



מדריך למורה

3. קווים ישרים

מבוא

מטרתה של יחידה זו היא הכרת משפחות של ישרים בעלי נקודה אחת משותפת (אלומות) וייצוגן על-ידי משוואה דו-פרמטרית וחד-פרמטרית. בניית האלומות מכשירה את הקרקע לעיסוק במקומות גיאומטריים הבולט בגיאומטריה האנליטית. במהלך הפעילות נידרש למושג הצירוף הלינארי, לחישוב המרחק מנקודה לישר ולתכונת חוצה זווית כמקום גיאומטרי. מטרה נוספת שתושג באמצעות יחידה זו היא שימוש בכלים שונים לפתרון בעיות בהנדסה אנליטית. בכך נרחיב את הראייה המתמטית של התלמידים. פעילות זו, מכינה את התשתית ללימוד על אלומות של מעגלים ביחידה הבאה.

רשימת הפעילויות:

פעילות 3.1 – משפחה שכזאת

פעילות 3.2 – אלומה של ישרים

פעילות 3.3 – ייצוג נוסף לאלומה

פעילות 3.4 – חוצי זוויות

פעילות 3.1 – משפחה שכזאת

א. נתונה משפחת ישרים על-ידי המשוואה $ax + by - (2a + 3b) = 0$ (לפחות אחד מבין a, b שונה מאפס). הציבו לפי הטבלה ערכים שונים עבור a, b כדי לקבל דוגמאות למשוואות של ישרים השייכים למשפחה הנתונה. שרטטו גרף מתאים לכל משוואה.
מה המיוחד לישרים במשפחה זו? ממה, לדעתכם, נובעת התכונה המיוחדת?

המשוואה	$a = \underline{\hspace{1cm}}$	$b = \underline{\hspace{1cm}}$	
	4	5	1
	- 3	7	2
$5x + \underline{\hspace{1cm}} y - \underline{\hspace{1cm}} = 0$		-3	3
$\underline{\hspace{1cm}} x + \underline{\hspace{1cm}} y - 13 = 0$			4
$x = 2$			5
			6
			7

ב. הראו כי הפתרון של כל מערכת שתי משוואות השייכות למשפחה הוא מערכת של שתי משוואות $[x = \underline{\hspace{1cm}}, y = \underline{\hspace{1cm}}]$ (השלימו) השייכות למשפחה.
הראו כי כל צירוף לינארי (לפי אגפים) של שתי המשוואות $[x = \underline{\hspace{1cm}}, y = \underline{\hspace{1cm}}]$ גם הוא שייך למשפחה הנתונה.

ג. הראו כי כל משוואת ישר העובר דרך הנקודה ששיעוריה $(3, -5)$ היא מהצורה

$$ax + by - (3a - 5b) = 0$$

ד. בחרו נקודה במערכת הצירים, ומצאו משוואה פרמטרית המגדירה משפחה של ישרים העוברים דרך הנקודה.

ה. הסבירו מדוע המשוואה הדו-פרמטרית $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ (לפחות אחד מבין a, b שונה מאפס) מייצגת ישרים העוברים דרך הנקודה ששיעוריה x_1, y_1 .

ו. הסבירו מדוע המשוואה החד-פרמטרית $y - y_1 = m(x - x_1)$ מייצגת ישרים העוברים דרך הנקודה ששיעוריה x_1, y_1 .

האם כל הישרים העוברים דרך הנקודה מתקבלים על-ידי המשוואה?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name3.1.dfw

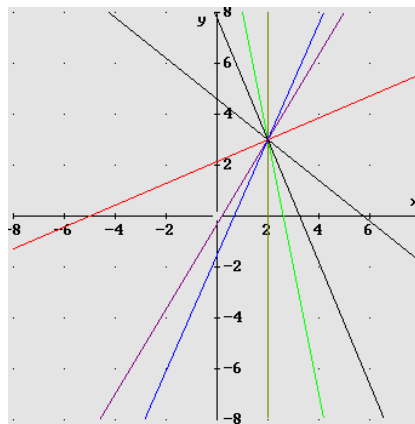
פתרונות והסברים לפעילות 3.1

ראו גם קובץ: [solution3.1.dfw](#)

א. נמלא את הטבלה בעזרת הצבות. בפעילות זו אין יתרון משמעותי לעבודה בעזרת התוכנה, וייתכן כי תלמידים רבים יעדיפו לפתור באופן ידני ולשרטט במערכת הצירים בדף הפעילות. להלן הטבלה המלאה, את שורות 6, 7 תוכלו למלא על פי בחירתכם.

המשוואה	$a = \underline{\hspace{1cm}}$	$b = \underline{\hspace{1cm}}$	
$4x + 5y - 23 = 0$	4	5	1
$-3x + 7y - 15 = 0$	- 3	7	2
$5x - 3y - 1 = 0$	5	-3	3
$5x + y - 13 = 0$	5	1	4
$x = 2$	1	0	5
			6
			7

שרטוט הישרים:



מהשרטוט רואים כי כל הישרים עוברים דרך נקודה אחת משותפת: (2, 3). תכונה זו נובעת מן המשוואה המייצגת את המשפחה. שימו לב כי הצבת שיעורי הנקודה במשוואה המייצגת את המשפחה נותנת פסוק אמת לכל a ולכל b .

