5. גיאומטריה של פרבולות   מדריך למורה

מבוא

מטרת יחידה זו, היא גישור בין שני היבטים שונים על הפרבולה, המוצגים לרוב במהלך הוראת המתמטיקה בנפרד זה מזה. הפעילות ביחידה יוצאת מתוך המוכר לתלמידים: ההיבט האלגברי שבו פרבולה היא גרף של פונקציה ריבועית, ומובילה אל ההיבט החדש להם, הגיאומטרי, שבו מוגדרת פרבולה כמקום גיאומטרי של נקודות בעלות מרחק שווה אל מוקד ואל מדריך. לשם כך מטפלת היחידה *במיתר המוקדי* של הפרבולה, שהוא המיתר העובר דרך מוקד הפרבולה ומאונך לציר הסימטריה שלה. נשוב וניפגש עם המיתר המוקדי ביחידות הבאות העוסקות באליפסה, בהיפרבולה ובמבט המאחד מקומות גיאומטריים מהמעלה השנייה.

בהמשך יתברר שכל הפרבולות דומות לפרבולה שמשוואתה $y = x^2$ (היא תיקרא הפרבולה הסטנדרטית). כמו כן נבדוק את תנאי ההשקה של ישר לפרבולה ונחשוף בעזרתם תכונות גיאומטריות מעניינות שיאפשרו ראייה כוללת ורחבה יותר של הפרבולה.

רשימת הפעילויות:

פעילות 5.1 – "המיתר המוקדי" בפרבולה

פעילות 5.2 – פרבולה כמקום גיאומטרי

פעילות 5.3 – משיקים לפרבולה

פעילות 5.4 – זוגות מיוחדים של משיקים לפרבולה

פעילות 5.5 – כל הפרבולות דומות לפרבולה הסטנדרטית

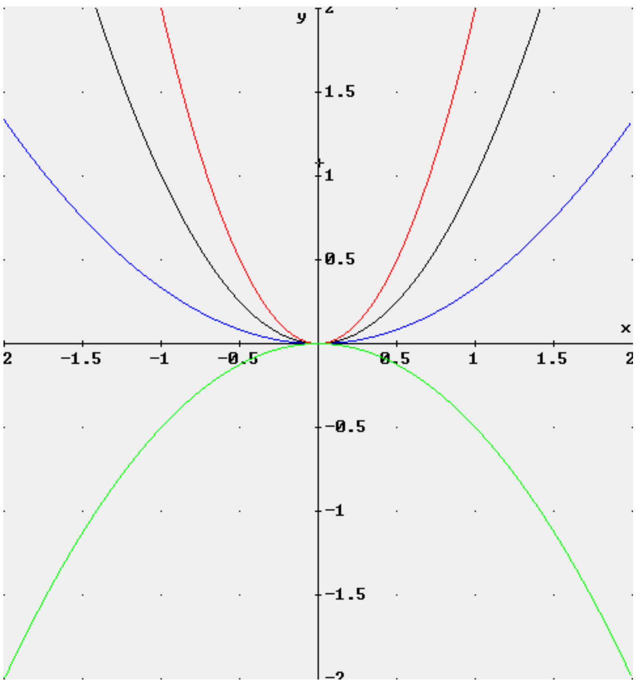
פעילות 5.1 – "המיתר המוקדי" של פרבולה

א.לגרף של פונקציה ריבועית צורה גיאומטרית הנקראת פרבולה.

רשמו במחשב את ארבע המשוואות הבאות (המגדירות פונקציות ריבועיות):

$$y=x^2 \quad y=2x^2 \quad y=\frac{1}{3}x^2 \quad y=-\frac{1}{2}x^2$$

שרטטו את הגרפים של הפונקציות. הוסיפו כתוביות – רצוי בצבעים מתאימים לצבעי הגרפים



התבוננו בגרפים וענו על השאלה:

מה הקשר בין ערך הפרמטר a וצורת הפרבולה $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?

ב. סמנו על הפרבולה שמשוואתה $y = x^2$ שתי נקודות סימטריות (לגבי ציר y) A ו- B כך שאורך המיתר המחבר אותן הוא 1. חשבו את השיפוע של המשיק לפרבולה בשתי הנקודות שסימנתם.

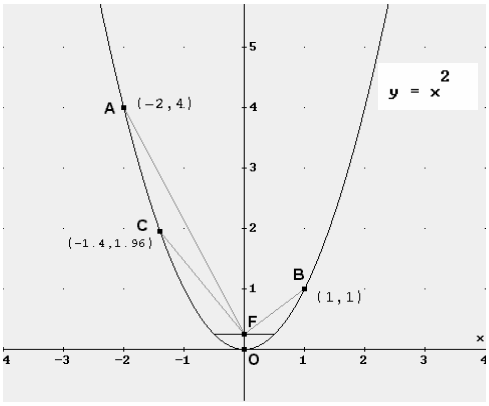
הגדירו ב- Derive את הנקודות A:= [__, __] ו- B:= [__, __]. הגדירו משתנה נוסף ב- Derive, a:= כדי שתוכלו להשתמש בו בהמשך לטיפול בגרף הנתון על-ידי המשוואה $y = ax^2$.

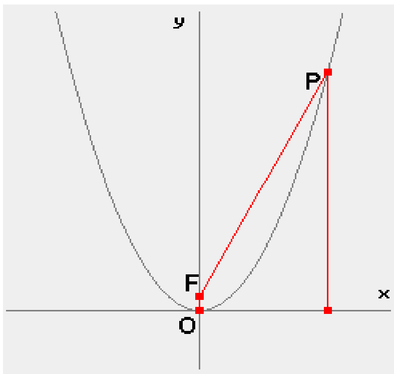
ג. על שלוש הפרבולות האחרות סמנו נקודות שבהן השיפועים של המשיקים לפרבולות שווים לשיפועי המשיקים לפרבולה הסטנדרטית (שמשוואתה היא $y = x^2$) בנקודות A , B (שסימנתם בסעיף הקודם) בהתאמה.

ד. בכל אחת מהפרבולות שרטטו את המיתר המחבר את שתי הנקודות הסימטריות מסביב לציר *y* שסימנתם (צבעו כל מיתר בצבע הפרבולה המתאימה) וחשבו את אורך המיתרים.
הסיקו מסקנות מהשרטוט ומהחישוב.
הסבירו מדוע יכול האורך *של המיתר* אשר שרטטתם בכל פרבולה לשמש *מדד* המאפיין את צורת הפרבולה?

ד. הראו (ללא המחשב) כי *אם* המרחק בין שתי נקודות סימטריות (לגבי ציר y) G, E על פרבולה $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ הוא $\frac{1}{|a|}$, אז שיפועי המשיקים בנקודות אלו הם 1 או -1.
הראו כי *אם* שיפועי המשיקים בשתי נקודות סימטריות על פרבולה שמשוואתה היא $y = ax^2$ הם 1 או -1, *אז* המרחק בין שתי הנקודות הוא $\frac{1}{|a|}$.

ה. סמנו ב- F את הנקודה בה חותך המיתר GE את ציר y.
מהם שיעורי F? [0, __] . לקטע המחבר נקודה על הפרבולה עם F, נקרא *רדיוס*.
חשבו את אורכי הרדיוסים CF, BF, AF, OF בשרטוט שלפניכם.
לחישוב מרחק בין שתי נקודות רשמו לדוגמה, =|A – F| , אפשר לעבור לכתיב עשרוני Decimal.
האם נראה לכם שיש חוקיות? נסחו השערה ובדקו אותה עבור נקודה כללית על הפרבולה $y = x^2$





עבור פרבולה שמשוואתה $y = ax^2$ הנקודה $F := [0, \frac{1}{4a}]$ נקראת *מוקד*.
למיתר המאונך לציר הסימטריה של הפרבולה ועובר דרך המוקד נקרא *המיתר המוקדי*.

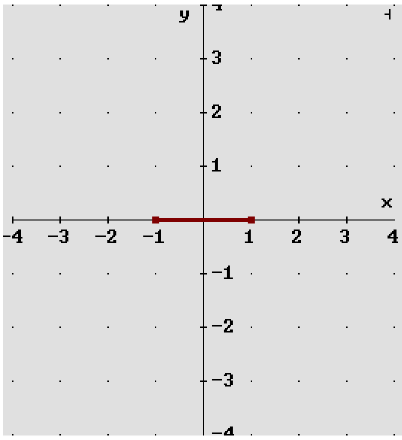
א. הראו כי המרחק בין נקודה $P:=[x, ax^2]$ על הפרבולה ו F נתון על-ידי:

$$|P - F| = x^2 \cdot |a| + \frac{1}{4 \cdot |a|}$$

היעזרו בפקודות Simplify > Expand
נסחו במילים את התוצאה לעיל.

ח. "המיתר המוקדי מחפש פרבולה."

(1) שרטטו את הקטע [[-1, 0], [1, 0]] ומצאו פרבולה כך שהקטע הוא המיתר המוקדי שלה.



(2) מצאו פרבולה כך שהקטע [[2, 0], [6, 0]] הוא המיתר המיוחד שלה. שרטטו.

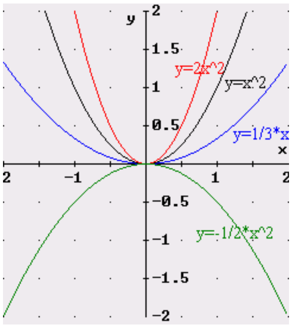
(3) מצאו פרבולה כך שהקטע [[-1, -2], [-1, 2]] הוא המיתר המיוחד שלה. שרטטו.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.1.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 5.1

ראו גם קובץ: Solution5.1.dfw

א. פעילות זאת יוצאת מתוך המוכר לתלמידים: הפרבולה כגרף של פונקציה ריבועית. הכרת תכונות נוספות של גרף זה, תוביל לאבחנה בין גרף שהוא פרבולה לגרפים אחרים הנראים דומים.

