניעזר בתוכנה לתרגול שאלות המשלבות אליפסה והיפרבולה.

רשימת הפעילויות:

פעילות 7.1 – מגדירים ומשרטטים היפרבולה

פעילות 7.2 – הגדרה חלופית להיפרבולה

פעילות 7.3 – היפרבולה וישר

פעילות 7.4 – משיקים להיפרבולה המאונכים זה לזה

פעילות 7.5 – שאלות

פעילות 7.1 – מגדירים ומשרטטים היפרבולה

א. **הגדרה**: נתונות שתי נקודות F1 ו- F2 במישור, ונתון מספר חיובי a. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שהפרש מרחקיהן אל שתי הנקודות הנתונות שווה ל- a נקרא היפרבולה. הנקודות F1 ו- F2 נקראות המוקדים של ההיפרבולה.

(המשמעות הגיאומטרית של המספר a תתברר בהמשך.)

ניעזר בתוכנה לבניית המקום הגיאומטרי כאוסף של נקודות.

נסמן שני מוקדים **F2:= [-5, 0]** , **F1:= [5, 0]** ונחפש בשרטוט נקודות P:= [x, y] אשר הפרש מרחקיהן אל המוקדים הוא **6**.

לדוגמה: |P – F2| = 7 , |P – F1| = 5

נסחו ופתרו מערכת תרגילים כמו בפעילות 6.1 וסכמו את התוצאות.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.1.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 7.1

ראו גם קובץ: Solution7.1.dfw

בפעילות זו התלמידים משחזרים את המהלך שביצעו אודות אליפסה בפעילות 6.1, ומכירים את ההיפרבולה בדרך אנלוגית. הפעילות מתאימה לפתיחת הנושא.

נפתח בהגדרת ההיפרבולה כמקום גיאומטרי של נקודת במישור P:= [x, y] שהפרש מרחקיהן אל שני מוקדים קבוע. כמוקדים נבחר לדוגמה את הנקודות: F2:= [-5, 0] , F1:= [5, 0] (שבהם השתמשנו ביחידה הקודמת) ונבחר שההפרש המרחקים הקבוע הוא 6.

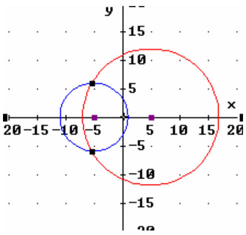
א. נבחר מרחקים אל שני המוקדים כך שהפרשם 6. לדוגמה:

$$|P - F1| = 12$$
$$|P - F2| = 6$$

נפתור את מערכת המשוואות המתאימה. מכיוון שפתרונות התוכנה למשוואה המוצגת בערכים מוחלטים מוצגים באופן מסורבל, נעקוף את סימון הערך המוחלט על ידי העלאה בריבוע של שני האגפים (העלאה בריבוע נותנת משוואה *שקולה* למשוואה המקורית כיון שמדובר במשוואה במספרים חיוביים).

$$\text{SOLUTIONS}\left(\left[(P - F1)^2 = 12^2,\ (P - F2)^2 = 6^2\right],\ [x, y]\right)$$

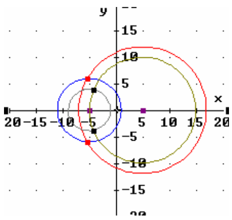
ונשרטט



הנקודות שמרחקן אל המוקד הימני F1 הוא 12 יחידות נמצאות על המעגל שמרכזו F1 ורדיוס 12, באופן דומה הנקודות שמרחקן מן המוקד השמאלי F2 הוא 6 יחידות נמצאות על המעגל שמרכזו ב- F2 ורדיוסו 6. שתי נקודות החיתוך של המעגלים מקיימות את תנאי ההגדרה של האליפסה: הפרש מרחקיהן אל שני המוקדים הוא 6.

נבחר דוגמה נוספת ונדגים בשרטוט:

$$|P - F1| = 10$$
$$|P - F2| = 4$$



מן הדוגמאות נעבור להכללה. נבטא באופן כללי את שיעורי הנקודות המקיימות את התנאי:

$$\text{SOLUTIONS}\left(\left[(P - F1)^2 = k^2,\ (P - F2)^2 = (k - 6)^2\right],\ [x,\ y]\right)$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{3\cdot(3 - k)}{5} & \dfrac{4\cdot\sqrt{(k^2 - 6\cdot k - 16)}}{5} \\ \dfrac{3\cdot(3 - k)}{5} & -\dfrac{4\cdot\sqrt{(k^2 - 6\cdot k - 16)}}{5} \end{bmatrix}$$

כדי שיתקבל פתרון ממשי הביטוי בתוך סימן השורש צריך להיות אי שלילי, לכן נדרוש:

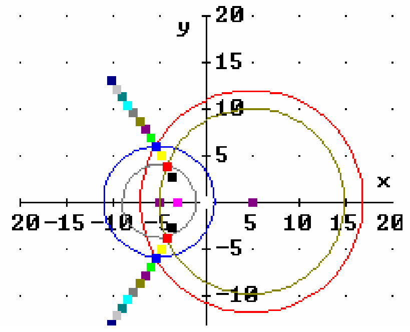
$$k^2 - 6\cdot k - 16 \ge 0$$

$$\text{SOLVE}(k^2 - 6\cdot k - 16 \ge 0,\ k)$$

$$k \le -2 \lor k \ge 8$$

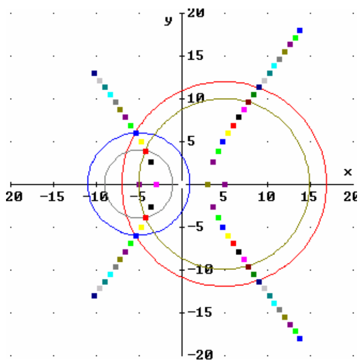
מסתבר שיש כאן שני ענפים. נשרטט נקודות רבות בבת אחת בעזרת הפקודה Vector, לחלק אחד של התחום שבו מוגדר המשתנה k:

