4. מעגל כללי   מדריך למורה

מבוא

מטרת יחידה זו היא חקירת צירופים לינאריים של משוואות שני מעגלים. נבחן את המשוואה המתקבלת מחיבור שתי משוואות של מעגלים, וכיצד היא מושפעת מהמצב ההדדי שלהם. לשם כך נעבור ממשוואה דו-פרמטרית של האלומה, למשוואה החד-פרמטרית המכילה את כל המעגלים המיוצגים על ידי צירופים לינאריים של שני מעגלים. כאן נשתמש בידע שצברנו על אלומות ישרים לטיפול באלומות של מעגלים עם נקודות בסיס. בהמשך נבדוק צירופים לינאריים נוספים של מעגלים, ונבחן את הקשר בין המשוואות המתקבלות לגרפים שהן מייצגות.

מטרה נוספת של היחידה, היא שימוש בידע מתמטי קודם, מתחומים שונים, לטיפול במשיקי למעגל: נמצא משוואת משיק למעגל בדרכי פיתרון שונות, תוך שימוש בכלים מהגיאומטריה ומהאנליזה, לצד הנוסחאות מהגיאומטריה האנליטית. בעזרת הכלים שנרכשו נוכל גם להוכיח משפטים רלוונטיים מן הגיאומטריה אודות "אורך המשיק".

בסיום היחידה נעשיר את הידע אודות מעגלים. נכיר את המושג "חזקה של נקודה", ונבחן תכונה מיוחדת של כל הנקודות הנמצאות על ישר החיתוך של שני מעגלים נחתכים. כאשר שני המעגלים לא נחתכים, נעמוד על משמעותו של החלק הממשי המתקבל מפתרון מערכת המשוואות המתאימה. נגלה כי התכונה המשותפת לכל הנקודות על ישר החיתוך של שני מעגלים נחתכים, מתקיימת גם לגבי כל הנקודות על ישר החיתוך ה"מדומה" של שני מעגלים שאינם נחתכים.

רשימת הפעילויות:

פעילות 4.1 – שני מעגלים

פעילות 4.2 – אלומה של מעגלים

פעילות 4.3 – עוד אלומה של מעגלים

פעילות 4.4 – משיק למעגל

פעילות 4.5 – ישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני מעגלים

פעילות 4.1 – שני מעגלים

א. התבוננו במשוואות שני המעגלים, וענו על השאלות הבאות:

$$\#1: \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$\#2: \quad (x - 5)^2 + y^2 = 36$$

מהו המרכז ומהו הרדיוס של כל אחד מהמעגלים?

מהו המצב ההדדי בין שני המעגלים?

שרטטו את המעגלים ובדקו את תשובותיכם.

כדי לראות מעגל "עגול" יש לקבוע קנה מידה אחיד לשני הצירים באופן הבא:

Set > Aspect Ratio > Reset > OK

מה דעתכם? אם נחבר לפי אגפים את שתי משוואות המעגלים, האם המשוואה שתתקבל מייצגת גם כן מעגל? בדקו על ידי חישוב ושרטוט.

הצעת ייעול: רשמו בשורת העריכה #1+#2 והקישו ENTER.

פשטו את המשוואה שהתקבלה ושרטטו את הגרף שלה . התאימו את מערכת הצירים .

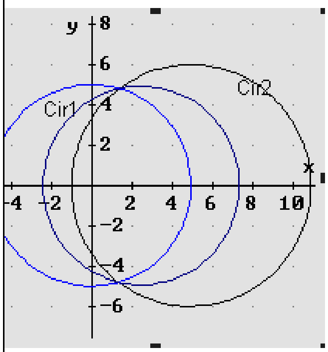
מה, לדעתכם, הקשר בין משוואות המעגלים הנתונים לבין התיאור הגרפי של משוואת הסכום שלהם לפי אגפים?

ב. האם משוואת הסכום לפי אגפים של שתי משוואות מעגלים היא תמיד משוואת מעגל?

בדקו זאת לגבי זוגות המעגלים המופיעים בטבלה על ידי פישוט ושרטוט.

תזכורת: להגדרה ב Derive הקלידו :=

לדוגמה, הגדרת המעגל $Cir1 := x^2 + y^2 = 25$ הגדרת מרכז המעגל $O1 := [0 , 0]$

משוואות המעגלים ומרכזיהם	סכום המשוואות ומרכז המעגל	שרטוט
לדוגמה: $Cir1 := x^2 + y^2 - 25 = 0$ $Cir2 := (x-5)^2 + y^2 - 36 = 0$ $O1 := [0,0]$ $O2 := [5,0]$	לאחר פישוט: $Cir1 + Cir2 =$ $x^2 + y^2 - 5x - 18 = 0$ $O := [2.5,0]$	
$Cir1 := x^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := x^2 + y^2 - 25 = 0$ $O1 := [0,0]$ $O2 := [0,0]$ (1)		
$Cir1 := x^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := (x-2)^2 + (y+1)^2 - 36 = 0$ $O1 := [\_,\_]$ $O2 := [\_,\_]$ (2)		
$Cir1 := (x-1)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0$ $Cir2 := (x-4)^2 + (y-4)^2 - 4 = 0$ $O1 := [\_,\_]$ $O2 := [\_,\_]$ (3)		
$Cir1 := (x-4)^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := (x-4)^2 + (y+6)^2 - 16 = 0$ $O1 := [\_,\_]$ $O2 := [\_,\_]$ (4)		
$Cir1 := (x-4)^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := (x-4)^2 + (y-4)^2 - 4 = 0$ $O1 := [\_,\_]$ $O2 := [\_,\_]$ (5)		

מהו הקשר בין השיעורים של מרכזי המעגלים? הסבירו.

הסיקו מסקנות לגבי הקשר בין משוואות המעגלים הנתונים לבין התיאור הגרפי של סכום משוואותיהם לפי אגפים.

ג. הסבירו מדוע משוואת כל מעגל היא מן הצורה: $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$, $a\neq 0$.

הסבירו מדוע הסכום לפי אגפים של שתי משוואות מעגלים גם הוא מאותה צורה.

נסו לנסח מסקנה על סמך הטבלה: מהו התנאי לכך שמשוואה מן הצורה $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$, $a\neq 0$ אכן מייצגת מעגל? מהי המשמעות הגרפית ומהי המשמעות האלגברית של התנאי?

ד. מה מתקבל מחיסור לפי אגפים של שתי משוואות המעגלים המופיעות בסעיף ב'? הסבירו.

בדקו מה מתקבל מחיסור לפי אגפים של שתי משוואות מעגלים לגבי הזוגות הנתונים בטבלה.

(שימו לב: בכל משוואות המעגלים שבהם עסקנו המקדם a הוא 1.)

בדקו מה מתקבל מחיסור לפי אגפים של שתי המשוואות: $\begin{matrix} 2x^2+2y^2=50 \\ (x-5)^2+y^2=36 \end{matrix}$?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.1.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 4.1

ראו גם קובץ: solution 4.1.dfw

א. נתונים שני מעגלים:

```
#1:   x² + y² = 25
#2:   (x - 5)² + y² = 36
```

מרכז המעגל הראשון בראשית הצירים ורדיוס 5. שיעורי מרכז המעגל השני (5 , 0) ורדיוס 5.
שני המעגלים נחתכים בשתי נקודות: (1.4 , 4.8) (1.4 , -4.8)

התאימו את מערכת הצירים כך שהמעגל יהיה "עגול":
נחבר לפי אגפים את משוואות שני המעגלים: Set > Aspect Ratio > Reset > OK

$$(x^2 + y^2 = 25) + ((x - 5)^2 + y^2 = 36)$$

נפשט את המשוואה ונשלים לריבוע במחברת:

$$x^2 - 5x + y^2 = 18$$
$$(x - 2.5)^2 + y^2 = 24.25$$

ובכן, המשוואה שהתקבלה מחיבור לפי אגפים של שתי משוואות המעגלים הנתונים גם היא משוואת מעגל, שמרכזו (2.5 , 0) ורדיוסו $\sqrt{24.25}$

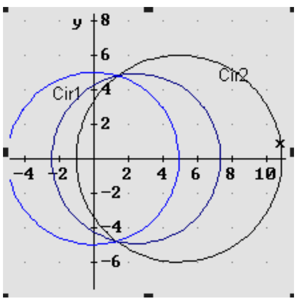
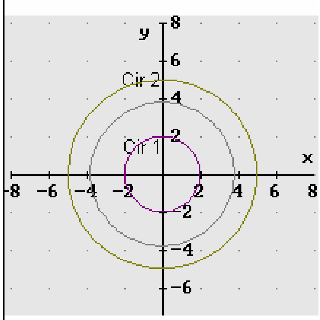
מרכז המעגל החדש הוא אמצע קטע המרכזים (הקטע המחבר את מרכזי שני המעגלים) של המעגלים הנתונים.