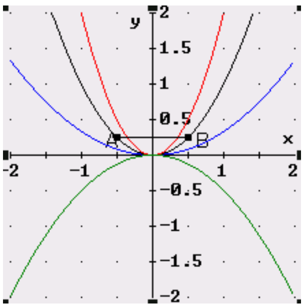


תחילה נשחזר את השרטוט הנתון, על ידי שרטוט פרבולות עם משוואה מהצורה $y = ax^2$ ‎($a \neq 0$). אף כי הדברים נראים פשוטים ומוכרים כבר לתלמידים, כדאי לבצע את הפעילות שלב אחר שלב כדי שנוכל לבנות את התובנות ולהשתמש בהן בהמשך.

נתאים לכל פרבולה כיתוב תואם. בחלון הגרפי בחרו Options>Insert Annotation. לחיצה כפולה על הכיתוב תפתח חלון לבחירת צבע ועיצוב.

(שימו לב שבגרסה Derive 6 , תוכלו לקבוע לפני השרטוט Options > Annotate New Plots, והמשוואה תירשם בחלון הגרפי בצבע שבו ישורטט הגרף.)

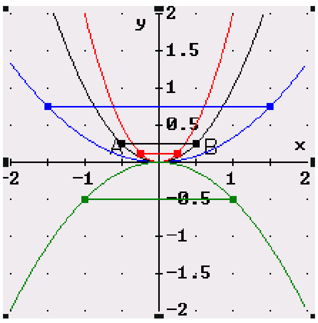
ב. נקודות סימטריות על הפרבולה שמשוואתה $y = x^2$ הן נקודות בעלות שיעורי x נגדיים ואותו שיעור y . המרחק בין שתי הנקודות הוא יחידה אחת, ומכאן ששיעור ה- x הוא $\pm\frac{1}{2}$.



נוסיף לשרטוט את המיתר.

שיפועי המשיקים לפרבולה בקצות המיתר (קל לחישוב בעזרת נגזרת) הם: ± 1

ג. נמצא על כל אחת מהפרבולות ששרטטנו את הנקודות שבהן שיפועי המשיקים הם 1 או 1-, ונוסיף לשרטוט את המיתרים המתאימים:



על כל אחת מן הפרבולות מתקבל מיתר שאורכו $\frac{1}{|a|}$ ‏, $a \neq 0$.

ד. רק בנקודה אחת על הפרבולה שיפוע המשיק לגרף הוא 1, ובנקודה הסימטרית לה השיפוע הוא ‎-1‎ , למיתר המחבר את שתי הנקודות הללו תכונות גיאומטריות מיוחדות, כפי שנראה להלן.

ה. נוכיח שאורכו של המיתר קבוע ותלוי ב a .

<u>משפט ישר</u>: אם המרחק בין שתי נקודות סימטריות על זרועות הפרבולה שמשוואתה $y=ax^2$ הוא $\frac{1}{|a|}$, אז השיפועים בנקודות אלו הם 1 או ‎-1‎ .

נבחר שתי נקודות סימטריות, (t,at^2) , $(-t,at^2)$ כאשר $t>0$. המרחק בין שתי הנקודות (אורך המיתר) הוא : $2t$.

$$2t=\frac{1}{|a|}\Rightarrow t=\frac{1}{2|a|}$$

שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות אלו:

$$y'(x)=2ax$$
$$y'(t)=y'\left(\frac{1}{2|a|}\right)=2a\cdot\frac{1}{2|a|}=\pm1$$
$$y'(-t)=y'\left(-\frac{1}{2|a|}\right)=-2a\cdot\frac{1}{2|a|}=\pm1$$

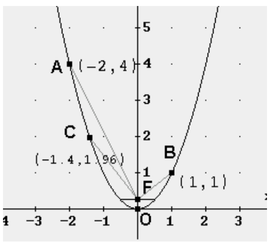
<u>משפט הפוך</u>: אם השיפועים בשתי נקודות סימטריות על פרבולה $y = ax^2$ הם 1 או ‎-1‎ , אז המרחק בין שתי הנקודות הוא $\frac{1}{|a|}$.

שיעורי ה- x של הנקודות על הפרבולה שבהן שיפוע המשיק הוא 1 או ‎-1‎ הם:

$$y'(x)=2ax=\pm1$$
$$\Rightarrow x=\frac{\pm1}{2a}$$

המרחק בין שתי נקודות סימטריות אלו: $\left|\frac{2}{2a}\right|=\frac{1}{|a|}$.

ו. נחשב אורכים של רדיוסים בשרטוט גרף הפונקציה $y = x^2$.



|0 − F| = 0.25
|A − F| = 4.25
|B − F| = 1.25
|C − F| = 2.21

השערה: אורך הרדיוס הוא $t^2 + 0.25$.

נבדוק עבור נקודה כללית על גרף פונקציה זו $P:=[t, t^2]$.

נפשט את הביטוי ואכן נקבל אימות ההשערה: $|P – F| = t^2 + 0.25$.

ז. נעבור מן הפרבולה הסטנדרטית $y = x^2$ למשפחת הפרבולות הניתנות ע"י המשוואות $y = ax^2$ כאשר a הוא מספר ממשי שונה מ- 0 . נרחיב את ההשערה ונאמת אותה. נגדיר נקודה כללית על הפרבולה שמשוואתה $y = ax^2$: $P:=[t, at^2]$. מוקד הפרבולה הוא אמצע המיתר המוקדי: $F:=[0, 1/4|a|]$.

נחשב מרחק בין נקודה כלשהי על הפרבולה לבין המוקד, ונפתח סוגריים (Expand):

$$|P - F| = \frac{4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 1}{4 \cdot |a|}$$

$$|P - F| = x^2 \cdot |a| + \frac{1}{4 \cdot |a|}$$

באגף ימין קיבלנו שני מחוברים: $x^2|a|$, הערך המוחלט של שיעור ה- y של הנקודה על הפרבולה - משמעותו הגיאומטרית היא מרחקה של הנקודה על הפרבולה אל ציר ה- x (שעליו נמצא קודקוד הפרבולה). $1/(4|a|)$ הוא שיעור ה- y של המוקד F, ומבטא מבחינה גיאומטרית את *מרחקה של F אל הראשית*.

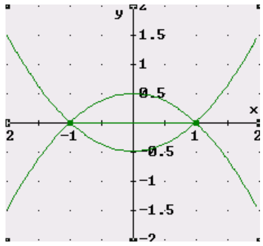
מסקנה: הפרבולה שמשוואתה $y = ax^2$ היא המקום הגיאומטרי של נקודות שמרחקן אל המוקד F שווה לסכום מרחקן אל ציר x ומרחקה של F אל ראשית הצירים.

ח. בסעיפים הקודמים ראינו כי אורך המיתר המוקדי קובע פרבולה באופן בלעדי. עתה נפנה למצוא פרבולה מתאימה למיתר נתון. (אפשר לגשת אל הבעיה בדרכים שונות, נביא כאן פתרון המתבסס על הנלמד לעיל.)

(1) קצות המיתר המוקדי הם [-1, 0] ו- [1, 0] , מכאן שמוקד הפרבולה (אמצעו של המיתר המוקדי) הוא ראשית הצירים. נשתמש במסקנה שניסחנו קודם:

נשווה את מרחקה של נקודה כלשהי [x, y] מהמוקד - ||[x, y]-[0,0]| לסכום מרחק הנקודה מציר x (y בערכו המוחלט) ומרחק המוקד מקצה המיתר המוקדי (1).

נקבל משוואה: $| [x, y] - [0, 0] | = |y| + 1$ שפתרונותיה שתי משוואות של פרבולות: $y = \pm\frac{(x^2 - 1)}{2}$. נדגים בשרטוט כיצד הפרבולה 'מתלבשת' על המיתר המוקדי הנתון:

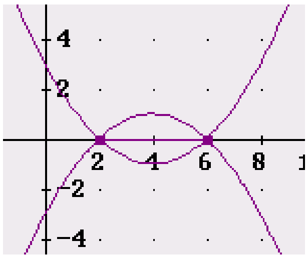


באופן דומה נמצא פרבולות למיתרים מוקדיים נוספים.

(2) קצות המיתר המוקדי הם [2, 0]ו- [6, 0] והמוקד הוא: [4, 0] . אורך המיתר המוקדי הוא 4 יחידות.

משוואת המקום הגיאומטרי: 2+ |y| = | [4,0] - [x, y] | . (נדגיש שצורת הכתיבה האת היא של *Derive* והיא לא מקובלת בכתיבה מתמטית ידנית) נפשט ונקבל משוואות של שתי פרבולות שהקטע הנתון הוא המיתר המוקדי שלהן: $y=\pm\frac{x^2-8x+12}{4}$.

נדגים בשרטוט:

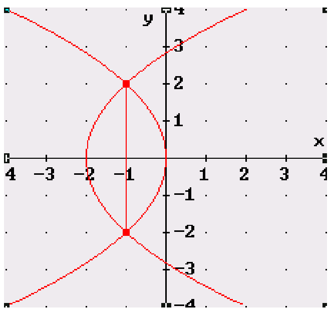


(3) קצות המיתר המוקדי הם [-1, -2]ו- [-1, 2] והמוקד הוא: [-1, 0] . (כאן משוואת ציר הסימטריה היא y = 0, כלומר ציר הסימטריה הוא ציר ה- x. אנו עוברים לעיסוק בפרבולה שאינה מייצגת גרף של פונקציה, אך שומרת כמובן על תכונותיה כמקום גיאומטרי.)