ב. נציג שני ישרים מהמשפחה באופן כללי, ונחשב את נקודת המפגש שלהם. כלומר, נפתור את מערכת המשוואות המתאימה:

$$a \cdot x + b \cdot y - (2 \cdot a + 3 \cdot b) = 0 \wedge c \cdot x + d \cdot y - (2 \cdot c + 3 \cdot d) = 0$$

למערכת הזאת פתרון אחד והוא $(2, 3)$. שימו לב שהמשוואות $x=2, y=3$ שתיהן שייכות למשפחת המשוואות הדו-פרמטרית הנתונה, כלומר מצאנו גם שני ישרים במשפחה, אחד מקביל לציר ה- x ואחד מקביל לציר ה- y .

נרשום צירוף לינארי של שתי המשוואות: $x=2, y=3$, ונראה כי גם הוא שייך למשפחה. לנוחות הכתיבה נרשום את המשוואות כך: $x-2=0, y-3=0$. הצירוף הלינארי (לפי אגפים): $a(x-2)+b(y-3)=0$ נותן את המשוואה $a(x-2)+b(y-3)=0$ שבה התחלנו, המייצגת את המשפחה.

ג. נציב במשוואה הנתונה: $ax + by - (3a - 5b) = 0$ את הערכים: 3 במקום x ו-5 במקום y ונקבל פסוק אמת. כלומר הנקודה בעלת השיעורים $(3, -5)$ נמצאת על כל אחד מן הישרים השייכים למשפחה. נסתכל על כל הישרים העוברים דרך הנקודה $(3, -5)$ כעל צירוף לינארי של הישרים שמשוואותיהם הן $x=3$ ו- $y=-5$, או בצורתם: $x-3=0, y+5=0$.

הצירוף הלינארי הוא: $a(x-3)+b(y+5)=0$. פשוט משוואה זו מניב את המשוואה המבוקשת: $ax + by - (3a - 5b) = 0$. אוסף הנקודות במישור ששיעוריהן מקיימים את המשוואה הזאת (כלומר, הצבתם במשוואה נותנת פסוק אמת) הוא המקום הגיאומטרי של כל הישרים העוברים דרך הנקודה הנתונה $(3, -5)$.

ד. באופן דומה נוכל לבנות משפחה של ישרים העוברים דרך כל נקודה שנבחר מראש במישור. רצוי להתנסות במספר דוגמאות כדי לקבל 'תחושה' של המשפחה.

ה. באופן כללי: משוואת ישר העובר דרך הנקודה (x_1, y_1) היא צירוף לינארי של שני הישרים: $x=x_1, y=y_1$ או בצורתם: $x-x_1=0, y-y_1=0$.

נציג את הצירוף הלינארי (לפי אגפים) של שתי המשוואות: $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ פשוט מתאים יוביל אותנו לצורה המבוקשת: $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

ו. פעולות פשוטות על שני האגפים, פשוט והצבת: $m = -\frac{a}{b}$, יובילו אותנו למשוואת הישר

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{המקובלת בכל דפי הנוסחאות}$$

העבודה בפעילות זו מכוונת את התלמידים להבנת הנוסחה השימושית, ולהתוודעות למשמעותה כמגדירה את אלומת הישרים העוברים דרך נקודה מסוימת, (x_1, y_1) .

מכיוון שבמהלך הפישוט הצבנו את הביטוי $-\frac{a}{b}$, הנחנו כמובן ש $b \neq 0$. בכך השמטנו מן

האלומה את הישר שבו $b=0$ (הישר המקביל לציר ה- y).

המשוואה הדו פרמטרית מגדירה את כל הישרים העוברים דרך הנקודה, בעוד המשוואה החד פרמטרית מגדירה את כל הישרים העוברים דרך נקודה זו שהם גרף של פונקציה קווית, כלומר: כל הישרים העוברים דרך הנקודה פרט לישר המקביל לציר ה- y .

פעילות 3.2 – אלומה של ישרים

א. הגדירו ב-Derive שני ישרים ושרטטו אותם: $L1:=x+3y+2=0$ $L2:=x-2y-4=0$
 בדקו בשרטוט כי הישרים $L3$, $L4$ המוגדרים על-ידי צרוף לינארי של $L1$, $L2$ עוברים דרך נקודת החיתוך של $L1$, $L2$.

$$L3:=L1+L2$$

לפישוט הביטוי הקישו **=** (Simplify) או לפתיחת סוגריים: (Ctrl+E) Simplify > Expand
 שימו לב, לא ניתן ב-Derive להשתמש בכתיבת L_1 לסימון. לביטוי L_{sub1} יש משמעות מתמטית כפי שראינו ביחידות הקודמות.

$$L4:=8\cdot L1-12.5\cdot L2$$

ב. כמו בפעילות 3.1 הראו כי הגרף של $L:=s\cdot L1+t\cdot L2$ (כאשר לפחות אחד מבין s ו- t שונה מאפס) הוא ישר העובר דרך נקודת החיתוך של $L1$ עם $L2$, כלומר

$$s(x+3y+2)+t(x-2y-4)=0$$

ג. הראו כי כל ישר העובר דרך נקודת החיתוך של $L1$ עם $L2$ ניתן לייצוג על-ידי משוואה מהצורה $s\cdot L1+t\cdot L2$.

משפחה של ישרים אשר לכלם יש נקודה משותפת נקראת **אלומה של ישרים**.