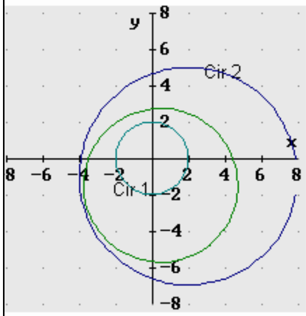
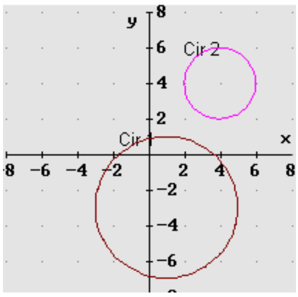
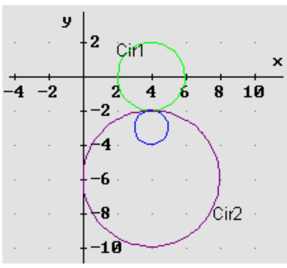
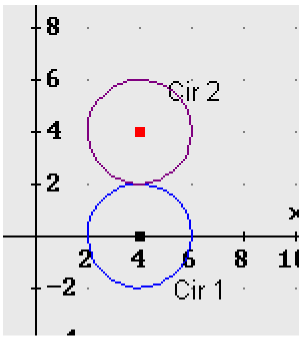
עתה ברצוננו לבדוק האם תמיד צירוף ליניארי כזה (חיבור משוואות של שני מעגלים לפי אגפים) מייצג מעגל, ואם כן: האם המרכז של המעגל החדש יהיה אמצע קטע המרכזים.

ב. כדי לחסוך הקלדה מחדש של משוואת אותו מעגל, נוכל להגדיר אותו לתוכנה. ההגדרה לתוכנה היא בהקלדת :=

נמלא את הטבלה (בשורה הראשונה מופיע פתרון סעיף א, לדוגמה)

נשלים לריבוע (במחברת) בעת הצורך, כדי למצוא שיעורי מרכז המעגל. נבדוק על ידי שרטוט.

משוואות המעגלים ומרכזיהם	**סכום המשוואות ומרכז המעגל**	**שרטוט**
לדוגמה: $Cir1 := x^2 + y^2 - 25 = 0$ $Cir2 := (x-5)^2 + y^2 - 36 = 0$ $O1 := [0,0]$ $O2 := [5,0]$	לאחר פישוט: $Cir1 + Cir2 =$ $x^2 + y^2 - 5x - 18 = 0$ $O := [2.5, 0]$	
$Cir1 := x^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := x^2 + y^2 - 25 = 0$ $O1 := [0,0]$ $O2 := [0,0]$ (1)	$O := [0,0]$ $x^2 + y^2 = \frac{29}{2}$	

$Cir1 := x^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := (x-2)^2 + (y+1)^2 - 36 = 0$ $O1 := [0,0]$ $O2 := [2,-1]$ (2)	$2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot y - 35 = 0$ $O := [1,-0.5]$	
$Cir1 := (x-1)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0$ $Cir2 := (x-4)^2 + (y-4)^2 - 4 = 0$ (3) $O1 := [1,-3]$ $O2 := [4,4]$	$x^2 - 5 \cdot x + y^2 - y + 11 = 0$ זו אינה משוואת מעגל, בהשלמה לריבוע נקבל $r^2<0$, ואכן לא יצטייר גרף.	
$Cir1 := (x-4)^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := (x-4)^2 + (y+6)^2 - 16 = 0$ (4) $O1 := [4,0]$ $O2 := [4,-6]$	$x^2 - 8 \cdot x + y^2 + 6 \cdot y + 24 = 0$ $O := [4,-3]$	
$Cir1 := (x-4)^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := (x-4)^2 + (y-4)^2 - 4 = 0$ $O1 := [4,0]$ $O2 := [4,4]$ (5)	$x^2 - 8 \cdot x + y^2 - 4 \cdot y + 20 = 0$ בהשלמה לריבוע: $r=0$, זו אינה משוואת מעגל. (לא מצטייר גרף כי זוהי נקודה.)	

כאשר חיברנו לפי אגפים משוואות של שני מעגלים, מצאנו שלוש אפשרויות: מתקבלת משוואת מעגל שמרכזו הוא אמצע קטע המרכזים של שני המעגלים הנתונים, קבוצת האמת של המשוואה מכילה רק נקודה אחת, או קבוצת האמת של המשוואה ריקה – אין מעגל.

ג. נפשט את משוואת המעגל הכללי, שמרכזו בנקודה (c_1 , c_2) ורדיוסו r (נעדיף לבצע את הפעולה ידנית. במקרה זה אין לתוכנה יתרון משמעותי):

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$$
$$x^2-2c_1x+c_1{}^2+y^2-2c_2y+c_2{}^2-r^2=0$$

נכפול את שני האגפים ב: $a \neq 0$

$$a\left(x^2-2c_1x+c_1{}^2+y^2-2c_2y+c_2{}^2-r^2\right)=0$$
$$ax^2+ay^2-2c_1x-2c_2y+c_1{}^2+c_2{}^2-r^2=0$$

נסמן: $b=-2c_1$, $c=-2c_2$, $d=c_1{}^2+c_2{}^2-r^2$

ונקבל משוואת מעגל מהצורה: $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$

נלך בכיוון ההפוך (על-ידי השלמה לריבוע):

$$\left(x+\frac{b}{2\cdot a}\right)^2+\left(y+\frac{c}{2\cdot a}\right)^2=\frac{b^2+c^2-4\cdot d}{4\cdot a^2}$$

המשוואה מייצגת מעגל כאשר: $r^2=\dfrac{b^2+c^2-4d}{4a^2}>0$

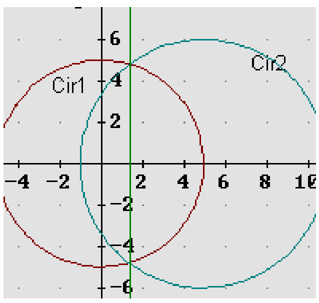
כאשר $r^2<0$ המשוואה מייצגת קבוצה ריקה (ואכן לא מצטייר גרף)

כאשר $r^2=0$ המשוואה מייצגת נקודה.

ד. עד כה ניסינו רק לחבר לפי אגפים את המשוואות של שני מעגלים, ובחנו את המשוואה המתקבלת ואת ייצוגה הגרפי. מעניין לבדוק מה קורה כאשר מחסרים לפי אגפים שתי משוואות של שני מעגלים. מכיוון שבכל משוואות המעגלים הנתונים בטבלה המקדם $a=1$ המשוואה המתקבלת לא תייצג מעגל. נבדוק אם כן, מהו הגרף המיוצג על ידי משוואות אלו.

במקרה המופיע בסעיף א' נקבל ישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים:

$$(x^2+y^2=25)-((x-5)^2+y^2=36)$$
$$10\cdot x-25=-11$$

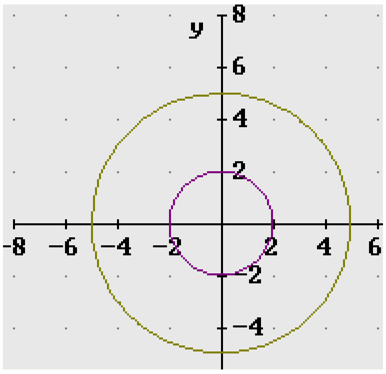


נבחן את זוגות המעגלים המופיעים בטבלה:

(1)

$$(x^2+y^2-4=0)-(x^2+y^2-25=0)$$

$$21=0$$

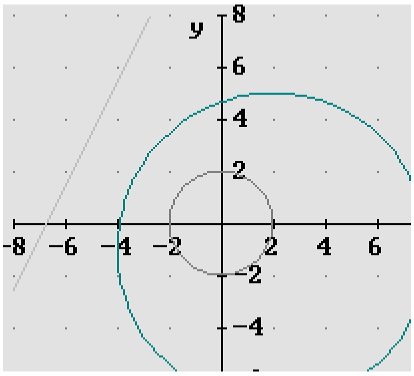


התקבלה קבוצה ריקה. אולם במקרים הבאים נראה שמתקבל ישר (בהמשך נדון במקרים אלו):