משוואת המקום הגיאומטרי: היא: 2 + |x + 1| = | [-1,0] - [x, y] | , כלומר:

-x +1 = | [-1,0] - [x, y] | או x +3 = | [-1,0] - [x, y] |. נפשט ונקבל משוואות של שתי פרבולות שהקטע הנתון הוא המיתר המוקדי שלהן: $x=-\frac{y^2}{4}, x=\frac{y^2-8}{4}$

נדגים בשרטוט:



פעילות 5.2 – פרבולה כמקום גיאומטרי

נראה עתה שנקודות Q:=[x ,y] המקיימות את התנאי $|[x,y]-[0,\frac{1}{4a}]|=y+\frac{1}{4|a|}$ (בסימונים של התוכנה), נמצאות על הפרבולה שמשוואתה היא $y=ax^2$. נבדוק תחילה מקרה פרטי $y=2x^2$, שנוכל להדגים בשרטוט.

א. הציבו $\frac{1}{2}$ במקום a ושרטטו את הגרף המוגדר ע"י הביטוי (הפעילו Simplify Before Plotting).

מה קיבלתם?

נברר את המשמעות של כל אחד משני אגפים בביטוי $|Q-[0,\frac{1}{2}]|=y+\frac{1}{2}$:

סמנו בשרטוט את הנקודה $[0,\frac{1}{2}]$ ואת הישר שמשוואתו $y+\frac{1}{2}=0$

הוסיפו לשרטוט את הגרפים של הביטויים הבאים:

$$\left|Q-\left[0,\frac{1}{2}\right]\right| = 3 \vee y+\frac{1}{2} = 3$$
$$\left|Q-\left[0,\frac{1}{2}\right]\right| = 2 \vee y+\frac{1}{2} = 2$$

מה משמעות הביטויים?

הגדרת הפרבולה כמקום גיאומטרי

המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, שמרחקן מנקודה F (מוקד) שווה למרחקן אל ישר L (מדריך) שאינו עובר דרך F, נקרא בשם פרבולה.

מהו המרחק בין המוקד והמדריך בדוגמה לעיל? ______ מהו אורך המיתר המוקדי? _____

ב. מצאו את משוואת הפרבולה שקדקודה בראשית הצירים, ציר הסימטריה שלה הוא ציר x והמרחק בין המוקד והמדריך הוא p.

מהם שיעורי המוקד?_______ מהי משוואת המדריך ? _______

מהו אורך המיתר המוקדי שלה? _____

הגדירו ב- Derive משתנה p:= מאחר והגדרתם מקודם נקודה P.

המשוואה שקיבלתם נקראת *המשוואה הקנונית של הפרבולה*; p נקרא *הפרמטר* של הפרבולה.

בדקו את השפעת ערכו של הפרמטר על צורת הפרבולה.

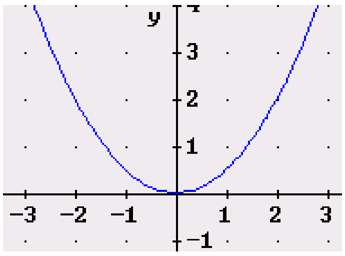
שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.2.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 5.2

ראו גם קובץ: Solution5.2.dfw

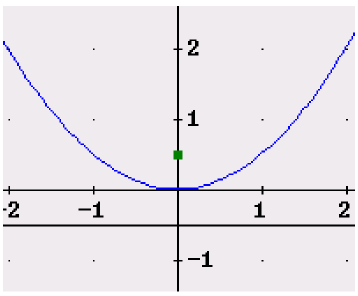
בפעילות הקודמת הוכחנו כי כל הנקודות הנמצאות על הפרבולה שמשוואתה היא $y = ax^2$ הן בעלות תכונה משותפת: מרחקן מן המוקד שווה לסכום מרחקן אל ציר y ומרחק המוקד מן הראשית. עתה נבחן את הכיוון ההפוך ובכך נוכיח כי הפרבולה היא אכן מקום גיאומטרי.

א. נשרטט את הגרף המתאר את התנאי $|[x,y]-[0,\frac{1}{4a}]| = y+\frac{1}{4|a|}$ עבור $a=\frac{1}{2}$, כלומר את הגרף המיוצג על ידי המשוואה $\left|[x,y]-[0,\frac{1}{2}]\right| = y+\frac{1}{2}$.

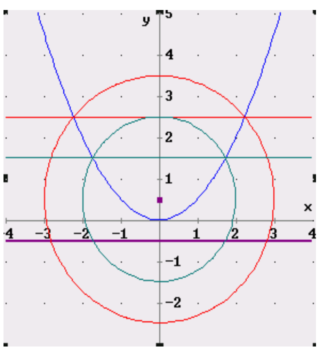


כצפוי, קיבלנו פרבולה.

עתה נברר מה משמעות האיברים השונים במשוואה. נוסיף לשרטוט את הנקודה $[0,\frac{1}{2}]$ ואת הישר שמשוואתו היא $y+\frac{1}{2}=0$



נוסיף לשרטוט את הגרפים המוגדרים ע"י הביטויים הבאים:



$$\left|Q - \left[0, \frac{1}{2}\right]\right| = 3 \lor y + \frac{1}{2} = 3$$

$$\left|Q - \left[0, \frac{1}{2}\right]\right| = 2 \lor y + \frac{1}{2} = 2$$

נוכל כמובן להוסיף עוד נקודות כרצוננו, וכך לבנות אוסף נקודות בעלות תכונה משותפת שכולן נמצאות על הפרבולה. מומלץ לבצע פעילות זו כהדגמה של ידי המורה.

מכאן סלולה הדרך אל ההגדרה: המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, שמרחקן מנקודה F (מוקד) שווה למרחקן אל ישר L (מדריך) שאינו עובר דרך F, נקרא פרבולה.

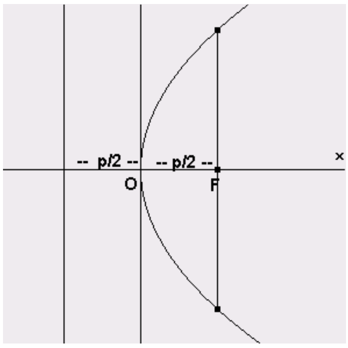
המרחק בין המוקד לבין המדריך בדוגמה ששרטטנו הוא 1. אורך המיתר המוקדי הוא 2 יחידות.

ב. נעבור למציאת המשוואה הקנונית של הפרבולה: הקודקוד בראשית הצירים, ציר הסימטריה הוא ציר ה- *x* , המרחק בין המוקד לבין המדריך הוא *p*.

$$\left|Q - \left[\frac{p}{2}, 0\right]\right| = x + \frac{p}{2}$$

פישוט יביא אותנו למשוואה: $y^2 = 2px$

והייצוג הגרפי:



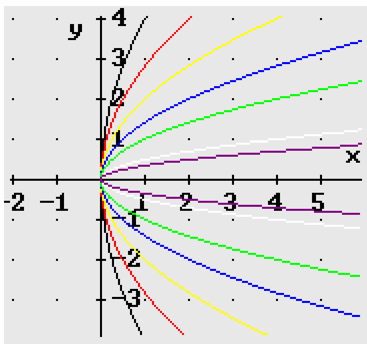
שיעורי המוקד של פרבולה הנתונה ע"י משוואה קנונית הם $[\frac{p}{2},0]$ משוואת המדריך היא $x=-\frac{p}{2}$

אורכו של המיתר המוקדי של הפרבולה $2p$ (מדוע?).

נבדוק כיצד משפיע ערכו של הפרמטר *p* על צורתה של פרבולה הנתונה ע"י משוואה קנונית.

ניעזר בפקודה Vector לשרטוט פרבולות הנתונות ע"י משוואות קנוניות שונות.

$$\text{VECTOR}(y^2 = 2\cdot p\cdot x,\ p,\ [8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 0.5,\ 0.125,\ 0.0625])$$



פעילות 5.3 – משיקים לפרבולה

א. תנאי השקה של ישר שמשוואתו $y = mx + n$ ($m \neq 0$) לפרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ ($p\neq0$) מתקבל על-ידי פתרון המשוואה הבאה:

$$\frac{y^2}{2\cdot p} = \frac{y - n}{m}$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{y^2}{2\cdot p} = \frac{y - n}{m}, y\right)$$

$$y = \frac{p - \sqrt{(p\cdot(p - 2\cdot m\cdot n))}}{m} \vee y = \frac{\sqrt{(p\cdot(p - 2\cdot m\cdot n))} + p}{m}$$

מהי המשמעות של פתרונות המשוואה? מצאו את תנאי ההשקה של הישר לפרבולה.

ב. מצאו משוואת המשיק לפרבולה שמשוואתה (הסתומה) $y^2 = 2px$ בנקודה [x1, y1] שעליה.
על-ידי התוכנה. הפקודה היא: IMP_TANGENT(y^2 – 2px, x, y, x1, y1)
עתה, הראו כי משוואת המשיק לפרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ בנקודה [x1, y1] עליה נתונה ע"י הנוסחה: $y1\cdot y = p(x + x1)$

ג. שרטטו את הפרבולה שמשוואתה $y^2 = -9x$ ובנו לה משיק בנקודה [6 , ___] הנמצאת עליה.