ניתן לייצג אלומה של ישרים בעזרת משוואה חד-פרמטרית. המשוואה המתארת את המשפחה שיצרנו בעזרת הישרים $L1$, $L2$ היא: $s(x+3y+2)+t(x-2y-4)=0$, בהנחה כי $s \neq 0$ נחלק את המשוואה ב- s ונסמן $r=t/s$. המשוואה המתקבלת היא: $x+3y+2+r(x-2y-4)=0$
 העבירו את השרטוט מהחלון הגרפי לחלון האלגברי: מתפריט File (בחלון הגרפי) בחרו Embed.
 נקו את החלון הגרפי (Delete).

ד. שרטטו שוב את שני הישרים הנתונים והוסיפו לשרטוט את אלומת הישרים המתקבלים בעזרת ההוראה:

$$\text{VECTOR}(x+3\cdot y+2+r\cdot(x-2\cdot y-4)=0, r, -5, 5, 0.5)$$

הסבר: (גודל הצעד, ערך אחרון, ערך ראשון, משתנה, משוואת האלומה) VECTOR

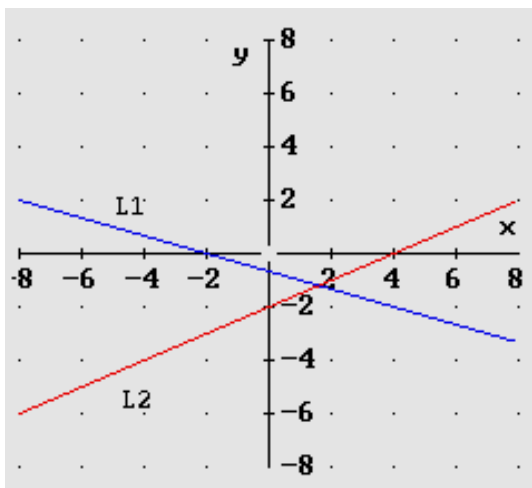
לשרטוט: בתפריט Options בחלון הגרפי הפעילו

Simplify Before Plotting,

בטלו את החלפת הצבע האוטומטי

Change Plot Color בתפריט Display,

בחרו בצבע שרטוט אפור.



ה. האם ניתן לכסות את שני הישרים הנתונים על-ידי המשפחה

$$x + 3y + 2 + r(x - 2y - 4) = 0$$

הוסיפו לשרטוט ישרים על-ידי הקטנת גודל הצעד בהוראה vector.

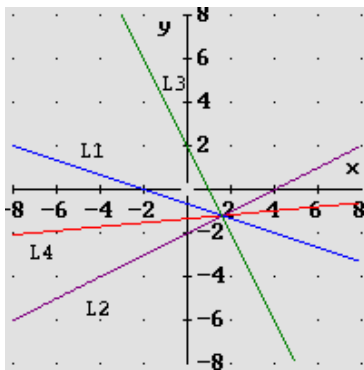
שימו לב, כל שרטוט מחדש "מכסה" את הקווים ששרטטו קודם.

ו. נסו למצוא ערך של r כך שהישר המתאים יהיה חוצה הזווית שבין שני הישרים.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name3.2.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 3.2

ראו גם קובץ: [solution3.2.dfw](#)



א. נשרטט את ארבעת הישרים הנתונים:

כולם עוברים דרך נקודה משותפת.

רצוי להגדיר את הישרים למחשב,

לדוגמה:

$$L1 := x + 3y + 2 = 0 \quad L2 := x - 2y - 4 = 0$$

כך לא נצטרך להקליד מחדש את משוואות הישרים,

אלא נוכל לפעול עמם לפי שמם, $L2$, $L1$,

ב. נחשב את שיעורי נקודת החיתוך של שני הישרים $L1$ ו- $L2$, על ידי פתרון מערכת המשוואות

המתאימה. שימו לב, אם הגדרנו מראש את הישרים, אין צורך להקליד מחדש את משוואותיהם.

$$L1 \wedge L2$$

$$\text{SOLVE}(L1 \wedge L2, [x, y])$$

$$x = 1.6 \wedge y = -1.2$$

נגדיר L , הצירוף הלינארי של $L1$ ושל $L2$: $L := s \cdot L1 + t \cdot L2$ (זהו הצירוף הלינארי הכללי

של $L1$ ו- $L2$, הצבה של ערכים ספציפיים עבור הפרמטרים s, t תתן צירוף לינארי פרטי). נפשט

את המשוואה המתקבלת, ונציב בה את שיעורי נקודת החיתוך שמצאנו (1.6, -1.2)

$$x \cdot (s + t) + y \cdot (3 \cdot s - 2 \cdot t) + 2 \cdot s - 4 \cdot t = 0$$

$$1.6 \cdot (s + t) + (-1.2) \cdot (3 \cdot s - 2 \cdot t) + 2 \cdot s - 4 \cdot t = 0$$

מתקבל פסוק אמת. כלומר: הגרף המוגדר על-ידי כל צירוף לינארי פרטי, עובר דרך נקודת

החיתוך של $L1$ ו- $L2$.