(2)

$$(x^2+y^2-4=0)-((x-2)^2+(y+1)^2-36=0)$$

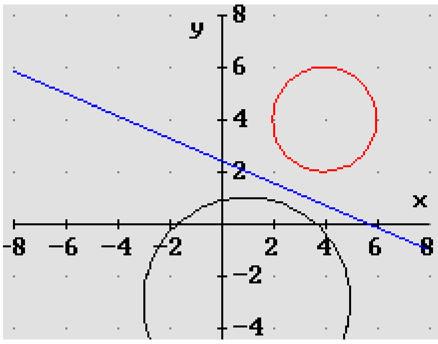
$$4\cdot x-2\cdot y+27=0$$



(3)

$$((x-1)^2+(y+3)^2-16=0)-((x-4)^2+(y-4)^2-4=0)$$

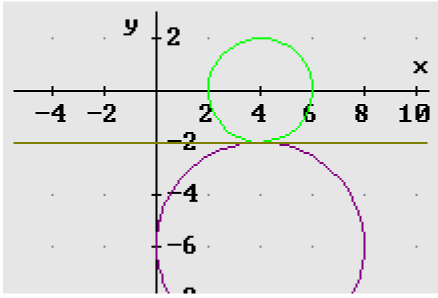
$$6\cdot x+2\cdot(7\cdot y-17)=0$$



(4)

$$((x-4)^2+y^2-4=0)-((x-4)^2+(y+6)^2-16=0)$$

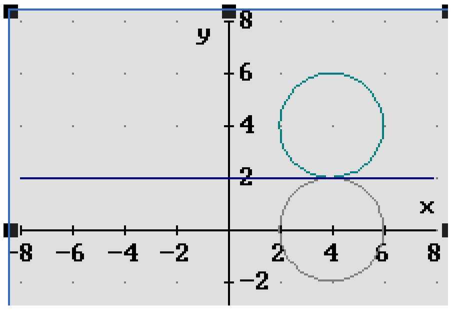
$$-12\cdot(y+2)=0$$



(5)

$$((x-4)^2+y^2-4=0)-((x-4)^2+(y-4)^2-4=0)$$

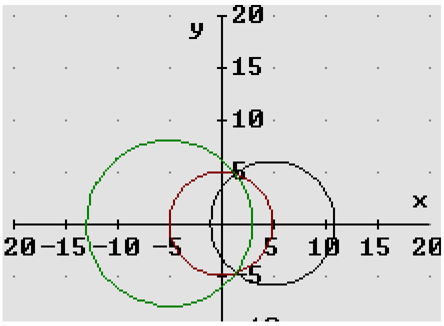
$$8\cdot(y-2)=0$$



אולם, אם נחסר לפי אגפים שתי משוואות של מעגלים בעלות מקדם a שונה, ייתכן שנקבל מעגל, כמו בדוגמה הבאה:

$$(2\cdot x^2+2\cdot y^2=50)-((x-5)^2+y^2=36)$$

$$x^2+10\cdot x+y^2-25=14$$



פעילות 4.2 – אלומת מעגלים

א. בפעילות הקודמת שרטטנו שני מעגלים נחתכים, המיוצגים על-ידי המשוואות:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$(x-5)^2 + y^2 = 36$$

שרטטו שוב את המעגלים, ומצאו את נקודות החיתוך שלהם.

כתבו צירוף לינארי של משוואות שני המעגלים, ושרטטו את הגרף שלו. תארו במילים מה קיבלתם.

לשרטוט גרפים של ביטויים מבלי לפשטם, בחרו בחלון הגרפי: Options > Simplify Before Plotting

נסו צירופים לינאריים נוספים.

נוח יותר לצורך חישובים להשתמש במשוואות המעגלים כשהן כתובות בצורה:

$$Cir1 := x^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$Cir2 := (x-5)^2 + y^2 - 36 = 0$$

כמה מעגלים שונים ניתן להעביר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים הנתונים?

מה משותף למרכזי המעגלים המתקבלים על ידי צירוף לינארי?

ב. משפחת המעגלים העוברים דרך שתי נקודות נתונות היא **אלומת מעגלים עם נקודות בסיס**.

משוואת האלומה היא הצירוף הלינארי הכללי (עם שני פרמטרים) של משוואות שני המעגלים:

$s \cdot Cir1 + t \cdot Cir2$, כאשר לפחות אחד מבין s ו t שונה מאפס.

הראו כי כל מעגל המיוצג על ידי המשוואה: $s \cdot Cir1 + t \cdot Cir2$ אכן עובר דרך שתי נקודות החיתוך של שני המעגלים .

עבור אלו ערכים של s ו t יתקבלו ממשוואת האלומה משוואות המעגלים המקוריים?

האם משוואת האלומה מייצגת רק מעגלים?

ג. נרשום משוואה חד- פרמטרית (בעזרת הפרמטר r) לאלומת המעגלים:

$$Cir1 + r \cdot Cir2$$

האם המשוואה החד- פרמטרית מכילה את כל המעגלים מהאלומה?

עתה נבנה ייצוג חד-פרמטרי כך שגם Cir1 וגם Cir2 יתקבלו.

בהנחה כי $s + t \neq 0$ נחלק את המשוואה ב $s + t$: $\frac{s}{s+t} \cdot Cir1 + \frac{t}{s+t} \cdot Cir2$

נסמן: $\frac{s}{s+t} = k$ ואז: $\frac{t}{s+t} = 1-k$

המשוואה החד-פרמטרית היא אם כך:

$$k \cdot (x^2 + y^2 - 25 = 0) + (1-k) \cdot ((x-5)^2 + y^2 - 36 = 0)$$

שרטטו את האלומה, ואשרו שהיא אכן מייצגת גם את שני המעגלים המקוריים.

נקו את המסך ושרטטו מחדש את שני המעגלים המקוריים. הוסיפו בצבע אחר את המעגלים המיוצגים על ידי האלומה. השרטוט החדש מכסה את הקודם; המעגלים הנתונים כוסו על ידי שני מעגלים השייכים לאלומה.

<u>תזכורת</u>: לשרטוט משפחה היעזרו בפקודה VECTOR:

$$\text{VECTOR}(k\cdot(x^2 + y^2 - 25 = 0) + (1 - k)\cdot((x - 5)^2 + y^2 - 36 = 0),\ k,\ -10,\ 10)$$

הסבר: VECTOR (משוואת האלומה, משתנה, ערך ראשון, ערך אחרון)

לשרטוט: בתפריט Options בחלון הגרפי הפעילו Simplify Before Plotting, ובטלו את החלפת הצבע האוטומטי Change Plot Color . בתפריט Display בחרו בצבע שרטוט אפור.

ד. שרטטו שוב את שני המעגלים הנתונים על-ידי Cir1, Cir2 (ציר ה-x הוא ישר המרכזים של האלומה המתקבלת משרטוט שתי המשוואות).

מצאו ערך של k , כך שיתקבל מעגל שמרכזו בנקודה [2 , 0]=:M.

מצאו ערך של k , כך שיתקבל מעגל שמרכזו בנקודה [-1 , 0]=:N.

מהם ערכי k שלהם מתאימים מעגלים מן האלומה שמרכזיהם בנקודות שעל ישר המרכזים Q:=[q , 0] ?

מהם ערכי q שלהם מתאימים המעגלים מהאלומה עבור k = 2 , k = -1 , k = 0.4 ?

תחילה הגדירו למחשב את המשתנה q:=

בדקו תשובותיכם על ידי שרטוט.

לשרטוט נקודה, הקלידו את שיעוריה בסוגריים מרובעים והקישו  . תוכלו לבחור את גודל הנקודה על הצג, בחרו בחלון הגרפי: Options >Display> Points >

קטע המרכזים הוא הקטע המחבר את מרכזי שני המעגלים: [0 , 5] ו- [0 , 0] .

הסבירו כיצד משפיע ערכו של k על מיקומה של הנקודה לגבי קטע המרכזים?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.2.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 4.2

ראו גם קובץ: solution 4.2.dfw

א. בפעילות הקודמת בחנו שני צירופים לינאריים מיוחדים של משוואות שני מעגלים: חיבור וחיסור לפי אגפים. בפעילות זו נבחן את כל הצירופים הלינאריים של משוואות שני מעגלים, ונגדיר משפחה של מעגלים: אלומת מעגלים עם נקודות בסיס.

נשוב לשתי משוואות המעגלים שעמם פתחנו את הפעילות הקודמת:

#1: $x^2 + y^2 = 25$

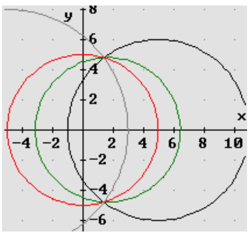
#2: $(x - 5)^2 + y^2 = 36$

כאמור, המעגלים נחתכים בשתי נקודות: (1.4 , 4.8) (1.4 , -4.8)

נבחר, כרצוננו צירופים לינאריים של שני המעגלים ונשרטט את הגרפים המתאימים למשוואות שיתקבלו. לדוגמה:

$$-(x^2 + y^2 - 25 = 0) + 0.5\cdot((x - 5)^2 + y^2 - 36 = 0)$$

הנה שרטוט המעגלים המקוריים, המעגל המיוצג על ידי חיבור משוואותיהם לפי אגפים (שאותו שרטטנו כבר בפעילות הקודמת) וכן הצירוף הלינארי החדש שבחרנו. כל המעגלים עוברים דרך אותן שתי נקודות חיתוך.