מהי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x?

מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x בנו משיק שני לפרבולה.

מהי הזווית (במעלות) בין שני המשיקים?

תזכורת: נתונים שני ישרים ששיפועיהם הם m1 ו- m2. נסמן ב-α את הזוית בין שני הישרים. אזי:

$$\text{TAN}(\alpha\cdot{}^\circ) = \frac{m1 - m2}{1 + m1\cdot m2}$$

סימון הזווית נמצא בסרגל האותיות היווניות, סימון המעלות בסרגל הסמלים המתמטיים.

למציאת הערך של α הפעילו מציאת פתרון נומרי (NSOLVE) בתיבת השיח של Solve.

ד. מן הנקודה Q:= [4,0] העבירו משיקים לפרבולות המוגדרות ע"י $y^2 = -6x$ ו- $y^2 = -10x$.
סמנו את נקודות המגע בשרטוט.

ה. הוכיחו כי אם מעבירים משיקים מהנקודה Q:= [4,0] למשפחת הפרבולות המוגדרת על-ידי המשוואה $y^2 = -2kx$ ($k > 0$), השיעור הראשון של נקודות המגע הוא קבוע.

ו. דרך המוקד של פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ עובר ישר החותך אותה בשתי נקודות (x1, y1), (*x*2, *y*2). (זה הסימון המתמטי הקלאסי , בניגוד לסימון עם [,] שהוא הסימון של Derive.)

הוכיחו כי $x1\cdot x2 = p^2/4$ ו- $y1\cdot y2 = -p^2$

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.3.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 5.3

ראו גם קובץ: Solution5.3.dfw

בפעילות זו נעסוק במשיקים לפרבולה ובתכונותיהם.

א. אם הישר שמשוואתו $y = mx + n$ משיק לפרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ הרי נקודת ההשקה היא משותפת לשניהם (p ו- m שונים מאפס). שיעור ה- *x* של הנקודה המשותפת מקיים את המשוואה: $\frac{y^2}{2p} = \frac{y-n}{m}$

כדי שהישר יהיה אכן משיק לפרבולה, נדרוש קיום פתרון יחיד למשוואה הנ"ל. התנאי לפתרון יחיד הוא: הדיסקרימיננטה מתאפסת. נחלץ את n: $n = p/2m$. נבטא את משוואת המשיק בעזרת p , m: $y = mx + p/2m$

ב. נמצא משוואת משיק לפרבולה בנקודה [*x*1 , *y*1] שעליה, בעזרת הפקודה למציאת משוואת משיק כאשר הגרף נתון ע"י פונקציה סתומה, IMP_TANGENT

$$\text{IMP\_TANGENT}(y^2 - 2\cdot p\cdot x,\ x,\ y,\ x1,\ y1) = \frac{p\cdot x - p\cdot x1 + y1^2}{y1}$$

$$y = \frac{p\cdot x - p\cdot x1 + y1^2}{y1}$$

נכפיל בהצלבה , נוציא גורם משותף מחוץ לסוגריים, ונקבל את הכלל:
משוואת המשיק לפרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ בנקודה [x1, y1] עליה היא $y1.y = p(x + x1)$

ג. נתונה הפרבולה $y^2 = -9x$. נחשב את שיעור ה-x של נקודה על הפרבולה אשר שיעור ה-y שלה הוא 6.

נציב 6 במקום x במשוואה : $36 = -9x$. לכן $x=-4$. אם כן נקודת ההשקה היא [-4 , 6]

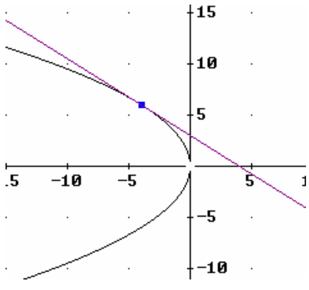
עתה, נמצא את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה זו, ישירות בעזרת התוכנה:

$$\text{IMP\_TANGENT}\ (\ y^2 + 9x\ ,\ x\ ,\ y\ ,\ -4,\ 6)=$$

או במחברת בעזרת הנוסחה שמצאנו: $6y = -4.5\ (\ x – 4)$

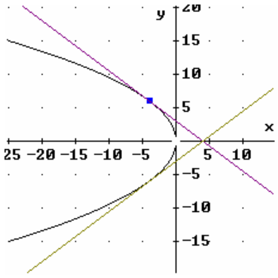
משוואת המשיק היא $y = -0.75\ (x – 4)$

נדגים בשרטוט:



נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x : (4 , 0) . מנקודה זו נבנה משיק נוסף לפרבולה. בסעיף א מצאנו כי משוואת משיק לפרבולה היא מן הצורה y = mx - 4.5/2m . נציב במשוואה זו את שיעורי הנקודה (4 , 0) שעל הפרבולה.

קיבלנו משוואה: 0 = 4m – 4.5/2 m .ומכאן, שיפוע המשיק לפרבולה בנקודה זו: m = 0.75
ומשוואת המשיק היא: y = 0.75x – 3 . נוסיף גם את המשיק לשרטוט:



נחשב את הזווית בין שני המשיקים, על פי הנוסחה : $\tan\alpha = \frac{m1 - m2}{1 + m1 \cdot m2}$

$\tan\alpha = \frac{0.75 - (-0.75)}{1 - 0.75^2}$ לכן $\alpha = 73.74^{\circ}$.

ד. לפנינו שתי פרבולות $y^2 = -6x$ ו- $y^2 = -10x$. דרך הנקודה Q := [4 , 0] עוברים משיקים לשתי הפרבולות P_1 ו-P_2. נמצא את משוואות המשיקים באותה דרך שבה פתרנו את הסעיף הקודם.

ראשית, לפרבולה $y^2 = -6x$: כאן 2p = -6 . נציב את הנתונים במשוואה הכללית של משיק לפרבולה 0 = 4m – 3 / 2m , ומכאן: $m = \pm\frac{\sqrt{6}}{4}$. משוואות שני המשיקים לפרבולה זו היוצאים מהנקודה Q הן: $y = \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot x - \sqrt{6}\right)$. נפתור מערכת משוואות (דהיינו משוואת הפרבולה עם משוואת המשיק) למציאת שיעורי נקודות ההשקה:

$$y^2 = -6 \cdot x \wedge y = \frac{\sqrt{6} \cdot x}{4} - \sqrt{6}$$

ומקבלים $[-4, -2\sqrt{6}]$

ועבור המשיק השני פותרים את מערכת המשוואות הבאה:

$$y^2 = -6 \cdot x \wedge y = -\frac{\sqrt{6} \cdot x}{4} + \sqrt{6}$$

והפתרון הוא: $[-4, 2\sqrt{6}]$

עתה לפרבולה הנוספת: $y^2 = -10x$. הפעם $2p = -10$.

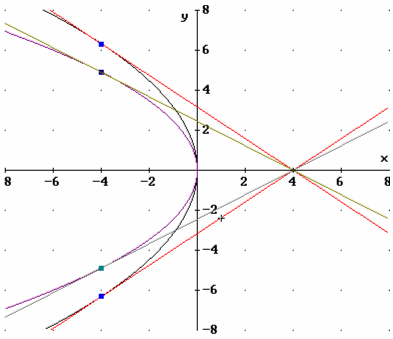
הצבת הנתונים במשוואה הכללית של משיק לפרבולה: $0 = 4m - 5 / 2m$

חילוץ m: $m = \pm\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

משוואות המשיקים המבוקשים: $y = \pm\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\cdot x - \sqrt{10}\right)$.

שוב נפתור (פעמיים) מערכת משוואות של הפרבולה ושל המשיק, ונקבל נקודות השקה:
$\left[-4, 2\sqrt{10}\right]$ ו- $\left[-4, -2\sqrt{10}\right]$.

נציג את התשובה בשרטוט:



לכל ארבעת המשיקים קיבלנו שיעור x זהה לנקודת ההשקה.

ג. נבדוק מהי משוואת המשיק לפרבולה הכללית מן המשפחה הנתונה ע"י המשוואה $y^2 = -2kx$ $(k>0)$, העובר דרך הנקודה $Q := [4 , 0]$. המשוואה הכללית של המשיק (שמצאנו בסעיף א) עבור k חיובי היא: $y = mx - \frac{k}{2m}$. נציב בה את שיעורי הנקודה Q שעל המשיק.

$$0 = 4m - \frac{k}{2m}$$

$$m^2 = \frac{k}{8}$$

$$m = \frac{\sqrt{2k}}{4} \text{ או } m = -\frac{\sqrt{2k}}{4}$$

מכאן שמשוואות המשיקים הם : $y = \left(\frac{\sqrt{2k}}{4}\cdot x + \sqrt{2k}\right)$ ו- $y = -\left(\frac{\sqrt{2k}}{4}\cdot x + \sqrt{2k}\right)$.

נקודות ההשקה תתקבלנה מפתרון מערכות משוואות מתאימות:

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2k}}{4}x + \sqrt{2k} \\ y^2 = 2kx \end{cases} \quad \text{ו-} \quad \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{2k}}{4}x - \sqrt{2k} \\ y^2 = 2kx \end{cases}$$

בשני המקרים, שיעור ה- x של נקודות ההשקה הוא 4-, מספר שאינו תלוי בגודלו של k.