$VECTOR(SOLUTIONS([(P-F1)^2=k^2,\ (P-F2)^2=(k-6)^2],\ [x,\ y]),\ k,\ 8,\ 20)$



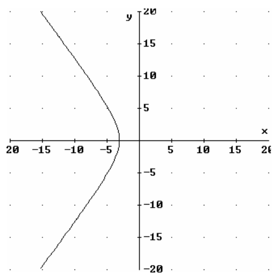
קיבלנו נקודות על ענף אחד של ההיפרבולה. כדי לקבל גם את הענף האחר, נבחר ערכי k מתאימים:

$VECTOR(SOLUTIONS([(P-F1)^2=k^2,\ (P-F2)^2=(k-6)^2],\ [x,\ y]),\ k,\ -20,\ -2)$



נשרטט ישירות את קבוצת האמת של הביטוי:

$|P-F1|-|P-F2|=6$

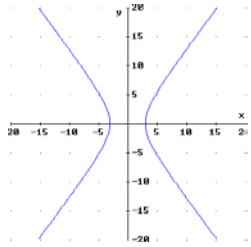


מדוע הצטייר רק ענף אחד של ההיפרבולה? התנאי שכתבנו אינו כולל את כל הנקודות שהפרש מרחקיהן אל המוקדים הוא 6, אלא מאפיין רק את הנקודות שמרחקן אל הקודקוד השמאלי F2 גדול ממרחקן אל הקודקוד הימני F1. כדי לקבל את הענף השני של ההיפרבולה נדרוש:

$|P-F2|-|P-F1|=6$

נוכל, כמובן, לשרטט את שני הענפים בבת אחת בעזרת הגדרת ההיפרבולה כמקום גיאומטרי של הנקודות שההפרש מרחקיהן אל המוקדים הוא מספר קבוע: נעלה בריבוע את שני הענפים, או נביע את הערך המוחלט של הפרשי המרחקים, כך:

$$||P - F1| - |P - F2|| = 6$$



ב. מהי המשוואה הקנונית של האליפסה?

נציג את משוואת המקום הגיאומטרי שבה פתחנו, ונפשט:

$$|P - F1| - |P - F2| = 6$$

$$\sqrt{x^2 - 10\cdot x + y^2 + 25} - \sqrt{x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25} = 6$$

"נעביר אגפים" ונעלה בריבוע את שני האגפים:

$$\left(\sqrt{x^2 - 10\cdot x + y^2 + 25}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25} + 6\right)^2$$

$$x^2 - 10\cdot x + y^2 + 25 = \left(\sqrt{x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25} + 6\right)^2$$

נפש
ט
ושו
ב "נעביר אגפים", ונקבל:

$$-\frac{5\cdot x + 9}{3} = \sqrt{x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25}$$

המשמעות הגיאומטרית של הביטוי שבאגף ימין היא מרחק אל המוקד הימני F1. המשמעות של הביטוי שבאגף שמאל היא מרחק של נקודה אל ישר מסוים המקביל לציר ה- x כפול במספר. נצטרך למצוא את הישר הזה.

נמשיך לפשט. שוב נעלה בריבוע את שני האגפים, ו"העברת אגפים" מתאימה תיתן:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

המשוואה הזאת נקראת המשוואה הקנונית של ההיפרבולה הנתונה. ההיפרבולה הנתונה חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות, הנקראות הקודקודים של ההיפרבולה. חישוב קצר מראה שהמרחק מן ההיפרבולה אנו למדים כי המרחק בין שני קודקודי ההיפרבולה הוא $2\sqrt{9} = 6$. ציר ה- x נקרא הציר הממשי או הציר הראשי של ההיפרבולה. בהמשך נראה גם כי מתקיים $\pm\sqrt{9+16} = \pm 5$, ואלו כזכור שיעורי ה- x של מוקדי ההיפרבולה הנדונה.

פעילות 7.2 – הגדרה חלופית להיפרבולה

א. חקרו בעזרת שרטוטים את השפעת המרחק בין המוקדים על צורת היפרבולה אשר הפרש המרחקים של כל נקודה אל המוקדים הוא 6.

ב. נעבור למקרה הכללי: את סכום המרחקים נהוג לסמן 2a, את המרחק בין המוקדים 2c כאשר c>a>0. נבחר: F1:= [c, 0] , F2:= [-c, 0]

אליפסה מוגדרת ע"י המשוואה ||P – F1| - |P – F2|| = 2a

חזרה על הפישוט האלגברי שבצענו בפעילות הקודמת נותן את המשוואה:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

נהוג לסמן: $b^2 = c^2 - a^2$ (הסימון הזה בעל משמעות משום ש- c>a>0)

מקבלים את המשוואה הבאה:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

היא נקראת המשוואה הקנונית של היפרבולה.

מה המשמעות הגיאומטרית של b?

ג. נהוג לסמן את היחס בין 2c (המרחק בין המוקדים) ל- 2a (סכום מרחקי נקודה אל המוקדים)

על-ידי e. אילו ערכים יכול e לקבל? $e=\frac{c}{a}$ נקרא *האקסצנטריות* של היפרבולה.

הסבירו את השפעת האקסצנטריות על צורתה הגרפית של ההיפרבולה.