שימו לב, כדי לשרטט גרף של משוואה בלי לפשט אותה, בחרו בחלון הגרפי:

Options > Simplify Before Plotting

לנוחות החישוב נכתוב משוואת מעגלים בצורה: $u(x, y) = 0$

לדוגמה, משוואות המעגלים הנתונים ייכתבו כך:

$$Cir1 := x^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$Cir2 := (x - 5)^2 + y^2 - 36 = 0$$

ב. נכתוב את משוואת הצירוף הלינארי של שתי משוואות המעגלים הנתונים:

$s\cdot Cir1 + t\cdot Cir2$, לפחות אחד מבין הפרמטרים s , t שונה מאפס.

משוואה זו מייצגת אלומה של מעגלים עם נקודות בסיס. נציב במשוואת האלומה את שיעורי נקודות החיתוך של שני המעגלים. קל לראות כי מתקבל פסוק אמת, כלומר: כל מעגל המיוצג על ידי האלומה אכן עובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים הנתונים. אם כן, אפשר לבחור את המקדמים כרצוננו, ולהעביר דרך נקודות החיתוך אינסוף מעגלים נוספים.

נפשט את משוואת האלומה ונשלים לריבוע:

$$(x-5\cdot t)^2+y^2=\frac{25\cdot s^2+36\cdot s\cdot t+36\cdot t^2}{(s+t)^2}$$

כל מעגל המיוצג על ידי האלומה, מרכזו הוא: (0 , 5t) . בכך הוכחנו כי כל מרכזי המעגלים המיוצגים על ידי משוואת האלומה יימצאו על ישר המרכזים (הישר העובר דרך מרכזי שני המעגלים הנתונים).

כדי לקבל ממשוואת האלומה את המשוואה Cir1 נבחר: $s = 0$

כדי לקבל ממשוואת האלומה את המשוואה Cir2 נבחר: $t = 0$

כדי שמשוואת האלומה אכן תייצג מעגל, עלינו לדרוש (לפי ההשלמה לריבוע):

$$\frac{25\cdot s^2+36\cdot s\cdot t+36\cdot t^2}{(s+t)^2}>0$$

כאשר תנאי זה אינו מתקיים מתקבלת קבוצה ריקה (לא מצטייר גרף), או נקודה אחת, או שמתקבל קו ישר, כפי שראינו בחיסור לפי אגפים של שתי המשוואות.

ג. נעבור למשוואה חד-פרמטרית. נדרוש $s\neq 0$, נחלק את משוואת האלומה הדו-פרמטרית ב- s

ונקבל: $Cir1+\frac{t}{s}\cdot Cir2$. נסמן: $r=\frac{t}{s}$.

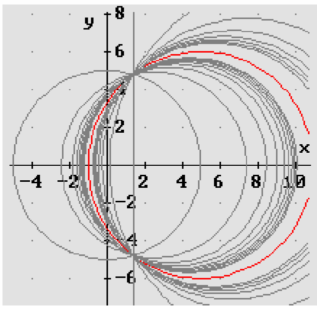
קיבלנו משוואה חד-פרמטרית לאלומה: $Cir1+r\cdot Cir2$

בייצוג זה איבדנו את המעגל המקורי Cir2 כיוון שהמקדם של Cir1 לא יכול להיות אפס. נדגים זאת בעזרת שרטוט המשפחה. ניעזר בפקודה vector.

הסבר: VECTOR(גודל הצעד, ערך אחרון, ערך ראשון, משתנה, משוואת האלומה)

אם לא נרשום את גודל הצעד, ברירת המחדל היא 1.

$$VECTOR((x^2+y^2-25=0)+r\cdot((x-5)^2+y^2-36=0),\ r,\ -8,\ 8)$$



כל שרטוט חדש מכסה את הקודם. שרטטנו את המעגלים המקוריים באדום, ואת המעגלים המייצגים את האלומה באפור. (תזכורת: ביטול החלפת צבע אוטומטי: Change Plot Color . בחירה בצבע מסוים תפריט Display)

רואים כי המעגל שמשוואתו Cir2 לא "כוסה", כלומר האלומה אינה מכילה אותו.

שימו לב שקיבלנו גם את ישר החיתוך של שני המעגלים (עבור הבחירה: $r = -1$).

ברצוננו למצוא משוואה חד-פרמטרית לאלומה, שתכיל את שני המעגלים שמהם נוצרה האלומה.

נניח כי $s + t \neq 0$, נחלק את המשוואה הדו-פרמטרית ב $s + t$: $\frac{s}{s+t}\cdot Cir1+\frac{t}{s+t}\cdot Cir2$

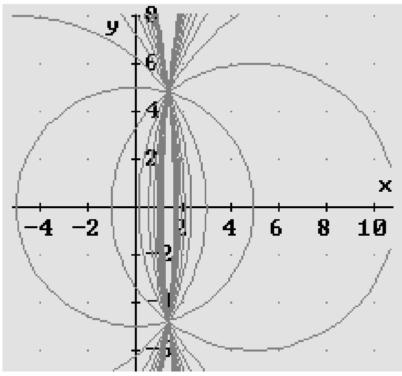
נסמן: $\frac{s}{s+t}=k$ ואז: $\frac{t}{s+t}=1-k$

המשוואה החד-פרמטרית היא אם כך:

$$k \cdot (x^2 + y^2 - 25 = 0) + (1-k) \cdot ((x - 5)^2 + y^2 - 36 = 0)$$

נשרטט משפחה חלקית של מעגלים השייכים לאלומה, ונראה שמשוואה חד-פרמטרית זו אכן מייצגת גם את שני המעגלים שמהם נוצרה האלומה:

```
VECTOR(k·(x^2 + y^2 = 25) + (1 - k)·((x - 5)^2 + y^2 = 36), k, -10, 10)
```



רואים ששני המעגלים המקוריים "כוסו" על ידי האלומה.

עבור $k = 0$ התקבל הגרף של Cir1, ועבור $k = 1$ התקבל Cir2.

הערה: במקרה של אלומות ישרים, ראינו כי הישר המתקבל מחיסור לפי אגפים של משוואות שני ישרים שמהם נוצרה האלומה, כלומר: $s + t = 0$, אינו מתקבל בהצגה החד-פרמטרית הזו. לגבי מעגלים אלו ראינו שחיסור המשוואות לפי אגפים נותן את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים: $x = 1.4$.

ד. נפשט את המשוואה החד-פרמטרית של האלומה, נשלים לריבוע ונקבל שיעורי מרכז המעגל המיוצג על ידי האלומה: $(-5(k-1) , 0)$.

אם מרכז המעגל הוא בנקודה $M:=[2 , 0]$, מתקיים: $-5(k - 1) = 2$, כלומר הערך של k כך שיתקבל מעגל שמרכזו בנקודה M הוא: 0.6 .

אם מרכז המעגל בנקודה $N:=[-1 , 0]$, **עלינו לפתור את המשוואה:** $-5(k - 1) = -1$, **ומכאן** $k = 1.2$

והמקרה הכללי: מרכז המעגל בנקודה $Q:=[q , 0]$, כלומר: $-5(k - 1) = q$

עבור הפרמטר $k = 2$ נקבל מעגל שמרכזו $[-5 , 0]$

עבור הפרמטר $k = -1$ נקבל מעגל שמרכזו $[10 , 0]$

עבור הפרמטר $k = 0.4$ נקבל מעגל שמרכזו $[3 , 0]$

(תזכורת: כדי להשתמש באות הקטנה q ,אחרי שהגדרנו Q, עלינו להגדירה תחילה למחשב, q:=)

נראה את הקשר בין ערכו של k לבין מיקומה של נקודת מרכז המעגל על ישר המרכזים.

נחלק את קטע המרכזים ביחס (k - 1) : k ; $k\cdot[0,0]+(1-k)\cdot[5,0]$

שיעורי הנקודה המחלקת את ישר המרכזים ביחס (k - 1) : k הם [5 (1 – k) , 0]

והרי כבר הראינו קודם (בעזרת השלמה לריבוע) שאלו הם בדיוק שיעורי מרכז המעגל המיוצג על ידי האלומה. אם כן הוכחנו: מרכז המעגל המתקבל מתוך האלומה על ידי בחירת ערך כלשהו של k מחלק את קטע המרכזים של שני המעגלים המקוריים ביחס של (k - 1) : k . מכאן, אם נבחר 0 < k < 1 מרכז המעגל שיתקבל יהיה בתוך קטע המרכזים. אם נבחר k > 1 מרכז המעגל יהיה משמאל לקטע המרכזים, ואם נבחר k < 0 מרכז המעגל יהיה מימין לקטע המרכזים.