ד. מוקד הפרבולה שמשוואתה $y^2 = -2px$ הוא [p/2 , 0]. משוואת ישר העובר דרך המוקד הוא מהצורה: $y = mx - \frac{mp}{2}$

למציאת נקודות החיתוך של ישר זה עם הפרבולה, נפתור מערכת משוואות מתאימה:

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x \wedge y = m \cdot \left(x - \frac{p}{2}\right)$$

$$x = \frac{p \cdot (m^2 + 2)}{2 \cdot m^2} - \frac{\sqrt{(m^2 + 1)} \cdot |p|}{m^2} \wedge y = \frac{p}{m} - \frac{\sqrt{(m^2 + 1)} \cdot |p|}{m}$$

$$x = \frac{\sqrt{(m^2 + 1)} \cdot |p|}{m^2} + \frac{p \cdot (m^2 + 2)}{2 \cdot m^2} \wedge y = \frac{\sqrt{(m^2 + 1)} \cdot |p|}{m} + \frac{p}{m}$$

נחשב את מכפלת שיעורי ה-x ושיעורי ה-y של שני הפתרונות:

$$\left(\frac{p}{m} - \frac{\sqrt{(m^2 + 1)} \cdot |p|}{m}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{(m^2 + 1)} \cdot |p|}{m} + \frac{p}{m}\right) = -p^2$$

$$\left(\frac{p \cdot (m^2 + 2)}{2 \cdot m^2} - \frac{\sqrt{(m^2 + 1)} \cdot |p|}{m^2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{(m^2 + 1)} \cdot |p|}{m^2} + \frac{p \cdot (m^2 + 2)}{2 \cdot m^2}\right) = \frac{p^2}{4}$$

פעילות 5.4 – זוגות מיוחדים של משיקים לפרבולה

א. מצאו את משוואת הפרבולה אשר המוקד שלה F:= [2, 0] והמדריך L:= x = -2.
השאלות ב- ה להלן מתייחסות לפרבולה זו.

ב. דרך הנקודה A:= [__ , 8] שעל הפרבולה והמוקד של הפרבולה עובר מיתר.
מהי משוואת הישר העובר דרך A ו- F?
מהם השיעורים של קצהו השני B של המיתר?
שרטטו את הפרבולה ואת המיתר.

ג. הראו כי המשיקים לפרבולה הנתונה בשני קצות המיתר מאונכים זה לזה.
באיזו נקודה נחתכים המשיקים? סמנו אותה.

ד. מיתר העובר דרך המוקד של הפרבולה הנתונה נמצא על ישר שמשוואתו $y = k\cdot (x - 2)$ $(k\neq 0)$.
בדקו אם התכונות שמצאתם בסעיף ג' מתקיימות לגבי כל מיתר העובר דרך המוקד.
הצעת ייעול: להצבת ביטוי "גדול" במקום משתנה, סמנו את הביטוי והעתיקו אותו בעזרת F3 לתוך תיבת השיח של ההצבה. להעתקת ביטוי בסוגריים השתמשו ב F4.

ה. דרך נקודה על המדריך (-2, c) העבירו זוג משיקים לפרבולה הנתונה.
אלו תכונות מעניינות יש לזוג המשיקים? הוכיחו את טענותיכם.

ו. רשמו משוואות של שני משיקים לפרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ המאונכים זה לזה.
אלו תכונות מעניינות יש לזוג המשיקים? הוכיחו את טענותיכם.

ז. סיכום: המדריך לפרבולה הוא המקום הגיאומטרי של ....

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.4.dfw

5.4 פתרונות והסברים לפעילות

ראו גם קובץ: Solution5.4dfw

בפעילות זו נוכיח, שלב אחר שלב, כי המדריך של הפרבולה הוא המקום הגיאומטרי של נקודות מפגש זוגות משיקים לפרבולה המאונכים זה לזה. מסקנה זו, המהווה הפתעה לתלמידים לא תוצג בפניהם, אלה תצמח מתוך עבודתם – מן הדוגמאות אל ההכללה.

א. נפתח בדוגמה. נמצא פרבולה לפי מוקד F := [2 , 0] ומדריך L: x = -2 . נציב לפי תכונות הפרבולה (מרחק שווה אל המוקד ואל המדריך): | [x , y] – [2 , 0] | = | x + 2 | , נבצע פעולות אלגבריות (העלאה לחזקה השנייה, כינוס איברים וכו') ונקבל: $y^2 = 8x$. זאת משוואת פרבולה שנסמן אותה באות P.

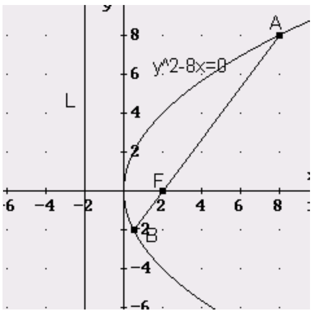
ב. תהי A נקודה על הפרבולה P עם שיעור y השווה ל- 8. שיעור ה- x שלה מתקבל ע"י הצבה במשוואה P, ומקבלים A := [8 , 8]

אנו מעוניינים במשוואת הישר המכיל את המיתר שקצהו בנקודה A והעובר דרך מוקד הפרבולה. נמצא משוואת ישר לפי שתי נקודות שעליו, A ו F : $y = \frac{4(x-2)}{3}$

למציאת קצהו השני של המיתר, נמצא שיעורי נקודות חיתוך של הישר הזה ושל הפרבולה P. נפתור מערכת משוואות מתאימה:

$$y^2 - 8 \cdot x = 0 \wedge y = \frac{4 \cdot (x - 2)}{3}$$

נקבל שני פתרונות. פתרון אחד הוא שיעורי הנקודה A המוכרת לנו, הפתרון השני מגדיר את הנקודה שאנו מחפשים. שיעוריה הם [0.5 , -2]. הנה השרטוט המתאים:



ג. נמצא משוואות המשיקים לפרבולה P בכל אחד מקצות המיתר AB. נציב במשוואת המשיק (הכללית) שמצאנו בפעילות הקודמת:

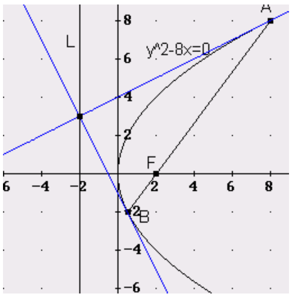
$$y \cdot y1 = p \cdot (x + x1)$$

או, ישירות בעזרת הפקודה IMP_TANGENT

נקבל: משוואת המשיק לפרבולה בנקודה A היא: $y=\frac{x}{2}+4$

משוואת המשיק לפרבולה P בנקודה B היא: $y=-2x-1$

נוסיף את שני המשיקים האלה לשרטוט:



מכפלת השיפועים של שני המשיקים היא 1-, כלומר: המשיקים מאונכים זה לזה.

מהשרטוט נראה כי שני המשיקים נפגשים על המדריך של הפרבולה. כיון ששרטוט לא מהווה הוכחה, נבדוק אם זה אכן כך. נחשב שיעורי נקודת המפגש של שני המשיקים. לשם כך פותרים מערכת משוואות לינאריות (משוואות המשיקים הנ"ל):

$$y=\frac{x}{2}+4 \wedge y=-2\cdot x-1$$

שיעורי נקודת המפגש של שני המשיקים הנ"ל הם: [3 , 2-].

ד. נבחן משפחה של דוגמאות נוספות. מיתר העובר דרך המוקד של הפרבולה, מונח על הישר שמשוואתו $y = k(x - 2)$ $(k \neq 0)$. נבדוק אם גם מיתר זה מקיים אותן תכונות, כלומר אם המשיקים לפרבולה P בקצות מיתר העובר4 דרך המוקד מאונכים זה לזה ונחתכים על המדריך. נבטא את שיעורי קצות המיתר בעזרת k, לשם כך נפתור מערכת משוואות מתאימה:

$$y^2-8\cdot x=0 \wedge y=k\cdot(x-2)$$

שיעורי קצות המיתר הם:

$$\left[\frac{2\cdot(\sqrt{(k^2+1)}-1)^2}{k^2}, \frac{4\cdot(1-\sqrt{(k^2+1)})}{k}\right]$$

$$\left[\frac{2\cdot(\sqrt{(k^2+1)}+1)^2}{k^2}, \frac{4\cdot(\sqrt{(k^2+1)}+1)}{k}\right]$$

המשוואה הכללית של משיק לפרבולה זו היא: $y = mx + \frac{2}{m}$

נציב במשוואת המשיק את שיעורי נקודת ההשקה (שיעורי נקודת הקצה של המיתר), ונמצא את ערכו של m . נחזור על הפעולה עם נקודת הקצה השנייה, ונקבל את המשוואות של המשיקים לפרבולה בשני קצות המיתר הנתון :

$$y = -\frac{x\cdot(\sqrt{k^2+1}+1)}{k} - \frac{2\cdot(\sqrt{k^2+1}-1)}{k}$$

$$y = \frac{x\cdot(\sqrt{k^2+1}-1)}{k} + \frac{2\cdot(\sqrt{k^2+1}+1)}{k}$$

נבדוק אם המשיקים מאונכים זה לזה. נכפול את השיפועים:

$$\left(-\frac{\sqrt{k^2+1}+1}{k}\right)\cdot\frac{\sqrt{k^2+1}-1}{k} = -1$$

בזאת אושרה התכונה הראשונה. נמשיך ונחשב היכן נקודת החיתוך של שני המשיקים האלו. נפתור מערכת משוואות מתאימה, ואכן שיעור ה-x של הנקודה הוא קבוע ואינו תלוי ב k. שיעורי נקודת החיתוך של שני המשיקים הנ"ל הם (-2, 4/k) . הנקודה נמצאת על המדריך.

ה. בסעיף הקודם הראינו כי המשיקים בקצותיו של מיתר העובר דרך המוקד הינם מאונכים זה לזה ונפגשים על המדריך.