ד. במהלך הפישוט מגיעים למשוואה:

$$-\frac{c\cdot x+a^2}{a}=\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$$

היעזרו בה לקבלת הגדרה חלופית להיפרבולה.

ה. מצאו את שיעורי המוקדים, את משוואת המדריך ואת האקסצנטריות של ההיפרבולה אשר משוואתה $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

שרטטו את ההיפרבולה.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.2.dfw

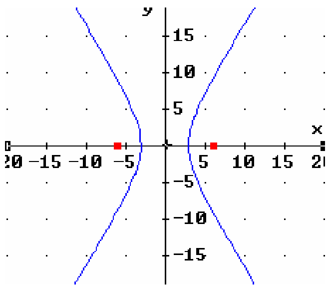
פתרונות והסברים לפעילות 7.2

ראו גם קבצים: Solution7.2.dfw   hyperbola7.2-animate-D6

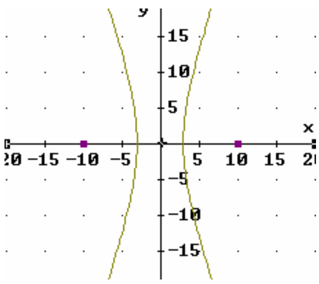
א. נבדוק כיצד משפיע המרחק בין המוקדים על צורתה של ההיפרבולה. (לסיכום הפעילות ניתן להיעזר בהדגמה דינמית.)

1. בהיפרבולה שהכרנו בפעילות הקודמת, שיעורי המוקדים הם (0 , 5) ו- (0 , 5-) , והמרחק ביניהם הוא 10 יחידות:

$$||P - F1| - |P - F2|| = 6$$



2. נבחר מוקדים F1 ו- F2 את הנקודות ששיעוריהן (0 , 10) ו- (0, 10-) בהתאמה. המרחק בין המוקדים הוא כאן 20 יחידות.



כאשר המרחק בין המוקדים קטן ההיפרבולה "מתוחה" יותר, ולהפך.

3. נבחר מוקדים F1 ו- F2 את הנקודות ששיעוריהן (0 , 1) ו- (0, 1-) בהתאמה. המרחק בין המוקדים 2 יחידות. במקרה זה ההיפרבולה אינה מצטיירת! נסביר מדוע: ידוע מן הגיאומטריה כי הפרש אורכי שתיים מצלעות המשולש קטן מאורך הצלע השלישית. כדי שנקודה תקיים את התנאי שהפרש מרחקיה משני מוקדים הוא 6, המרחק בין שני המוקדים עצמם צריך להיות גדול מ 6.

ב. כמו עבור משוואה קנונית של אליפסה, גם עבור משוואה קנונית של היפרבולה, אנו מסמנים את שיעורי שני המוקדים ב- (0 , c) ו- (0 , c-). המרחק בין המוקדים הוא 2c . הפרש מרחקי הנקודה שעל האליפסה מהמוקדים יסומן ב- 2a כאשר a>0 .

נכתוב את התנאי באופן כללי ונפשט:

$$|P - F1| - |P - F2| = 2\cdot a$$

$$\sqrt{(x^2 - 2\cdot c\cdot x + y^2 + c^2)} - \sqrt{(x^2 + 2\cdot c\cdot x + y^2 + c^2)} = 2\cdot a$$

נעביר אגפים ונעלה בריבוע את שני האגפים:

$$(\sqrt{x^2 - 2\cdot c\cdot x + y^2 + c^2} = \sqrt{x^2 + 2\cdot c\cdot x + y^2 + c^2} + 2\cdot a)^2$$

$$x^2 - 2\cdot c\cdot x + y^2 + c^2 = 4\cdot a\cdot\sqrt{x^2 + 2\cdot c\cdot x + y^2 + c^2} + x^2 + 2\cdot c\cdot x + y^2 + 4\cdot a^2 + c^2$$

"נעביר אגפים" ונכנס איברים דומים:

$$-4\cdot c\cdot x - 4\cdot a^2 = 4\cdot a\cdot\sqrt{x^2 + 2\cdot c\cdot x + y^2 + c^2}$$

נחלק את המשוואה ב 4 ושוב נעלה בריבוע את שני האגפים:

$$(c\cdot x + a^2)^2 = a^2\cdot(x^2 + 2\cdot c\cdot x + y^2 + c^2)$$

$$c^2\cdot x^2 + 2\cdot a^2\cdot c\cdot x + a^4 = a^2\cdot x^2 + 2\cdot a^2\cdot c\cdot x + a^2\cdot y^2 + a^2\cdot c^2$$

"נעביר אגפים" ונסדר:

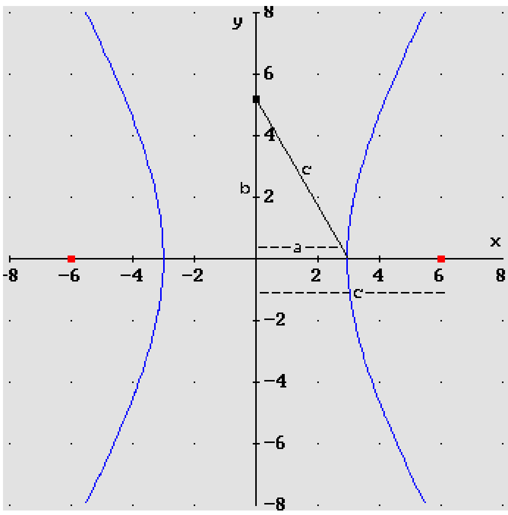
$$x^2\cdot(c^2 - a^2) - a^2\cdot y^2 = a^2\cdot(a + c)\cdot(c - a)$$