נותר להראות שגרף המוגדר על-ידי כל צירוף לינארי פרטי הוא קו ישר. נזכור שמשוואה מהצורה

$$ax + by + c = 0 \quad \text{מייצגת ישר אם, ורק אם, } (a, b) \neq (0, 0). \text{ כאן נראה כי המקדמים של } x \text{ ו- } y,$$

דהיינו $s + t$ ו- $3s - 2t$ מתאפסים אם, ורק אם, רק מקדמי הצירוף הלינארי s, t מתאפסים:

$$s + t = 0 \wedge 3 \cdot s - 2 \cdot t = 0$$

$$\text{SOLVE}(s + t = 0 \wedge 3 \cdot s - 2 \cdot t = 0, [s, t])$$

$$s = 0 \wedge t = 0$$

ג. בפעילות 3.1 ראינו כי כל ישר העובר דרך הנקודה ששיעוריה הם $(-1.2, 1.6)$ ניתן לייצוג במשוואה הדו-פרמטרית: $ax + by - (1.6x - 1.2y) = 0$. עלינו להראות כי ניתן לייצג משוואה זו על ידי הצירוף הלינארי הכללי L:

$$x \cdot (s + t) + y \cdot (3 \cdot s - 2 \cdot t) + 2 \cdot s - 4 \cdot t = 0$$

נשווה את המקדמים של שתי המשוואות שבידינו, ונפתור את המערכת המתקבלת:

$$[s + t = a, 3 \cdot s - 2 \cdot t = b, 2 \cdot s - 4 \cdot t = -1.6 \cdot a + 1.2 \cdot b]$$

$$\text{SOLVE}([s + t = a, 3 \cdot s - 2 \cdot t = b, 2 \cdot s - 4 \cdot t = -1.6 \cdot a + 1.2 \cdot b], [s, t])$$

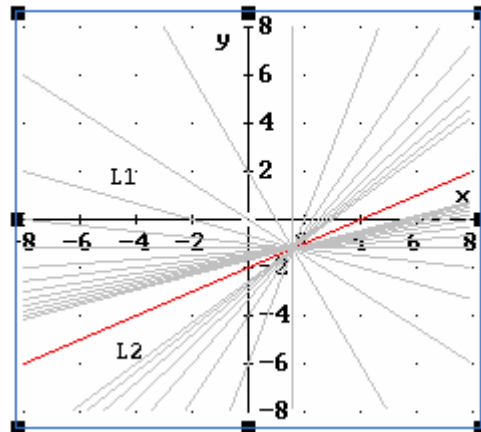
$$[s = 0.2 \cdot (2 \cdot a + b) \wedge t = 0.2 \cdot (3 \cdot a - b)]$$

הפתרון מוכיח כי ניתן לעבור מייצוג אחד לאחר.

ד. נשרטט בחלון אלגברי חדש את שני הישרים הנתונים, $L1$, $L2$.

בעזרת הפקודה Vector נשרטט אלומת ישרים שכולם צירופים לינאריים של שני הישרים המשוורטטים. כאשר התוכנה משרטטת מחדש היא "מכסה" את השרטוט הקודמים. לכן, כדי שנוכל להבחין בין שרטוט חדש לשרטוט קיימים, נבטל החלפת צבע אוטומטי לפני שרטוט האלומה: Options>Change Plot Color. עתה ישורטטו כל הקווים בצבע אחיד. מומלץ לבחור בצבע שרטוט אפור.

$$\text{VECTOR}(x + 3 \cdot y + 2 + r \cdot (x - 2 \cdot y - 4) = 0, r, -5, 5, 0.5)$$



ה. רואים בשרטוט כי $L1$ "כוסה" על ידי האלומה (בחרנו ערכים מתאימים בהוראת ה-vector), כלומר: $L1$ שייך למשפחה המתוארת על ידי משוואה חד-פרמטרית. אולם, $L2$ אינו שייך למשפחה זו. הסיבה לכך: כאשר בוחרים $r = 0$ מתקבלת בדיוק משוואת $L1$, אולם במשוואה חד-פרמטרית זו אין אפשרות לבחור ב-0 כמקדם של $L1$, וכך נשמט $L2$ מהמשפחה!

ו. כל נקודה על חוצה הזווית נמצאת במרחקים שווים משוקי הזווית. כדי שהישר יהיה חוצה הזווית עליו לקיים את התנאי: כל נקודה על הישר נמצאת במרחקים שווים ל- $L1$ ול- $L2$.

לפי נוסחת מרחק נקודה לישר, נקבל את השוויון: $\frac{|x+3y+2|}{\sqrt{10}} = \frac{|x-2y-4|}{\sqrt{5}}$

$$\frac{|x+3y+2|}{|x-2y-4|} = \sqrt{2}$$

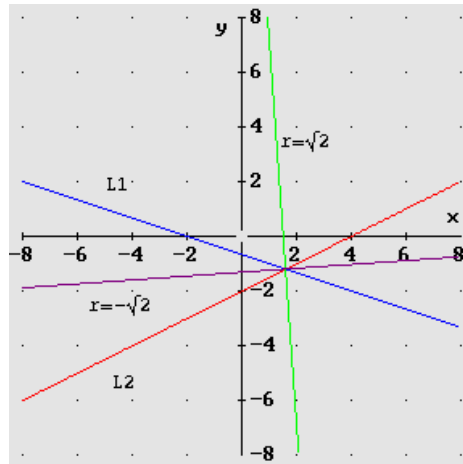
נפשט את המשוואה ונקבל: $\frac{|x+3y+2|}{|x-2y-4|} = \sqrt{2}$

הביטוי באגף שמאל שווה בדיוק ל $|r|$.

$$r = \pm\sqrt{2}$$

נציב את שני ערכי r אלו, ונבדוק שאכן הישרים המתקבלים הם חוצי הזווית שבין שני

הישרים:



בפעילות 3.4 נשוב לטפל במשוואות של חוצי זוויות.