נבקש לבדוק שהמדריך של הפרבולה הוא המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של זוגות משיקים לפרבולה בקצות מיתרים העוברים דרך המוקד. למטרה זו עלינו לבחון את הכיוון הנגדי. נבחר נקודה כלשהי M על המדריך, ונבדוק אם היא אכן נקודת מפגש של שני משיקים לפרבולה בקצותיו של מיתר העובר דרך המוקד. דהיינו עלינו להתייחס לסעיפים הבאים:

- דרך M עוברים שני משיקים ל-P
- שני הישרים האלה מאונכים זה לזה
- הישר המוגדר ע"י שתי נקודות ההשקה עובר דרך המוקד של P

נגדיר נקודה כללית M על המדריך של הפרבולה הנתונה [-2 , c]

נמצא משוואות המשיקים לפרבולה P העוברים דרך הנקודה M. הראינו (בסעיף ד) כי משוואה כללית של משיק לפרבולה הנתונה היא: $y = mx + \frac{2}{m}$. נציב במשוואה את שיעורי הנקודה M ונקבל את הערכים האפשריים של *m*.

$$m = \frac{\sqrt{c^2 + 16} - c}{4} \vee m = -\frac{\sqrt{c^2 + 16} + c}{4}$$

$$\frac{\sqrt{c^2 + 16} - c}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{c^2 + 16} + c}{4}\right) = -1$$

נבדוק ונאשר כי מכפלת השיפועים של שני המשיקים היא 1- :

נותר להראות כי המיתר המחבר את נקודות ההשקה עובר דרך המוקד. נציב את ערכי *m* שמצאנו במשוואה הכללית של המשיק, ונמצא את משוואות המשיקים:

נחשב את השיעורים של נקודות ההשקה ע"י פתרון של שתי מערכות משוואות. השיעורים המתקבלים הם:

$$y = \frac{x \cdot \left(\sqrt{c^2 + 16} - c\right)}{4} + \frac{\sqrt{c^2 + 16} + c}{2}$$

$$y = -\frac{x \cdot \left(\sqrt{c^2 + 16} + c\right)}{4} - \frac{\sqrt{c^2 + 16} - c}{2}$$

$$\left[\frac{\left(\sqrt{c^2 + 16} + c\right)^2}{8}, \sqrt{c^2 + 16} + c\right]$$

$$\left[\frac{\left(\sqrt{c^2 + 16} - c\right)^2}{8}, c - \sqrt{c^2 + 16}\right]$$

כדי להוכיח שאכן המיתר עובר דרך המוקד נוכל למצוא משוואת ישר על פי שתי הנקודות שעליו (לבטא על ידי c) ולהציב בה את שיעורי המוקד. נוכל גם להסתפק בחישוב השיפוע שבין כל אחד מן הקצוות לבין המוקד, ולהוכיח ששלוש הנקודות אכן נמצאות על ישר אחד.

בכך הוכחנו את הכיוון ההפוך, ומצאנו שהמדריך של הפרבולה P הנתונה הוא מקום גיאומטרי של נקודות החיתוך של זוגות משיקים ל-P בקצות מיתרים העוברים דרך המוקד של P.

ו. עד כה עסקנו בפרבולה פרטית. עתה נעבור לפרבולה P הנתונה ע"י משוואה קנונית כללית:

$y^2 = 2px$. כזכור שיעורי מוקד הפרבולה הם $(p/2\ ,\ 0)$ ומשוואת המדריך היא $x = -p/2$. נוכיח כי המדריך הוא המקום הגיאומטרי של נקודות המפגש של זוגות משיקים לפרבולה המאונכים זה לזה. (העובדה שהמיתר שקצותיו הם נק' ההשקה עובר דרך המוקד היא תכונה נוספת.)

משוואת משיק לפרבולה היא מהצורה הבאה $y = mx + \frac{p}{2m}$. משיק המאונך למשיק זה יהיה בעל שיפוע $-\frac{1}{m}$ ומשוואתו תהיה $y = -\frac{x}{m} - \frac{mp}{2}$. למציאת נקודת המפגש של שני המשיקים נפתור מערכת משוואות מתאימה, ונקבל ששיעור x של נקודת המפגש הוא $-p/2$, כלומר: המשיקים נפגשים על המדריך.

כדי לבדוק את קיום התכונה הנוספת יש למצוא תחילה את שיעורי נקודות ההשקה G, H, על ידי פתרון מערכת משוואות של הפרבולה ושל המשיק, חישוב השיפועים של HF ו GF יראה כי המיתר GH עובר דרך המוקד.

ז. בפעילות זו הוכחנו שהמדריך הוא המקום הגיאומטרי של נקודות המפגש של זוגות משיקים לפרבולה בקצות מיתר העובר דרך המוקד. זוגות משיקים אלו מאונכים זה לזה.

פעילות 5.5 – כל הפרבולות דומות לפרבולה הסטנדרטית

א. סעיף זה מהווה תרגיל הכנה לסעיפים הבאים שבהם נראה שהגרפים של כל הפונקציות הריבועיות דומים. לפרבולה הסטנדרטית (שמשוואתה $y = x^2$).

למושג של דמיון בהקשר זה ניתן משמעות מתמטית מדויקת בהמשך.

שרטטו את הגרף המוגדר ע"י המשוואה $x^2 + y^4 = 5$.

הפעילו את פקודת ההצבה (Sub): הציבו 2x במקום x, הציבו 2y במקום y.

שרטטו גם את הגרף המוגדר ע"י המשוואה החדשה. הסבירו כיצד התקבלה "הטלוויזיה" החדשה.

חזרו למשוואה $x^2 + y^4 = 5$.

הציבו x/3 במקום x, הציבו y/3 במקום y. הוסיפו לשרטוט את הגרף של המשוואה.

הוסיפו לשרטוט את הישר שמשוואתו $y = 0.5x$. מהן נקודות החיתוך של הישר עם שלוש הטלוויזיות?

מה המשמעות הגיאומטרית של השרטוטים?

הגדרה: הצבת kx במקום x ו- ky במקום y בו-זמנית מבצעת פעולת דמיון. אם $k < 1$, הפעולה נקראת כווץ רדיאלי ואם $k > 1$, זאת מתיחה רדיאלית.

ב. שרטטו את הפרבולה הסטנדרטית.

הציבו במקום x ו y 2x ו 2y בהתאמה ואשרו כי מתקבלת המשוואה $y = 2x^2$. הוסיפו את הגרף לשרטוט.

הציבו במקום x ו y במשוואה של הפרבולה הסטנדרטית ביטויים כך שיתקבלו המשוואות הבאות:

$$y=\frac{1}{3}x^2 \qquad y=-\frac{1}{2}x^2$$

הוסיפו לשרטוט את הגרפים המוגדרים ע"י המשוואות האלה. הוסיפו את הישרים הנתונים ע"י המשוואות $y = x$ ו- $y = -x$

מהן נקודות החיתוך של הישרים עם ארבע הפרבולות?

הסבירו בעזרת השרטוט מדוע פרבולה שמשוואתה היא $y = ax^2$ יכולה להתקבל מן הפרבולה הסטנדרטית על-ידי העתקת דמיון (מתיחה/כיווץ רדיאלי).

ג. שרטטו את הפרבולה P1 שמשוואתה $y = 2x^2 + 20x + 52$ (התאימו את החלון הגרפי לשרטוט).

הציבו $x – 2$ במקום x, הציבו $y – 1$ במקום y. שרטטו את הגרף של הפרבולה החדשה P2.

ההצבה גרמה להזזת הגרף המקורי.

הזיזו את הפרבולה P1 הנתונה (על-ידי הצבה) כך שהקדקוד יזוז לראשית הצירים.

מהי משוואת הפרבולה המוזזת P3? $y =$ __________

איזו הצבה תמתח את הפרבולה האחרונה כך שהיא תכסה את הפרבולה הסטנדרטית? בצעו זאת (הוסיפו את שמות הפרבולות לשרטוט).

ד. איזו הצבה תגרום לכך שפרבולה הנתונה על-ידי המשוואה $y=\frac{x^2}{4}-x-\frac{1}{4}$ תזוז כך שהיא תכסה את הפרבולה הסטנדרטית?

ה. הפעילו העתקת סיבוב (סביב הראשית) אשר תעביר את הפרבולה שמשוואתה $y^2 = 4x$ לפרבולה שמשוואתה מהצורה $y = ax^2$. לשם כך הציבו:

במקום x את $x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+y\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ובמקום y את $y\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

שרטטו את הפרבולה הנתונה ואת תמונת הפרבולה לאחר הסיבוב. מהי משוואתה של הפרבולה שהתקבלה?

ו. "המיתר המוקדי מחפש פרבולה."

נתונות שתי נקודות $A(-1.8,5.6)$ ו- $B(-4.2,2.4)$. מצאו פרבולה P כך שהקטע AB הוא המיתר המוקדי שלה והקדקוד מימין למיתר המוקדי.

הדרכה:

(i) מהו אורך המיתר המוקדי?

איזו פרבולה בעלת משוואה מהצורה $y = ax^2$ "חופפת" לפרבולה P?

שתי פרבולות חופפות זו לזו אם אחת מתקבלת מן השנייה ע״י רצף פעולות מן הסוגים הזזה, סיבוב, אך לא דמיון כנ״ל אם k שונה מ-1.

(ii) בצעו העתקת סיבוב סביב הראשית של הפרבולה שקדקודה בראשית הצירים.