נחלק במכנה משותף מתאים:

$$\frac{x^2\cdot(a^2 - c^2) + a^2\cdot y^2}{a^2\cdot(a^2 - c^2)} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

נסמן: $b^2 = c^2 - a^2$ ונקבל את המשוואה הקנונית של היפרבולה: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



ד. עתה נראה הגדרה חלופית להיפרבולה. במהלך הפישוט שהצגנו קודם הגענו לשלב:

$$-4\cdot c\cdot x-4\cdot a^2=4\cdot a\cdot\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$$

נחלק ב 4a :

$$-\frac{c\cdot x+a^2}{a}=\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$$

אגף ימין מבטא את המרחק מנקודה כללית ששיעוריה (x, y) אל המוקד הימני ששיעוריו הם (c , 0). נראה שאגף שמאל מבטא את מכפלת המרחק מן המדריך במספר בלתי תלוי בנקודה, אשר ייקרא אקסצנטריות.

$$-\frac{c\cdot x+a^2}{a}=\frac{c\cdot\left(-x-\frac{a^2}{c}\right)}{a}=\frac{c}{a}\cdot\left|x+\frac{a^2}{c}\right|=e\cdot\left|x+\frac{a^2}{c}\right|$$

כאן הראינו כי הגדרת ההיפרבולה כמקום גיאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן אל שני המוקדים קבוע, שקולה להגדרת ההיפרבולה לפי מרחקיה אל מוקד ו-אל מדריך:

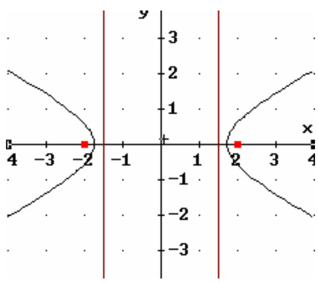
$$|[x,\ y]-[c,\ 0]|=e\cdot\left|x+\frac{a^2}{c}\right|$$

ה. נתונה ההיפרבולה שמשוואתה: $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

בהיפרבולה זו: $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $c=\pm\sqrt{3+1}=\pm2$. שיעורי מוקדי ההיפרבולה: (2 , 0) ו- (-2 , 0).

האקסצנטריות: $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, משוואות המדריכים: $d=\frac{3}{2}$ ו- $d=-\frac{3}{2}$.

נשרטט את ההיפרבולה:



פעילות 7.3 – היפרבולה וישר

א. נתונה היפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

חקרו את המצב ההדדי של ההיפרבולה הנתונה ושתי משפחות הישרים מפעילות 6.3.

ב. עברו למקרה הכללי ומצאו את תנאי ההשקה של ישר שמשוואתו $y=mx+n$ להיפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.3.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 7.3

ראו גם קובץ: Solution7.3.dfw

א. בפעילות זו נבחן מצב הדדי של היפרבולה ומשפחות של ישרים. נתייחס להיפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ולאותן משפחות ישרים שבחנו בפעילות הקודמת בקשר לאליפסה.

נשים לב להבדל בין שתי המשפחות בהקשר להיפרבולה הנתונה.

1. משפחת הישרים המוגדרות ע"י המשוואה הפרמטרית $y=\frac{3}{2}x+n$

כדי לבחון מצב הדדי של ישר מן המשפחה ושל ההיפרבולה הנתונה, נבדוק באלו נקודות נחתכים (אם בכלל) ההיפרבולה והישר. נפתור את מערכת המשוואות המתאימה, ונבטא את שיעורי נקודות החיתוך בעזרת הפרמטר n.

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \wedge y=\frac{3}{2}\cdot x+n$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4\cdot(\sqrt{(n^2-27)}-2\cdot n)}{9} & \frac{2\cdot\sqrt{(n^2-27)}-n}{3} \\ -\frac{4\cdot(\sqrt{(n^2-27)}+2\cdot n)}{9} & -\frac{2\cdot\sqrt{(n^2-27)}+n}{3} \end{bmatrix}$$

אם כן, קיומו של פתרון ממשי (נקודות מפגש של ההיפרבולה עם ישר מהמשפחה) תלוי בתנאי:

$$n^2 - 27 \ge 0$$

ובפרט, הישר חותך את ההיפרבולה בשתי נקודות שונות כאשר מתקיים:

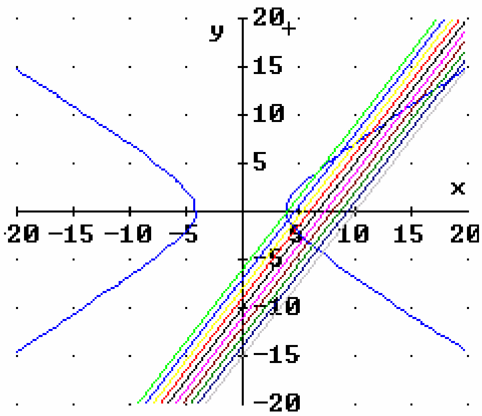
$$n^2 - 27 > 0$$

$$\mathrm{SOLVE}(n^2 - 27 > 0,\ n)$$

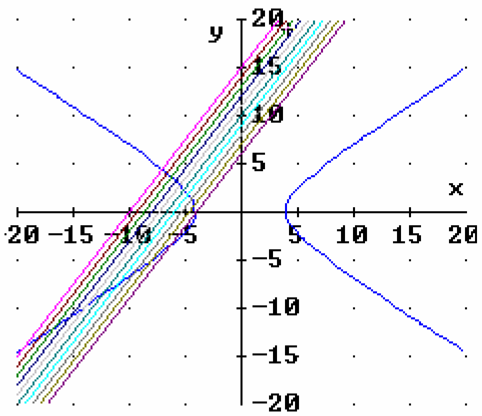
$$n < -3\cdot\sqrt{3} \vee n > 3\cdot\sqrt{3}$$