פעילות 4.3 – עוד אלומת מעגלים

א. שרטטו את שני המעגלים:
$$Cir1 := (x-5)^2 + y^2 - 9 = 0$$
$$Cir2 := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

בשרטוט אנו רואים שהמעגלים אינם נחתכים, כלומר: אין נקודות משותפות לשני המעגלים. לכן, אם נבקש מהתוכנה לפתור את מערכת המשוואות של שני המעגלים :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \wedge (x-5)^2 + y^2 - 9 = 0$$

נצפה לקבל פתרונות לא ממשיים. ואמנם קיבלנו שני פתרונות מרוכבים, שבהם השיעור הראשון מספר ממשי והשיעור השני מספר מרוכב. בסעיפים הבאים נברר את משמעותם בהקשר עם אלומת מעגלים שנבנה בעזרת שני המעגלים הנתונים.

ב. כתבו משוואה חד- פרמטרית של הצירוף הלינארי של משוואות שני המעגלים הנתונים:
$k \cdot Cir1 + (1-k) \cdot Cir2$, ושרטטו שני מעגלים המיוצגים על ידי המשוואה.

הסבירו את מה שקיבלתם.

האם משוואות המעגלים המוגדרים על-ידי Cir1, Cir2 נכללות באלומה שהגדרתם?

תנו דוגמאות למשוואות מתוך האלומה שאינן מייצגות מעגל.

הסבירו מדוע חיסור לפי אגפים של משוואות שני המעגלים, שגם הוא צירוף לינארי של משוואות שני המעגלים, אינו מוכל באלומה שהגדרתם. שרטטו את הגרף המתאים לצירוף לינארי זה.

שרטטו מעגלים נוספים מן האלומה שהגדרתם בעזרת הפקודה vector.

לשרטוט משפחה של מעגלים היעזרו בפקודה VECTOR:

Vector (k·Cir1 + (1-k)·Cir2 , k , -10 , 10 ,0.3)

הקטינו את גודל הצעד. מה קיבלתם? הסבירו.

ג. הראו כי כל מרכזי המעגלים המיוצגים על ידי האלומה, נמצאים על ישר המרכזים של שני המעגלים המקוריים.

בדקו אם כל נקודה על ישר המרכזים יכולה להיות מרכז של מעגל המיוצג על ידי האלומה. לשם כך,פשטו את משוואת האלומה, ומצאו מהו התנאי לכך שהמשוואה תייצג מעגל.

נסחו את מסקנתכם. בדקו אם השרטוטים שקיבלתם קודם תואמים למסקנתכם.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.3.dfw

4.3 פתרונות והסברים לפעילות

ראו גם קובץ: solution4.3.dfw

א. נשרטט את שני המעגלים הנתונים:

$$Cir1 := (x-5)^2 + y^2 - 9 = 0$$
$$Cir2 := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

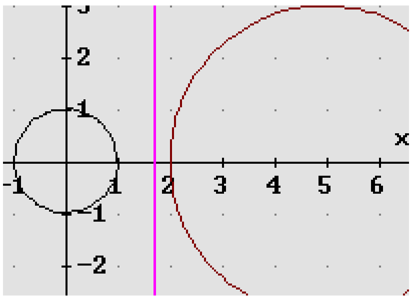
רואים שהמעגלים אינם נחתכים. אך אם בכל זאת ננסה לפתור, במחברת או בעזרת Derive, את מערכת המשוואות של שני מעגלים אלו, בוודאי לא נקבל פיתרונות ממשיים. מה נקבל אם

```
SOLVE(x^2 + y^2 - 1 = 0 ∧ (x - 5)^2 + y^2 - 9 = 0, [x, y])
```

$$\left[x = \frac{17}{10} \wedge y = -\frac{3\cdot\sqrt{21}\cdot \hat{\imath}}{10}\right] \vee \left[x = \frac{17}{10} \wedge y = \frac{3\cdot\sqrt{21}\cdot \hat{\imath}}{10}\right]$$

אם נבקש מהתוכנה לפתור עבור מספרים ממשיים (Real) - כמובן, נקבל "false"

בסעיפים הבאים ננסה לעמוד על משמעותו של החלק הממשי בפיתרונות המדומים שקיבלנו בהקשר של אלומת המעגלים שניצור משני המעגלים הנתונים. נוסיף לשרטוט את החלק הממשי של הפתרון $x = 1.7$.



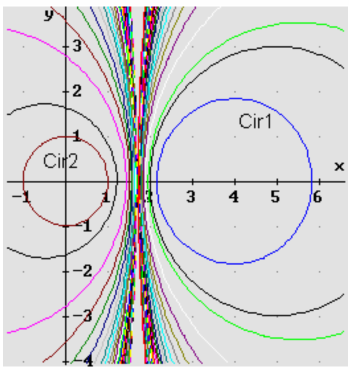
ב. נשרטט מעגלים מתוך אלומת המעגלים שמשוואתה: $k\cdot Cir1 + (1-k)\cdot Cir2$

כרגיל, לשרטוט משפחה ניעזר בפקודה Vector

```
k·Cir1 + (1 - k)·Cir2
```

$$x^2 - 10\cdot k\cdot x + y^2 + 17\cdot k - 1 = 0$$

```
VECTOR(x^2 - 10·k·x + y^2 + 17·k - 1 = 0, k, -10, 10, 0.3)
```



אם נקטין את גודל הצעד, נקבל מעגלים נוספים מן האלומה, ההולכים ומתקרבים לישר המייצג את החלק הממשי בפתרון המדומה של מערכת המשוואות של שני המעגלים.

המעגלים המקוריים בוודאי מוכלים באלומה, עבור בחירת $k = 1$, $k = 0$.

מהפעילויות הקודמות כבר ידוע לנו כי לא כל המשוואות השייכות לאלומה מייצגות מעגלים. בסעיף הבא נמצא את התנאי לכך.

חיסור שתי המשוואות לפי אגפים בוודאי אינו מייצג מעגל, שכן המקדם a של משוואות שני האגפים שווה. כדי לקבל צירוף לינארי זה מן האלומה, עלינו לדרוש $k = 1$ וגם $1 – k = - 1$. דרישה זו בוודאי אינה אפשרית, ולכן אי אפשר לייצג את הצירוף הלינארי הזה על ידי האלומה.

חיסור לפי אגפים של משוואות שני המעגלים ייתן את המשוואה: $10x - 17 = 0$

תוצאה זו מתקשרת לממצא קודם בחקירת האלומה הנוצרת משני המעגלים הנתונים. קיבלנו כי משוואת הצירוף הלינארי שאינו מוכל באלומה שהוגדרה, היא אותה משוואה שמופיעה כחלק הממשי בפיתרון מערכת המשוואות של שני המעגלים הזרים, $x = 1.7$ ("ישר החיתוך המדומה" של שני המעגלים). קשר נוסף יתברר לנו בהמשך החקירה.

ג. נפשט את משוואת האלומה, ונשלים לריבוע:

$$(x - 5\cdot k)^2 + y^2 = 25\cdot k^2 - 17\cdot k + 1$$

נקבל כי שיעורי מרכז מעגל המיוצג על ידי האלומה הם: [5k, 0]

כלומר, כל מעגל המוכל באלומה – מרכזו על ישר המרכזים של המעגלים הנתונים (ציר x).

נבדוק את הכיוון ההפוך. האם כל נקודה על ישר המרכזים היא מרכזו של מעגל המוכל באלומה.