פעילות 3.3 – ייצוג נוסף לאלומה

נתונים שני ישרים הנחתכים בנקודה P $[L1:= 7x - 15y + 20 = 0, L2:= x + 10y - 15 = 0]$
 המשוואה $s(7x - 15y + 20) + t(x + 10y - 15) = 0$ מייצגת אלומה של ישרים העוברים דרך P.
 נבנה ייצוג חד-פרמטרי כך שגם L1 וגם L2 יתקבלו.

$$\frac{s}{s+t}L1 + \frac{t}{s+t}L2 \quad \text{בהנחה כי } s+t \neq 0 \text{ נחלק את המשוואה ב- } s+t$$

$$\text{נסמן: } \frac{s}{s+t} = k \quad \text{ואז} \quad \frac{t}{s+t} = 1-k$$

$$k(7x - 15y + 20) + (1-k)(x + 10y - 15) = 0 \quad \text{המשוואה החד-פרמטרית היא אם כך:}$$

א. מהם ערכי k שעבורם מתקבלים מהמשוואה הישרים L1, L2 ?

ב. הוכיחו כי עבור כל ערך של k המשוואה מייצגת ישר העובר גם הוא דרך הנקודה P.

ג. מצאו את משוואות הישרים העוברים דרך נקודת החיתוך של הישרים הנתונים ומקבילים לצירי

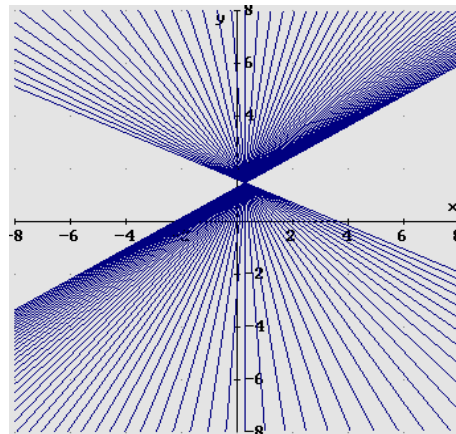
$$\text{המערכת: } x = \underline{\hspace{2cm}} \quad y = \underline{\hspace{2cm}}$$

מהו הערך של k שעבורו מתקבל מהמשוואה החד-פרמטרית הישר שמשוואתו $x = \underline{\hspace{2cm}}$,
 או משוואה שקולה לה?

נסו למצוא ערך של k שעבורו מתקבל מהמשוואה הישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים
 הנתונים ומקביל לציר x.

ד. השלימו את ההוראה הבאה כדי שיתקבל שרטוט כמו זה שלפניכם:

$$\text{VECTOR}(k \cdot (7 \cdot x - 15 \cdot y + 20) + (1 - k) \cdot (x + 10 \cdot y - 15) = 0, k, ?, ?, ?)$$



ה. בדקו בשרטוט כי הישר המיוצג על-ידי $6x - 25y + 35 = 0$ עובר דרך נקודת החיתוך של הישרים הנתונים.

האם קיים ערך של k שעבורו תתקבל משוואת ישר זה, או משוואה שקולה לה, ממשוואת האלומה? מה משמעות תשובתכם ומה ההסבר?

$$\text{הדרכה: התבוננו בהצגה החד-פרמטרית } s(7x - 15y + 20) + t(x + 10y - 15) = 0$$

ו. מצאו את ערכי k שעבורם מתקבל ישר העובר דרך הנקודה P ומרחקה של ראשית הצירים אליו שווה ל-1. הדגימו תשובתכם בשרטוט.

ז. תארו גרפית את הקשר בין k לבין מרחקה של הראשית אל הישר, d .

מהו ערכו של k שעבורו מתקבל ישר העובר דרך ראשית הצירים?

מהו ערכו של k שעבורו מתקבל הישר בעל המרחק המכסימלי מראשית הצירים?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name3.3.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 3.3

ראו גם קובץ: [solution3.3.dfw](#)

ה. עבור $k=1$ יתקבל מהמשוואה החד-פרמטרית הישר L_1 .

עבור $k=0$ יתקבל מהמשוואה החד-פרמטרית הישר L_2 .

ו. אם נפעיל על המשוואה החד-פרמטרית, בעזרת התוכנה, פירוק לגורמים: Simplify>Factor.

נקבל כינוס איברים לפי x ו- y , ונראה בבירור מהם המקדמים של x ושל y :

$$x \cdot (6 \cdot k + 1) + y \cdot (10 - 25 \cdot k) + 35 \cdot k - 15 = 0$$

כדי שהמשוואה תייצג קו ישר, לפחות אחד מן המקדמים של x ושל y צריך להיות שונה מאפס.

נבדוק מתי שניהם מתאפסים על ידי פתרון מערכת המשוואות:

$$6 \cdot k + 1 = 0 \wedge 10 - 25 \cdot k = 0$$

$$\text{SOLVE}(6 \cdot k + 1 = 0 \wedge 10 - 25 \cdot k = 0, k)$$

false

המחשב מודיע כי המערכת שקרית. אין ערך של k שעבורו מתאפסים גם המקדם של x וגם

המקדם של y , כלומר: לכל ערך של k המשוואה מייצגת ישר.

ז. נחשב את שיעורי נקודת החיתוך של L_1 ו- L_2 על ידי פתרון מערכת המשוואות המייצגות אותם.

תזכורת: אם הגדרנו מראש את הישרים, אין צורך להקליד מחדש את משוואותיהם, ואפשר לבצע

את החישובים ישירות.