נבחר ערכים שונים בתחום שמצאנו עבור n ונשרטט ישרים רבים בבת אחת בעזרת הפקודה Vector:

$$\mathrm{VECTOR}\left(y = \frac{3}{2}\cdot x + n,\ n,\ -15,\ -6,\ 1\right)$$



$$\mathrm{VECTOR}\left(y = \frac{3}{2}\cdot x + n,\ n,\ 6,\ 15,\ 1\right)$$



מהשרטוט אנו למדים כי בכל אחד מחלקי התחום יש ערכי n שעבורם הישרים מהמשפחה חותכים ענף אחד של ההיפרבולה בשתי נקודות שונות.

ישר משיק להיפרבולה אם יש לו נקודת חיתוך כפולה עם ההיפרבולה, כלומר כאשר יש שורש ממשי כפול לטרינום הריבועי שמצאנו, דהיינו כדי למצוא את משוואות המשיקים נבחר:

$$n = -3\cdot\sqrt{3} \vee n = 3\cdot\sqrt{3}$$

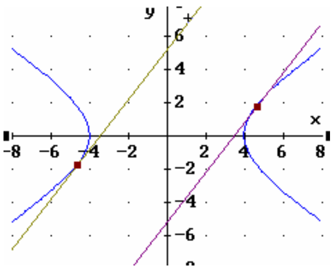
$$y = \frac{3}{2}\cdot x + -3\cdot\sqrt{3}$$

$$y = \frac{3}{2}\cdot x + 3\cdot\sqrt{3}$$

נקודות ההשקה:

$$\begin{bmatrix} \frac{8\cdot\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3} \\ -\frac{8\cdot\sqrt{3}}{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

נדגים בשרטוט:



עבור ערכי n בתחום המוגדר ע"י $-3\sqrt{3} < n < 3\sqrt{3}$ יתקבלו ישרים מן המשפחה שאינם חותכים את ההיפרבולה (בין שני המשיקים).

2. משפחת הישרים המוגדרות ע"י המשוואה הפרמטרית $y = -\frac{3}{4}x + n$

נחזור על המהלך. ראשית, מציאת נקודות חיתוך אפשריות של ישר מהמשפחה עם ההיפרבולה, מבוטאות על ידי הפרמטר n.

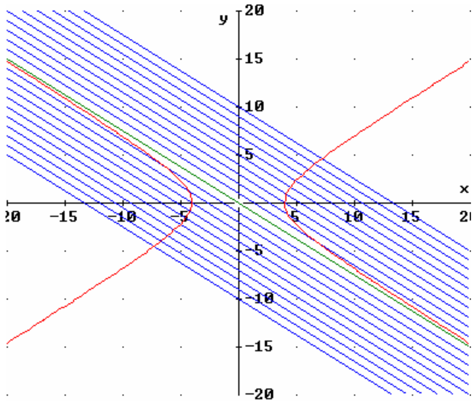
$$y = -\frac{3}{4}\cdot x + n \wedge \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{SOLVE}\left(y = -\frac{3}{4}\cdot x + n \wedge \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,\ [x,\ y]\right)$$

$$x = \frac{2\cdot(n^2 + 9)}{3\cdot n} \wedge y = \frac{n^2 - 9}{2\cdot n}$$

כאן ההגבלה היא $n \neq 0$. עבור כל n חיובי תתקבל נקודת חיתוך יחידה של הישר עם ענף אחד של ההיפרבולה, ועבור n שלילי תתקבל נקודת חיתוך יחידה של הישר עם הענף האחר של ההיפרבולה.
נדגים בשרטוט:

$$\text{VECTOR}\left(y = -\frac{3}{4}\cdot x + n,\ n,\ -10,\ 10,\ 1\right)$$



שימו לב שבשרטוט רואים את הישר העובר דרך הראשית (n=0), שאינו חותך את ההיפרבולה! זוהי בעצם אחת האסימפטוטות של ההיפרבולה - ישר "המשיק באינסוף" להיפרבולה. האסימפטוטה האחרת תתקבל בבחירת משפחה בעלת השיפוע הנגדי.

(ראו קשר בין האסימפטוטות וההיפרבולה גם בקובץ אנימציה hyperbola7.2-animate-D6.dfw)

נראה כי בבחירת השיפוע $m = \pm\frac{b}{a}$ (a, b - מקדמי המשוואה הקנונית) למשפחת ישרים, המשפחה אינה כוללת משיקים להיפרבולה, ועבור כל $n \neq 0$ הישר חותך את ההיפרבולה בנקודה אחת.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \wedge y = -\frac{b}{a}\cdot x + n$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \wedge y = -\frac{b}{a}\cdot x + n,\ [x,\ y]\right)$$

$$x = \frac{a\cdot(b^2 + n^2)}{2\cdot b\cdot n} \wedge y = \frac{n^2 - b^2}{2\cdot n}$$

ב. נעבור למקרה הכללי. נבדוק מהו תנאי ההשקה של ישר לא מקביל לציר ה- y להיפרבולה.
נפתור מערכת משוואות כלליות של ישר ושל היפרבולה קנונית.