התנאי לכך שמשוואה מן האלומה תייצג מעגל הוא:

$$25\cdot k^2 - 17\cdot k + 1 > 0$$

$$\text{SOLVE}(25\cdot k^2 - 17\cdot k + 1 > 0,\ k)$$

$$k < \frac{17}{50} - \frac{3\cdot\sqrt{21}}{50} \vee k > \frac{3\cdot\sqrt{21}}{50} + \frac{17}{50}$$

$$k < 0.0650454583 \vee k > 0.6149545416$$

שיעור ה x של מרכז המעגל הוא: 5k

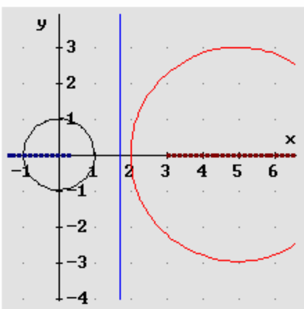
ובכן, התנאי לכך שנקודה $(q , 0)$ על ישר המרכזים תהיה מרכזו של מעגל מן האלומה הוא:

$$5\cdot k < \frac{17}{10} - \frac{3\cdot\sqrt{21}}{10} \vee 5\cdot k > \frac{3\cdot\sqrt{21}}{10} + \frac{17}{10}$$

$$5\cdot k < 0.3252272915 \vee 5\cdot k > 3.074772708$$

שימו לב כי פתרונות אלו כבר "מוכרים" לנו. בסעיף א, כאשר פתרנו את מערכת המשוואות של שני המעגלים, קיבלנו פתרונות, שחלקם המדומה מלמד אותנו על מיקומם של מרכזי המעגלים הנוצרים מן האלומה שבנינו. נדגים בשרטוט את הקרניים עליהן נמצאים מרכזי המעגלים:

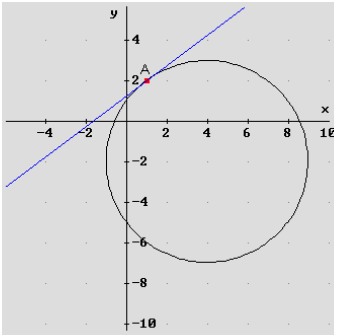
```
VECTOR([5·k, 0], k, 0.61, 10, 0.03)
VECTOR([5·k, 0], k, -10, 0.06, 0.03)
```



פעילות 4.4 - משיק למעגל

א. נתון מעגל שמשוואתו: $(x-4)^2+(y+2)^2-25=0$.

דרך הנקודה $A(1, 2)$ שעל המעגל העבירו משיק למעגל (ראו שרטוט):



מצאו, ללא עזרת המחשב, את משוואתו של המשיק למעגל, באחת (או בכמה) מהדרכים הבאות. לבדיקת תשובותיכם תוכלו להיעזר במחשב:

1) היעזרו במשפט: הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

מצאו את שיפוע הרדיוס OA , את שיפוע האנך לו, ואת משוואת המשיק.

2) כתבו מערכת משוואות למציאת נקודות המפגש בין המעגל לבין ישר כלשהו העובר דרך נקודה A .

מצאו את הישר המשיק למעגל, כלומר: ישר שעבורו יהיה למערכת פיתרון יחיד.

3) היעזרו בנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר, ובדקו מתי המרחק ממרכז המעגל אל הישר העובר דרך A לבין מרכז המעגל שווה לרדיוס.

4) הסתכלו על חצי המעגל העליון, זהו גרף של פונקציה f.

הראו כי: $f(x)=\sqrt{-x^2+8x+9}-2$, גזרו את הפונקציה ומצאו את משוואת המשיק בנקודה A.

5) היעזרו בנגזרת של פונקציה סתומה למציאת שיפוע המשיק בנקודה A ומשוואת המשיק.

ניתן, כמובן, לקבל את משוואת המשיק של פונקציה סתומה ישירות בעזרת התוכנה. למציאת משוואת המשיק למעגל, הקלידו:

```
IMP_TANGENT((x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 25, x, y, 1, 2)
```

הסבר ההוראה (משמאל לימין): IMP_TANGENT – מציאת משוואת משיק (Tangent) לפונקציה סתומה (Implicit). בתוך הסוגריים: האגף השמאלי של המשוואה הכתובה בצורה u = 0, ואחריו x, y, ושיעור ה- x של נקודת ההשקה, ושיעור ה- y של נקודת ההשקה.

ב. בחרו כרצונכם נקודה Q מחוץ למעגל. מצאו את משוואות המשיקים למעגל העוברים בנקודה זו.

בדקו את תשובתכם על ידי שרטוט המשיקים.

ג. חשבו את הזווית שבין שני המשיקים שמצאתם.

תזכורת: הזווית α שבין הישרים שמשוואותיהם: $\begin{matrix} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{matrix}$, מקיימת: $tg\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$

ד. שרטטו ישר, כרצונכם, העובר דרך הנקודה Q שבחרתם, וחותך את המעגל הנתון.

נכנה את המרחק בין הנקודה מחוץ למעגל שהמשיק עובר דרכה, לבין נקודת ההשקה **אורך המשיק**.

סמנו את הנקודות שבהן הישר חותך את המעגל באותיות M ו- N, ואת אחת מנקודות ההשקה באות T. חשבו את אורכי הקטעים שהתקבלו, והראו כי: $QM \cdot QN = QT^2$

מה המשמעות של תוצאה זו? הראו תוך שימוש בסימונים הקודמים, כי בכל מעגל שמרכזו O ורדיוסו r מתקיים: $QM \cdot QN = |Q - O|^2 - r^2$

ההפרש בין ריבוע מרחקה של הנקודה Q ממרכז המעגל (O), לבין ריבוע הרדיוס של המעגל (r), נקרא: ה**"חזקה של נקודה"** לגבי המעגל.

$$\text{Power}(Q,O,r) = |Q - O|^2 - r^2$$

הראו כי ריבוע אורכו של המשיק למעגל שווה ל"חזקה של הנקודה Q" לגבי המעגל הנתון.

לנוחותכם תוכלו להגדיר למחשב את פונקציית החזקה של נקודה, ולהיעזר בה בחישוביכם:

$$\text{Power}(Q,O,r) := |Q - O|^2 - r^2$$

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.4.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 4.4

ראו גם קובץ: solution4.4.dfw

א. נמצא משוואת משיק למעגל שמשוואתו: $(x-4)^2+(y+2)^2-25=0$ דרך הנקודה שעל המעגל ששיעוריה: $A(1,2)$, בדרכים שונות תוך ניצול ידע קודם במתמטיקה מתחומים שונים.

1) נסתמך על המשפט הגיאומטרי: הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

מרכז המעגל הנתון הוא (4 , -2), שיפוע הרדיוס OA הוא:

$$\frac{-2-2}{4-1}=-\frac{4}{3}$$

שיפוע המשיק דרך נקודה A: $\frac{3}{4}$ ומשוואתו: $y=\frac{3x+5}{4}$

2) משוואת ישר העובר דרך נקודה A : $y=mx+2-m$

נבטא בעזרת m את נקודות המפגש של המעגל והישר:

$$y = m\cdot x + 2 - m \wedge (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$$

$$\text{SOLVE}(y = m\cdot x + 2 - m \wedge (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25,\ [x, y])$$

$$\left[x = \frac{m^2 - 8\cdot m + 7}{m^2 + 1} \wedge y = -\frac{2\cdot(3\cdot m^2 - 3\cdot m - 1)}{m^2 + 1}\right] \vee (x = 1 \wedge y = 2)$$

אם הישר משיק למעגל, יש לו נקודת מפגש יחידה עם המעגל, כלומר: למערכת המשוואות של המעגל והישר יהיה פיתרון יחיד, שהוא נקודת ההשקה: (1 , 2)

תנאי זה מתקיים כאשר:

$$\frac{m^2 - 8\cdot m + 7}{m^2 + 1} = 1$$

מצאנו: $m=\frac{3}{4}$ ומכאן משוואת המשיק: $y=\frac{3x+5}{4}$

3) משוואת ישר העובר דרך נקודה A:

$$m\cdot x - y + 2 - m = 0$$

שוב נסתמך על המשפט האומר כי הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה, כלומר: הרדיוס שווה למרחקו של מרכז המעגל מן המשיק.

בעזרת הנוסחה לחישוב מרחק נקודה מישר, נבטא בעזרת m את מרחק מרכז המעגל הנתון (4 , -2) מישר זה, ונשווה את המרחק לרדיוס המעגל:

נקבל את ערכו של m ומכאן קל למצוא את משוואת המשיק.

$$D = \frac{|4\cdot m + 2 + 2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\frac{|4\cdot m + 2 + 2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5$$

4) המשיק המבוקש, משיק למעגל בחציו העליון. חצי המעגל העליון הוא גרף של פונקציה

שמשוואתה: $f(x)=\sqrt{-x^2+8x+9}-2$

שיפוע המשיק שווה לערך נגזרת הפונקציה בנקודת ההשקה.

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{-x^2+8\cdot x+9}-2\right)$$

$$\frac{4-x}{\sqrt{-x^2+8\cdot x+9}}$$

הצבת שיעור ה- x של נקודת ההשקה תיתן את שיפוע המשיק, ומכאן משוואתו.