שיעורי נקודת החיתוך: $(5/17, 25/17)$. משוואות הישרים המקבילים לצירים ועוברים דרך

$$\text{נקודה זו: } x = 5/17, \quad y = 25/17$$

למציאת ערך של k שעבורו יתקבל הישר $x = 5/17$ נאפס את המקדם של y במשוואה

החד פרמטרית הנתונה, לאחר שהפעלנו עליה פירוק לגורמים:

$$x \cdot (6 \cdot k + 1) + y \cdot (10 - 25 \cdot k) + 35 \cdot k - 15 = 0$$

עלינו, אם כן, לפתור את המשוואה: $10 - 25k = 0$, ונקבל: $k = 2/5$.

באופן אנלוגי, למציאת ערכו של k שעבורו יתקבל הישר $y = 25/17x$ נאפס את המקדם של x .
 נפתור: $6k + 1 = 0$, ונקבל: $k = -1/6$.

נציב את ערכי k שקיבלנו, ונבדוק את התשובה על ידי שרטוט הישרים המתקבלים.

ד. השרטוט דמוי הפרפר מתקבל אם נגביל את ערכי k , כמו בהוראה הבאה:

$$\text{VECTOR}(k \cdot (7 \cdot x - 15 \cdot y + 20) + (1 - k) \cdot (x + 10 \cdot y - 15) = 0, k, 0.2, 0.8, 0.01)$$

ה. נשרטט את שני הישרים $L1$ ו $L2$ וכן את הישר $6x - 25y + 35 = 0$, ונראה כי שלושתם

נפגשים בנקודה אחת. (נוכל לאשר זאת גם באופן אלגברי, בלי השרטוט, אם נציב במשוואת

הישר האחרון את שיעורי נקודת החיתוך שחישבנו בסעיף ג, ונקבל פסוק אמת.)

נחפש k שעבורו יתקבל הישר $6x - 25y + 35 = 0$ ממשוואת האלומה:

$$x \cdot (6 \cdot k + 1) + y \cdot (10 - 25 \cdot k) + 35 \cdot k - 15 = 0$$

לשם כך נשווה את המקדמים של שתי המשוואות. נקבל מערכת של שלוש משוואות בשלושה נעלמים.

$$6 \cdot k + 1 = 6 \wedge 10 - 25 \cdot k = -25 \wedge 35 \cdot k - 15 = 35$$

$$\text{SOLVE}(6 \cdot k + 1 = 6 \wedge 10 - 25 \cdot k = -25 \wedge 35 \cdot k - 15 = 35, k)$$

false

אין פתרון למערכת, אין ערך של k שעבורו יתקבל ממשוואת האלומה הישר, השייך למשפחה:

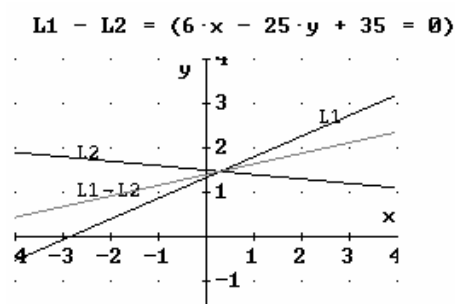
$$6x - 25y + 35 = 0$$

הצירוף הלינארי היוצר את הישר אינו מוכל במשוואת האלומה. כדי להגיע למשוואה חד-פרמטרית

בחרנו: $\frac{s}{s+t} = k$ כלומר, הנחנו כי: $s+t \neq 0$; בכך השמטנו מן המשפחה את הצירוף הלינארי

שבו מתקיים $s+t=0$ או במילים אחרות: $s = -t$.

קל לבדוק כי במקרה זה אכן מתקבל הישר הנתון. נראה זאת בשרטוט:



(ביחידה הבאה, כאשר נעסוק באלומות של מעגלים, נידרש שוב לצירוף לינארי מיוחד זה, ונראה

כי צירוף כזה של שני מעגלים לא ייתן מעגל כי אם ישר.)

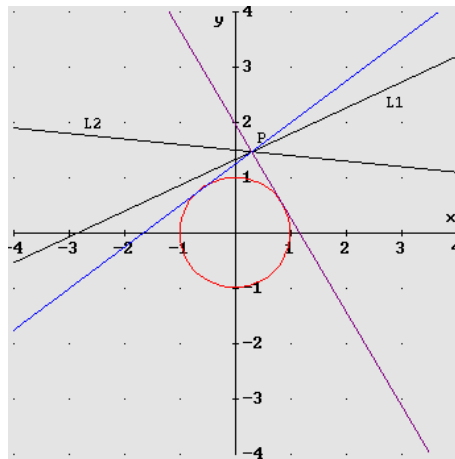
ו. נשתמש במשוואה החד-פרמטרית של האלומה, בצורתה הכללית (אחרי הפירוק לגורמים):

$$x \cdot (6 \cdot k + 1) + y \cdot (10 - 25 \cdot k) + 35 \cdot k - 15 = 0$$

נבטא בעזרת k את מרחק הראשית אל ישר מהמשפחה מן הראשית לפי הנוסחה המקובלת (שהופיעה ביחידה 2), ונשווה את המרחק ל-1: $1 = \frac{|35k-15|}{\sqrt{(6k+1)^2 + (10-25k)^2}}$; פתרון משוואה

$$\text{זו: } k = 2/3 \text{ או } k = 31/94$$

נציב את הערכים שקיבלנו עבור k במשוואת האלומה ונקבל את שני הישרים העוברים דרך הנקודה P ומרחק ראשית הצירים אליהם שווה ל-1: $5x - 20y/3 + 25/3 = 0$; $3x - 4y + 5 = 0$ נדגים זאת בשרטוט:



הוספנו לשרטוט את מעגל היחידה, שהוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא 1.