(iii) מהו ציר הסימטריה של הפרבולה שהתקבלה כאן? מהם שיעורי הקדקוד שלה?

(iv) בצעו העתקת הזזה כך שתתקבל הפרבולה P. מה משוואתה של P? שרטטו.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.5.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 5.5

ראו גם קבצים: solution5.5dfw rotate-D6.dfw

מטרת הפעילות היא הצגת הדמיון בין פרבולות. לשם כך נעסוק בטרנספורמציות על פרבולות ובמיוחד כווץ רדיאלי ומתיחה רדיאלית (באנגלית homothety).

הערה: כל המעגלים הקנוניים דומים זה לזה, כולם כיווץ/מתיחה של אותו מעגל. כל מעגל אחר במישור הוא הזזה של מעגל קנוני ולכן גם כן דומה לכל המעגלים.

א. נפתח בהפעה: נשרטט את העקומה C המוגדרת ע"י המשוואה $x^2 + y^4 = 5$, מתקבלת עקומה בצורת "טלוויזיה". ניעזר בפקודה Sub להצבה. שימו לב כי ניתן לבצע מספר הצבות בבת אחת ואין צורך לפתוח את תיבת השיח לכל הצבה מחדש. נציב במקום x כפולות של x ובמקום y כפולות של y. נשרטט ושוב נקבל "טלוויזיות". ההצבות אינן משנות את הצורה אלא "מותחות/מכווצות" אותה. כאשר כפלנו את המשתנים פי 2 הצורה התכווצה, וכאשר כפלנו פי 1/3 היא התנפחה. אפשר לנסות הצבות נוספות ולבדוק את השתנות הצורה בהתאם.

$$x^2 + y^4 = 5 \wedge y = 0.5\cdot x$$

$$\mathrm{SOLVE}(x^2 + y^4 = 5 \wedge y = 0.5\cdot x,\ [x,\ y],\ \mathrm{Real})$$

$$(x = -2 \wedge y = -1) \vee (x = 2 \wedge y = 1)$$

נוסיף לשרטוט את הישר שמשוואתו: $y = 0.5x$, ונחשב את שיעורי נקודות המפגש שלו עם כל אחת מה"טלוויזיות". נחפש את נקודות החיתוך עם העקומה המקורית C. נדרוש פתרונות ממשיים למערכת המשוואות: למציאת נקודות חיתוך עם העקומות שהתקבלו על-ידי כיווץ/מתיחה נפתור מערכות משוואות מתאימות:

$$(2\cdot x)^2 + (2\cdot y)^4 = 5 \wedge y = 0.5\cdot x$$

$$\mathrm{SOLVE}((2\cdot x)^2 + (2\cdot y)^4 = 5 \wedge y = 0.5\cdot x,\ [x,\ y],\ \mathrm{Real})$$

$$\left(x = -1 \wedge y = -\frac{1}{2}\right) \vee \left(x = 1 \wedge y = \frac{1}{2}\right)$$

הגדלת המשתנה פי 2 הקטינה את שיעורי נקודות החיתוך פי 2.

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^4 = 5 \wedge y = 0.5 \cdot x$$

$$\text{SOLVE}\left(\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^4 = 5 \wedge y = 0.5 \cdot x,\ [x,\ y],\ \text{Real}\right)$$

$$(x = -6 \wedge y = -3) \vee (x = 6 \wedge y = 3)$$

החוקיות נשמרת. המשתנים קטנו פי 3,שיעורי נקודות החיתוך גדלו פי 3. העקומות דומות.

ב. ברצוננו להשתמש בהצבות מתאימות כדי להגיע מהפרבולה הסטנדרטית לשלושת הפרבולות ששרטטנו בפעילות הראשונה ביחידה זו.

הכפלת כל משתנה פי 2 תיתן:

$$2 \cdot y = (2 \cdot x)^2$$

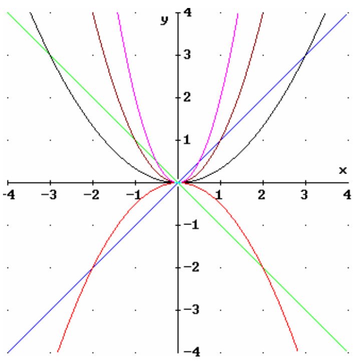
$$\text{SOLVE}(2 \cdot y = (2 \cdot x)^2,\ y,\ \text{Real})$$

$$y = 2 \cdot x^2$$

באופן דומה הכפלת כל משתנה פי 1/3 תיתן את הפרבולה שמשוואתה היא $y = x^2/3$,

וכדי להגיע לפרבולה שמשוואתה היא $y = -x^2/2$ נכפול כל משתנה פי 1/2- .

נשרטט את ארבע הפרבולות ואת הישרים המוגדרים ע"י המשוואות הבאות: $y = -x$, $y = x$



.

נקודות החיתוך של הישרים ושל הפרבולות: שני הישרים וכל הפרבולות הנתונות נפגשים בראשית הצירים. בנוסף לכך, הפרבולה המקורית (הסטנדרטית) נפגשת עם הישרים הנתונים בנקודות ששיעוריהן (1 , 1) ו- (1 , 1-). הפרבולה שמשוואתה $y = 2x^2$ נפגשת עם הישרים בנקודות ששיעוריהן (1/2 , 1/2) ו- (1/2 , 1/2-). הפרבולה שמשוואתה $y = x^2/3$. נפגשת עם הישרים בנקודות ששיעוריהן (3 , 3) ו- (3 , 3-). והפרבולה שמשוואת $y = -x^2/2$ נפגשת עם הישרים בנקודות ששיעוריהן (2- , 2-) ו- (2- ,2) .

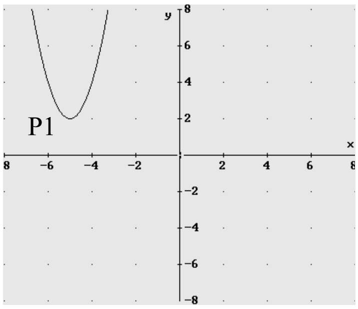
כמו שראינו בסעיף הקודם לגבי ה"טלוויזיות" גם כאן, בעיסוק עם פרבולות, נשמרת אותה חוקיות. אם כן, מצאנו העתקת דמיון. משוואה מהמשפחה $y = ax^2$, $(a \neq 0)$ מיוצגת גרפית במישור ע"י כיווץ/מתיחה של הפרבולה הסטנדרטית, על ידי הצבת ax במקום a ו ay במקום y. נראה זאת:

$$ay = (ax)^2$$

$$ay = a^2y^2$$

$$y = ax^2$$

ג. ברצוננו להרחיב ולהראות שקיים דמיון בין כל הפרבולות, לא רק אלו מהמשפחה המוגדרת ע"י המשוואה הפרמטרית $y = ax^2$ כאשר a הוא מספר ממשי שונה מ- 0 . נבדוק תחילה מה קורה כאשר מזיזים פרבולה. נפתח לדוגמה בפרבולה: $P1: y = 2x^2 + 20x + 52$. נשרטט את P1 שיעורי קודקודה הם (2 , -5) . (אל תיבהלו אם נראה שהתוכנה אינה משרטטת גרף, הרי הפרבולה נמצאת מחוץ למערכת הצירים המשורטטת בחלון הגרפי. התאימו את גודל החלון.)

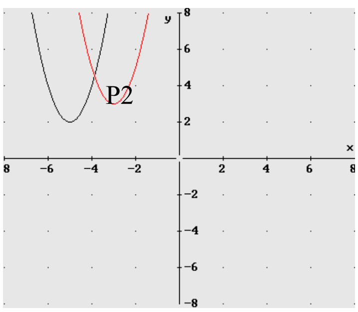


עתה נציב x – 2 במקום x , y – 1 במקום y. הפרבולה זזה שתי יחידות לאורך ציר x (ימינה) ויחידה אחת לאורך ציר y (כלפי מעלה). קודקוד הפרבולה השתנה בהתאם, ושיעוריו הם (2+1 , -5+2) כלומר (3 , -3) . נפשט את המשוואה (על-ידי שנבטא את y בעזרת x) ונוסיף את הפרבולה P2 שהתקבלה לשרטוט:

$$y - 1 = 2\cdot(x - 2)^2 + 20\cdot(x - 2) + 52$$

$$\mathrm{SOLVE}(y - 1 = 2\cdot(x - 2)^2 + 20\cdot(x - 2) + 52,\ y)$$

$$y = 2\cdot x^2 + 12\cdot x + 21$$



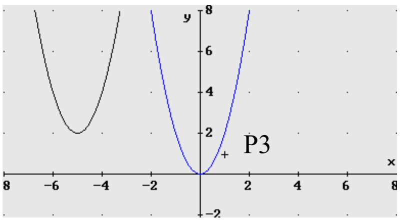
ברצוננו להזיז את הפרבולה P1 כך שקודקודה יהיה בראשית הצירים. אם נצא מן הפרבולה המקורית, עלינו להזיז 5 יחידות ימינה ושתי יחידות מטה. נציב במקום x : 5 - x ובמקום y: y + 2

$$y + 2 = 2\cdot(x - 5)^2 + 20\cdot(x - 5) + 52$$

$$\text{SOLVE}(y + 2 = 2\cdot(x - 5)^2 + 20\cdot(x - 5) + 52,\ y)$$

$$y = 2\cdot x^2$$

קבלנו משוואה של פרבולה P3. על ידי הצבה מתאימה קיבלנו משוואה מהצורה $y = ax^2$. כפי שהראינו בסעיף הקודם,. משוואה כזאת מגדירה פרבולה הדומה לפרבולה הסטנדרטית.