$$\text{SOLUTIONS}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \wedge y=m\cdot x+n,\ [x,y]\right)$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a\cdot(b\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2+b^2+n^2)}+a\cdot m\cdot n)}{b^2-a^2\cdot m^2} & \dfrac{b\cdot(a\cdot m\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2+b^2+n^2)}+b\cdot n)}{b^2-a^2\cdot m^2} \\ \dfrac{a\cdot(b\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2+b^2+n^2)}-a\cdot m\cdot n)}{a^2\cdot m^2-b^2} & \dfrac{b\cdot(a\cdot m\cdot\sqrt{(-a^2\cdot m^2+b^2+n^2)}-b\cdot n)}{a^2\cdot m^2-b^2} \end{bmatrix}$$

נדרוש קיום פתרון יחיד (כפול):

$$-a^2\cdot m^2+b^2+n^2=0 \wedge b^2-a^2\cdot m^2\neq 0$$

$$\text{SOLVE}(-a^2\cdot m^2+b^2+n^2=0 \wedge b^2-a^2\cdot m^2\neq 0,\ n)$$

$$(n=-\sqrt{(a^2\cdot m^2-b^2)} \wedge a^2\cdot m^2-b^2\neq 0) \vee (n=\sqrt{(a^2\cdot m^2-b^2)} \wedge a^2\cdot m^2-b^2\neq 0)$$

מכאן, המשוואה הכללית של ישר משיק להיפרבולה היא:

$y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ או $y=mx-\sqrt{a^2m^2-b^2}$.

כאשר אין נקודות משותפות לישר ולהיפרבולה - הביטוי בתוך סימן השורש מתאפס (n = 0) ,
משוואת הישר היא: $y=\frac{b}{a}x$ או $y=-\frac{b}{a}x$. אלו משוואות האסימפטוטות להיפרבולה הנתונה.

פעילות 7.4 – משיקים להיפרבולה המאונכים זה לזה

א. נתונה היפרבולה ע"י המשוואה הקנונית $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של זוגות משיקים להיפרבולה המאונכים זה לזה.

הדרכה: רשמו תנאי מתאים בצורת משוואה בשני משתנים ושרטטו את העקומה במישור המוגדרת על-ידי המשוואה. הסבירו מה קיבלתם.

ב. הדגימו בשרטוט זוג משיקים מאונכים להיפרבולה.

ג. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של זוגות משיקים להיפרבולה הנתונה ע"י המשוואה הקנונית $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ המאונכים זה לזה. (כלומר, מקום גיאומטרי של הנקודות מהן רואים את ההיפרבולה בזווית ישרה.)

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.4.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 7.4
ראו גם קובץ: Solution7.4.dfw

ביחידה 6 מצאנו שהמקום הגיאומטרי של הנקודות שמהן רואים את האליפסה בזווית ישרה הוא מעגל. נבדוק אם תכונה זו מתקיימת גם בהיפרבולה.

א. נבדוק לגבי דוגמה פרטית: ההיפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

אפשר להשתמש במה שמצאנו בפעילות 7.3: המשוואה הכללית של משיק להיפרבולה היא: $y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ או $y=mx-\sqrt{a^2m^2-b^2}$. ואפשר גם להתחיל מפתרון מערכת משוואות של ההיפרבולה הנתונה וישר כללי.

בכל דרך נקבל ביטויים עבור שיפועי משיקים מנקודה כללית

$$m=\frac{\sqrt{9\cdot(y^2+4)-4\cdot x^2}-x\cdot y}{9-x^2}\ \vee\ m=\frac{\sqrt{9\cdot(y^2+4)-4\cdot x^2}+x\cdot y}{x^2-9}$$

כדי שהמשיקים יהיו מאונכים זה לזה נדרוש:

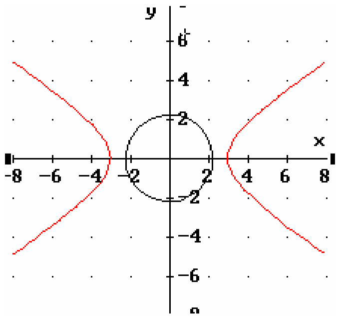
$$\frac{\sqrt{9\cdot(y^2+4)-4\cdot x^2}-x\cdot y}{9-x^2}\cdot\frac{\sqrt{9\cdot(y^2+4)-4\cdot x^2}+x\cdot y}{x^2-9}=-1$$

נפתור ונפשט:

$$\text{SOLVE}\left(\frac{\sqrt{9\cdot(y^2+4)-4\cdot x^2}-x\cdot y}{9-x^2}\cdot\frac{\sqrt{9\cdot(y^2+4)-4\cdot x^2}+x\cdot y}{x^2-9}=-1,\ [x,\ y]\right)$$

$$x^2+y^2=5\wedge x\neq-3\wedge x\neq3$$

אכן התקבלה משוואת מעגל (התנאי הטכני לגבי המכנה מתייחס למשיקים בקדקודי ההיפרבולה). נשרטט את המעגל:



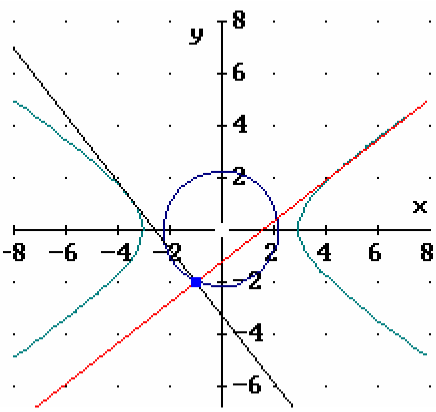
ב. נבחר נקודה ששיעוריה (‎-2, -1‎) ונציב את השיעורים בביטויים המתאימים לשיפועים. נקבל:

$$m=-\frac{\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{4}\vee m=\frac{\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{4}$$

נציב את הערכים שהתקבלו במשוואת המשיק:

$$y=m\cdot x+-\sqrt{9\cdot m^2-4}$$

ונשרטט את זוג המשיקים:



ג. נעבור מן הדוגמה הפרטית למקרה הכללי. נחזור על אותו מהלך, ונראה כי המקום הגיאומטרי של הנקודות שמהן רואים את ההיפרבולה בזווית ישרה הוא מעגל.