דרך נוספת לפתרון שאלה זו:

מכיוון שהמשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה, המרחק מראשית הצירים אל כל משיק למעגל היחידה הוא 1. לכן, עלינו למצוא את המשיקים למעגל זה העוברים דרך הנקודה P . לתנאי ההשקה של ישר למעגל או לעקומה אחרת במישור, נידרש בפעילויות הבאות. פעילות זו מהווה הכנה לקראתן. עתה נוכל להסתפק בידע שלנו, כי המשיק הוא ישר שיש לו נקודה אחת בלבד משותפת עם הישר.

משוואת ישר העובר דרך נקודה P : $y - \frac{25}{17} = m \cdot \left(x - \frac{5}{17}\right)$. נבקש מהתוכנה לפתור את מערכת

המשוואות המייצגות את הישר ואת המעגל. נמצא כי התנאי לכך שתהיה נקודה אחת בלבד משותפת לישר ולמעגל (כלומר, שהישר ישיק למעגל) הוא שהביטוי בתוך סימן השורש יתאפס ($\Delta = 0$). נקבל:

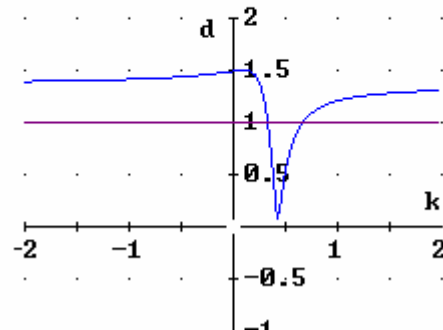
$$132 \cdot m^2 + 125 \cdot m - 168 = 0$$

$$\text{SOLVE}(132 \cdot m^2 + 125 \cdot m - 168 = 0, m)$$

$$m = -\frac{56}{33} \vee m = \frac{3}{4}$$

ז. נגדיר פונקציה המתאימה לערכו של k המתאים לישר, את מרחק הישר מהראשית, d :

$$d(k) := \frac{|35 \cdot k - 15|}{\sqrt{(6 \cdot k + 1)^2 + (10 - 25 \cdot k)^2}}$$



בעזרת "הילוך על הגרף" ניתן למצוא את שיעוריה (המקורבים) של נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- x , כלומר את ערכו של k שעבורו מרחק הישר מהראשית, d , הוא 0, וזהו הישר העובר דרך הראשית, כמובן.

אפשר לחשב את ערכו של k בדרך אלגברית, על ידי ההצבה: $d=0$. מקבלים: $k = 3/7$

למציאת ערך של k שעבורו המרחק d הוא מכסימלי, ניעזר בנגזרת למציאת נקודת המכסימום של הפונקציה שהגדרנו. נוכל לגזור ידנית או בעזרת התוכנה. נקבל: $k = 1/11$

פעילות 3.4 – חוצי זוויות

א. כיצד, לדעתכם, ייראה הגרף של המשוואה:

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x - 10y - 12 = 0$$

בדקו על-ידי שרטוט והסבירו את הקשר בין המשוואה לבין הגרף.

ב. הראו כי הישרים ששרטטו ניצבים זה לזה ומצאו את נקודת החיתוך שלהם.

(סמנו אותם L1 L2)

ג. הוסיפו לשרטוט את חוצי הזוויות שנוצרו על-ידי הישרים. (סמנו אותם L3 L4)

אפשר להיעזר בנוסחת המרחק מנקודה אל ישר כדי למצוא את משוואות חוצי הזוויות (ראו פעילות 2.3)

ד. הוסיפו לשרטוט את חוצי כל הזוויות בשרטוט שקיבלתם בסעיף ג'.

ה. ארגנו את כל משוואות הישרים ברשימה: [L1, L2, ..].

שרטטו את כולם בצבע אחד – בתפריט Options בטלו את המצב Change Plot Color.

הזיזו את האלומה על-ידי הצבת $x - 2$ במקום x , ו- $y + 3$ במקום y .

הסבירו מה רואים על המסך.

שרטטו את האלומה המוחזת בצבע אחד – שונה מהקודם.

לביצוע ההצבה האירו את הרשימה והפעילו את S_{UG} הפקודה

ו. הזיזו את האלומה כך שהנקודה המשותפת תימצא בראשית הצירים.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name3.4.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 3.4

ראו גם קובץ: [solution3.4.dfw](#)

א. המשוואה: $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x - 10y - 12 = 0$ מייצגת איחוד של שני ישרים.

נראה זאת בשתי דרכים.

דרך ראשונה: נפעיל פירוק לגורמים. מתקבלת מכפלה השווה לאפס, מכפלה שווה ל-0 אם, ורק אם, לפחות אחד הגורמים שווה ל-0. איפוס כל אחד מהכופלים נותן משוואת ישר.