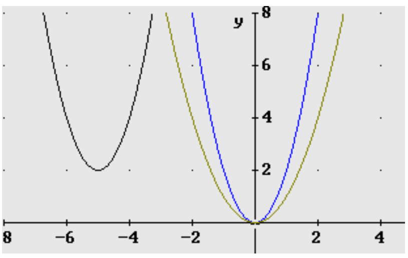
במשוואת הפרבולה המוזזת $P3{:}y = 2x^2$ נציב 0.5x ו 0.5y במקום x ו y בהתאמה, וכך היא תימתח ותתלכד עם הפרבולה שמשוואתה $y = x^2$.

נבצע זאת בעזרת התוכנה:

$$0.5\cdot y = 2\cdot(0.5\cdot x)^2$$

$$\text{SOLVE}(0.5\cdot y = 2\cdot(0.5\cdot x)^2,\ y,\ \text{Real})$$

$$y = x^2$$



ד. נחזור על התהליך עבור הפרבולה Q שמשוואתה $y = \frac{x^2}{4} - x - \frac{1}{4}$. ברצוננו להראות כי פרבולה זו דומה לפרבולה הסטנדרטית. תחילה נזיז את כך שהקודקוד יהיה בראשית הצירים. שיעורי הקודקוד של הפרבולה Q1 שהתקבלה הם (2 , -1.25).

ההצבות המתבקשות: y -1.25 , x+2

$$y - \frac{5}{4} = \frac{(x+2)^2}{4} - (x+2) - \frac{1}{4}$$

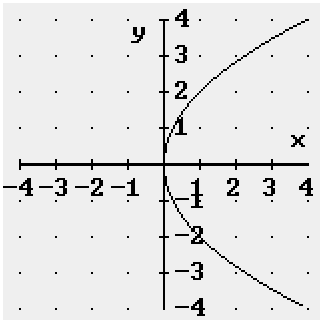
$$\text{SOLVE}\left(y - \frac{5}{4} = \frac{(x+2)^2}{4} - (x+2) - \frac{1}{4},\ y\right)$$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

כצפוי, קיבלנו העתקת מתיחה של הפרבולה הסטנדרטית. במשוואת הפרבולה המוזזת שקיבלנו נציב 4y , 4x במקום x, y בהתאמה, ונקבל את מבוקשנו.

ה. לאחר שכיווצנו/מתחנו והזזנו הגיעה העת לסיבובים. נראה (בעזרת דוגמה) שגם העתקת סיבוב שומרת על הדמיון. במילים אחרות, נרצה להוכיח כי על ידי טרנספורמציות מתאימות נגיע מכל פרבולה אל הפרבולה הסטנדרטית.

נסתכל על פרבולה $P: y^2 = 4x$ שציר הסימטריה שלה הוא ציר ה- x.



רצוננו לסובב את P כך שציר הסימטריה שלה יהיה ציר ה- y, כלומר דרוש סיבוב של $90°$ (ברדיאנים: $\frac{\pi}{2}$) סביב הראשית. (אפשר לסובב בשני כוונים: עם השעון או נגד השעון. בשני המקרים מתקבלת פרבולה עם ציר הy כציר סימטריה, אבל אחת מחייכת והאחרת בוכה.) כך נקבל פרבולה מהמשפחה המוגדרת ע"י המשוואה הפרמטרית $y = ax^2$ (עליה אנו כבר יודעים כי היא דומה לפרבולה הסטנדרטית על ידי כיווץ/מתיחה).

להלן ההצבה הדרושה לצורך סיבוב נגד כיוון השעון של $\frac{\pi}{2}$ רדיאנים סביב הראשית (הסבר לנוסחה זו תמצאו בקובץ rotate-D6.dfw שמתאים רק לגרסה 6 של Derive):

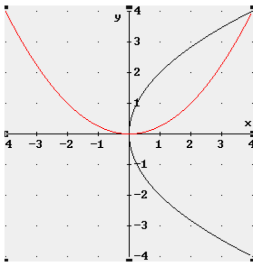
במקום x נציב את $x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ובמקום y נציב את $y \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\left(y\cdot \text{COS}\left(\frac{\pi}{2}\right) - x\cdot \text{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 4\cdot\left(x\cdot \text{COS}\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\cdot \text{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\text{SOLVE}\left(\left(y\cdot \text{COS}\left(\frac{\pi}{2}\right) - x\cdot \text{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 4\cdot\left(x\cdot \text{COS}\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\cdot \text{SIN}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right),\ y\right)$$

$$y = \frac{x^2}{4}$$

נוסיף לשרטוט את הפרבולה שהתקבלה:



ו. נשתמש בכל הידע שצברנו אודות הפרבולות כדי להראות שהפרבולה P שקצות מיתרה המוקדי הם $(-4.2 , 2.4)$ $(-1.8 , 5.6)$ גם היא דומה לפרבולה $y = x^2$.

(i) כפי שהראינו בראשית היחידה, מיתר מוקדי קובע את הפרבולה באופן בלעדי. נמצא את הפרבולה שזהו המיתר המוקדי שלה. אורך המיתר המוקדי: 4 יחידות. בפעילות 5.1 הראינו כי בפרבולה מהמשפחה המוגדרת ע"י המשוואה הפרמטרית $y = ax^2$ אורך המיתר המוקדי הוא $\frac{1}{|a|}$ (או במילים אחרות: המוקד נמצא בנקודה ששיעוריה הם $(0 , 1/4a)$. מכאן שבמקרה שלנו $a = \frac{1}{4}$. מצאנו פרבולה P1 דומה לפרבולה P שאנו מחפשים (לפי מיתרה המוקדי). משוואת P1 היא $y = \frac{x^2}{4}$. בשרטוט להלן, P1 מופיעה בצבע סגול.

(ii) נחפש את הפרבולה P המבוקשת על ידי טרנספורמציות מתאימות. ראשית נבחן את הסיבוב הדרוש. ציר הסימטריה של הפרבולה P1 שמצאנו, הוא ציר ה- y, והמיתר המוקדי שלה מקביל לציר ה- *x*. באיזו זווית עלינו לסובב את הפרבולה כך שתתאים למיתר המוקדי הנתון? נמצא את זווית הסיבוב בעזרת שיפוע המיתר.

שיפוע המיתר המוקדי הנתון: $\frac{5.6-2.4}{-1.8+4.2}=\frac{4}{3}$. שיפוע הישר שעליו המיתר המוקדי שווה לטנגנס הזווית שהישר שעליו מונח הקטע יוצר עם החלק החיובי של ציר ה- *x*, כלומר: באיזו זווית מסובבת הפרבולה.

$$.\tan\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \arctan(\tfrac{4}{3}) = 0.9273$$

נסובב את הפרבולה ב- α רדיאנים סביב הראשית, בעזרת הנוסחה שניתנה בפעילות הקודמת. נציב במקום x את $x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha$, ובמקום y את $y\cdot\cos\alpha-x\cdot\sin\alpha$. ונפשט בעזרת התוכנה:

$$y\cdot \mathrm{COS}\left(\mathrm{ATAN}\left(\frac{4}{3}\right)\right)-x\cdot \mathrm{SIN}\left(\mathrm{ATAN}\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\frac{\left(x\cdot \mathrm{COS}\left(\mathrm{ATAN}\left(\frac{4}{3}\right)\right)+y\cdot \mathrm{SIN}\left(\mathrm{ATAN}\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right)^2}{4}$$

$$\frac{3\cdot y}{5}-\frac{4\cdot x}{5}=\frac{(3\cdot x+4\cdot y)^2}{100}$$

סובבנו את P1 בזווית מתאימה ומצאנו פרבולה P2 בעלת מיתר מוקדי באורך 4 יחידות ששיפועו 4/3. בשרטוט להלן P2 מופיעה בצבע ירוק.

(iii) נותר רק להזיז את הפרבולה P2 למקום הראוי. כדי שנדע איזו הזזה דרושה, ננסה למצוא את ציר הסימטריה של הפרבולה P המבוקשת. נזכור שציר הסימטריה של פרבולה הוא האנך האמצעי למיתר המוקדי שלה. לפי משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה P2 היא: $y=\frac{-3x+7}{4}$.

עתה נוכל לחשב את שיעורי קודקוד הפרבולה. הקודקוד הוא הנקודה היחידה על ציר הסימטריה $(x,\frac{-3x+7}{4})$ המקיימת את תכונת הפרבולה כמקום גיאומטרי, דהיינו שמרחקו מן המוקד שווה למרחקו אל המדריך:

$$\left|\left[x,\ -\frac{3}{4}\cdot x+\frac{7}{4}\right]-[-3,\ 4]\right|=1$$

נפתור לפי x , ונציב את הפתרון המתאים במשוואת הישר (אמרנו שמבקשים את הקודקוד מימין למיתר המיוחד המוקדי). שיעורי הקודקוד של הפרבולה המבוקשת הם: (-2.2 , 3.4).נזיז את הפרבולה המסובבת שקודקודה בראשית הצירים, כך שקודקודה יתלכד עם הקודקוד הרצוי, ובכך נקבל את התשובה לשאלה. נבצע העתקת הזזה. נציב במקום x x + 2.2 ובמקום y y – 3.4

$$\frac{3\cdot(y-3.4)}{5}-\frac{4\cdot(x+2.2)}{5}=\frac{(3\cdot(x+2.2)+4\cdot(y-3.4))^2}{100}$$

נפשט ונקבל:

$$9\cdot x^2+24\cdot x\cdot y+38\cdot x+16\cdot y^2-116\cdot y+429=0$$