5) נשתמש בפקודה לחישוב נגזרת של פונקציה סתומה:

$$\text{IMP\_DIF}\left((x-4)^2+(y+2)^2-25,\ x,\ y\right)$$

$$\frac{4-x}{y+2}$$

כאשר נציב את שיעורי הנקודה הנתונה נקבל את שיפוע המשיק בנקודה זו : 3/4

אפשר, כמובן, לבצע חישוב זה ידנית:

$$\left\{(x-4)^2+(y+2)^2-25\right\}'=0$$
$$2(x-4)+2(y+2)y'=0$$
$$x=1\Rightarrow -6+8y'(1)=0$$
$$y'(1)=\tfrac{3}{4}$$

אנו ניעזר בפקודה הקיימת בתוכנה, למציאת משוואת משיק לפונקציה סתומה:

$$\text{IMP\_TANGENT}\left((x-4)^2+(y+2)^2-25,\ x,\ y,\ 1,\ 2\right)$$

$$\frac{3\cdot x+5}{4}$$

ישנן דרכים נוספות לפיתרון בעיה זו.

6) נוכל להציב ישירות בנוסחה למשוואת משיק, המופיעה בדפי הנוסחאות המקובלים:

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$, (a,b) - מרכז המעגל , R – רדיוס המעגל,

(x_0,y_0) - נקודת ההשקה.

7) נסמן נקודה כלשהי על המשיק המבוקש B(x , y) . מכיוון שהזווית בין המשיק לרדיוס בנקודת ההשקה היא זווית ישרה, הרי המשולש ABO (O – מרכז המעגל) הוא משולש ישר זווית. נוכל להיעזר במשפט פיתגורס למציאת הקשר בין שיעורי הנקודה B .

$$OA^2+AB^2=OB^2$$
$$5^2+(1-x)^2+(2-y)^2=(x-4)^2+(y+2)^2$$
$$10+6x=4y$$

האם תוכלו לחשוב על דרכים נוספות לפיתרון בעיה סטנדרטית זו?

ב. נבחר נקודה מחוץ למעגל הנתון, לדוגמה: Q (11, -1)

נסמן R , T את נקודות ההשקה של המשיק למעגל דרך Q . הנקודה R (x, y) מקיימת את משוואת המעגל, וכן מתקיים: מכפלת השיפועים של OR ו- QR שווה ל- -1 (מכיוון שהרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה).

נפתור את מערכת המשוואות המתאימה. פיתרון המערכת ייתן את שיעורי נקודות ההשקה.

$$\frac{y+2}{x-4}\cdot\frac{y+1}{x-11}=-1 \wedge (x-4)^2+(y+2)^2=25$$

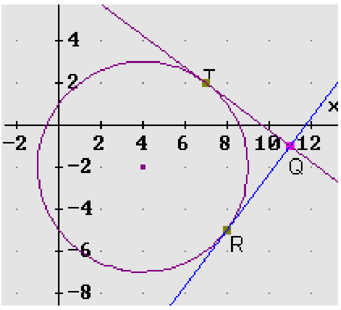
$R := [8, -5],\ T := [7, 2]$

נמצא את משוואות המשיקים כמשוואות ישר לפי שתי נקודות שעליו:

$$y=\frac{4x-47}{3}$$

$$y=\frac{29-3x}{4}$$

נדגים זאת בשרטוט:



ג. הנוסחה המוכרת לחישוב זווית בין שני ישרים: $tg\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

נחשב את הזווית שבין שני המשיקים שאת משוואותיהם מצאנו בסעיף ב.

$$\text{TAN}(\alpha)=\left|\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{-3}{4}}\right|$$

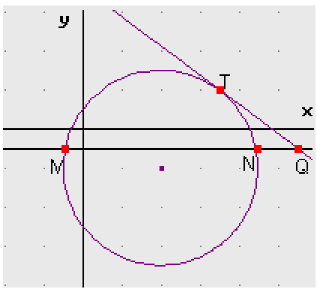
$$\alpha=\frac{3\cdot\pi}{2} \vee \alpha=-\frac{\pi}{2} \vee \alpha=\frac{\pi}{2}$$

במקרה פרטי זה הזווית שבין הישרים היא זווית ישרה; כלומר, המשיקים מאונכים זה לזה.

ד. נבחר ישר העובר דרך הנקודה Q וחותך את המעגל בשתי נקודות, לדוגמה: הישר שמשוואתו $y=-1$. נקודות החיתוך של הישר והמעגל:

$M := [4 - 2\cdot\sqrt{6}, -1],\ N := [4 + 2\cdot\sqrt{6}, -1]$

נדגים זאת בשרטוט:



נבדוק לגבי דוגמה זו את המשפט הגיאומטרי: מכפלת שני קטעי החותך מהנקודה Q ועד שתי נקודות החיתוך עם המעגל, שווה לריבוע אורך המשיק (כאשר "אורך משיק" מוגדר כמרחק מנקודת ההשקה לנקודת המוצא של המשיק).

$$|Q - M| \cdot |Q - N| = |Q - T|^2$$

$$25 = 25$$

בגיאומטריה מגדירים **חזקה של נקודה** כהפרש בין ריבוע מרחקה של הנקודה ממרכז המעגל לבין ריבוע הרדיוס של המעגל (או כמכפלת שני קטעי החותך מהנקודה Q ועד שתי נקודות החיתוך עם המעגל) .

נגדיר למחשב פונקציית חזקה של נקודה:

$$\mathrm{Power}(Q, O, r) := |Q - O|^2 - r^2$$

נראה כי החזקה של הנקודה Q ביחס למעגל הנתון שווה לריבוע המשיק:

$$|Q - T|^2 = \mathrm{Power}(Q, O, 5)$$

$$25 = 25$$

פעילות 4.5 – ישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני מעגלים

א. לפניכם משוואות שני מעגלים נחתכים שעסקנו בהם בפעילות 4.2. נכנה את הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים *ישר החיתוך*. שרטטו את שני המעגלים ואת ישר החיתוך שלהם.

$$\#1:\quad x^2 + y^2 = 25$$

$$\#2:\quad (x-5)^2 + y^2 = 36$$

בחרו, כרצונכם, נקודה מחוץ למעגלים הנמצאת על ישר החיתוך. היעזרו בהגדרה של "חזקה של נקודה" לחישוב אורכי המשיקים למעגלים הנתונים היוצאים מהנקודה שבחרתם, מבלי לחשב את משוואות המשיקים?

כמו בפעילות קודמת, נכנה את המרחק מנקודת המוצא של המשיק לנקודת ההשקה, *אורך המשיק*. חשבו את אורכי המשיקים. מה קיבלתם?

מה תוכלו לומר על ה"חזקה של הנקודה" שבחרתם לגבי כל אחד מן המעגלים?

<u>תזכורת</u>: את "החזקה של נקודה Q" הגדרנו ב Derive כך: $\text{Power}(Q,O,r):=|Q-O|^2-r^2$

(O – מרכז המעגל, r – רדיוס המעגל)

בחרו נקודה נוספת וחזרו על התהליך.

ב. בחרו, כרצונכם, נקודה הנמצאת על ישר החיתוך בתוך המעגלים.
חשבו את ה"חזקה של הנקודה" לגבי כל אחד מן המעגלים. מה קיבלתם?
בדקו אם התופעה חוזרת על עצמה גם לגבי נקודות אחרות על ישר החיתוך.

ג. הגדירו נקודה כללית על ישר החיתוך, והראו כי לכל נקודה על ישר החיתוך אותה "חזקה" לגבי שני המעגלים.
הסבירו כיצד משפיע מיקומה של הנקודה על ישר החיתוך על ה"חזקה" של הנקודה?

ד. לפניכם משוואות שני מעגלים שאינם נחתכים, שעסקנו בהם בפעילות 4.3. נכנה את הישר המייצג את החלק המדומה של פיתרון מערכת המשוואות של שני המעגלים: **ישר החיתוך המדומה.** שרטטו את שני המעגלים ואת ישר החיתוך המדומה שלהם: $x=1.7$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(x-5)^2 + y^2 - 9 = 0$$

בחרו נקודה על הישר, כרצונכם. חשבו את ה"חזקה" של הנקודה לגבי כל אחד מן המעגלים. מה קיבלתם?
בחרו נקודות נוספות על הישר וחזרו על התהליך.

ה. הראו שהכלל שהוכחתם בסעיף ג' לגבי נקודות על ישר החיתוך הממשי של מעגלים נחתכים, מתקיים גם לגבי נקודות על ישר החיתוך הדמיוני של שני מעגלים שאינם נחתכים.

ו. הציעו שיטה נוספת לבניית משיק למעגל בנקודה שעליו המתבססת על מה שלמדתם ביחידה זו.

ז. חקרו באופן דומה את שני המעגלים בדוגמה (2) בפעילות 4.1:

$$Cir1 := (x-2)^2 + (y+1)^2 - 36 = 0$$

$$Cir2 := x^2 + y^2 - 4 = 0$$

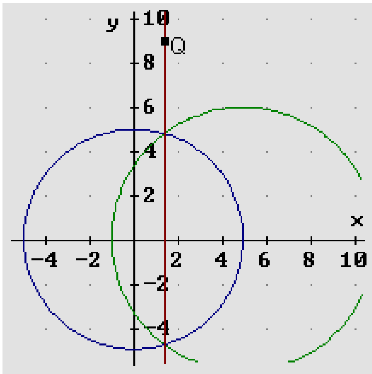
שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.5.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 4.5

ראו גם קובץ: solution4.5.dfw

בפעילות זו נגלה תכונה מיוחדת של הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני מעגלים. נכנה ישר זה "ישר החיתוך".