המשוואה הכללית של משיק להיפרבולה שמשוואתה קנונית היא, כאמור:

$y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ או $y=mx-\sqrt{a^2m^2-b^2}$.

נרצה לחלץ את m. לשם כך "נעביר אגפים" ונעלה בריבוע את שני האגפים:

$$(y - m\cdot x = \pm\sqrt{(a^2\cdot m^2 - b^2)})^2$$

$$(m\cdot x - y)^2 = a^2\cdot m^2 - b^2$$

נבודד את m (נפתור לפי m):

$$\mathrm{SOLVE}((m\cdot x - y)^2 = a^2\cdot m^2 - b^2,\ m)$$

$$m = \frac{\sqrt{(a^2\cdot(y^2 + b^2) - b^2\cdot x^2)} - x\cdot y}{a^2 - x^2} \vee m = \frac{\sqrt{(a^2\cdot(y^2 + b^2) - b^2\cdot x^2)} + x\cdot y}{x^2 - a^2}$$

קיבלנו שני ערכים אפשריים עבור שיפוע המשיק להיפרבולה. כדי ששני משיקים יהיו מאונכים זה לזה, נדרוש שמכפלת שיפועיהם תהיה 1-:

$$\frac{\sqrt{(a^2\cdot(y^2 + b^2) - b^2\cdot x^2)} - x\cdot y}{a^2 - x^2}\cdot\frac{\sqrt{(a^2\cdot(y^2 + b^2) - b^2\cdot x^2)} + x\cdot y}{x^2 - a^2} = -1$$

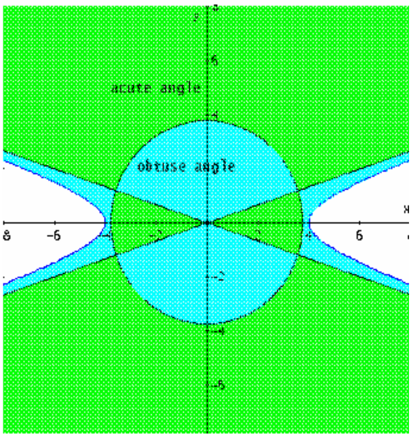
נפשט את הביטוי:

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2$$

אם a>b, המשוואה הזאת היא משוואות מעגל.

המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של שני משיקים מאונכים להיפרבולה הוא אכן מעגל.

כמו לגבי אליפסה אפשר לחקור זוויות ראיה בנקודות שונות בעזרת סרגלי גלישה אם משתמשים בגרסה *Derive* 6. באיור שלפניכם אפשר לראות את המקום של האסימפטוטות בחלוקת המישור לאזורים מהם רואים את ההיפרבולה בזווית חדה (צבע ירוק)/קהה (צבע כחול).



פעילות 7.5 – שאלות

א. האליפסה שמשוואתה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ וההיפרבולה שמשוואתה: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$ נחתכות בנקודה A ששיעוריה (3, 5).
נתון שהמשיק לאליפסה והמשיק להיפרבולה בנקודת החיתוך A מאונכים זה לזה.
מצאו את משוואת האליפסה.
שרטטו את האליפסה, את ההיפרבולה ואת המשיקים בנקודה A.

ב. נתונה אליפסה שמשוואתה: $4x^2+9y^2=36$. מצאו היפרבולה שמוקדיה זהים למוקדי האליפסה הזאת, כך שהאליפסה וההיפרבולה נחתכות בזווית ישרה. (המשיקים בנקודות החיתוך מאונכים זה לזה.)

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.5.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 7.5

ראו גם קובץ: Solution7.5.dfw

בפעילות זו נשתמש בידע שצברנו אודות ההיפרבולה והאליפסה לפתרון בעיות הדומות לאלו המופיעות בשאלוני הבגרות. רצוי לתכנן מראש את מהלך הפתרון, ולהחליט אלו שלבים כדאי לבצע בעזרת התוכנה ואלו במחברת.

א. נתונה היפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$. הנקודה A ששיעוריה (3 , 5) נמצאת על ההיפרבולה הנתונה. לפיכך מתקבלת המשוואה $\frac{25}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$ (1)

נבנה משיק להיפרבולה דרך הנקודה A:

אפשר להוכיח (בעזרת נגזרת של פונקציה סתומה, או בדרך אחרת) כי השיפוע של משיק להיפרבולה הנתונה ע"י משוואה קנונית $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ בנקודה (x_1,y_1) על ההיפרבולה הוא: $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

וכי השיפוע של משיק לאליפסה הנתונה ע"י משוואה קנונית $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ בנקודה (x_1,y_1) על האליפסה הוא: $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

אם כך, השיפוע של המשיק להיפרבולה בנקודה A הוא $\frac{5}{3}$ ומשוואת המשיק $y-3=\frac{5}{3}(x-5)$.