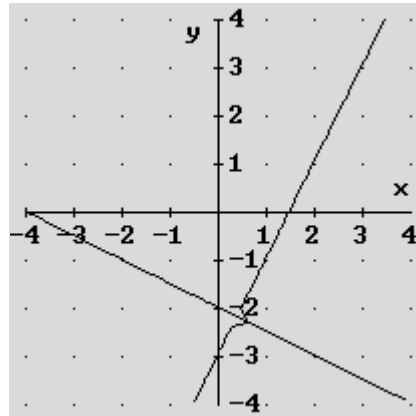
$$(x + 2y + 4) \cdot (2x - y - 3) = 0$$

$$x + 2y + 4 = 0 \vee 2x - y - 3 = 0$$

דרך שנייה: נבטא את y בנושא הנוסחה הנתונה. נקבל

$$y = \frac{3 \cdot x - 10}{4} - \frac{|5 \cdot x - 2|}{4} \vee y = \frac{|5 \cdot x - 2|}{4} + \frac{3 \cdot x - 10}{4}$$

נשרטט ישירות את הגרף המוגדר על-ידי המשוואה הנתונה, ונשרטט את הגרפים של משוואות הישרים שהתקבלו בשתי דרכי הפתרון, ונקבל כמובן אותו שרטוט:

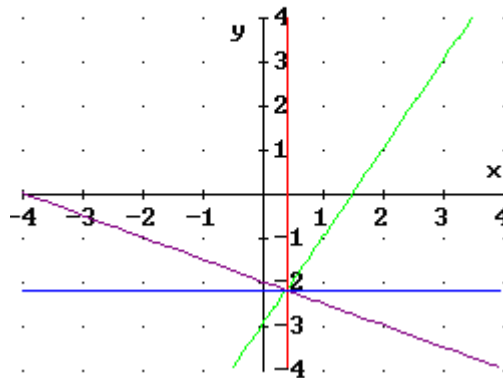


ב. משוואות הישרים בהצגה מפורשת:

$$y = -\frac{x+4}{2} \vee y = 2x-3$$

מכפלת השיפועים היא -1, ומכאן הישרים ניצבים זה לזה. נמצא את שיעורי נקודת המפגש של שני הישרים על-ידי פתרון מערכת המשוואות המתאימה, ונקבל:

$$x = \frac{2}{5} \wedge y = -\frac{11}{5}$$

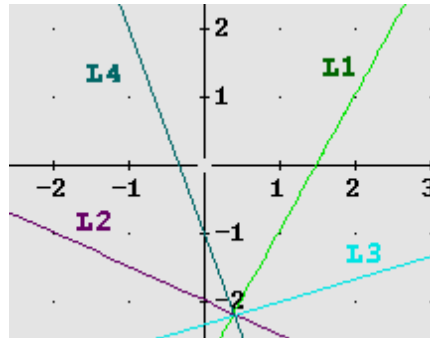


ג. למציאת משוואות חוצי הזוויות שבין הישרים ניעזר בתכונת חוצה הזווית, כמקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים אל שוקי הזווית.

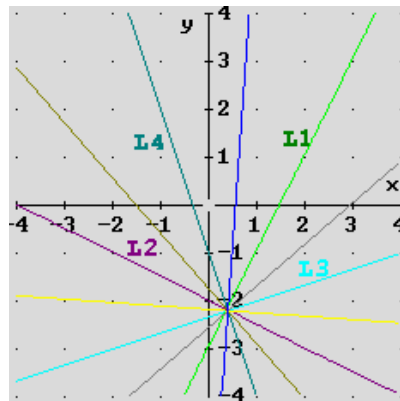
$$\frac{x+2y+4}{\sqrt{1+4}} = \pm \frac{2x-y-3}{\sqrt{4+1}}$$

$$\text{SOLVE} \left(\frac{x+2y+4}{\sqrt{1+4}} = \pm \frac{2x-y-3}{\sqrt{4+1}}, y \right)$$

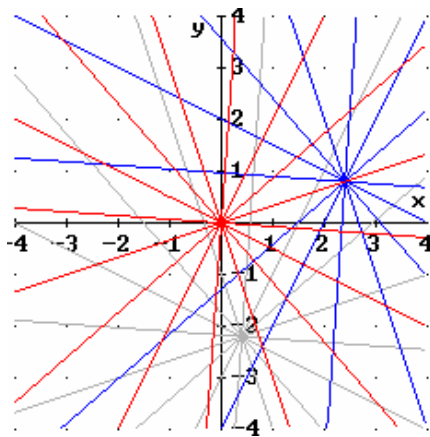
$$y = \frac{x-7}{3} \vee y = -3x-1$$



ד. נמשיך באותה דרך ונשרטט את חוצי הזוויות שבין כל הישרים המשורטטים:



ה. נרשום את כל הישרים: $[L1, L2, \dots]$. נפעיל "פשט" על הרשימה ונקבל את משוואות הישרים. נפעיל "הצב" (SUB), ונבחר על פי ההוראה בתרגיל: $x = x - 2, y = y + 3$



הפקודה Plot על כל הרשימה החדשה תשרטט את "כל" האלומה המוזזת בבת אחת. (בפועל אף פעם לא משרטטים את כל האלומה, אלא רק מספר נציגים שלה). זוהי אלומת ישרים העוברים דרך נקודה משותפת, הנמצאת שתי יחידות ימינה ושלושה יחידות כלפי מטה מנקודה P. מומלץ לבחור צבע אחד לכל הרשימה, כך שנוכל להבחין בין האלומה המוזזת למקורית. עתה נוכל לבצע הזזות נוספות כרצוננו.

ו. נזיז את האלומה כך שהנקודה המשותפת לכל הישרים תהיה ראשית הצירים. שיעורי הנקודה P,

$$x = \frac{2}{5} \wedge y = -\frac{11}{5} \quad \text{כפי שחישבנו בסעיף ב, הם:}$$

$$\text{אם כן, ההצבה הדרושה היא: } x = x + \frac{2}{5}, y = y - \frac{11}{5}$$