א. נשרטט שני מעגלים נחתכים ואת ישר החיתוך שלהם, ונראה כי החזקות של כל נקודה על ישר החיתוך לגבי שני המעגלים – שווה. לדוגמה, נבחר נקודה מחוץ למעגלים: Q:=[1.4, 9]



נחזור על התהליך לגבי נקודות נוספות על ישר החיתוך מחוץ למעגלים.

ב. עתה נבחר נקודות על ישר החיתוך בתוך המעגלים, ונחשב את חזקתן לגבי כל אחד משני המעגלים. למשל: Q:=[1.4, -2]

$$\text{POWER}([1.4,\ -2],\ [5,\ 0],\ 6) = -\frac{476}{25}$$

$$\text{POWER}([1.4,\ -2],\ [0,\ 0],\ 5) = -\frac{476}{25}$$

נחזור על התהליך לגבי נקודות נוספות על ישר החיתוך.

עבור כל נקודה שבחרנו, חזקות הנקודה לגבי כל אחד מן המעגלים – שווה.

ג. נבדוק את המקרה הכללי. האם התכונה שמצאנו לגבי ישר החיתוך נכונה לגבי כל הנקודות שעליו?

נגדיר נקודה כללית P (קודם עלינו להגדיר לתוכנה את המשתנה =:p)

$$\text{POWER}([1.4,\ p],\ [5,\ 0],\ 6) = \frac{25\cdot p^2 - 576}{25}$$

$$\text{POWER}([1.4,\ p],\ [0,\ 0],\ 5) = \frac{25\cdot p^2 - 576}{25}$$

בכך הוכחנו תכונה מיוחדת של ישר החיתוך של שני המעגלים הנתונים: חזקותיה של כל נקודה לגבי כל אחד מן המעגלים – שווה.

ד. בסעיפים הקודמים בחנו תכונה מיוחדת של ישר החיתוך. ומה קורה כאשר אין למעגלים נקודות חיתוך? נשוב אל שני המעגלים שכבר טיפלנו בהם בפעילויות הקודמות:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(x - 5)^2 + y^2 - 9 = 0$$

כזכור, ניסינו לפתור את מערכת המשוואות של שני מעגלים אלו, ובחנו את הישר המייצג את החלק הממשי של הפתרון המרוכב שהתקבל: $x = 1.7$

נבחר נקודות, כרצוננו, על "ישר החיתוך המדומה" ונחשב את החזקות שלהן לגבי כל אחד משני המעגלים. ואמנם, התכונה המשותפת לכל הנקודות על ישר החיתוך של שני מעגלים נחתכים מתקיימת גם עבור כל הנקודות על ישר החיתוך המדומה של שני מעגלים שאינם נחתכים.

ה. נוכיח את המקרה הכללי: נבחר נקודה כללית על הישר: $Q(1.7 , q)$ (תזכורת: ראשית עלינו להגדיר לתוכנה את המשתנה =:q). ואמנם מתקיים:

$$\text{POWER}([1.7, q], [0, 0], 1) = \frac{100 \cdot q^2 + 189}{100}$$

$$\text{POWER}([1.7, q], [5, 0], 3) = \frac{100 \cdot q^2 + 189}{100}$$

ו. חזקה של נקודה שווה לריבוע אורך המשיק. אם ברצוננו למצוא משוואת משיק למעגל בנקודה שעליו, אנו מחפשים את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שחזקתן לגבי המעגל שווה למרחקן מנקודת ההשקה. נפתור בדרך זו את סעיף א' מפעילות 4.4 (כבר פתרנו שאלה זו בדרכים שונות):

נתון מעגל שמשוואתו: $(x-4)^2+(y+2)^2-25=0$. דרך הנקודה $A(1,2)$ שעל המעגל העבירו משיק למעגל, מצאו את משוואתו של המשיק למעגל. לגבי נקודה על המשיק ששיעוריה (x, y) מתקיים:

$$\text{POWER}([x, y], [4, -2], 5) = |[x, y] - [1, 2]|^2$$

$$x^2 - 8 \cdot x + y^2 + 4 \cdot y - 5 = x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 4 \cdot y + 5$$

$$\text{SOLVE}(x^2 - 8 \cdot x + y^2 + 4 \cdot y - 5 = x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 4 \cdot y + 5, y)$$

$$y = \frac{3 \cdot x + 5}{4}$$

ז. גם בדוגמה זו נגלה את המשמעות הגיאומטרית של הפתרונות המרוכבים המתקבלים עבור נקודות החיתוך (המדומות) של המעגלים.

$$\text{Cir1} := (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 36 = 0$$

$$\text{Cir2} := x^2 + y^2 - 4 = 0$$

שיעורי "נקודות החיתוך" של המעגלים:

$$\left(x = -\frac{27}{5} - \frac{\sqrt{649}\cdot \hat{\imath}}{10} \wedge y = \frac{27}{10} - \frac{\sqrt{649}\cdot \hat{\imath}}{5}\right) \vee$$
$$\left(x = -\frac{27}{5} + \frac{\sqrt{649}\cdot \hat{\imath}}{10} \wedge y = \frac{27}{10} + \frac{\sqrt{649}\cdot \hat{\imath}}{5}\right)$$

חיסור המשוואות *Cir*1 – *Cir*2 נותן משוואת ישר $y = 2x + \frac{27}{2}$.

משוואת ישר המרכזים y = -0.5x. שני ישרים אלו נחתכים בנקודה ששיעוריה $[-\frac{27}{5}, \frac{27}{10}]$

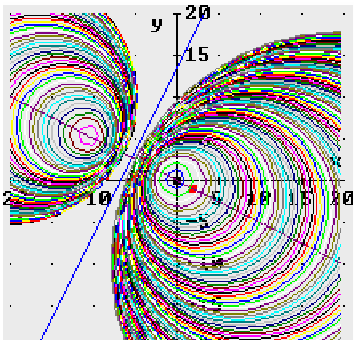
ניצור אלומת מעגלים $k \cdot \mathrm{Cir1} + (1-k)\mathrm{Cir2}$ על-ידי פישוט והשלמה לריבוע נקבל תנאי לגבי ערכים של k הנותנים מעגל ממשי.

$$(x - 2\cdot k)^2 + (y + k)^2 = 27\cdot k + 4 + 5\cdot k^2$$

$$27\cdot k + 4 + 5\cdot k^2 > 0$$

$$\mathrm{SOLVE}(27\cdot k + 4 + 5\cdot k^2 > 0,\ k)$$

$$k < -\frac{\sqrt{649}}{10} - \frac{27}{10} \vee k > \frac{\sqrt{649}}{10} - \frac{27}{10}$$

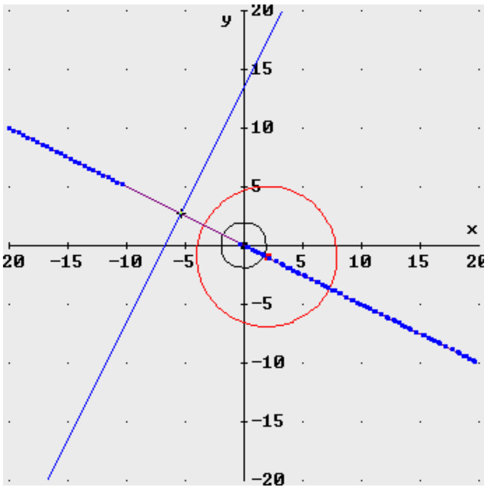


נדגים את מרכזי המעגלים:

```
VECTOR([2·k, -k], k, -0.15, 10, 0.25)
VECTOR([2·k, -k], k, -10, -5.2, 0.2)
```

שיעורי המרכזיים הקיצוניים (סימטריים לישר "החיתוך"):

$$\left[-\frac{\sqrt{649}}{5} - \frac{27}{5}, \frac{\sqrt{649}}{10} + \frac{27}{10}\right]$$
$$\left[\frac{\sqrt{649}}{5} - \frac{27}{5}, \frac{27}{10} - \frac{\sqrt{649}}{10}\right]$$



שימו לב לקשר בין שיעורי המרכזים הקיצוניים ושיעורי "נקודות החיתוך המדומות".

קשר מעניין נוסף: ישר "החיתוך" $y = 2x + \frac{27}{2}$ הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות בעלות אותה "חזקה" לגבי שני המעגלים.