המשיק לאליפסה בנקודה A מאונך למשיק להיפרבולה בנקודה זו ולכן שיפועו $-\frac{3}{5}$ ומתקבלת

$$\frac{5^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$$

$$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{5^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1,\ b\right)$$

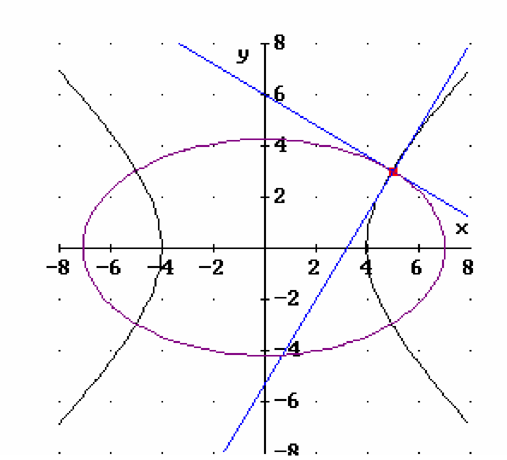
$$b=-\frac{3\cdot a}{\sqrt{(a^2-25)}}\ \vee\ b=\frac{3\cdot a}{\sqrt{(a^2-25)}}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3\cdot a}{\sqrt{(a^2-25)}}\right)^2}=1$$

המשוואה $-\frac{5b^2}{3a^2}=-\frac{3}{5}$. (2)

משתי המשוואות (2) ,(1)מקבלים כי $b^2=18$ $a^2=50$ ומשוואת האליפסה: $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{18}=1$

משוואת המשיק לאליפסה בנקודה A: $y=6-\frac{3}{5}x$



ב. נתונה אליפסה ע"י המשוואה: $4x^2 + 9y^2 = 36$. צורתה הקנונית של משוואת האליפסה הנתונה:
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. מכאן: $a = 3$, $b = 2$, $c=\sqrt{5}$ ושיעורי מוקדי האליפסה הם : $\left(\sqrt{5},0\right)$ ו- $\left(-\sqrt{5},0\right)$ בהתאמה.

מחפשים היפרבולה בעלת אותם מוקדים. נזכור שידיעת המוקדים בלבד לא מגדירה היטב היפרבולה, חסר נתון. התנאי הזה מגדיר משפחה של היפרבולות. זוהי היפרבולה בעלת משוואה קנונית מהצורה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5-a^2}=1$

נקודות החיתוך של האליפסה הנתונה וההיפרבולה מוגדרות ע"י מערכת משוואות. נכתוב את המערכת הזאת ונפתור אותה. נביע את שיעורי נקודות החיתוך של שתי העקומות כפונקציות של הפרמטר a.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5-a^2}=1 \wedge \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$x=\pm\frac{3\cdot\sqrt{5}\cdot a}{5} \wedge y=\pm\frac{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{(5-a^2)}}{5}$$

על אליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, נתונה נקודה M ששיעוריה הם (x_1,y_1). אם M איננה על ציר ה-x, כאמור לעיל, שיפוע המשיק לאליפסה בנקודה M שווה ל- $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

אם M היא אחת מנקודות החיתוך של האליפסה וההיפרבולה נקבל כי שיפוע המשיק לאליפסה הנתונה בנקודת חיתוך:

$$-\frac{2\cdot a}{3\cdot\sqrt{(5-a^2)}}$$

שיפוע המשיק להיפרבולה הנתונה ע"י משוואה קנונית בנקודה (x_1,y_1) על ההיפרבולה הוא: $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

אם M היא אחת מנקודות החיתוך של האליפסה וההיפרבולה נקבל כי שיפוע המשיק להיפרבולה הנתונה בנקודת חיתוך:

$$\frac{3\cdot\sqrt{(5-a^2)}}{2\cdot a}$$

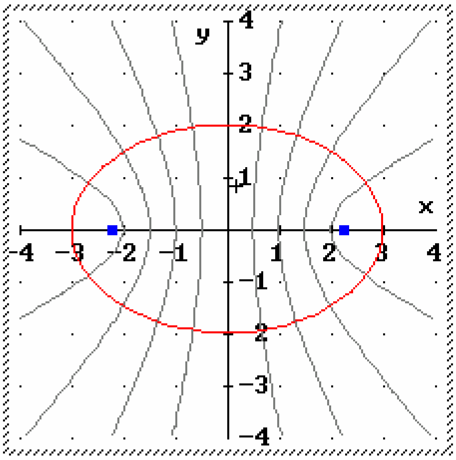
המשיקים שמצאנו מאונכים זה לזה אם, ורק אם, מכפלת השיפועים שקיבלנו היא 1-, ואכן:

$$\left(-\frac{2\cdot a}{3\cdot\sqrt{(5-a^2)}}\right)\cdot\frac{3\cdot\sqrt{(5-a^2)}}{2\cdot a} = -1$$

משוואת ההיפרבולה המבוקשת היא $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5-a^2}=1$ עבור a כך ש $a<\sqrt{5}$

נשרטט את האליפסה הנתונה ומספר היפרבולות מן המשפחה:

$$\text{VECTOR}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5-a^2}=1,\ a,\ 0.5,\ 2,\ 0.5\right)$$



שימו לב כי גם האליפסה וההיפרבולה בסעיף א' לעיל הן בעלות מוקדים זהים.

נוכל להוכיח כי המשיקים לאליפסה ולהיפרבולה, בעלות מוקדים זהים, בנקודות החיתוך שלהן – מאונכים זה לזה (ראו בקובץ הפתרונות.)

תרגיל נוסף:

מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות מהן רואים את הפרבולה $y^2=x$ בזווית של 45^0?

בקובץ הפתרון (סעיף 7.5c) אפשר לראות כי המקום הגיאומטרי הוא ענף של היפרבולה.

מצאנו כאן קשר מעניין בין פרבולה והיפרבולה.